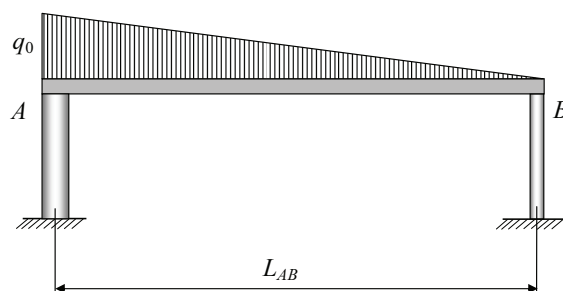


1. Kruta poluga AB oslonjena je na dva čelična štapova u A i B i opterećena trouglastim opterećenjem, kao na slici desno. Ako su oba štapa iste dužine L , odrediti:

- sile i napone u štapovima A i B ,
- deformacije štapova A i B ,
- nagib krute poluge.

Podaci: $q_0 = 100 \text{ kN/m}$; poluga $AB - L_{AB} = 1 \text{ m}$; štapovi $- E = 200 \text{ GPa}$, $A_A = 2A_B = 100 \text{ cm}^2$, $L = 300 \text{ mm}$.

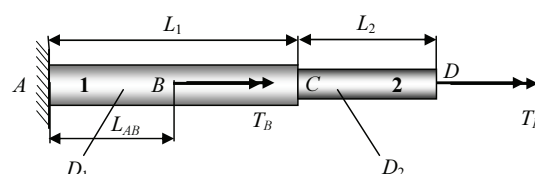


(20+5+5=30%)

2. Puno čelično vratilo sastavljeno iz dva dijela 1 i 2 opterećeno je momentima uvijanja kao na slici desno. Odrediti:

- ugao uvijanja u presjeku D u odnosu na presjek A ,
- maksimalan napon u presjeku C .

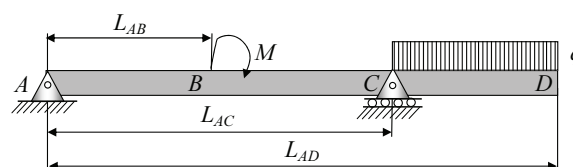
Podaci: $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $D_1 = 1.25D_2 = 125 \text{ mm}$, $L_1 = 2L_2 = 2L_{AB} = 500 \text{ mm}$, $T_B = T_D = 20 \text{ kNm}$.



(15+5=20%)

3. Za gredu s prepustom pravougaonog poprečnog presjeka, $b \times h$, opterećenu kao na slici desno provjeri da li su normalni i tangencijalni naponi u dozvoljenim granicama. Dozvoljeni napon na savijanje je $\sigma_{doz} = 15 \text{ MPa}$, a dozvoljeni tangencijalni napon je $\tau_{doz} = 2 \text{ MPa}$.

Podaci: $L_{AB} = 0.3 \text{ m}$, $L_{AC} = 0.6 \text{ m}$, $L_{AD} = 0.8 \text{ m}$, $M = 1 \text{ kNm}$, $q = 10 \text{ kN/m}$, dimenzije grede $b \times h = 40 \times 80 \text{ mm}^2$.

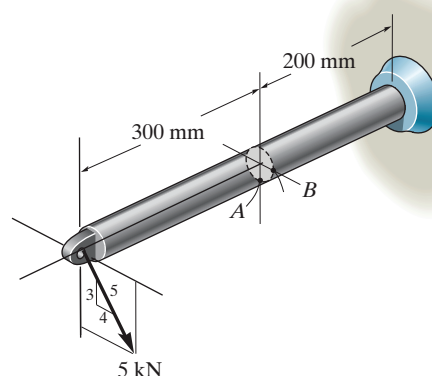


(25%)

4. Za dio na slici desno u tački A odrediti:

- tangencijalne napone,
- normalne napone.

usljed djelovanja sile $F = 5 \text{ kN}$. Prečnik dijela je $D = 50 \text{ mm}$. Napomena: ugao koji sila F zaklapa s horizontalnom osom je $\text{tg}(\phi) = 3 : 4$.



(12.5+12.5=25%)

ISPIT 28.01.2013 - GRUPA A - RJEŠENJA

1. ZADATAK

$$L_{AB} := 1\text{m} \quad E := 200\text{GPa} \quad q_{\max} := 100 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$A_A := 100\text{cm}^2 \quad A_B := \frac{A_A}{2} = 5 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

$$L := 0.3\text{m}$$

Rješenje

a) Sile i naponi u štapovima

Problem je statički određen pa se sile mogu dobiti iz uslova ravnoteže:

$$\sum_i F_i = 0 \quad F_A + F_B - \frac{q_{\max}}{2} \cdot L_{AB} = 0 \quad (1)$$

$$\left(\sum_i M_i \right)_A = 0 \quad F_B \cdot L_{AB} - \frac{q_{\max}}{2} \cdot L_{AB}^2 \cdot \frac{1}{3} = 0 \quad (2)$$

$$F_B := \frac{L_{AB} \cdot q_{\max}}{6} = 16.667 \cdot \text{kN}$$

$$F_A := \frac{L_{AB} \cdot q_{\max}}{2} - F_B = 33.333 \cdot \text{kN}$$

pa su naponi (sile imaju suprotan smjer od onog koji djeluje na polugu):

$$\sigma_A := -\frac{F_A}{A_A} = -3.333 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$\sigma_B := -\frac{F_B}{A_B} = -3.333 \times 10^6 \text{ Pa}$$

b) Deformacije u štapovima

$$\varepsilon_A := \frac{\sigma_A}{E} = -1.667 \times 10^{-5}$$

$$\varepsilon_B := -\frac{\sigma_B}{E} = 1.667 \times 10^{-5}$$

c) nagib krute poluge

S obzirom da su deformacije štapova jednake, poluga će ostati u horizontalnom položaju.

