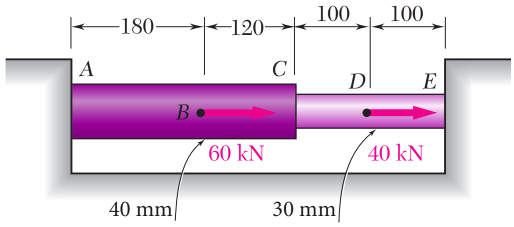
1. Dvije cilindrične šipke AC, izrađene od čelika ($E_c = 210$ GPa), i CE, izrađene od bronze ($E_b = 110$ GPa), spojene se u tački C i uklještene u osloncima A i E. Za opterećenje prikazano na slici desno odrediti:

   a) Reakcije oslonaca A i E,

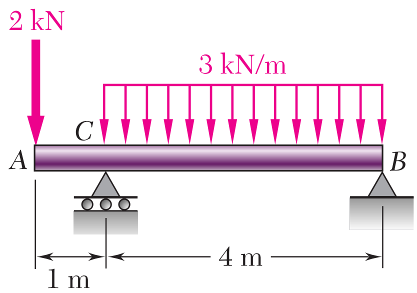
   b) Pomjeranje tačke C.

   Šipke su kružnog poprečnog presjeka s prečnicima datim na slici.



(27+8=35%)

2. Za gredu kružnog poprečnog presjeka opterećenu kao na slici desno odrediti dimenzije poprečnog presjeka grede. Dozvoljeni napon na savijanje je $\sigma_{\mathrm{doz}} = 250$ MPa, a dozvoljeni tangencijalni napon je $\tau_{\mathrm{doz}} = 100$ MPa.



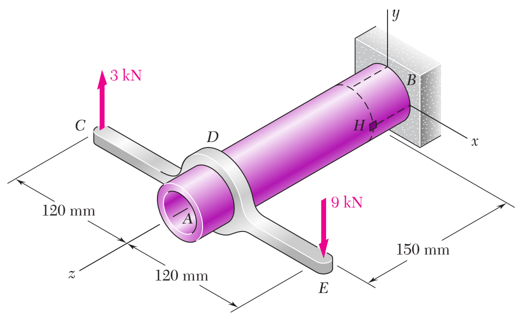
(30%)

3. Za dio na slici desno u tački H odrediti:

   a) tangencijalne napone,

   b) normalne napone.

   usljed djelovanja sile 3 kN. Unutrašnji prečnik cijevi je $d_1 = 40$ mm, a vanjski $d_2 = 30$ mm.



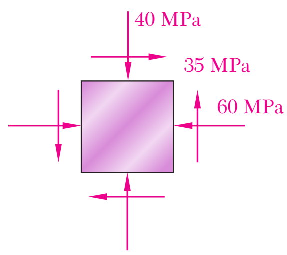
(20%)

4. Za element napona na slici desno odrediti stepen sigurnosti protiv razaranja koristeći:

   a) teoriju najvećeg tangencijalnog napona,

   b) teoriju najvećeg specifičnog deformacionog rada.

   Materijal ima granicu tečenja $R_{eH} = 200$ MPa.



(15%)

Vrijeme izrade - 135 minuta

ISPIT 25.09.2012 - GRUPA A - RJEŠENJA

1. ZADATAK

Podaci:

$L_{AB} := 180mm$ $d_{AC} := 40mm$ $F_B := 60kN$ $E_{AC} := 210GPa$

$L_{BC} := 120mm$ $d_{CE} := 30mm$ $F_D := 40kN$ $E_{CE} := 110GPa$

$L_{CD} := 100mm$

$L_{DE} := 100mm$

$$A_{AC} := \frac{d_{AC}^2 \cdot \pi}{4} = 1.257 \times 10^3 \cdot mm^2 \qquad A_{CE} := \frac{d_{CE}^2 \cdot \pi}{4} = 706.858 \cdot mm^2$$

Rješenje

a)

