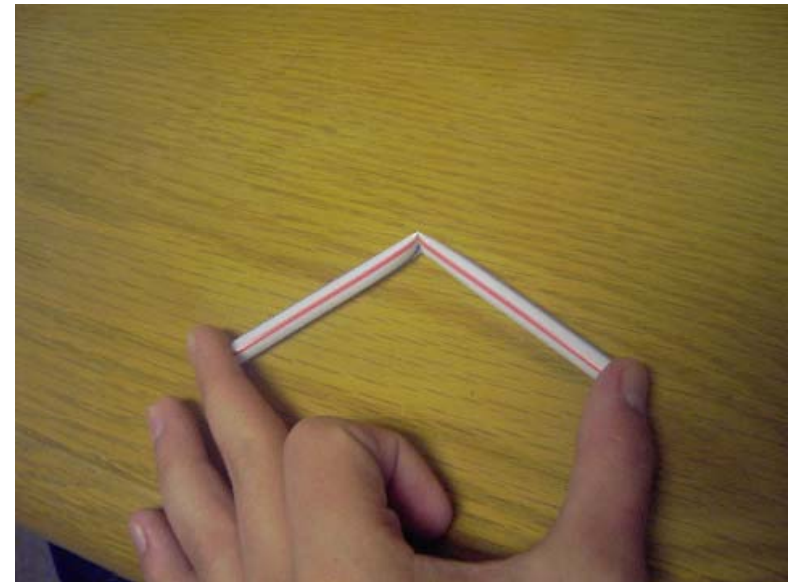
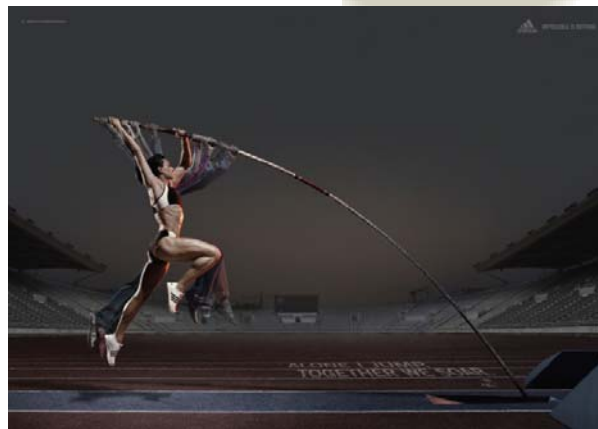
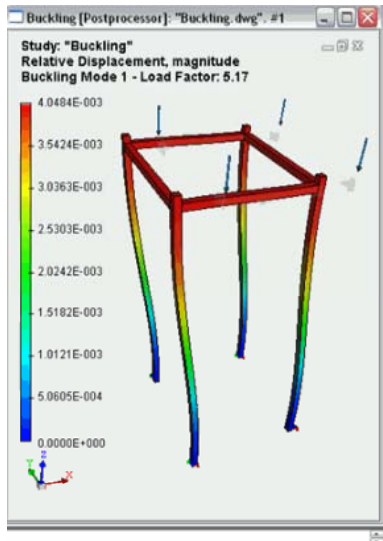
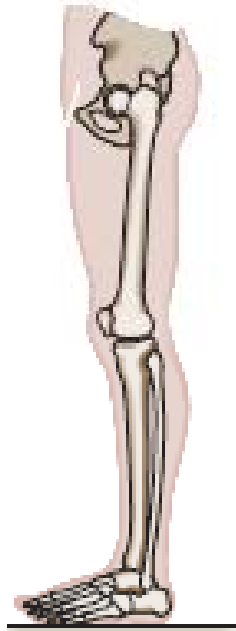


Izvijanje*



*JM Gere, BJ Goodno, *Mechanics of Materials*, Cengage Learning, Seventh Edition, 2009.

