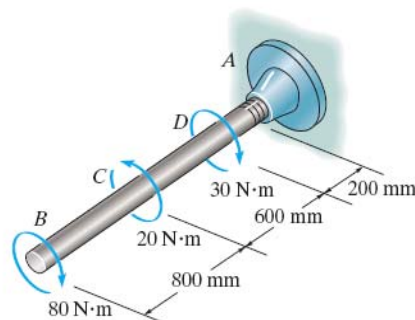


## ISPIT 03.07.2012 - GRUPA A

\*\*\*\*\*

Šuplje čelično vratilo vanjskog prečnika 20 mm i debljine zida 5 mm, opterećeno je momentima uvijanja kao na slici desno. Odredi ugao uvijanja, te raspored napona po poprečnom presjeku na kraju B.



$$d_1 := 20\text{mm}$$

$$t := 2.5\text{mm}$$

$$d_2 := d_1 - 2t$$

$$I_o := \frac{(d_1^4 - d_2^4)\pi}{32} = 1.074 \times 10^4 \cdot \text{mm}^4$$

$$W_o := \frac{I_o}{\frac{d_1}{2}} = 1.074 \times 10^3 \cdot \text{mm}^3$$

$$E := 210\text{GPa}$$

$$\nu := 0.33 \quad G := \frac{E}{2(1 + \nu)} = 78.947 \cdot \text{GPa}$$

$$T_B := 80\text{N}\cdot\text{m} \quad L_{BC} := 800\text{mm}$$

$$T_C := -20\text{N}\cdot\text{m} \quad L_{CD} := 600\text{mm}$$

$$T_D := 30\text{N}\cdot\text{m} \quad L_{DA} := 200\text{mm}$$

$$T_{BC} := T_B = 80\text{N}\cdot\text{m} \quad T_{CD} := T_B + T_C = 60\text{N}\cdot\text{m} \quad T_{DA} := T_{CD} + T_D = 90\text{N}\cdot\text{m}$$

### Rješenje

- a) Ugao uvijanja u presjeku B jednak je zbiru pojedinačnih uglova uvijanja

$$\varphi_{BC} := \frac{T_{BC} \cdot L_{BC}}{G \cdot I_o} = 4.326^\circ$$

$$\varphi_{CD} := \frac{T_{CD} \cdot L_{CD}}{G \cdot I_o} = 2.433^\circ$$

$$\varphi_{DA} := \frac{T_{DA} \cdot L_{DA}}{G \cdot I_o} = 1.217 \cdot ^\circ$$

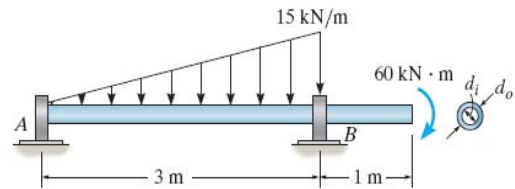
$$\varphi := \varphi_{BC} + \varphi_{CD} + \varphi_{DA} = 7.975 \cdot ^\circ$$

- b) Tangencijalni napon se linearno mijenja od najmanje vrijednosti na unutrašnjem prečniku do najveće na spoljašnjem

$$\tau_{\max} := \frac{T_B}{W_o} = 74.503 \cdot \text{MPa} \quad \tau_{\min} := \tau_{\max} \cdot \frac{d_2}{d_1} = 55.877 \cdot \text{MPa}$$

\*\*\*\*\*

Šuplje čelično vratilo vanjskog prečnika  $d_o$  opterećeno je na savijanje kao na slici desno. Odredi dimenzije vratila, ako se zna da je unutrašnji prečnik jednak  $d_i = 0.75d_o$ . Uzeti da je dozvoljeni normalni napon  $\sigma_{doz} = 200 \text{ MPa}$ , a dozvoljeni tangencijalni napon  $\tau_{doz} = 150 \text{ MPa}$ .



$$q_{\max} := 15 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad I = \frac{(d_o^4 - d_i^4) \cdot \pi}{64} = 0.033556 d_o^4 \quad \sigma_{doz} := 200 \text{ MPa}$$

$$M_C := 60 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad A = \frac{(d_o^2 - d_i^2) \cdot \pi}{4} = 0.34361 d_o^2 \quad \tau_{doz} := 150 \text{ MPa}$$

$$L_{AB} := 3 \text{ m}$$

$$L_{BC} := 1 \text{ m}$$

### Rješenje

Posmatrajmo raspodjelu transferzalnih sila i momenata savijanja za gredu  $ABC$ .