2. ZADATAK

$$D_1 := 125\text{mm} \quad I_{o1} := \frac{D_1^4 \cdot \pi}{32} = 2.397 \times 10^7 \cdot \text{mm}^4$$

$$L_1 := 500\text{mm}$$

$$D_2 := \frac{D_1}{1.25} = 100\text{mm} \quad I_{o2} := \frac{D_2^4 \cdot \pi}{32} = 9.817 \times 10^6 \cdot \text{mm}^4$$

$$L_2 := \frac{L_1}{2} = 250\text{mm}$$

$$L_{AB} := 250\text{mm} \quad L_{BC} := L_1 - L_{AB} = 250\text{mm}$$

$$E := 200\text{GPa} \quad \nu := 0.3 \quad G := \frac{E}{2(1 + \nu)} = 76.923\text{GPa}$$

$$T_B := 20\text{kN}\cdot\text{m} \quad T_D := 20\text{kN}\cdot\text{m}$$

Rješenje

Na osnovu slike se može postaviti uslov ravnoteže (T_A ima suprotan smjer od smjera T_B i T_D):

$$T_A - T_B - T_D = 0$$

pa je

$$T_A := T_B + T_D = 4 \times 10^4 \cdot \text{N}\cdot\text{m}$$

Također se mogu razlikovati dva područja djelovanja konstantnih momenata uvijanja i to:

$$T_{AB} := T_A = 4 \times 10^4 \cdot \text{N}\cdot\text{m}$$

$$T_{BD} := T_A - T_B = 2 \times 10^4 \cdot \text{N}\cdot\text{m}$$

a) Ugao uvijanja u presjeku D jednak je zbiru uglova uvijanja pojedinih segmenata, i to

$$\varphi_{AB} := \frac{T_{AB} \cdot L_{AB}}{G \cdot I_{01}} = 0.311 \cdot ^\circ$$

$$\varphi_{BC} := \frac{T_{BD} \cdot L_{BC}}{G \cdot I_{01}} = 0.155 \cdot ^\circ$$

$$\varphi_{CD} := \frac{T_{BD} \cdot L_2}{G \cdot I_{02}} = 0.379 \cdot ^\circ$$

$$\varphi := \varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} = 0.845 \cdot ^\circ$$

b) Maksimalni napon u presjeku C je za minimalan prečnik u tom presjeku, tj. za D_2

$$\tau_{\max} := \frac{T_{BD} \cdot \frac{D_2}{2}}{I_{02}} = 101.859 \cdot \text{MPa}$$

3. ZADATAK

Podaci:

$$L_{AB} := 0.3\text{m} \quad L_{AC} := 0.6\text{m} \quad L_{AD} := 0.8\text{m} \quad L_{CD} := L_{AD} - L_{AC}$$

$$q := 10 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad M_B := 1\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\sigma_{\text{doz}} := 12\text{MPa} \quad b := 40\text{mm} \quad h := 80\text{mm}$$

$$\tau_{\text{doz}} := 2\text{MPa}$$

$$I := \frac{b \cdot h^3}{12} = 1.707 \times 10^6 \cdot \text{mm}^4 \quad A := b \cdot h = 3.2 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

Rješenje

a)

Posmatrajmo raspodjelu transferzalnih sila i momenata savijanja za gredu ACD .

Reakcije u osloncima A i C (pretpostavlja se da sile F_A i F_C djeluju prema gore).

$$\sum_i F_i = 0 \quad F_A + F_C - q \cdot L_{CD} = 0 \quad (1)$$

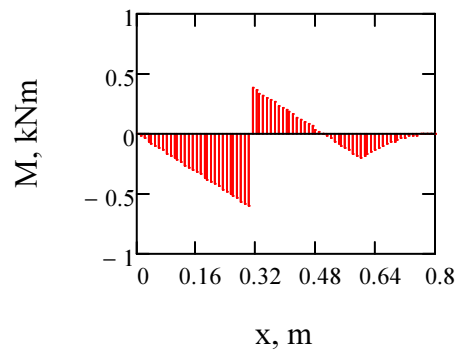
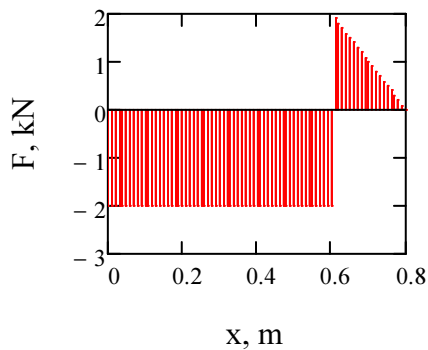
$$\sum_i M_i = 0 \quad M_B - F_C \cdot L_{AC} + q \cdot L_{CD} \cdot \left(L_{AC} + \frac{L_{CD}}{2} \right) = 0 \quad (2)$$

Iz (2) slijedi:

$$F_C := \frac{M_B + L_{CD} \cdot q \cdot \left(L_{AC} + \frac{L_{CD}}{2} \right)}{L_{AC}} = 4 \cdot \text{kN}$$

