

## KINEMATIKA I DINAMIKA – dio KINEMATIKA

1) Kretanje tijela je opisano sistemom jednačina:

$$x = R \cos^2\left(\frac{kt}{2}\right), y = \frac{R}{2} \sin(kt)$$

gdje su  $R$  i  $k$  konstante, a  $t$  vrijeme. Odrediti: a) jednačinu putanje tijela, b) brzinu i ubrzanje tačke u trenutku  $t_1 = \pi / k$ .

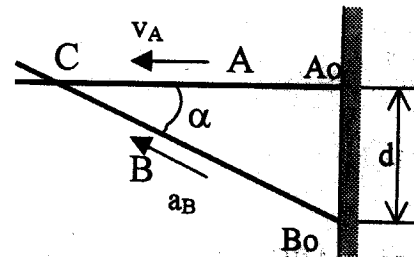
2) Tačka se kreće u ravni  $xOy$  po zakrivljenoj putanji jednačine  $y=2px^2$ , gdje je  $p=\text{const}$ . Projekcija brzine tačke na  $x$  osu je konstantna i iznosi  $v_x=5$  m/s. Odrediti brzinu i ubrzanje tačke kada se nađe u položaju sa koordinatom  $x_1=30$  m. Tačka je krenula iz položaja  $O(0,0)$ .

3) Tačka koja se kreće po krugu poluprečnika  $R=3$  m prelazi put određen izrazom

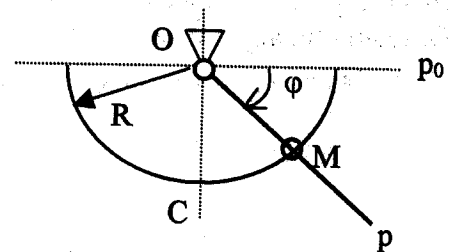
$$s = 3t^2 + 2t \quad (s - \text{m}, t - \text{sec})$$

Izračunati: a) veličinu totalnog ubrzanja tačke u momentu kada joj je brzina  $v=11$  m/sec, b) ugao koji čini vektor totalnog ubrzanja sa vektorom brzine u tom trenutku.

4) Dvije tačke  $A$  i  $B$  se kreću po pravim linijama koje međusobno zaklapaju ugao  $\alpha=30^\circ$ , a rastojanje  $d=100$  m. Tačka  $A$  se kreće jednoliko brzinom  $v_A=8$  m/s, dok se tačka  $B$  kreće jednakoubrzano bez početne brzine. Početni položaji tačaka su  $A_0$  i  $B_0$ . Izračunati ubrzanje tačke  $B$  da bi ona stigla u tačku  $C$  u istom momentu kada i tačka  $A$  ako su krenule istovremeno. Rj.:  $a_B=0,85$  m/s<sup>2</sup>



5) Prava  $p$  se obrće oko zgloba  $O$  i pomjera prsten  $M$  po kružnici poluprečnika  $R$ . Početni položaj prave je  $p_0$ , a početna brzina je jednaka nuli. Ugao koji prava pri obrtanju pravi sa svojim početnim položajem mijenja se po zakonu  $\varphi = \pi t^2 / 18$ . Odredi brzinu i ubrzanje prstena  $M$  kada se nađe u tački  $C$  na kružnici.