Dati sistem je statički neodređen s obzirom da imamo dvije nepoznate reakcije oslonaca i samo jednu jednačinu ravnoteže. Stoga se postavlja i dodatna jednačina kompatibilnosti (pomjeranja u osloncima su jednaka nuli). Pretpostavljajući da obje reakcije oslonaca na šip djeluju prema desno, imamo

$$\sum_i F_i = 0 \qquad F_A + F_E + F_B + F_D = 0 \qquad (1)$$

Dodatna jednačina kompatibilnosti je: $\delta_A = \delta_E = 0$ (2)

Zadatak se sada može riješiti na dva načina, i to korištenjem dijagrama sila koji vladaju u šipki, ili metodom superpozicije.

Rješenje pomoću dijagrama sila

Uzimajući pretpostavljani smjer sila u osloncima može se nacrtati dijagram sila po kojem je dio šipke *AB* napregnut je silom $-F_A$, dio *BD* silom $-(F_A + F_B)$ i dio *DE* silom $-(F_A + F_B + F_D)$ i silom F_E, a ukupno izduženje je prema uslovu kompatibilnosti jednako nuli.

Napomena: Ukoliko se uzme da u štapu DE djeluje sila $-(F_A + F_B + F_D)$ jednačina kompatibilnosti direktno daje vrijednost F_A, a onda se iz (1) dobija FA. U suprotnom treba riješiti sistem jednačina (1) i jednfačine kompatibilnosti.

$$\delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} + \delta_{DE} = \frac{F_{AB} \cdot L_{AB}}{E_{AB} \cdot A_{AB}} + \frac{F_{BC} \cdot L_{BC}}{E_{BC} \cdot A_{BC}} + \frac{F_{CD} \cdot L_{CD}}{E_{CD} \cdot A_{CD}} + \frac{F_{DE} \cdot L_{DE}}{E_{DE} \cdot A_{DE}} = 0$$

$$\frac{-F_A \cdot L_{AB}}{E_{AC} \cdot A_{AC}} + \frac{-(F_A + F_B) \cdot L_{BC}}{E_{AC} \cdot A_{AC}} + \frac{-(F_A + F_B) \cdot L_{CD}}{E_{CE} \cdot A_{CE}} + \frac{-(F_A + F_B + F_D) \cdot L_{DE}}{E_{CE} \cdot A_{CE}} = 0 \qquad (2)$$

Iz (2) se direktno dobija F_A:

$$F_A := -\frac{A_{AC} \cdot E_{AC} \cdot F_B \cdot L_{CD} + A_{AC} \cdot E_{AC} \cdot F_B \cdot L_{DE} + A_{AC} \cdot E_{AC} \cdot F_D \cdot L_{DE} + A_{CE} \cdot E_{CE} \cdot F_B \cdot L_{BC}}{A_{AC} \cdot E_{AC} \cdot L_{CD} + A_{AC} \cdot E_{AC} \cdot L_{DE} + A_{CE} \cdot E_{CE} \cdot L_{AB} + A_{CE} \cdot E_{CE} \cdot L_{BC}} = -62$$

(pogrešno prepostavljen smjer - sila djeluje nalijevo, tj. zateže štap)

Iz (1) se dobija:

$$F_E := -F_A - F_B - F_D = -37.164 \cdot kN$$

(pogrešno prepostavljen smjer - sila djeluje nadesno, tj. pritišće štap)

b) Pomjeranje tačke *C* jednako je zbiru deformacija dijela *AB* i dijela *BC*, pa je

$$\delta_C = \delta_{AB} + \delta_{BC} = \frac{-F_A \cdot L_{AB}}{E_{AC} \cdot A_{AC}} + \frac{-(F_A + F_B) \cdot L_{BC}}{E_{AC} \cdot A_{AC}}$$

$$\delta_C := \frac{-F_A \cdot L_{AB}}{E_{AC} \cdot A_{AC}} + \frac{-(F_A + F_B) \cdot L_{BC}}{E_{AC} \cdot A_{AC}} = 0.044 \cdot mm$$ (tačka *C* se pomjera udesno)

****

2. ZADATAK

Podaci:

$L_{AC} := 1m$ $\quad q := 3\frac{kN}{m}$ $\quad F_A := 2kN$ $\quad \sigma_{doz} := 250MPa$

$L_{CB} := 4m$ $\quad \tau_{doz} := 100MPa$

$I = \frac{d^4 \cdot \pi}{64}$ $\quad A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

Rješenje

a)

Posmatrajmo raspodjelu transferzalnih sila i momenata savijanja za gredu *ACB*.