Iz (1) slijedi: $F_A := q \cdot L_{CD} - F_C = -2 \cdot \text{kN}$ (pogrešno pretpostavljen smjer)

Sada se mogu nacrtati dijagrami momenata savijanja i transferzalnih sila



Maksimalni momenti savijanja je na mjestu djelovanja momenta savijanja u tački B, i to s lijeve strane, pa je

$$M_{\max} := |F_A \cdot L_{AB}| = 0.6 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

dok je maksimalna transferzalna sila uzduž dijela grede AC i jednaka je reakciji u A

$$F_{\max} := |F_A| = 2 \cdot \text{kN}$$

Provjera normalnih napona

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot h}{I} \cdot \frac{1}{2} = \frac{M_{\max} \cdot h}{\left(\frac{b \cdot h^3}{12}\right)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6M_{\max}}{b \cdot h^2} \leq \sigma_{\text{doz}}$$

$$\sigma_{\max} := \frac{6M_{\max}}{b \cdot h^2} = 14.062 \cdot \text{MPa} \quad \sigma_{\max} < \sigma_{\text{doz}}$$

Provjera tangencijalnog napona:

$$\tau_{\max} := \left| \frac{3F_{\max}}{2A} \right| = 0.938 \cdot \text{MPa} \quad \tau_{\max} < \tau_{\text{doz}}$$

Dakle, greda će izdržati dato opterećenje.

4. ZADATAK

Podaci:

$$F := 5 \text{ kN} \quad L_1 := 300 \text{ mm} \quad L_2 := 200 \text{ mm}$$

$$D := 50 \text{ mm}$$

$$I := \frac{D^4 \cdot \pi}{64} = 3.068 \times 10^5 \cdot \text{mm}^4 \quad A := \frac{D^2 \cdot \pi}{4} = 1.963 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

$$\text{tg}(\varphi) = \frac{3}{4} \quad \varphi := \text{atan}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.87^\circ$$

Rješenje

U ravni kojoj propadaju tačke A i B vladaju tangencijalni i normalni naponi usljed momenta savijanja i smicanja koje izazivaju komponente sile F u pravcu vertikalne i horizontalne ose, i to:

$$F_y := -(F \cdot \sin(\varphi)) = -3 \cdot \text{kN}$$

$$F_x := F \cdot \cos(\varphi) = 4 \cdot \text{kN}$$

Sila F_y u tački A izaziva pritisne normalne napone usljed savijanja, dok nema djelovanja tangencijalnih napona, pošto se tačka nalazi na donjoj površini.

$$\sigma := \frac{F_y \cdot L_1}{I} \cdot \frac{D}{2} = -73.339 \cdot \text{MPa}$$

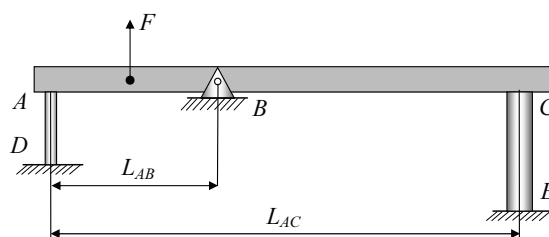
Sila F_x u tački A izaziva maksimalne tangencijalne napone usljed smicanja pošto se tačka nalazi na neutralnoj osi, dok iz istog razloga nema normalnih napona usljed savijanja

$$\tau := \frac{4 \cdot F_x}{3 \cdot A} = 2.716 \cdot \text{MPa}$$

1. Kruta poluga ABC oslonjena je na dva elastična štapa AD i CE i može da se okreće u osloncu B , kao što je prikazano na slici desno. Ako je poluga opterećena silom $F = 10$ kN koja djeluje na polovini dijela poluge AB , odrediti:

- sile i napone u štapovima AD i CE ,
- deformacije štapova AD i CE ,
- nagib krute poluge ABC .

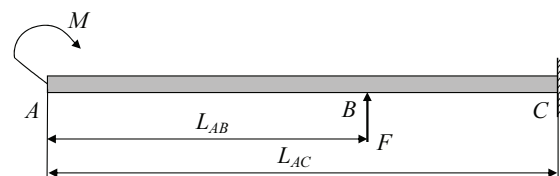
Podaci: poluga ABC – $L_{AB} = 1$ m, $L_{AC} = 3$ m; štap AD – $E_{AD} = 7$ GPa, $A_{AD} = 1$ cm², $L_{AD} = 300$ mm; štap CE – $E_{CE} = 2$ GPa, $A_{CE} = 1.5$ cm², $L_{CE} = 400$ mm.



(25+5+5=35%)

2. Za konzolu kružnog poprečnog presjeka opterećenu kao na slici desno provjeri da li su normalni i tangencijalni naponi u dozvoljenim granicama. Dozvoljeni napon na savijanje je $\sigma_{doz} = 150$ MPa, a dozvoljeni tangencijalni napon je $\tau_{doz} = 100$ MPa.

Podaci: $L_{AB} = 0.6$ m, $L_{AC} = 0.9$ m, $M = 1$ kNm, $F = 1$ kN, prečnik konzole $d = 50$ mm.