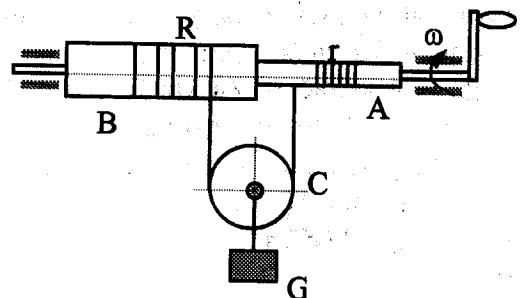
Rj:  $v_C = R\pi/3$

$a_C^2 = (R\pi/9)^2 + (R\pi^2/9)^2$

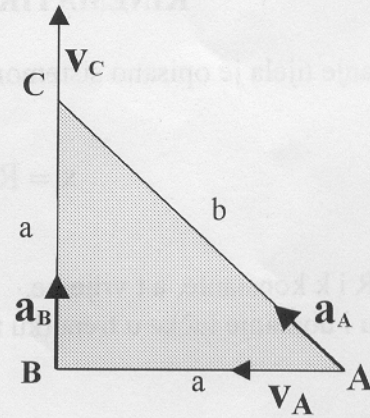
6) Ručna dizalica se sastoji od dva bubnja  $A$  i  $B$  poluprečnika  $r$  i  $R$ . Sa dijela  $A$  se odmotava, a na dio  $B$  se namotava uže kojim se podiže kotur  $C$  o čiji je centar vezan teret  $G$ . Odrediti ugaonu brzinu kotura  $C$  i brzinu podizanja tereta  $G$  ako se čekrk obrće pomoću ručice ugaonom brzinom  $\omega$ .

Podaci:  $\omega=4$  s<sup>-1</sup>,  $R=3r=90$  cm,  $R_C=60$  cm.

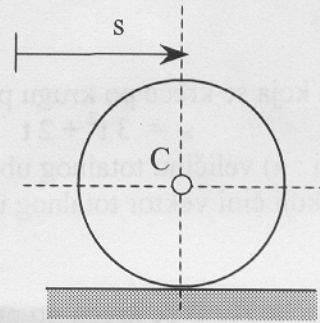
Rj.:  $\omega_C=(R+r)\omega/2R_1$   $v_G=120$  cm/s



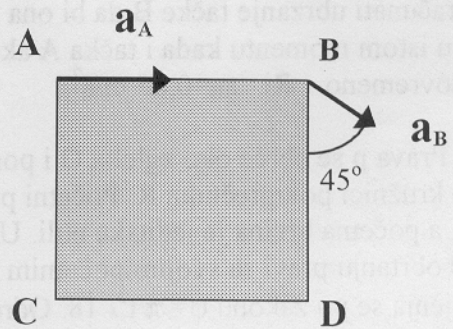
7) Trougao stranica  $a = 10 \text{ cm}$  i  $b = 10\sqrt{2} \text{ cm}$  kreće se u ravni slike. U datom trenutku poznati su pravci i smjerovi brzina vrhova A i C i vektori ubrzanja vrhova A i B. Odrediti brzinu i ubrzanje vrha C. Dato je:  $a_A = 10 \text{ cm/s}^2$ ;  $a_B = 20 \text{ cm/s}^2$ .



8) Točak poluprečnika  $R=20 \text{ cm}$  kotrlja se po podlozi tako da mu se centar C kreće po zakonu  $s = 2t^2 + 5$ ;  $s(\text{cm})$ ,  $t(\text{s})$ . U trenutku  $t_1=2 \text{ s}$  od početka kretanja odrediti brzinu i ubrzanje najviše tačke točka.

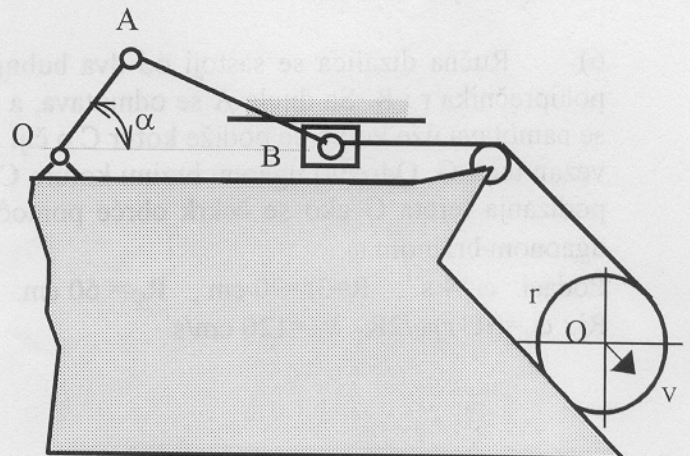


9) Kvadrat ABCD stranice  $l = 10 \text{ cm}$  kreće se u ravni slike. U datom trenutku poznati su intenziteti, pravci i smjerovi ubrzanja vrhova A i B. Odrediti ubrzanja vrhova C i D. Dato je:  $a_A = 10 \text{ cm/s}^2$ ;  $a_B = 5\sqrt{2} \text{ cm/s}^2$ .