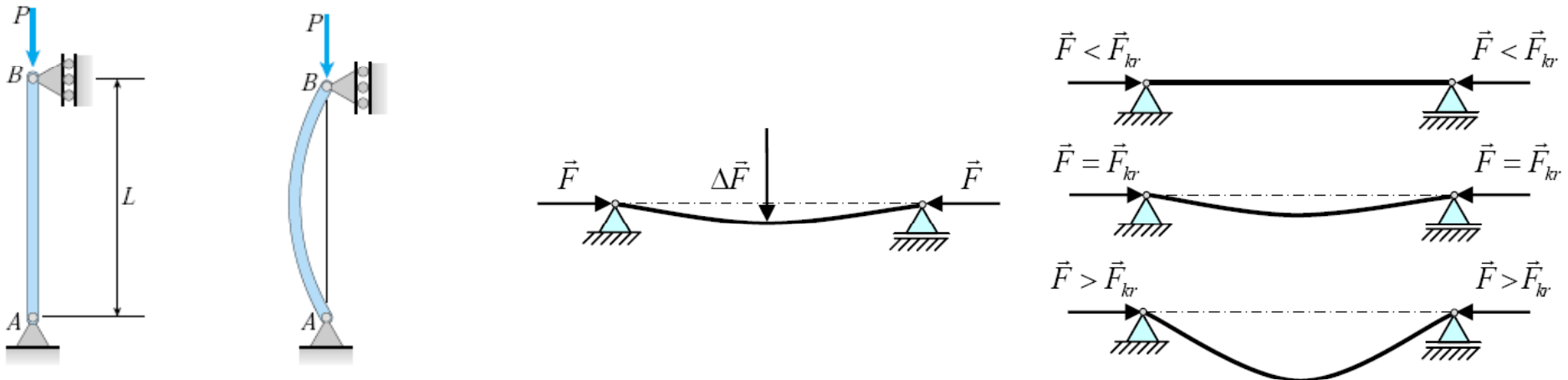
*Grupa autora, *Elastostatika II*, Tehnički fakultet, Bihać, 2003

Izvijanje (u elastičnom području)

Osnovne karakteristike i pojmovi

Stabilnost aksijalno pritisnutih elemenata

Umjesto kriterija čvrstoće (vrijednosti glavnih normalnih ili najvećih tangencijalnih napona ne prelaze kritične vrijednosti), ili kriterija krutosti (deformacije ne prelaze kritične veličine) kriterij koji se primjenjuje kod izvijanja je **kriterij stabilnosti**.



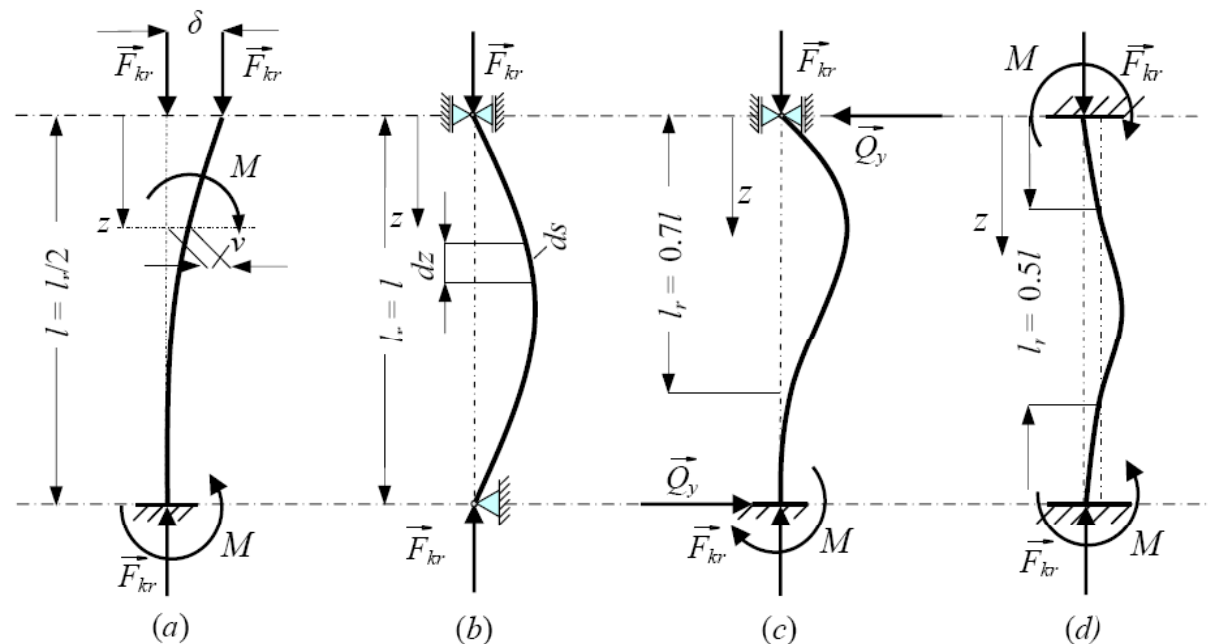
Izvijanje (u elastičnom području)

