

INTEGRALI ZADACI (VII – DEO)
Integracija nekih trigonometrijskih funkcija

Daćemo vam savete za četiri tipa integrala trigonometrijskih funkcija.

A) Integrali tipa $\int R(\sin x, \cos x) dx$

To su integrali u kojima $\sin x$ i $\cos x$ nemaju stepene. **Uvodimo smenu:** $\boxed{\tg \frac{x}{2} = t}$

Iz smene ćemo upotrebom formula iz trigonometrije dobiti:

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{\sin x}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cancel{\cos^2 \frac{x}{2}} \left(2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right)}{\cancel{\cos^2 \frac{x}{2}} \left(\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} + 1 \right)} = \frac{2 \tg \frac{x}{2}}{\tg^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{t^2 + 1} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cancel{\cos^2 \frac{x}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right)}{\cancel{\cos^2 \frac{x}{2}} \left(\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} + 1 \right)} = \frac{1 - \tg^2 \frac{x}{2}}{1 + \tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}$$

Kako je $\tg \frac{x}{2} = t$ onda je $\frac{x}{2} = \arctgt \rightarrow x = 2 \arctgt \rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

Da rezimiramo:

Kad uzimamo smenu $\boxed{\tg \frac{x}{2} = t}$ menjamo:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx &= \frac{2}{1+t^2} dt\end{aligned}}$$

Smena $\tg \frac{x}{2} = t$ je *univerzalna trigonometrijska smena* i može se uvek upotrebljavati, al je lakše, zavisno od izgleda podintegralne funkcije koristiti i sledeću smenu:

B) Integrali tipa $\int R(\operatorname{tg}x)dx$ i $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cdot \cos x)dx$

To su integrali koji mogu da se sredjivanjem svedu sve na $\operatorname{tg}x$ ili kod kojih se javljaju stepeni kod sinusa i kosinusa i proizvod $\sin x \cdot \cos x$.

Uvodimo smenu: $\boxed{\operatorname{tg}x = t}$

Iz smene ćemo upotrebom formula iz trigonometrije dobiti:

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{\sin^2 x}{1} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \text{svuda dodamo } \cos^2 x = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x &= \frac{\cos^2 x}{1} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \text{svuda dodamo } \cos^2 x = \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{1+t^2} \\ \sin x \cdot \cos x &= \frac{\sin x \cdot \cos x}{1} = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{t}{1+t^2} \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t &\rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t \rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt\end{aligned}$$

Da rezimiramo:

Kad uzimamo smenu $\boxed{\operatorname{tg}x = t}$ menjamo:

$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ $\sin x \cdot \cos x = \frac{t}{1+t^2}$ $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$
--

C) Integrali tipa $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

Razlikovaćemo dve situacije:

i) Ako su m i n celi brojevi

ii) Ako su m i n racionalni brojevi

U obe situacije uvodimo smenu $\boxed{\sin x = u}$ ili $\cos x = u$ ali se u situaciji i) kad su m i n **celi brojevi** integral svede na integraciju racionalne funkcije, a u situaciji ii) kad su m i n **racionalni brojevi** svede na integral diferencijalnog binoma.

D) Integrali tipa $\int \sin ax \cos bx dx; \int \sin ax \sin bx dx; \int \cos ax \cos bx dx;$

Najpre iskoristimo trigonometrijske formulice:

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$$

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]$$

A zatim ih rastavimo na dva integrala od kojih svaki rešavamo lakom smenom.

NEKI TRIKOVI:

Ako je u integralu izraz $\sqrt{a^2 - x^2}$, onda je zgodno uzeti smenu $x = a \sin t$ jer tako uništavamo koren

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} = \sqrt{a^2 - a^2 (\sin t)^2} = a \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \cos t$$

Ako je u integralu dat izraz $\sqrt{x^2 + a^2}$, onda je zgodno uzeti smenu $x = a \operatorname{tg} t$ jer tako uništavamo koren

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{(a \operatorname{tg} t)^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 t + a^2} = a \sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1} = a \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 1} = a \sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}} = a \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = a \frac{1}{\cos t}$$

PRIMERI

primer 1. $\int \frac{dx}{\sin x} = ?$

Ovaj integral smo već rešavali u fajlu **Integrali zadaci I- deo** bez trigonometrijskih smena. Videćemo da je mnogo

elegantnije iskoristiti smenu $\boxed{\tg \frac{x}{2} = t}$. Dakle:

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ dx &= \frac{2}{1+t^2} dt\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln\left|\tg \frac{x}{2}\right| + C$$

primer 2. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx = ?$

I ovde ćemo koristiti smenu $\tg \frac{x}{2} = t$ jer $\sin x$ i $\cos x$ nemaju stepene.

Imamo gotove smene:

$$\begin{aligned}\tg \frac{x}{2} &= t \\ dx &= \frac{2}{1+t^2} dt \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}$$

koje menjamo u integralu:

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx = \int \frac{2 - \frac{2t}{1+t^2}}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{\frac{2+2t^2-2t}{1+t^2}}{\frac{2+2t^2+1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 4 \int \frac{t^2-t+1}{(t^2+3)(1+t^2)} dt$$

Ovo je integral racionalne funkcije. Izvlačimo *na stranu* i radimo:

Pazite: oba izraza u imenici su nerazloživa...

$$\frac{t^2 - t + 1}{(t^2 + 3)(1+t^2)} = \frac{At + B}{t^2 + 3} + \frac{Ct + D}{1+t^2} \dots / \cdot (t^2 + 3)(1+t^2)$$

$$t^2 - t + 1 = At + At^3 + B + Bt^2 + Ct^3 + 3Ct + Dt^2 + 3D$$

Neko piše i identički jednako umesto jednako... U suštini je po nama sve jedno al vi radite kako kaže vaš profesor...