Reakcije u osloncima C i *B* (pretpostavlja se da sile F_C i F_B djeluju prema gore).

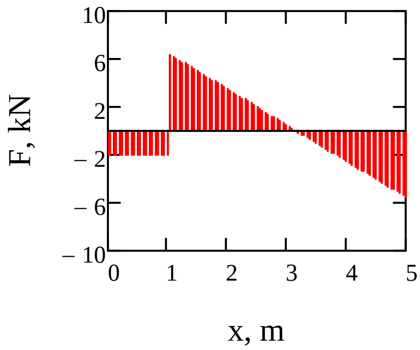
$$\sum_i F_i = 0 \qquad -F_A + F_C - q \cdot L_{CB} + F_B = 0 \qquad (1)$$

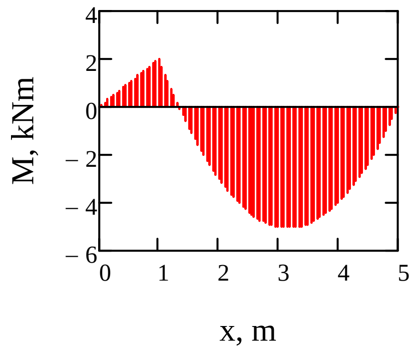
$$\sum_i M_i = 0 \qquad F_A \cdot L_{AC} - q \cdot L_{CB} \cdot \frac{L_{CB}}{2} + F_B \cdot L_{CB} = 0 \qquad (2)$$

Iz (2) sijedi: $$F_B := -\frac{F_A \cdot L_{AC} - q \cdot L_{CB} \cdot \frac{L_{CB}}{2}}{L_{CB}} = 5.5 \cdot kN$$

Iz (1) slijedi: $$F_C := F_A + q \cdot L_{CB} - F_B = 8.5 \cdot kN$$

Dijagrami momenata savijanja i sila





Maksimalni momenti savijanja je ispod kontinuiranog opterećenja i maksimalna vrijednos
nalazi se na mjestu gdje je transferzalna sila jednaka nuli, a ta pozicija se odbija na osnc
izraza (vidi dijagram transferzalnih sila)

$$\left(-F_A + F_C\right) - q \cdot \left(x_{max} - L_{AC}\right) = 0 \quad \text{tj.} \qquad x_{max} := \frac{-F_A + F_C}{q} + L_{AC} = 3.167\,m$$

pa se dobija: $$M_{max} := \left|M\left(x_{max}\right)\right| = 5.042 \cdot kN \cdot m$$

Dimenzionisanje na osnovu najvećeg momenta savijanja

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I}\cdot\frac{d}{2} = \frac{M_{max}}{\left(\frac{d^4\cdot\pi}{64}\right)}\cdot\frac{d}{2} = \frac{32M_{max}}{d^3\cdot\pi} \le \sigma_{doz}$$

$$d := \sqrt[3]{\frac{32M_{max}}{\sigma_{doz}\cdot\pi}} = 59.004\cdot mm$$

Provjera tangencijalnog napona:

Maksimalna transferzalna sila (po intenzitetu): $F_{max} := F_{tr}\left(L_{AC}\cdot 1.00001\right) = 6.5\cdot k$

$$A := \frac{d^2\cdot\pi}{4} = 2.734\times 10^3\cdot mm^2$$

$$\tau_{max} := \left|\frac{4F_{max}}{3A}\right| = 3.17\cdot MPa \qquad \tau_{max} < \tau_{doz}$$

ili

$$d_2 := \sqrt{\frac{4F_{max}}{3\tau_{doz}}} = 9.309\cdot mm$$

pa dimenzija 59 mm zadovoljava.

