Integrali

VVR Zagreb

December 2, 2008

Primitivna funkcija

Neka je zadana funkcija $f(x)$. Njoj **primitivna funkcija** je $F(x)$ koja ima svojstvo da je

$$F'(x) = f(x).$$

Primjetimo da imamo poznatu derivaciju f neke funkcije F, a mi tražimo tu funkciju F kojoj je f derivacija. Ista funkcija f može imati više primitivnih funkcija. Tako za primitivne funkcije

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2 \\ F(x) &= x^2 + 2 \\ F(x) &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

funkcija f je

$$f(x) = F'(x) = (x^2)' = (x^2 + 2)' = (x^2 - 1)' = 2x.$$

Ako poznajemo jednu primitivnu funkciju F funkcije f onda je i

$$F + C,\ C \in \mathbb{R}$$

takodjer primitivna funkcija od f, tj.

$$(F + C)' = F' = f.$$

C je neodredjena konstanta.
Skup svih primitivnih funkcija F funkcije f označavamo s

$$\int f(x)dx$$

i taj skup se zove neodredjni integral funkcije f. Funkcija $f(x)$ se zove **podintegralna funkcija**.

Kako je

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$$

imamo

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

odnosno

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Tablica elementarnih integrala

$$1. \int d(x+C) = \int dx = x + C$$

$$2. n \neq -1, \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$3. \int x^{-1} dx = \ln|x| + C$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$$

$$10. \int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsinx + C = -arccosx + C.$$

Operacije

Operacije

Integral zbroja funkcija jednak je zbroju integrala. Naime, ako je

$$F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$$

onda je

$$\int (f(x) + g(x))dx =$$

$$= \int (F'(x) + G'(x))dx =$$

$$= \int (F(x) + G(x))'dx =$$

$$= \int d(F(x) + G(x)) = F(x) + G(x) =$$

$$= \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Ako je k konstanta

$$\int kf(x)dx = \int kF'(x)dx = \int (kF(x))'dx =$$

$$= \int d(kF(x)) = kF(x) = k\int f(x)dx.$$

Primjeri: 1. Izračunajte

$$\int (2x + 3x^2 + 3\sqrt{x})dx$$

2. Izračunajte

$$\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = tgx - x + C$$

3. Izračunajte

$$\int (\frac{1}{x} + 1) dx$$

Metoda parcijalne integracije

Vrijedi

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Naime

$$\int d(u(x)v(x)) = u(x)v(x) = \int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx =$$

$$= \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx = \int v(x)du(x) + \int u(x)dv(x)$$

Primjeri: 1.

$$\int \ln x dx =$$

$$u = \ln x, \quad dv = dx$$

$$du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx, \quad v = x$$

$$= x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - x + C.$$

2.

$$n \neq -1, \quad \int x^n \ln x dx =$$

$$u = \ln x, \quad dv = x^n dx$$

$$du = \frac{1}{x}, \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x - \frac{1}{n+1}) + C$$

Izračunajte

$$\int x \ln x dx$$

$$\int x^2 \ln x dx$$

$$\int x^n f(x)dx =$$

ako je $f(x) = \sin x$ ili $f(x) = \cos x$ ili $f(x) = b^x$ onda

$$u = x^n \quad dv = f(x)dv.$$

Tako je
3.

$$\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x + C$$

4.Izračunajte

$$\int xe^x dx$$

5. Izračunajte

$$\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

Metoda supstitucije

Ako je primitivna funkcije F složena funkcija od x imamo

$$F(u(x)) = \int dF(u(x)) = \int F_u(u)u'(x)dx = \int g(u)du.$$

Prvo imamo

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C.$$

Naime, ako je

$$u = f(x)$$

tj.

$$du = f'(x)dx$$

pa je

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C.$$

6. Izračunajte

$$\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$$

$$= -\int -\frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$k \neq -1 \quad \int f'(x) f^k(x) dx = \frac{f^{k+1}(x)}{k+1} + C.$$

Naime, ako je

$$u = f(x)$$

tj.

$$du = f'(x) dx$$

pa je

$$\int f'(x) f^k(x) dx = \int u^k du = \frac{u^{k+1}}{k+1} + C = \frac{f^{k+1}}{k+1} + C.$$

Izračunajte

$$\int 2x(x^2+1)^2 dx$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$$

7. Izračunajte

$$\int \frac{x^4}{(2x^5-7)^2}dx = \frac{1}{10}\int \frac{10x^4}{(2x^5-7)^2}dx = -\frac{1}{10(2x^5-7)} + C$$

8. Izračunajte

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = 0.5 \ln^2 x + C.$$

Integracija racionalnih funkcija

Ako je

$$I = \int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$$

Ako je 1. $n < m$ nazivnik rastavimo na proste faktore.