$$t^2 - t + 1 \equiv (A+C)t^3 + (B+D)t^2 + (A+3C)t + B + 3D$$

Uporedujemo :

$$A + C = 0, B + D = 1, A + 3C = -1 \text{ i } B + 3D = 1$$

Rešimo ovo sistemče (ukombinujemo 1. i 3. jednačinu, a 2. i 4.) i dobijamo:

$$A = 1/2, B = 1, C = -1/2, D = 0$$

Vratimo se da vidimo kako će da ide razlaganje:

$$4 \int \frac{t^2 - t + 1}{(t^2 + 3)(1+t^2)} dt = 4 \int \frac{\frac{1}{2}t + 1}{t^2 + 3} dt + 4 \int \frac{-\frac{1}{2}t}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{t+2}{t^2 + 3} dt - 2 \int \frac{t}{1+t^2} dt$$

Rešavanje ovih integrala smo detaljno objasnili u prethodnim fajlovima...

$$= \ln \frac{t^2 + 3}{1+t^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \boxed{\ln \frac{3 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C}$$

primer 3. $I = \int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x} = ?$

Često se integral u radu obeležava nekim slovom , najčešće sa $I, J \dots$

Razlog je da ga ne bi posle vazdan prepisivali, već samo upišemo $I, J \dots$

I ovaj integral ćemo rešiti prvom , univerzalnom smenom $\tg \frac{x}{2} = t$.

$$\tg \frac{x}{2} = t$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

pa je $I = \int \frac{\cancel{dt}}{\left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{\cancel{dt}}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2+2t^2+1-t^2} = \int \frac{1+t^2}{(t^2+3)t} dt$

Integracija racionalne funkcije, izdvojimo podintegralnu funkciju:

$$\frac{1+t^2}{(t^2+3)t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+3} = \frac{At^2+3A+Bt^2+Ct^2}{t(t^2+3)}$$

$$1+t^2 = A(t^2+3) + (Bt+C)t$$

$$1+t^2 = At^2 + 3A + Bt^2 + Ct$$

$$1+t^2 = t^2(A+B) + Ct + 3A$$

$$A+B=1, \quad C=0, \quad 3A=1$$

$$A=1/3, \quad B=2/3, \quad C=0$$

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} + \frac{2}{3} \int \frac{t}{t^2+3} dt = \text{za drugi integral smena } \begin{cases} t^2+3=u \\ tdt=\frac{1}{2}du \end{cases} = \frac{1}{3} \ln|t| + \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} + c$$

$$I = \frac{1}{3} \ln|t| + \frac{1}{3} \ln(t^2+3) + C = \boxed{\frac{1}{3} \ln \left| \tg \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{3} \ln \left(\tg^2 \frac{x}{2} + 3 \right) + C}$$

primer 4. $I = \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = ?$

Kako ovde imamo stepene sinusa i kosinusa, uzećemo drugu smenu $\boxed{\tg x = t}$ pa je:

$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$
$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$
$\sin x \cdot \cos x = \frac{t}{1+t^2}$
$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int \frac{\frac{t}{1+t^2}}{\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{t^4+1}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\
 &= \int \frac{2t}{t^4+1} dt = \int \frac{2t}{(t^2)^2+1} dt \left| \begin{array}{l} t^2 = z \\ 2tdt = dz \end{array} \right| = \int \frac{dz}{z^2+1} = \arctg z + C = \arctg t^2 + C = \arctg (\tg^2 x) + C
 \end{aligned}$$

Ovaj zadatak smo mogli da rešimo i na drugi način, koristeći trigonometrijske formule.

Ideja je da se izraz u imeniocu transformiše. Krenemo od osnovne identičnosti:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \dots / ()^2$$

$$\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{4\sin^2 x \cos^2 x}{2}$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{2 - \sin^2 2x}{2}$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1 + \boxed{1 - \sin^2 2x}}{2}$$

$\boxed{\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1 + \cos^2 2x}{2}}$

Vratimo se u integral...

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\sin x \cos x}{1 + \cos^2 2x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos^2 2x} dx = \int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x} dx \quad \left| \begin{array}{l} \cos 2x = t \\ -\sin 2x \cdot 2dx = dt \\ \sin 2x dx = \frac{dt}{-2} \end{array} \right. = \frac{1}{-2} \int \frac{dt}{1+t^2} \\
 &= \frac{1}{-2} \arctg t + C = \boxed{-\frac{1}{2} \arctg(\cos 2x) + C}
 \end{aligned}$$

primer 5. $\int \sqrt{a^2 - x^2} = ?$

Sećate se ovog integrala?

Rešavali smo ga do sada na dva načina: parcijalnom integracijom i metodom Ostrogradskog.

Po nama je najelegantnije koristiti trikče:

Ako uzmemos smenu $x = a \sin t$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} = \sqrt{a^2 - a^2 (\sin t)^2} = a \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \cos t$$

$$x = a \sin t \rightarrow dx = a \cos t dt$$

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{a^2 - x^2} &= \int a \cos t \cdot a \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\
 &\frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C =
 \end{aligned}$$

Moramo vratiti t iz smene:

$$x = a \sin t \rightarrow \sin t = \frac{x}{a} \rightarrow t = \arcsin \frac{x}{a} \quad \text{i još da sredimo :}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sin 2t &= \frac{1}{2} \cancel{\sin t \cos t} = \sin t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sin \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) \sqrt{1 - \sin^2 \left(\arcsin \frac{x}{a} \right)} = \\
 &= \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{x}{a} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}} = \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Rešenje je: } \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \right) + C = \boxed{\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C}$$