****

3. ZADATAK

Podaci:

$F := 3kN \qquad l_1 := 120mm \quad l_2 := 150mm$

$d_1 := 40\text{mm}$ $\quad d_2 := 30\text{mm}$

$$I := \frac{\left(d_1^{\,4} - d_2^{\,4}\right)\cdot\pi}{64} = 8.59 \times 10^4 \cdot \text{mm}^4$$

$$A := \frac{\left(d_1^{\,2} - d_2^{\,2}\right)\cdot\pi}{4} = 549.779\cdot\text{mm}^2$$

$$W_o := \frac{2I}{\frac{d_1}{2}} = 8.59 \times 10^3 \cdot \text{mm}^3$$

$T := F\cdot l_1 = 360\cdot\text{N}\cdot\text{m}$

$M := F\cdot l_2 = 450\cdot\text{N}\cdot\text{m}$

Rješenje

Sila F=3 kN u presjeku kojem pripada tačka H uzrokuje napone usljed momenta uvijanja T=F*120mm, momenta savijanja M=F*150mm i sile smicanja F, pa su pojedinačni naponi jednaki:

a) tangencijalni naponi:

- usljed momenta uvijanja - u smjeru negativne y ose

$$\tau_u := \frac{T}{W_o} = 41.908\cdot\text{MPa}$$

- usljed sile smicanja - u smjeru pozitivne y ose

$$\tau_s := \frac{4}{3}\cdot\frac{F}{A}\cdot\left[\frac{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2} + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}\right] = 10.768\cdot\text{MPa}$$

b) normalni naponi:

- usljed momenta savijanja - jednak nuli, jer se tačka nalazi na nautralnoj

****

4. ZADATAK

Podaci:

$\sigma_x := -60\text{MPa}$ $\quad R_{eH} := 200\text{MPa}$

$\sigma_y := -40\text{MPa}$

$\tau_{xy} := 35MPa$

Rješenje

Da bismo primijenili zadate teorije neophodno je prvo izračunati glavne normalne napone

$$\sigma_1 := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -13.599 \cdot MPa$$

$$\sigma_2 := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -86.401 \cdot MPa$$

a) Teorija najvećeg tangencijalnog napona (glavni naponi su istog znaka)

$$\sigma_{ekv} := \max\left(\left|\sigma_1\right|, \left|\sigma_2\right|\right) = 86.401 \cdot MPa$$

Stepen sigurnosti je:

$$S := \frac{R_{eH}}{\sigma_{ekv}} = 2.315$$

b) Teorija najvećeg specifičnog deformacionog rada

$$\sigma_{ekv} := \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2} = 80.467 \cdot MPa$$

Stepen sigurnosti je:

$$S := \frac{R_{eH}}{\sigma_{ekv}} = 2.485$$

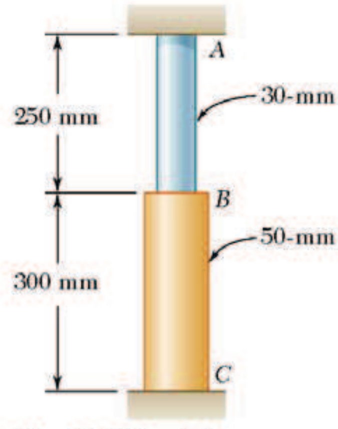
****

1. Dvije cilindrične šipke AB, izrađene od čelika ($E_{AB} = 210$ GPa, $\alpha_c = 11.7 \cdot 10^{-6}$ 1/°C), i BC, izrađene od bronze ($E_{BC} = 110$ GPa, , $\alpha_b = 20.9 \cdot 10^{-6}$ 1/°C), spojene se u tački B i uklještene u osloncima A i C, kao na slici desno. Ukoliko je šipka u početnom trenutku rasterećena i zagrije se 50°C, odrediti

   a) Reakcije oslonaca A i C,

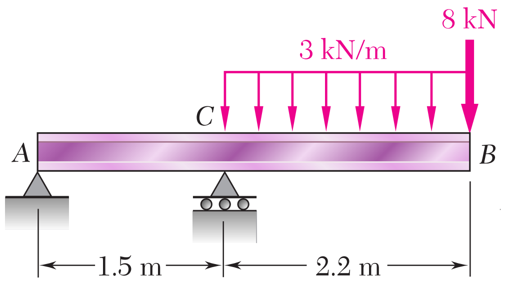
   b) Pomjeranje tačke B.