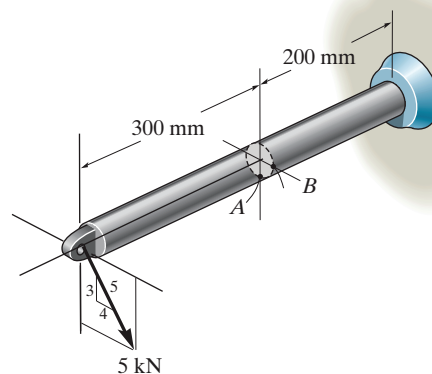


(25%)

3. Za dio na slici desno u tački B odrediti:

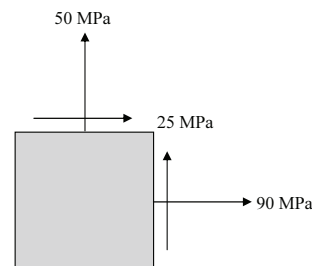
- tangencijalne napone,
- normalne napone.

usljed djelovanja sile $F = 5$ kN. Prečnik dijela je $D = 25$ mm. Napomena: ugao koji sila F zaklapa s horizontalnom osom je $\text{tg}(\phi) = 3 : 4$



(12.5+12.5=25%)

4. Za element napona nekog elementa od duktilnog čelika provjeriti da li će doći do pucanja elementa, ako je $R_{eH} = 100$ MPa.



(15%)

ISPIT 28.01.2013 - GRUPA B - RJEŠENJA

1. ZADATAK

$$L_{AB} := 1\text{m} \quad L_{AC} := 3\text{m} \quad L_{BC} := L_{AC} - L_{AB}$$

$$E_{AD} := 7\text{GPa} \quad L_{AD} := 300\text{mm} \quad A_{AD} := 1\text{cm}^2$$

$$E_{CE} := 2\text{GPa} \quad L_{CE} := 400\text{mm} \quad A_{CE} := 1.5\text{cm}^2$$

$$F := 10\text{kN}$$

Rješenje

- a) Problem je statički neodređen, pa pored uslova ravnoteže moramo postaviti i uslove kompatibilnosti. Pretpostavimo da se štap AD izdužuje, a štap CE skraćuje, tj. da sila F_A djeluje prema dole, a sila F_C prema gore na krutu polugu. Uslov ravnoteže je:

$$\left(\sum_i M_i \right)_B = 0 \quad F_A \cdot L_{AB} - F \cdot \frac{L_{AB}}{2} + F_C \cdot L_{BC} = 0 \quad (1)$$

Uslov kompatibilnosti (pomjeranja u tačkama A i C s tačkom B čine slične truglove, ali treba paziti na znak "-" s obzirom da se jedan štap skraćuje a drugi izdužuje)

$$\frac{\delta_A}{L_{AB}} = \frac{\delta_C}{L_{BC}} \quad (2)$$

Takođe vrijedi:

$$\delta_A = \frac{F_A \cdot L_{AD}}{E_{AD} \cdot A_{AD}} \quad \delta_C = \frac{F_C \cdot L_{CE}}{E_{CE} \cdot A_{CE}} \quad (3)$$

Uvrštavajući (3) u (2) dobija se

$$F_A = \frac{L_{CE}}{L_{AD}} \cdot \frac{E_{AD}}{E_{CE}} \cdot \frac{A_{AD}}{A_{CE}} \cdot \frac{L_{AB}}{L_{BC}} \cdot F_C = \frac{14}{9} F_C \quad (4)$$

Sada se uvrštavanjem (4) u (1) dobija

$$F_C := \frac{9 \cdot F \cdot L_{AB}}{28 \cdot L_{AB} + 18 \cdot L_{BC}} = 1.406 \cdot \text{kN} \quad (\text{djeluje prema gore})$$

$$F_A := \frac{F \cdot \frac{L_{AB}}{2} - F_C \cdot L_{BC}}{L_{AB}} = 2.188 \cdot \text{kN} \quad (\text{djeluje prema dole})$$

pa su naponi u štapovima A i D (sile djeluju suprotno od onih koje djeluju na krutu gredu)

$$\sigma_{AD} := \frac{F_A}{A_{AD}} = 21.875 \cdot \text{MPa} \quad \text{istezanje}$$

$$\sigma_{CE} := \frac{F_C}{A_{CE}} = 9.375 \cdot \text{MPa} \quad \text{pritisak}$$

b) Deformacije štapova

$$\epsilon_{AD} := \frac{\sigma_{AD}}{E_{AD}} = 3.125 \times 10^{-3} \quad \delta_{AD} := \epsilon_{AD} \cdot L_{AD} = 9.375 \times 10^{-4} \text{ m} \quad \text{izduženje}$$

$$\epsilon_{CE} := \frac{\sigma_{CE}}{E_{CE}} = 4.688 \times 10^{-3} \quad \delta_{CE} := \epsilon_{CE} \cdot L_{CE} = 1.875 \times 10^{-3} \text{ m} \quad \text{skraćenje}$$

c) Nagib poluge

$$\gamma := \text{atan} \left(\frac{|\delta_{AD}| + |\delta_{CE}|}{L_{AC}} \right) = 0.054^\circ$$

2. ZADATAK

Podaci:

$$L_{AB} := 0.6 \text{ m} \quad L_{AC} := 0.9 \text{ m} \quad L_{BC} := L_{AC} - L_{AB}$$

$$F := 1 \text{ kN} \quad M_A := 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{\text{doz}} := 150 \text{ MPa}$$

$$d := 50 \text{ mm}$$

$$\tau_{\text{doz}} := 100 \text{ MPa}$$

$$I := \frac{d^4 \cdot \pi}{64} = 3.068 \times 10^5 \cdot \text{mm}^4$$

$$A := \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = 1.963 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

Rješenje

a)

Posmatrajmo raspodjelu transferzalnih sila i momenata savijanja za konzolu ABC.