Reakcije u osloncima  $A$  i  $B$  (pretpostavlja se da sile  $F_A$  i  $F_B$  djeluju prema gore).

$$\sum_i F_i = 0 \quad F_A - \frac{q_{\max}}{2} \cdot L_{AB} + F_B = 0 \quad (1)$$

$$\sum_i M_A = 0 \quad \frac{q_{\max}}{2} \cdot L_{AB} \cdot \frac{2}{3} L_{AB} - F_B \cdot L_{AB} + M_C = 0 \quad (2)$$

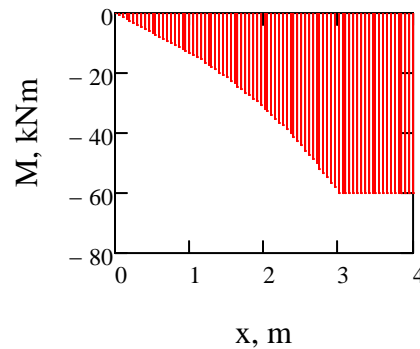
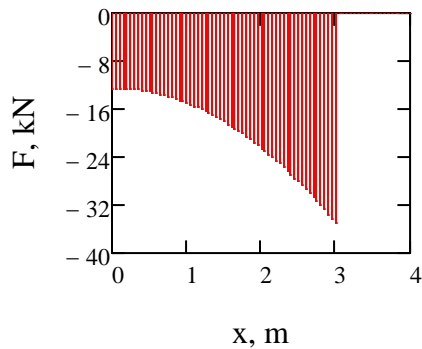
Iz (2) slijedi:

$$F_B := \frac{\frac{q_{\max}}{2} \cdot L_{AB} \cdot \frac{2}{3} L_{AB} + M_C}{L_{AB}} = 35 \cdot \text{kN}$$

Iz (1) slijedi:

$$F_A := \frac{q_{\max}}{2} \cdot L_{AB} - F_B = -12.5 \cdot \text{kN} \quad (\text{pogrešno pretpostavljen smijer})$$

Dijagrami momenata savijanja i sila



Maksimalni moment savijanja je za :  $x_{\max} := L_{AB} = 3 \text{ m}$

pa se dobija:  $M_{\max} := |M(x_{\max})| = 60 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$

Dimenzionisanje na osnovu najvećeg momenta savijanja

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot \frac{d_o}{2}}{I} = \frac{M_{\max} \cdot \frac{d_o}{2}}{0.033556d_o^4} < \sigma_{\text{doz}}$$

$$d_o := \sqrt[3]{\frac{M_{\max}}{2 \cdot 0.033556 \sigma_{\text{doz}}}} = 164.73 \cdot \text{mm} \quad d_i := 0.75 d_o = 123.548 \cdot \text{mm}$$

Provjera tangencijalnog napona:

Maksimalna transferzalna sila (po intenzitetu):  $F_{\max} := |F_{\text{tr}}(L_{AB})| = 35 \cdot \text{kN}$

$$A := \frac{(d_o^2 - d_i^2) \cdot \pi}{4} = 9.324 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

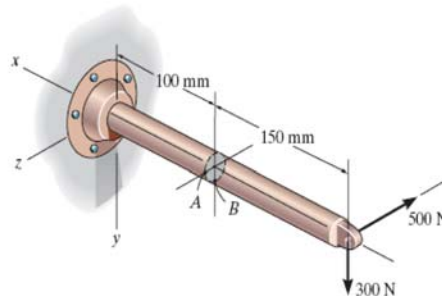
$$\tau_{\max} := \frac{4F_{\max}}{3A} \left( \frac{d_o^2 + d_o \cdot d_i + d_i^2}{d_o^2 + d_i^2} \right) = 7.407 \cdot \text{MPa} \quad \tau_{\max} < \tau_{\text{doz}}$$

pa dimenzija 164.73 mm zadovoljava.

\*\*\*\*\*

Za dio na slici desno cilindričnog poprečnog presjeka prečnika 40 mm u tački A odrediti:

- tangencijalne napone,
- normalne napone,
- glavne normalne i maksimalne tangencijalne napone.



$$L := 150 \text{ mm} \quad P_1 := 500 \text{ N} \quad P_2 := 300 \text{ N}$$

$$d := 40 \text{ mm}$$

$$I := \frac{d^4 \cdot \pi}{64} = 1.257 \times 10^5 \cdot \text{mm}^4 \quad A := \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

### Rješenje

Tačka A je izložena normalnom naponu usljed savijanja silom  $P_1$  i tangencijalnom naponu usljed smicanja silom  $P_2$ .