   Šipke su kružnog poprečnog presjeka s prečnicima datim na slici.



(27+8=35%)

2. Za gredu kvadratnog poprečnog presjeka opterećenu kao na slici desno odrediti dimenzije poprečnog presjeka grede. Dozvoljeni napon na savijanje je $\sigma_{\mathrm{doz}} = 250$ MPa, a dozvoljeni tangencijalni napon je $\tau_{\mathrm{doz}} = 100$ MPa.



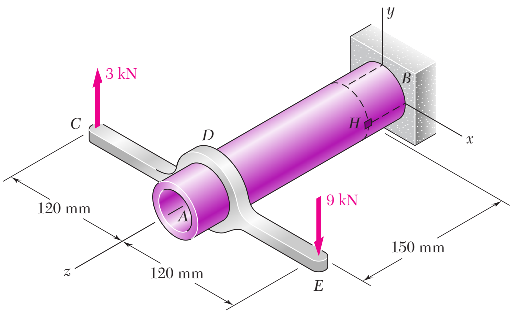
(30%)

3. Za dio na slici desno u tački H odrediti:

   a) tangencijalne napone,

   b) normalne napone.

   usljed djelovanja sile 9 kN. Unutrašnji prečnik cijevi je $d_1 = 45$ mm, a vanjski $d_2 = 35$ mm.



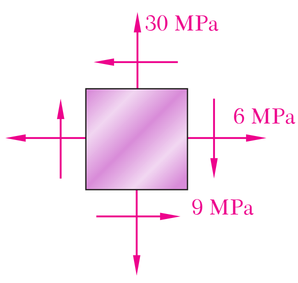
(20%)

4. Za element napona na slici desno odrediti stepen sigurnosti protiv razaranja koristeći:

   a) teoriju najvećeg tangencijalnog napona,

   b) teoriju najvećeg specifičnog deformacionog rada.

   Materijal ima granicu tečenja $R_{eH} = 100$ MPa.



(15%)

Vrijeme izrade - 135 minuta

ISPIT 25.09.2012 - GRUPA B - RJEŠENJA

1. ZADATAK

Podaci:

$L_{AB} := 250mm$ $\quad d_{AB} := 30mm$ $\quad E_{AB} := 210GPa$ $\quad \alpha_{AB} := 11.7 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\Delta°C}$

$L_{BC} := 110mm$ $\quad d_{BC} := 50mm$ $\quad E_{BC} := 110GPa$ $\quad \alpha_{BC} := 20.9 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\Delta°C}$

$$A_{AB} := \frac{d_{AB}^{2} \cdot \pi}{4} = 706.858 \cdot mm^2 \qquad A_{BC} := \frac{d_{BC}^{2} \cdot \pi}{4} = 1.963 \times 10^{3} \cdot mm^2$$

$\Delta T := 50 \cdot \Delta°C$

Rješenje

a)

Dati sistem je statički neodređen s obzirom da imamo nepoznate reakcije oslonaca (koje su jednake po intenzitetu, a supretno po smjeru) bez djelovanja sila, ali s uticajem temperature