Reakcije u uklještenju C (pretpostavlja se da sila F_A djeluju prema gore, a moment u smjeru kazaljke na satu).

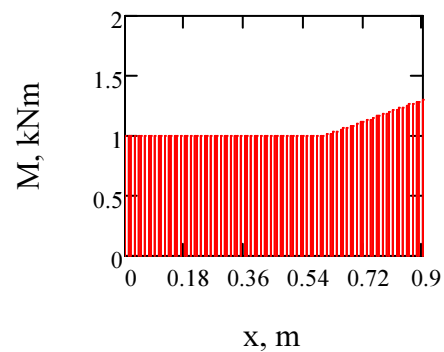
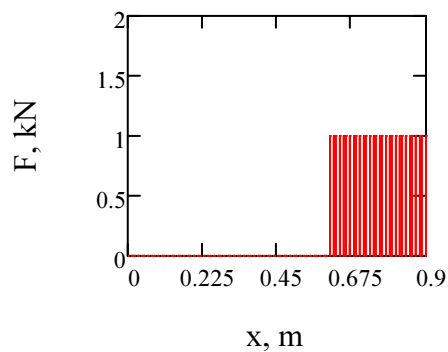
$$\sum_i F_i = 0 \quad F + F_C = 0 \quad (1)$$

$$\sum_i M_i = 0 \quad M + F \cdot L_{BC} + M_C = 0 \quad (2)$$

Iz (1) slijedi: $F_C := -F = -1 \cdot \text{kN}$ (pogrešno pretpostavljen smjer)

Iz (2) slijedi: $M_C := -M_A - F \cdot L_{BC} = -1.3 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$ (pogrešno pretpostavljen smjer)

Sada se mogu nacrtati dijagrami momenata savijanja i transferzalnih sila



Maksimalni momenti savijanja je u uklještenju C, i to s lijeve strane, pa je

$$M_{\max} := |M_C| = 1.3 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

dok je maksimalna transferzalna sila uzduž dijela grede BC i jednaka je reakciji u uklještenju

$$F_{\max} := |F_C| = 1 \cdot \text{kN}$$

Provjera normalnih napona

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I} \cdot \frac{h}{2} = \frac{M_{\max}}{\left(\frac{d^4 \cdot \pi}{64}\right)} \cdot \frac{d}{2} = \frac{32M_{\max}}{d^3 \cdot \pi} \leq \sigma_{\text{doz}}$$

$$\sigma_{\max} := \frac{32M_{\max}}{d^3 \cdot \pi} = 105.934 \cdot \text{MPa} \quad \sigma_{\max} < \sigma_{\text{doz}}$$

Provjera tangencijalnog napona:

$$\tau_{\max} := \left| \frac{4F_{\max}}{3A} \right| = 0.679 \cdot \text{MPa} \quad \tau_{\max} < \tau_{\text{doz}}$$

Dakle, greda će izdržati dato opterećenje.

3. ZADATAK

Podaci:

$$F := 5 \text{ kN} \quad L_1 := 300 \text{ mm} \quad L_2 := 200 \text{ mm}$$

$$D := 25 \text{ mm}$$

$$I := \frac{D^4 \cdot \pi}{64} = 1.917 \times 10^4 \cdot \text{mm}^4 \quad A := \frac{D^2 \cdot \pi}{4} = 490.874 \cdot \text{mm}^2$$

$$\text{tg}(\varphi) = \frac{3}{4} \quad \varphi := \text{atan}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.87^\circ$$

Rješenje

U ravni kojoj propadaju tačke A i B vladaju tangencijalni i normalni naponi usljed momenta savijanja i smicanja koje izazivaju komponente sile F u pravcu vertikalne i horizontalne ose, i to:

$$F_y := -(F \cdot \sin(\varphi)) = -3 \cdot \text{kN}$$

$$F_x := F \cdot \cos(\varphi) = 4 \cdot \text{kN}$$

Sila F_x u tački B izaziva pritisne normalne napone usljed savijanja, dok nema djelovanja tangencijalnih napona, pošto se tačka nalazi na donjoj površini.

$$\sigma := -\left(\frac{F_x \cdot L_1}{I} \cdot \frac{D}{2}\right) = -782.278 \cdot \text{MPa}$$

Sila F_y u tački A izaziva maksimalne tangencijalne napone usljed smicanja pošto se tačka nalazi na neutralnoj osi, dok iz istog razloga nema normalnih napona usljed savijanja

$$\tau := \frac{4 \cdot F_y}{3 \cdot A} = -8.149 \cdot \text{MPa}$$

4. ZADATAK

Podaci:

$$\sigma_x := 90 \text{MPa} \quad R_{eH} := 100 \text{MPa}$$

$$\sigma_y := 50 \text{MPa}$$

$$\tau_{xy} := 25 \text{MPa}$$

Rješenje

Da bismo primijenili zadate teorije neophodno je prvo izračunati glavne normalne napone

$$\sigma_1 := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 102.016 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_2 := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 37.984 \cdot \text{MPa}$$

a) Teorija najvećeg tangencijalnog napona (glavni naponi su istog znaka)

$$\sigma_{ekv} := \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|) = 102.016 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_{ekv} > \sigma_{doz}$$

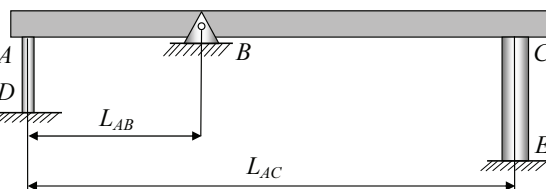
b) Teorija najvećeg specifičnog deformacionog rada

$$\sigma_{ekv} := \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2} = 89.303 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_{ekv} < \sigma_{doz}$$

1. Kruta poluga ABC oslonjena je na dva elastična štapa AD i CE i može da se okreće u osloncu B , kao što je prikazano na slici desno. Ako se štap AD zagrije za $\Delta T = 40^\circ\text{C}$, odrediti sile i napone u štapovima AD i CE .