a) Normalni (zatezni) naponi - sila  $P_1$

$$\sigma := \frac{-P_1 \cdot L}{I} \cdot \frac{d}{2} = -11.937 \cdot \text{MPa}$$

b) Tangencijalni naponi - smicanje silom  $P_2$

$$\tau := \frac{4P_2}{3A} = 0.318 \cdot \text{MPa}$$

c) Glavni normalni i maksimalni tangencijalni naponi

$$\sigma_1 := \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = 8.482 \times 10^3 \text{ Pa}$$

$$\sigma_2 := \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = -11.945 \cdot \text{MPa}$$

$$\tau_{\text{max}} := \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = 5.977 \cdot \text{MPa}$$

\*\*\*\*\*

Aluminijska cijev ( $E = 70 \text{ GPa}$ ) dužine  $3 \text{ m}$ , vanjskog prečnika  $d_1 = 100 \text{ mm}$  i unutrašnjeg prečnika  $d_2 = 80 \text{ mm}$  zglobno je oslonjena na oba kraja i opterećena na izvijanje silom  $F$ . Odredi kritičnu silu  $F$  ako je granica tečenja  $R_{eH} = 150 \text{ MPa}$  i stepen sigurnosti protiv izvijanja i pojave plastičnih deformacija jednak  $2$ .

$$L := 3 \text{ m}$$

$$E := 70 \text{ GPa}$$

$$d_1 := 100 \text{ mm}$$

$$d_2 := 80 \text{ mm}$$

$$A := \frac{(d_1^2 - d_2^2)\pi}{4} = 2.827 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2 \quad I := \frac{(d_1^4 - d_2^4)\pi}{64} = 2.898 \times 10^6 \cdot \text{mm}^4$$

$$R_{eH} := 150 \text{ MPa}$$

zglob na oba kraja:

$$k := 1$$

$$S := 2$$

Rješenje

Kritična sila određuje prema obrascu

$$F_{kr} := \frac{E \cdot \pi^2 \cdot I}{S(kL)^2} = 0.111 \cdot \text{MN}$$

Provjera napona usljed sabijanja/pritiska

$$\sigma := \frac{F_{kr}}{A} = 39.341 \cdot \text{MPa}$$

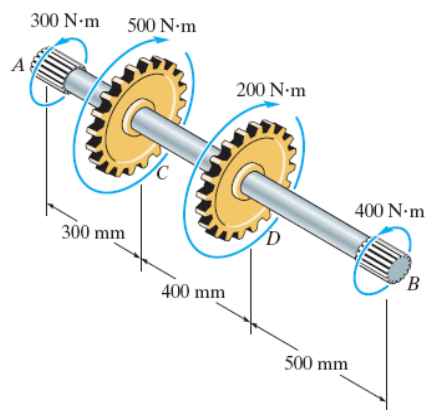
$$\sigma < \frac{R_{eH}}{S} = 75 \text{MPa}$$

pa kritična sila odgovara onoj prema proračunu na izvijanje.

\*\*\*\*\*

## ISPIT 03.07.2012 - GRUPA B

\*\*\*\*\*



Šuplje čelično vratilo vanjskog prečnika 40 mm i debljine zida 10 mm, opterećeno je momentima uvijanja kao na slici desno. Odredi ugao uvijanja u presjeku B u odnosu na presjek A, te raspored napona po poprečnom presjeku na kraju B.

$$d_1 := 40\text{mm}$$

$$t := 10\text{mm}$$

$$d_2 := d_1 - 2t \quad I_o := \frac{(d_1^4 - d_2^4)\pi}{32} = 2.356 \times 10^5 \cdot \text{mm}^4 \quad W_o := \frac{I_o}{\frac{d_1}{2}} = 1.178 \times 10^4 \cdot \text{mm}^3$$

$$E := 210\text{GPa}$$

$$\nu := 0.33 \quad G := \frac{E}{2(1 + \nu)} = 78.947 \cdot \text{GPa}$$

$$T_A := 300\text{N}\cdot\text{m} \quad L_{AC} := 300\text{mm}$$

$$T_C := -500\text{N}\cdot\text{m} \quad L_{CD} := 400\text{mm}$$

$$T_D := -200\text{N}\cdot\text{m} \quad L_{DB} := 500\text{mm}$$

$$T_{AC} := T_A = 300 \cdot \text{N}\cdot\text{m} \quad T_{CD} := T_{AC} + T_C = -200 \cdot \text{N}\cdot\text{m} \quad T_{DB} := T_{CD} + T_D = -400 \cdot \text{N}\cdot\text{m}$$