Euler-ova (Ojler) kritična sila izvijanja

Prelaz iz stabilnog u nestabilne uslove nastaje pri specifičnoj aksijalnoj sili, F_{kr} – **kritična sila**.

Za određivanje kritične sile koristi se diferencijalna jednačina elastične linije grede (Otpornost materijala II):

$$EI \frac{d^2 v}{dv^2} = -M$$



Izvijanje (u elastičnom području)

Euler-ova (Ojler) kritična sila izvijanja

a) Konzola - osnovna forma izvijanja

$$EI \frac{d^2 v}{dz^2} = -M$$

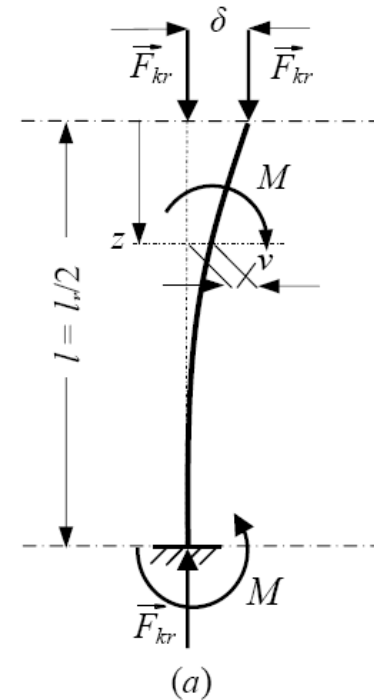
$$EI \frac{d^2 v}{dz^2} = F(\delta - v) \quad k = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + k^2 v = k^2 \delta \quad \Rightarrow \quad v = \delta + A \cos(kz) + B \sin(kz)$$

$$B \cos(kl) = 0 \quad B \sin(kl) = -\delta \quad \Rightarrow \quad v = \delta \left(1 - \frac{\sin(kz)}{\sin(kl)} \right)$$

$$kl = (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$v = \delta \left\{ 1 + (-1)^n \sin \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{z}{l} \right] \right\} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



Osnovna forma izvijanja

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad kl = l \sqrt{\frac{F_{kr}}{EI}} = \frac{\pi}{2}$$