Podaci: poluga $ABC - L_{AB} = 1\text{ m}$, $L_{AC} = 3\text{ m}$; štap $AD - E_{AD} = 7\text{ GPa}$, $A_{AD} = 1\text{ cm}^2$, $L_{AD} = 300\text{ mm}$, $\alpha_{AD} = 22.2 \times 10^{-6}\text{ 1/}^\circ\text{C}$; štap $CE - E_{CE} = 2\text{ GPa}$, $A_{CE} = 1.5\text{ cm}^2$, $L_{CE} = 400\text{ mm}$.

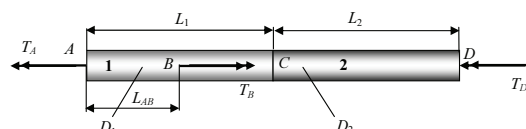


(25+5=30%)

2. Vratilo sastavljeno iz dva dijela od različitih materijala 1 i 2, opterećeno je momentima uvijanja kao na slici desno. Odrediti:

- ugao uvijanja u presjeku D u odnosu na presjek A ,
- maksimalan napon u presjeku C .

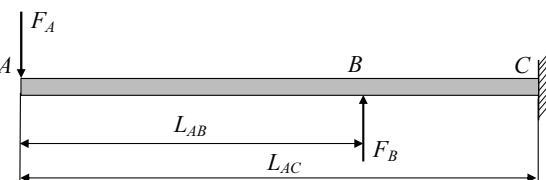
Podaci: $E_1 = 200\text{ GPa}$, $\nu_1 = 0.3$, $E_2 = 150\text{ GPa}$, $\nu_2 = 0.35$, $D_1 = D_2 = 125\text{ mm}$, $L_1 = L_2 = 2L_{AB} = 500\text{ mm}$, $3T_A = T_B = 1.5T_D = 120\text{ Nm}$.



(15+5=20%)

3. Za konzolu kvadratnog poprečnog presjeka opterećenu kao na slici desno provjeri da li su normalni i tangencijalni naponi u dozvoljenim granicama. Dozvoljeni napon na savijanje je $\sigma_{\text{doz}} = 100\text{ MPa}$, a dozvoljeni tangencijalni napon je $\tau_{\text{doz}} = 50\text{ MPa}$.

Podaci: $L_{AB} = 0.6\text{ m}$, $L_{AC} = 0.9\text{ m}$, $F_A = 4\text{ kN}$, $F_B = 1\text{ kN}$, stranica poprečnog presjeka konzole $b = 60\text{ mm}$.

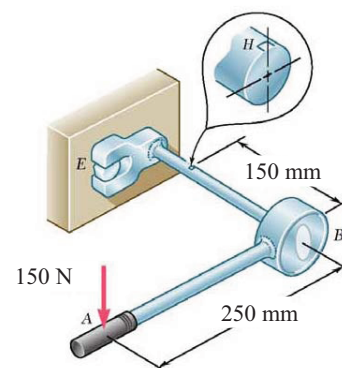


(25%)

4. Za dio na slici desno u tački H odrediti:

- tangencijalne napone,
- normalne napone.

usljed djelovanja sile $F = 150\text{ N}$. Prečnik dijela je $D = 15\text{ mm}$.



(12.5+12.5=25%)

Vrijeme izrade - 135 minuta

ISPIT 28.01.2013 - GRUPA C - RJEŠENJA

1. ZADATAK

$$L_{AB} := 1\text{m} \quad L_{AC} := 3\text{m} \quad L_{BC} := L_{AC} - L_{AB}$$

$$E_{AD} := 7\text{GPa} \quad L_{AD} := 300\text{mm} \quad A_{AD} := 1\text{cm}^2$$

$$E_{CE} := 2\text{GPa} \quad L_{CE} := 400\text{mm} \quad A_{CE} := 1.5\text{cm}^2$$

$$\Delta T := 40\Delta^\circ\text{C} \quad \alpha := 22.2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\Delta^\circ\text{C}}$$

Rješenje

- a) Problem je statički neodređen, pa pored uslova ravnoteže moramo postaviti i uslove kompatibilnosti, pri čemu treba paziti na utjecaj temperature. Pretpostavimo da se štap AD izdužuje, a štap CE skraćuje, tj. da sila F_A djeluje prema dole, a sila F_C prema gore na krutu polugu. Uslov ravnoteže je:

$$\left(\sum_i M_i \right)_B = 0 \quad F_A \cdot L_{AB} + F_C \cdot L_{BC} = 0 \quad (1)$$