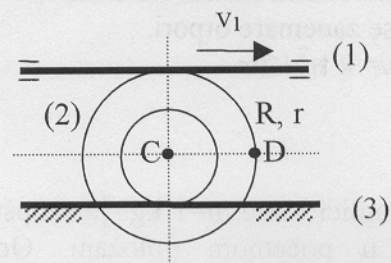
10) Kugla poluprečnika  $r$  kotrlja se niz strmu ravan tako da joj centar O ima u datom momentu brzinu  $v=10 \text{ cm/s}^2$ . Oko kugle se namotava uža koje vuče klizač B. Za klizač je zgلوبno vezana poluga OA. Odrediti ugaonu brzinu poluge OA u trenutku kada ona zaklapa ugao  $\alpha=45^\circ$  ako je  $OA=r=10 \text{ cm}$  i  $AB=2r$ .

Rj.:  $\omega_{OA} = 2,052 \text{ s}^{-1}$

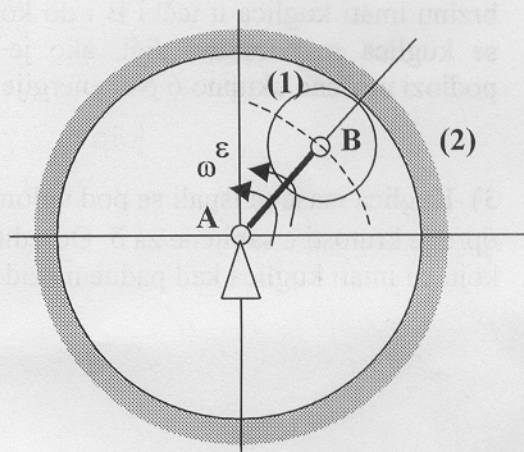


11) Zupčasta letva (1) kreće se horizontalno brzinom  $v_1=15 \text{ cm/s}$  i dovodi u kretanje kružnu ploču (2) koja se kotrlja po nepokretnoj zupčastoj letvi (3). Poluprečnici ozubljenja kružne ploče su  $R=15 \text{ cm}$  i  $r=10 \text{ cm}$ . Odrediti brzinu središta C kružne ploče, brzinu tačke D ploče u datom položaju i ugaonu brzinu obrtanja kružne ploče.

Rj.:  $v_C=6 \text{ m/s}$     $v_D=10,8 \text{ cm/s}$     $\omega=0,6 \text{ s}^{-1}$



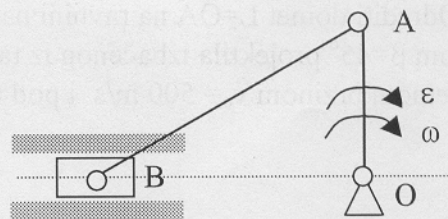
12) Poluga AB dužine  $2r$  obrće se oko tačke A ugaonom brzinom  $\omega$  i ugaonim ubrzanjem  $\varepsilon$  u datim smjerovima. U tački B poluge zglibno je učvršćen disk (1), koji se kotrlja po nepokretnoj kružnoj podlozi (2) poluprečnika  $3r$ . Odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje diska (1) i brzinu tačke P koja je njegov pol brzina.



13) Poluga OA se obrće ugaonim ubrzanjem  $\varepsilon=0,5 \text{ s}^{-2}$  i u datom položaju ima ugaonu brzinu  $\omega=3 \text{ s}^{-1}$ . Odrediti u tom trenutku brzinu i ubrzanje klizača B koji se kreće duž horizontalne vođice. Date su dužine  $OA=a$  i  $AB=2a$ ;  $a=1 \text{ m}$ .

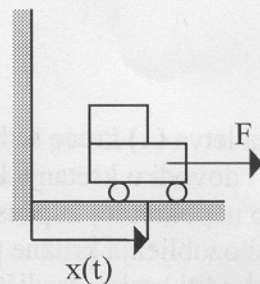
Rj.:  $v_B = a\omega$

$a_B = 0,5 a - 18a / \sqrt{3}$

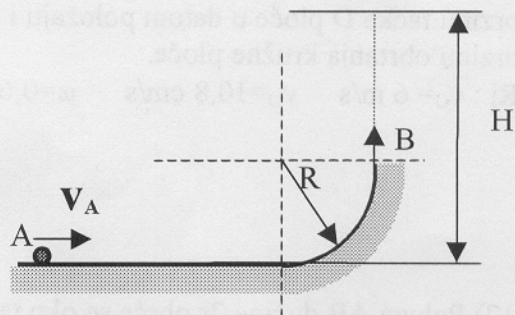


1) Na lokomotivu mase  $m$  djeluje vučna sila  $F = k t$ , gdje je  $k$  zadata konstanta. Odrediti zakon kretanja lokomotive  $x(t)$  i njenu brzinu nakon vremena  $t_1$  ako je u početku mirovala i ako se zanemare otpori.