Zadatak se može riješiti metodom superpozicije. Ako se pretpostavi da u osloncu *A* sila djeluje prema dole, a u osloncu *C* prema gore i ima vrijednost *F*, onda je ukupno skraćenje šipki tom silom jednako izduženju prouzrokovanom djelovanjem temperature (što odgovara uslovu kompatibilnosti da su pomjeranja u osloncima jednaka nuli), odnosno

$$\delta_F = \delta_{AB} + \delta_{BC} = \frac{F \cdot L_{AB}}{E_{AB} \cdot A_{AB}} + \frac{F \cdot L_{BC}}{E_{BC} \cdot A_{BC}}$$

$$\delta_T := L_{AB} \cdot \alpha_{AB} \cdot \Delta T + L_{BC} \cdot \alpha_{BC} \cdot \Delta T$$

$\delta_F = \delta_T$ pa se dobija sila *F*

$$F := \frac{L_{AB} \cdot \alpha_{AB} \cdot \Delta T + L_{BC} \cdot \alpha_{BC} \cdot \Delta T}{\frac{L_{AB}}{E_{AB} \cdot A_{AB}} + \frac{L_{BC}}{E_{BC} \cdot A_{BC}}} = 119.08 \cdot kN$$

$F_A = F_C = F$

b) Pomjeranje tačke *B* jednako je zbiru pomjeranja usljed sile F i djelovanja temperature

$$\delta_B := \frac{-F \cdot L_{AB}}{E_{AB} \cdot A_{AB}} + \alpha_{AB} \cdot L_{AB} \cdot \Delta T = -0.054 \cdot mm$$ (pomjeranje prema gore)

****

2. ZADATAK

Podaci:

$L_{AC} := 1.5m$ $\quad q := 3\,\frac{kN}{m}$ $\quad F_B := 8kN$ $\quad \sigma_{doz} := 200MPa$

$L_{CB} := 2.2m$ $\quad \tau_{doz} := 100MPa$

$I = \frac{b^4}{12}$ $\quad A = b^2$

Rješenje

a)

Posmatrajmo raspodjelu transferzalnih sila i momenata savijanja za gredu *ACB*.

Reakcije u osloncima *A* i *C* (pretpostavlja se da sile F_A i F_C djeluju prema gore).

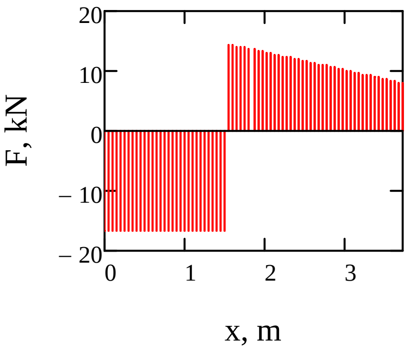
$$\sum_i F_i = 0 \qquad F_A + F_C - q \cdot L_{CB} - F_B = 0 \qquad (1)$$

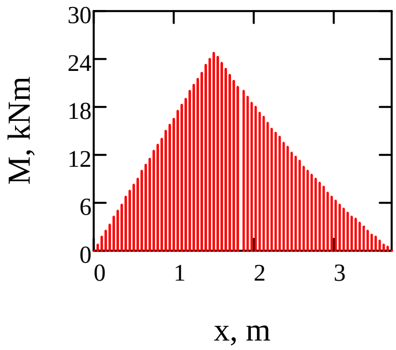
$$\sum_i M_i = 0 \qquad F_C \cdot L_{AC} - q \cdot L_{CB} \cdot \left(\frac{L_{CB}}{2} + L_{AC}\right) - F_B \cdot \left(L_{AC} + L_{CB}\right) = 0 \qquad (2)$$

Iz (2) sijedi: $$F_C := \frac{q \cdot L_{CB} \cdot \left(\frac{L_{CB}}{2} + L_{AC}\right) + F_B \cdot \left(L_{AC} + L_{CB}\right)}{L_{AC}} = 31.173 \cdot kN$$

Iz (1) slijedi: $$F_A := -F_C + q \cdot L_{CB} + F_B = -16.573 \cdot kN$$ (pogrešno pretpostavljen smjer)

Dijagrami momenata savijanja i sila





Maksimalni momenti savijanja je u osloncu *C*

pa se dobija: $M_{max} := \left|M\left(L_{AC}\right)\right| = 24.86 \cdot kN \cdot m$