Uslov kompatibilnosti (pomjeranja u tačkama A i C s tačkom B čine slične truglove, no treba paziti na znak "-" s obzirom da se jedan štap skraćuje a drugi izdužuje). Također, ukupno izduženje štapa AD je jednako izduženju usljed povećanja temperature, $\delta_{AT} = \alpha \Delta T L_{AD}$, te utjecaja sile F_A (δ_{AF}), dok je izduženje štapa CE uzrokovano samo silom F_C (δ_{CF}), pa imamo odnos

$$\frac{\delta_{AT} + \delta_{AF}}{L_{AB}} = \frac{\delta_{CF}}{L_{BC}} \quad (2)$$

Takođe vrijedi:

$$\delta_{AT} := \alpha \cdot \Delta T \cdot L_{AD} \quad \delta_{AF} = \frac{F_A \cdot L_{AD}}{E_{AD} \cdot A_{AD}} \quad \delta_{CF} = \frac{F_C \cdot L_{CE}}{E_{CE} \cdot A_{CE}} \quad (3)$$

Uvrštavajući (3) u (2) dobija se

$$F_A = -A_{AD} \cdot E_{AD} \cdot \alpha \cdot \Delta T + \frac{A_{AD} \cdot E_{AD}}{A_{CE} \cdot E_{CE}} \cdot \frac{L_{AB}}{L_{BC}} \cdot \frac{L_{CE}}{L_{AD}} \cdot F_C = -621.6\text{N} + \frac{14}{9} F_C \quad (4)$$

Sada se uvrštavanjem (4) u (1) dobija

$$F_C := \frac{A_{AD} \cdot E_{AD} \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot L_{AB}}{L_{BC} + \frac{A_{AD} \cdot E_{AD}}{A_{CE} \cdot E_{CE}} \cdot \frac{L_{AB}}{L_{BC}} \cdot \frac{L_{CE}}{L_{AD}} \cdot L_{AB}} = 0.175 \cdot \text{kN} \quad (\text{djeluje prema gore})$$

$$F_A := \frac{-F_C \cdot L_{BC}}{L_{AB}} = -0.35 \cdot \text{kN} \quad (\text{pogrešno pretpostavljen smjer, djeluje prema gore na krutu polugu})$$

pa su naponi u štapovima A i D (sile djeluju suprotno od onih koje djeluju na krutu gredu)

$$\sigma_{AD} := \frac{F_A}{A_{AD}} = -3.496 \cdot \text{MPa} \quad \text{pritisak (jer sila djeluje prema dole na štap)}$$

$$\sigma_{CE} := \frac{F_C}{A_{CE}} = 1.165 \cdot \text{MPa} \quad \text{pritisak}$$

b) Deformacije štapova

$$\delta_{AD} := \alpha \cdot \Delta T \cdot L_{AD} + \frac{F_A \cdot L_{AD}}{E_{AD} \cdot A_{AD}} = 1.165 \times 10^{-4} \text{ m} \quad \epsilon_{AD} := \frac{\delta_{AD}}{L_{AD}} = 3.885 \times 10^{-4} \quad \text{izduženje}$$

$$\delta_{CE} := \frac{F_C \cdot L_{CE}}{E_{CE} \cdot A_{CE}} = 2.331 \times 10^{-4} \text{ m} \quad \epsilon_{CE} := \frac{\delta_{CE}}{L_{CE}} = 5.827 \times 10^{-4} \quad \text{skraćenje}$$

2. ZADATAK

$$D_1 := 125 \text{ mm} \quad I_{o1} := \frac{D_1^4 \cdot \pi}{32} = 2.397 \times 10^7 \cdot \text{mm}^4$$

$$L_1 := 500 \text{ mm}$$

$$D_2 := D_1 = 125 \cdot \text{mm} \quad I_{o2} := \frac{D_2^4 \cdot \pi}{32} = 2.397 \times 10^7 \cdot \text{mm}^4$$

$$W_0 := \frac{I_{o1}}{\frac{D_1}{2}}$$

$$L_2 := L_1 = 500 \cdot \text{mm}$$

$$L_{AD} := 250 \text{ mm}$$

$$L_{BC} := L_1 - L_{AB} = 250 \cdot \text{mm}$$

$$E_1 := 200 \text{ GPa} \quad \nu_1 := 0.3 \quad G_1 := \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)} = 76.923 \cdot \text{GPa}$$

$$E_2 := 150 \text{ GPa} \quad \nu_2 := 0.35 \quad G_2 := \frac{E_2}{2(1 + \nu_2)} = 55.556 \cdot \text{GPa}$$

$$T_B := 120 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad T_D := \frac{T_B}{1.5} = 80 \cdot \text{kN}\cdot\text{m} \quad T_A := \frac{T_B}{3} = 4 \times 10^4 \text{ J}$$

Rješenje

Na osnovu slike se mogu razlikovati dva područja djelovanja konstantnih momenata uvijanja i to:

$$T_{AB} := T_A = 40 \cdot \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$T_{BD} := T_A - T_B = -80 \cdot \text{kN}\cdot\text{m}$$

- a) Ugao uvijanja u presjeku D jednak je zbiru uglova uvijanja pojedinih segmenata, i to

$$\varphi_{AB} := \frac{T_{AB} \cdot L_{AB}}{G_1 \cdot I_{o1}} = 0.311 \cdot ^\circ \quad \varphi_{AB} = 5.424 \times 10^{-3}$$

$$\varphi_{BC} := \frac{T_{BD} \cdot L_{BC}}{G_1 \cdot I_{o1}} = -0.622 \cdot ^\circ \quad \varphi_{BC} = -0.011$$

$$\varphi_{CD} := \frac{T_{BD} \cdot L_2}{G_2 \cdot I_{o2}} = -1.721 \cdot ^\circ \quad \varphi_{CD} = -0.03$$

$$\varphi := \varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} = -2.032 \cdot ^\circ$$