### Rješenje

- a) Ugao uvijanja u presjeku B u odnosu na A jednak je zbiru pojedinačnih uglova uvijanja

$$\varphi_{AC} := \frac{T_{AC} \cdot L_{AC}}{G \cdot I_o} = 0.277^\circ$$

$$\varphi_{CD} := \frac{T_{CD} \cdot L_{CD}}{G \cdot I_o} = -0.246^\circ$$

$$\varphi_{DB} := \frac{T_{DB} \cdot L_{DB}}{G \cdot I_O} = -0.616 \cdot ^\circ$$

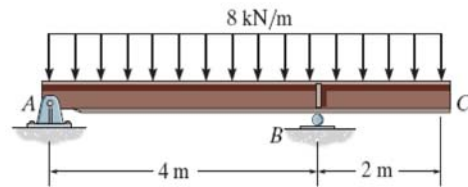
$$\varphi := \varphi_{AC} + \varphi_{CD} + \varphi_{DB} = -0.585 \cdot ^\circ \quad (\text{smjer uvijanja suprotno od djelovanja } T_A)$$

- b) Tangencijalni napon se linearno mijenja od najmanje vrijednosti na unutrašnjem prečniku do najveće na spoljašnjem

$$\tau_{\max} := \frac{|T_{DB}|}{W_O} = 33.953 \cdot \text{MPa} \quad \tau_{\min} := \tau_{\max} \cdot \frac{d_2}{d_1} = 16.977 \cdot \text{MPa}$$

\*\*\*\*\*

Drvena gređa pravougaonog poprečnog presjeka, širine  $b$  i visine  $h = 1.2b$ , opterećena je kao na slici desno. Odrediti dimenzije gređe, ako je dozvoljeni normalni napon  $\sigma_{\text{doz}} = 10 \text{ MPa}$ , a dozvoljeni tangencijalni napon  $\tau_{\text{doz}} = 0.8 \text{ MPa}$ .



$$q := 8 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = 0.144 \cdot b^4$$

$$\sigma_{\text{doz}} := 10 \text{ MPa}$$

$$L_{AB} := 4 \text{ m}$$

$$A = bh = 1.2b^2$$

$$\tau_{\text{doz}} := 0.8 \text{ MPa}$$

$$L_{BC} := 2 \text{ m}$$

### Rješenje

Posmatrajmo raspodjelu transferzalnih sila i momenata savijanja za gređu ABC.

Reakcije u osloncima A i B (pretpostavlja se da sile  $F_A$  i  $F_B$  djeluju prema gore).



$$\sum_i F_i = 0 \quad F_A - q \cdot (L_{AB} + L_{BC}) + F_B = 0 \quad (1)$$

$$\sum_i M_A = 0 \quad \frac{q \cdot (L_{AB} + L_{BC})^2}{2} - F_B \cdot L_{AB} = 0 \quad (2)$$

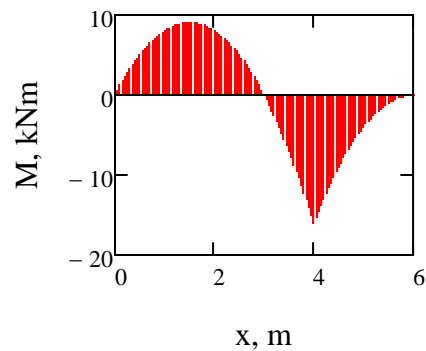
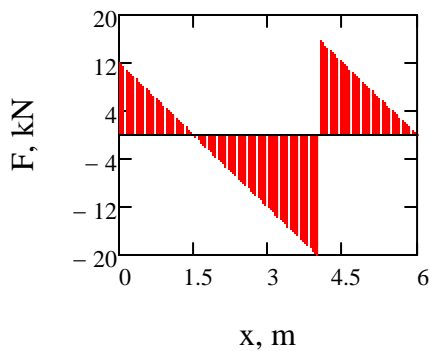
Iz (2) slijedi:

$$F_B := \frac{q \cdot (L_{AB} + L_{BC})^2}{2 \cdot L_{AB}} = 36 \cdot \text{kN}$$

Iz (1) slijedi:

$$F_A := q \cdot (L_{AB} + L_{BC}) - F_B = 12 \cdot \text{kN}$$

Dijagrami momenata savijanja i sila



Maksimalni moment savijanja je za :  $x_{\max} := L_{AB} = 4 \text{ m}$

pa se dobija:  $M_{\max} := |M(x_{\max})| = 16 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$