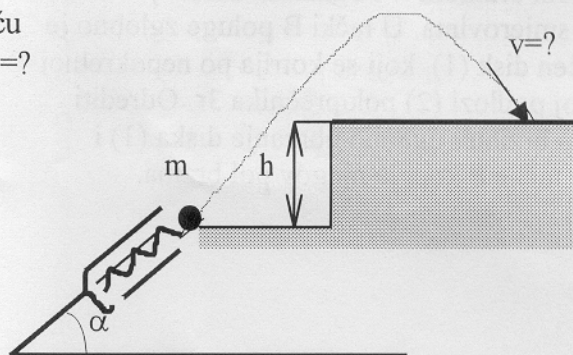
Rj.:  $v = k t_1^2 / 2m$



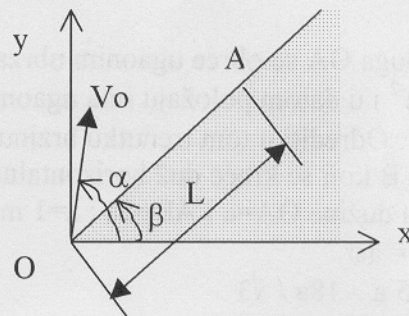
2) Kuglici mase  $m = 1$  kg je saopštena brzina  $v_A = 10$  m/s u početnom položaju. Ona se kreće po horizontalnoj hrapavoj podlozi i dolazi do kružno savijenog dijela radijusa  $R = 4$  m. U tački B kuglica napušta vezu i kreće se vertikalno uvis. Koliku će brzinu imati kuglica u tački B i do koje visine  $H$  će se kuglica maksimalno dići, ako je na trenje po podlozi utošeno ukupno 6 Nm energije.



3) Kuglica mase  $m$  ispaljiva se pod uglom  $\alpha$  pomoću opruge krutosti  $c$  sabijene za  $\delta$ . Odrediti brzinu  $v = ?$  koju će imati kuglica kad padne na zid visine  $h$ .



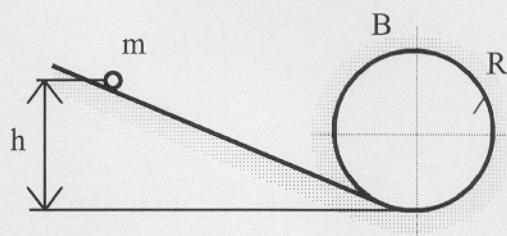
4) Odrediti domet  $L = OA$  na ravni nagnutoj pod uglom  $\beta = 45^\circ$  projektila izbačenog iz tačke  $O$  početnom brzinom  $v_0 = 500$  m/s i pod uglom  $\alpha = 60^\circ$ .



5) Kuglica mase  $m$  spušta se niz strmu ravan i ulazi u žljeb oblika mrtve petlje radijusa  $R$ .

Sa koje visine  $h$  treba pustiti kuglicu da se ona ne bi odvojila od žljeba kada dođe u najvišu tačku petlje B.

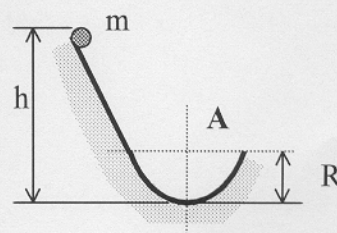
Rj.:  $h = 3 R$



6) Ako se kuglica mase  $m = 0.05$  kg pusti niz strmu ravan, odrediti da li će napustiti žljeb u tački A ako ukupan rad sile trenja duž cijelog puta kuglice iznosi  $A_{tr} = 1$  Nm, i ako hoće kolikom brzinom.