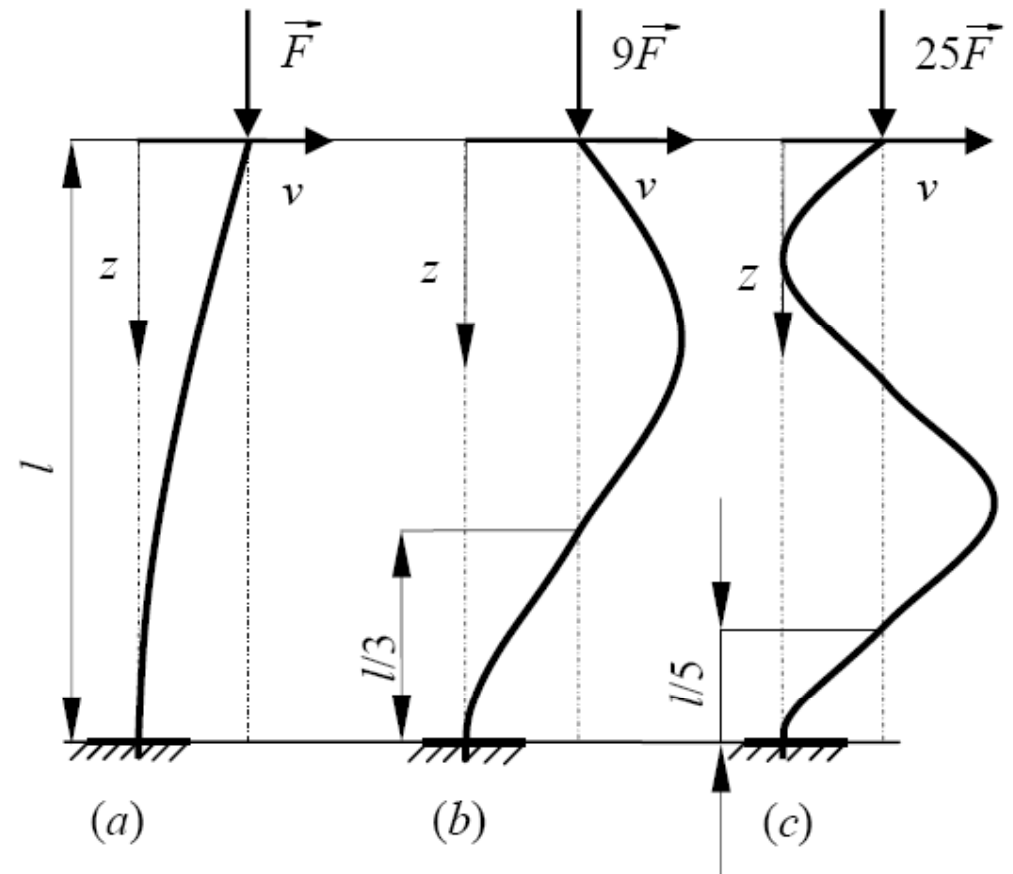
$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} \quad I = I_{\min} \quad (7.1)$$

Izvijanje (u elastičnom području)

Euler-ova (Ojler) kritična sila izvijanja

a) Konzola – viši harmonici

$$F_{kr,n} = (2n-1)^2 \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} \quad (7.2)$$



Izvijanje (u elastičnom području)

Euler-ova (Ojler) kritična sila izvijanja

b) Prosta greda

$$EI \frac{d^2 v}{dv^2} = -M$$

$$EI \frac{d^2 v}{dv^2} = -Fv$$

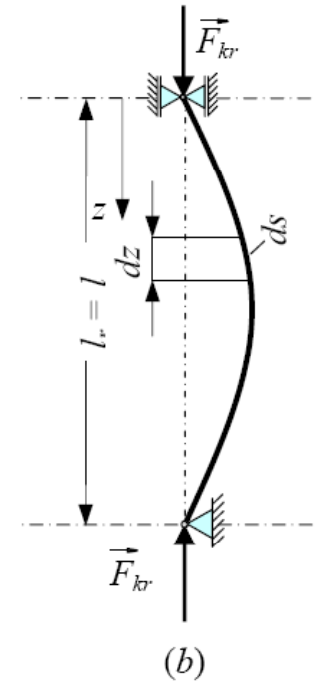
$$k = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

$$\frac{d^2 v}{dv^2} + k^2 v = 0 \quad \Rightarrow \quad v = A \cos(kz) + B \sin(kz)$$

$$A = 0 \quad B \sin(kl) = 0$$

$$kl = l \sqrt{\frac{F_{kr}}{EI}} = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$F_{kr} = n^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (7.3)$$



Osnovna forma izvijanja

$$n = 1$$

$$F_{kr} = F_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad I = I_{\min} \quad (7.4)$$

Izvijanje (u elastičnom području)