Dimenzionisanje na osnovu najvećeg momenta savijanja

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot \frac{h}{2}}{I} = \frac{M_{\max} \cdot 0.6b}{0.144 \cdot b^4} < \sigma_{\text{doz}}$$

$$b := \sqrt[3]{\frac{0.6M_{\max}}{0.144 \cdot \sigma_{\text{doz}}}} = 188.207 \cdot \text{mm}$$

Provjera tangencijalnog napona:

Maksimalna transferzalna sila (po intenzitetu):  $F_{\max} := |F_{\text{tr}}(x_{\max})| = 20 \cdot \text{kN}$

$$A := 1.2 \cdot b^2 = 4.251 \times 10^4 \cdot \text{mm}^2$$

$$\tau_{\max} := \left| \frac{3F_{\max}}{2A} \right| = 0.706 \cdot \text{MPa} \quad \tau_{\max} < \tau_{\text{doz}}$$

ili

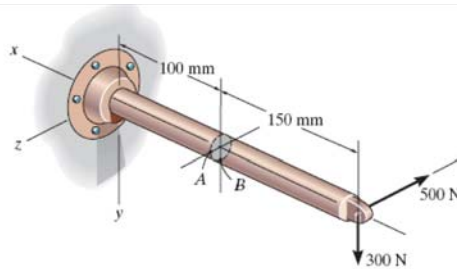
$$b := \sqrt{\frac{3F_{\max}}{2\tau_{\text{doz}}}} = 193.649 \cdot \text{mm}$$

pa dimenzija 188.2 mm zadovoljava.

\*\*\*\*\*

Za dio na slici desno cilindričnog poprečnog presjeka prečnika 40 mm u tački A odrediti:

- tangencijalne napone,
- normalne napone,
- glavne normalne i maksimalne tangencijalne napone.



$$L := 150 \text{ mm} \quad P_1 := 500 \text{ N} \quad P_2 := 300 \text{ N}$$

$$d := 40 \text{ mm}$$

$$I := \frac{d^4 \cdot \pi}{64} = 1.257 \times 10^5 \cdot \text{mm}^4 \quad A := \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

### Rješenje

Tačka A je izložena normalnom naponu usljed savijanja silom  $P_1$  i tangencijalnom naponu usljed smicanja silom  $P_2$ .

a) Normalni (zatezni) naponi - sila  $P_1$

$$\sigma := \frac{-P_1 \cdot L}{I} \cdot \frac{d}{2} = -11.937 \cdot \text{MPa}$$

b) Tangencijalni naponi - smicanje silom  $P_2$

$$\tau := \frac{4P_2}{3A} = 0.318 \cdot \text{MPa}$$

c) Glavni normalni i maksimalni tangencijalni naponi

$$\sigma_1 := \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = 8.482 \times 10^3 \text{ Pa}$$

$$\sigma_2 := \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = -11.945 \cdot \text{MPa}$$

$$\tau_{\text{max}} := \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = 5.977 \cdot \text{MPa}$$

\*\*\*\*\*

Aluminijska cijev ( $E = 70 \text{ GPa}$ ) dužine  $3 \text{ m}$ , vanjskog prečnika  $d_1 = 100 \text{ mm}$  i unutrašnjeg prečnika  $d_2 = 80 \text{ mm}$  uklještena je na oba kraja i opterećena na izvijanje silom  $F$ . Odredi kritičnu silu  $F$  ako je granica tečenja  $R_{eH} = 150 \text{ MPa}$  i stepen sigurnosti protiv izvijanja i pojave plastičnih deformacija jednak  $2$ .

$$L := 3 \text{ m}$$

$$E := 70 \text{ GPa}$$

$$d_1 := 100 \text{ mm}$$

$$d_2 := 80 \text{ mm}$$

$$A := \frac{(d_1^2 - d_2^2)\pi}{4} = 2.827 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

$$I := \frac{(d_1^4 - d_2^4)\pi}{64} = 2.898 \times 10^6 \cdot \text{mm}^4$$

$$R_{eH} := 150 \text{ MPa}$$

uključenje na oba kraja:  $k := 0.5$

$$S := 2$$

## Rješenje

Kritična sila određuje prema obrascu

$$F_{kr} := \frac{E \cdot \pi^2 \cdot I}{S (kL)^2} = 0.445 \cdot \text{MN}$$

Provjera napona usljed sabijanja/pritiska

$$\sigma := \frac{F_{kr}}{A} = 157.365 \cdot \text{MPa} \qquad \sigma > \frac{R_{eH}}{S} = 75 \text{MPa}$$

pa se kritična sila određuje prema naponu tečenja

$$F_{kr} := \frac{R_{eH}}{S} \cdot A = 212.058 \cdot \text{kN}$$

\*\*\*\*\*