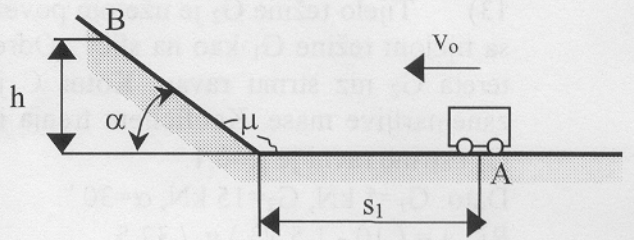
Dato je  $h = 9$  m,  $R = 4$  m.

Rj.:  $v^2 = 60$  m/s

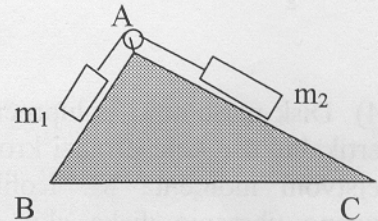


7) Tijelu mase  $m$  na kraju A horizontalne ravni saopšti se brzina  $v_0=20$  m/s ulijevo (  $s_1 = 100$  m,  $\alpha=30^\circ$  ). Odrediti na koju visinu  $h$  strme ravni (položaj B) će se popeti tijelo ako je koeficijent trenja između tijela i podloge  $\mu$ . Koliko dugo će trajati kretanje tijela od tačke A do B?

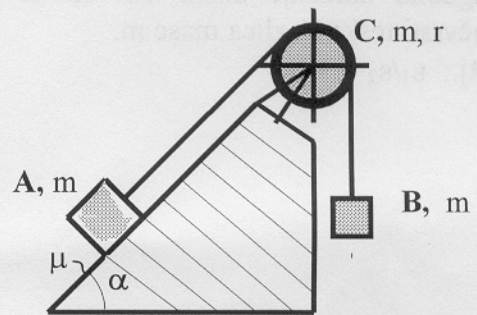
Rj.:  $T = 8,316$  s



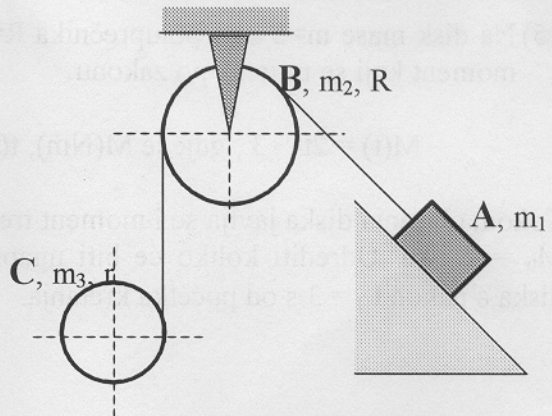
8) Dva tereta masa  $m_1=2$  kg i  $m_2=3$  kg vezana su međusobno užetom i nalaze se na strmim ravnama kako je pokazano na slici. Odrediti ubrzanje tereta i smjer kretanja. Uglovi:  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ .



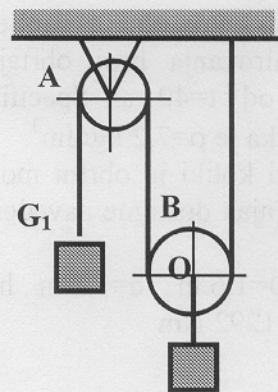
9) Dva tereta A i B istih masa  $m$  vezana su za krajeve užeta prebačenog preko diska C, mase  $m$  i poluprečnika  $r$ . Koeficijent trenja tereta na kosoj ravni je  $\mu$ , a nagib ravni je  $\alpha$ . Odrediti ubrzanje tereta B.



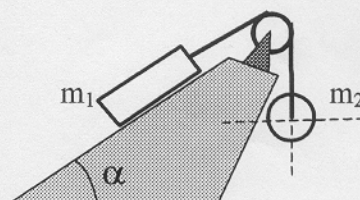
10) Sistem na slici sastoji se od tereta A, obrtnog diska B i pokretnog diska C koji su međusobno povezani neistegljivim užetom zanemarljive mase kako je pokazano na slici. Odrediti kinetičku energiju sistema (izraziti je preko brzine tereta A i centra diska C). Date su mase  $m_1, m_2$  i  $m_3$ , kao i polumjeri  $R$  i  $r$ .