- b) Maksimalni napon u presjeku C je jednak za oba dijela pošto su momenti uvijanja i karakteristike presjeka jednake za oba dijela:

$$\tau_{\max} := \frac{T_{BD} \cdot \frac{D_2}{2}}{I_{o2}} = -208.608 \cdot \text{MPa}$$

3. ZADATAK

Podaci:

$$L_{AB} := 0.6\text{m} \quad L_{AC} := 0.9\text{m} \quad L_{BC} := L_{AC} - L_{AB} = 0.3\text{m}$$

$$F_A := 4\text{kN} \quad F_B := 1\text{kN}$$

$$\sigma_{\text{doz}} := 100\text{MPa} \quad b := 60\text{mm} \quad I := \frac{b^4}{12} = 1.08 \times 10^6 \cdot \text{mm}^4$$

$$\tau_{\text{doz}} := 50\text{MPa} \quad A := b^2 = 3.6 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

Rješenje

a)

Posmatrajmo raspodjelu transferzalnih sila i momenata savijanja za konzolu ABC.

Reakcije u okleštenju C (pretpostavlja se da sila F_{AC} djeluje na gore, a moment savijanja M_C u pravcu okretanja kazaljke na satu).

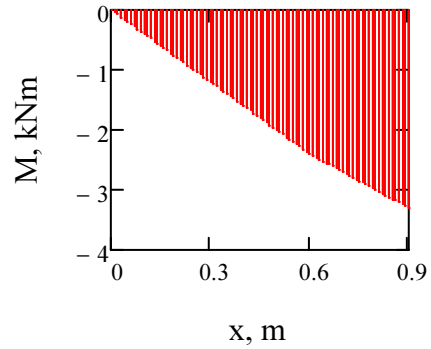
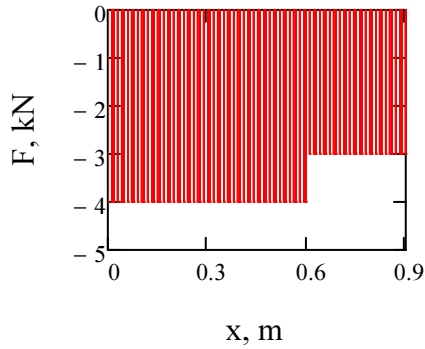
$$\sum_i F_i = 0 \quad -F_A + F_B + F_C = 0 \quad (1)$$

$$\sum_i M_i = 0 \quad F_A \cdot L_{AC} - F_B \cdot L_{BC} - M_C = 0 \quad (2)$$

Iz (1) slijedi: $F_C := F_A - F_B = 3 \cdot \text{kN}$

Iz (2) slijedi: $M_C := F_A \cdot L_{AC} - F_B \cdot L_{BC} = 3.3 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$

Sada se mogu nacrtati dijagrami momenata savijanja i transferzalnih sila



Maksimalni momenti savijanja je u uklještenju

$$M_{\max} := M_C = 3.3 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

dok je maksimalna transferzalna sila uzduž dijela grede AB i jednaka je \$F_A\$

$$F_{\max} := |F_A| = 4 \cdot \text{kN}$$

Provjera normalnih napona

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I} \cdot \frac{h}{2} = \frac{M_{\max}}{\left(\frac{b^4}{12}\right)} \cdot \frac{h}{2} = \frac{6M_{\max}}{b^3} \leq \sigma_{\text{doz}}$$

$$\sigma_{\max} := \frac{6M_{\max}}{b^3} = 91.667 \cdot \text{MPa} \quad \sigma_{\max} < \sigma_{\text{doz}}$$

Provjera tangencijalnog napona:

$$\tau_{\max} := \left| \frac{3F_{\max}}{2A} \right| = 1.667 \cdot \text{MPa} \quad \tau_{\max} < \tau_{\text{doz}}$$

Dakle, konzola će izdržati dato opterećenje.

4. ZADATAK

Podaci:

$$F := 150\text{N} \quad L_1 := 250\text{mm} \quad L_2 := 150\text{mm}$$

$$D := 15\text{mm}$$

$$I := \frac{D^4 \cdot \pi}{64} = 2.485 \times 10^3 \cdot \text{mm}^4 \quad A := \frac{D^2 \cdot \pi}{4} = 176.715 \cdot \text{mm}^2$$

$$I_0 := 2I \quad I_0 = 4.97 \times 10^3 \cdot \text{mm}^4$$

Rješenje

U ravni kojoj propada tačka H vladaju tangencijalni naponi usljed uvijanja momentom uvijanja FL_1 , tangencijalnih napona usljed smicanja silom F nema, jer je tačka H na gornjoj površini, te normalni naponi usljed savijanja momentom savijanja FL_2 .

- tangencijalni napon usljed uvijanja

$$\tau := \frac{F \cdot L_1 \cdot \frac{D}{2}}{I_0} = 56.588 \cdot \text{MPa}$$

- normalni napon usljed savijanja (zatezanje)

$$\sigma := \frac{F \cdot L_2 \cdot \frac{D}{2}}{I} = 67.906 \cdot \text{MPa}$$