Dimenzionisanje na osnovu najvećeg momenta savijanja

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_{max}}{\left(\frac{b^4}{12}\right)} \cdot \frac{b}{2} = \frac{6M_{max}}{b^3} \le \sigma_{doz}$$

$$b := \sqrt[3]{\frac{6M_{max}}{\sigma_{doz}}} = 90.686 \cdot mm$$

Provjera tangencijalnog napona:

Maksimalna transferzalna sila (po intenzitetu) je duž dijela *AC*: $F_{max} := \left|F_{tr}\left(L_{AC}\right)\right| = 16.573 \cdot kN$

$$A := b^2 = 8.224 \times 10^3 \cdot mm^2$$

$$\tau_{max} := \left|\frac{3F_{max}}{2A}\right| = 3.023 \cdot MPa \qquad \tau_{max} < \tau_{doz}$$

ili

$$b_2 := \sqrt{\frac{3F_{max}}{2\tau_{doz}}} = 15.767 \cdot mm$$

pa dimenzija 90.69 mm zadovoljava.

****

3. ZADATAK

Podaci:

$F := 9kN$ $\quad l_1 := 120mm \quad l_2 := 150mm$

$d_1 := 45mm$ $\quad d_2 := 35mm$

$$I := \frac{\left(d_1^{\,4} - d_2^{\,4}\right)\cdot\pi}{64} = 1.276 \times 10^5 \cdot mm^4$$

$$A := \frac{\left(d_1^{\,2} - d_2^{\,2}\right)\cdot\pi}{4} = 628.319 \cdot mm^2$$

$$W_o := \frac{2I}{\frac{d_1}{2}} = 1.134 \times 10^4 \cdot mm^3$$

$T := F \cdot l_1 = 1.08 \times 10^3 \cdot N \cdot m$

$M := F \cdot l_2 = 1.35 \times 10^3 \cdot N \cdot m$

Rješenje

Sila *F*=3 kN u presjeku kojem pripada tačka *H* uzrokuje napone usljed momenta uvijanja *T*=*F**120mm, momenta savijanja *M*=*F**150mm i sile smicanja *F*, pa su pojedinačni naponi jednaki:

a) tangencijalni naponi:

- usljed momenta uvijanja - u smjeru negativne *y* ose

$$\tau_u := \frac{T}{W_o} = 95.199 \cdot MPa$$

- usljed sile smicanja - u smjeru negativne *y* ose

$$\tau_s := \frac{4}{3} \cdot \frac{F}{A} \cdot \left[\frac{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} \right] = 28.354 \cdot \mathrm{MPa}$$

b) normalni naponi:

- usljed momenta savijanja - jednak nuli, jer se tačka nalazi na nautralnoj osi.

****

4. ZADATAK

Podaci:

$\sigma_x := 6\mathrm{MPa}$ $\quad$ $R_{eH} := 100\mathrm{MPa}$

$\sigma_y := 30\mathrm{MPa}$

$\tau_{xy} := 9\mathrm{MPa}$

Rješenje

Da bismo primijenili zadate teorije neophodno je prvo izračunati glavne normalne napone

$$\sigma_1 := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 33 \cdot \mathrm{MPa}$$

$$\sigma_2 := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 3 \cdot \mathrm{MPa}$$

a) Teorija najvećeg tangencijalnog napona (glavni naponi su istog znaka)

$$\sigma_{ekv} := \max\left(\left|\sigma_1\right|, \left|\sigma_2\right|\right) = 33 \cdot \mathrm{MPa}$$

Stepen sigurnosti je:

$$S := \frac{R_{eH}}{\sigma_{ekv}} = 3.03$$

b) Teorija najvećeg specifičnog deformacionog rada

$$\sigma_{ekv} := \sqrt{\sigma_1^{\,2} - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^{\,2}} = 31.607 \cdot \text{MPa}$$

Stepen sigurnosti je:

$$S := \frac{R_{eH}}{\sigma_{ekv}} = 3.164$$

****