11) Teret  $G_1=15$  N obješen je o uže koje je prebačeno preko obrtnog kotura A i pokretnog kotura B zanemarljivih masa. Za centar O kotura B vezan je teret  $G_2=15$  N. Odrediti ubrzanja tereta  $G_1$  i  $G_2$  i smjer u kojem se sistem kreće.



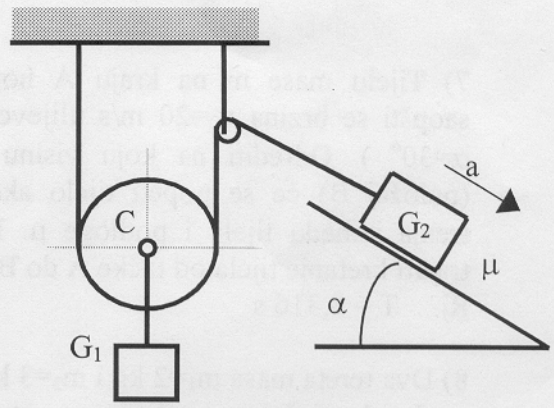
12) Teret mase  $m_1=2$  kg nalazi se na strmoj ravni i vezan je užetom za točak mase  $m_2=3$  kg kako je pokazano na slici. Odrediti ubrzanje ovih tijela i smjer kretanja ako je ugao  $\alpha = 30^\circ$ .



13) Tijelo težine  $G_2$  je užetom povezano u sistem sa tijelom težine  $G_1$  kao na slici . Odrediti ubrzanje tereta  $G_2$  niz strmu ravan. Kotur C je pokretan i zanemarljive mase. Koeficijent trenja između tereta  $G_2$  i strme ravni je  $\mu=0,1$ .

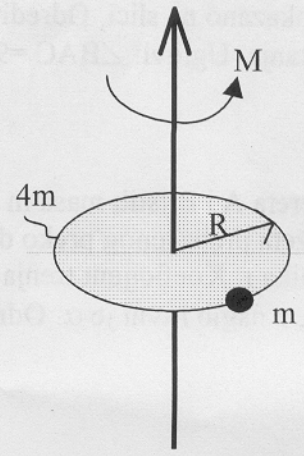
Dato:  $G_1=5 \text{ kN}$ ,  $G_2=15 \text{ kN}$ ,  $\alpha=30^\circ$ .

Rj.:  $a = (10 - 1,5\sqrt{3}) g / 32,5$



14) Disk mase  $4m$  i poluprečnika  $R$  obrće se oko vertikalne ose koja prolazi kroz njegov centar pod dejstvom momenta  $M$ . Koliko puta se smanji ugaono ubrzanje diska ako se na njegov obim učvrsti teška kuglica mase  $m$ .

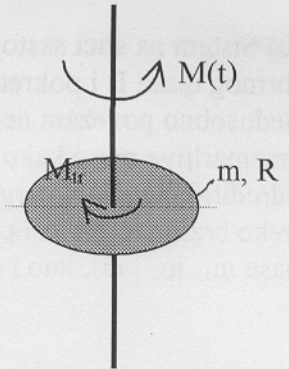
Rj.:  $\epsilon_1/\epsilon_2 = 3/2$



15) Na disk mase  $m=2 \text{ kg}$  i poluprečnika  $R=1 \text{ m}$  djeluje moment koji se mijenja po zakonu

$$M(t) = 2t^2 + 3, \text{ gdje je } M(\text{Nm}), t(\text{s}).$$

Tokom obrtanja diska javlja se i moment trenja  $M_{tr} = 2 \text{ Nm}$ . Odrediti koliko će biti ugaono ubrzanje diska  $\epsilon$  nakon  $t_1 = 3 \text{ s}$  od početka kretanja.



16) Zamašnjak oblika šupljeg valjka dostigne iz stanja mirovanja broj obrtaja  $n=1200 \text{ o/min}$  za vrijeme od  $t=40 \text{ s}$ . Specifična masa materijala zamašnjaka je  $\rho=7,2 \text{ kg/dm}^3$ .

Izračunati koliki je obrtni moment  $M$  bio potreban da zamašnjak dostigne navedeni broj obrtaja za dato vrijeme.

Podaci:  $D=1,6 \text{ m}$ ,  $d=1,2 \text{ m}$ ,  $h=0,13 \text{ m}$ .

Rj.:  $M = 1292 \text{ Nm}$