Euler-ova (Ojler) kritična sila izvijanja

c) Greda s uklještenjem

$$EI \frac{d^2 v}{dz^2} = -M$$

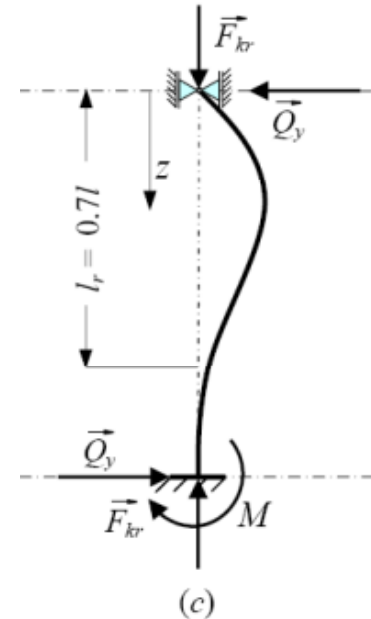
$$EI \frac{d^2 v}{dz^2} = -vF - zY \quad k = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + k^2 v = \frac{Y}{EI} - \frac{Y}{F} k^2 z \quad \Rightarrow \quad v = A \cos(kz) + B \sin(kz) + \frac{Y}{F} z$$

$$A = 0 \quad B \sin(kl) = -\frac{Y}{F} l \quad B \cos(kl) = -\frac{Y}{kF} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(kl) = kl$$

Osnovna forma izvijanja

$$F_{kr} = (kl)^2 \frac{EI}{l^2} = \left(\frac{kl}{\pi}\right)^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{\left[(\pi / kl)l\right]^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2} \quad (7.5)$$



Izvijanje (u elastičnom području)

Euler-ova (Ojler) kritična sila izvijanja

d) Greda s dva uklještenja

$$EI \frac{d^2 v}{dz^2} = -M$$

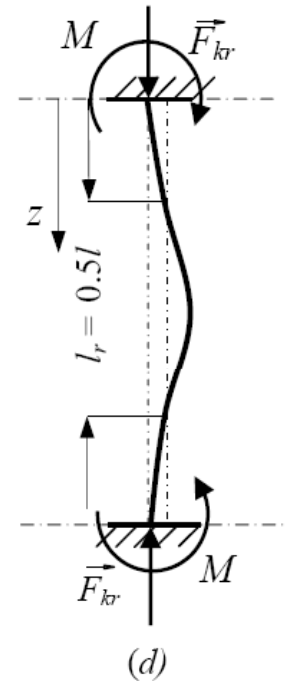
$$EI \frac{d^2 v}{dz^2} = -Fv + \mathfrak{M} \quad k = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + k^2 v = \frac{\mathfrak{M}}{EI} \Rightarrow v = A \cos(kz) + B \sin(kz)$$

$$B = 0 \quad A = -\frac{\mathfrak{M}}{F} \quad l - \cos(kl) = 0$$

$$kl = l \sqrt{\frac{F_{kr}}{EI}} = 2n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$F_{kr} = 4n^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (7.6)$$



Osnovna forma izvijanja

$$n = 1$$

$$F_{kr} = F_e = \frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2} \quad I = I_{\min} \quad (7.7)$$

Izvijanje (u elastičnom području)

Euler-ova (Ojler) kritična sila izvijanja – osnovna forma

- a) Konzola – viši harmonici $F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} \quad I = I_{\min}$
- b) Prosta greda $F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad I = I_{\min}$
- c) Greda s uklještenjem $F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2} \quad I = I_{\min}$
- d) Greda s dva uklještenja $F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2} \quad I = I_{\min}$

Vitkost štapa λ – odnos redukovane dužine i minimalnog poluprečnika inercije

l_r – redukovana dužina

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{l_r^2} \quad I = I_{\min}$$

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{l_r^2 A} \quad I = I_{\min}$$

$$\lambda = \lambda_{kr} = \frac{l_r}{i_2} = \sqrt{\frac{A}{I_{\min}}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{K}{\lambda^2}$$

Izvijanje

Izvijanje u plastičnom području

- a) Empirijski obrasci (*Tetmeier, Ostenfeld - Johnson*)
- b) Omega metoda
- c) Metoda energije
- d) *Ritz-ova* metoda