2. Podintegralnu funkciju rastavimo na elementarne razlomke.
3. Odredimo neodredjene konstante.

9. Izračunajte

$$2\int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{x+1}dx =$$

$$= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

10. Izracunajte

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right) =$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

11. Izracunajte

$$\int \frac{x}{x^3-1}dx$$

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Dobivamo množeći izraz s x^3-1

$$A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1) = x$$

pa iz toga slijedi

$$A + B = 0$$

$$A + C - B = 1$$

$$A - C = 0$$

pa je $A = C = -B = \frac{1}{3}$.

$$\int \frac{x}{x^3-1}dx =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

12. Izračunajte

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C$$

Ako je $m \leq n$ brojnik podijelimo s nazivnikom.

13. Izračunajte

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} dx$$

Integracija iracionalnih funkcija

Ako je R racionalna funkcija od x i $\sqrt[n]{ax+b}$, tj.

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$$

onda uvodimo supstituciju

$$t = (ax+b)^n.$$

14. Izračunajte

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}} =$$

$$x-1=t^2$$

$$dx = 2tdt$$

$$= \int \frac{2t}{1+t}dt = 2\int (1-\frac{1}{1+t})dt =$$

$$= 2(t-\ln(1+t)) + C = 2(\sqrt{x-1} - \ln(1+\sqrt{x-1}) + C.$$

Odredjeni integral

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija na zatvorenom intervalu $[a, b]$ nenegativna, tj.

$$f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b].$$

Računamo površinu P koju zatvara krivulja

$$y = f(x)$$

os x i pravci

$$x = a, \; x = b.$$

Mi ćemo približno računati površinu pomoću n upisanih i n opisanih pravokutnika na slijedeći način.
Prvo, interval $[a, b]$ podijelimo na n jednakih podintervala duljine

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

točkama

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Računamo površinu od n opisanih pravokutnika koja je

$$\bar{P}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

za koju vrijedi

$$\bar{P}_n \geq P.$$

Računamo takodjer površinu od n upisanih pravokutnika koja je

$$\underline{P}_n = \sum_{i=1}^{n} \underline{P}_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$$

za koju vrijedi

$$\underline{P}_n \leq P.$$

Ako je

$$\lim_{n\to\infty} \bar{P}_n = \lim_{n\to\infty} \underline{P}_n = P$$

onda taj broj P zovemo odredjeni integral funkcije f u granicama od a do b i pišemo

$$P = \int_a^b f(x)dx.$$

Označimo

$$P = \int_a^b f(x)dx.$$

$$\int_a^b f(x)dx$$

zovemo odredjeni integral funkcije f u intervalu $[a, b]$ gdje je

- a donja granica integrala
- b gornja granica integrala
- $[a, b]$ interval integracije

A.L.Cauchy (1823) uz pretpostavku da je f neprekidna funkcija na $[a, b]$
B.Riemann (1854) uz pretpostavku da je f ograničena funkcija na $[a, b]$

Primjeri:

Uzimamo da je $a < b$ pa imamo

1.
$$\int_a^b dx = b - a.$$

2. Za $0 \leq a < b$ je $f(x) = x \geq 0$ pa je
$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Za vježbu:

$$\int_1^2 x dx = \frac{3}{2}$$

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

3. Prema dogovoru je

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Newton-Leibnizova formula

Veza izmedju tražene površine i neodredjenog integrala vidi se iz slijedećeg. Neka je f definirana i neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$, nenegativna i rastuća. Označimo s

$$A(x) = \int_a^x f(x)dx$$

površinu koju zatvara krivulja $y = f(x)$, os x i pravci $x = a$ i $x = x$.

Označimo s $\Delta A(x)$ prirast površine $A(x)$ ako x naraste na $x + \Delta x$, gdje je $\Delta x > 0$. Sada vrijedi

$$f(x)\Delta x \leq \Delta A(x) \leq f(x + \Delta x)\Delta x$$

ili

$$f(x) \leq \frac{\Delta A(x)}{\Delta x} \leq f(x + \Delta x).$$

Ako $\Delta x \to 0$ onda zbog neprekidnosti funkcije f je

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x).$$

pa imamo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = A'(x) = f(x).$$

Dakle A je jedna od primitivnih funkcija funkcije f pa je

$$A(x) = \int_a^x f(x)dx = F(x) + C.$$

Ako je $x = a$ onda je $A(a) = 0$ pa imamo

$$C = -F(a)$$

odnosno

$$A(x) = \int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a).$$

Ako je $x = b$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ovo je Newton-Leibnizova formula i osnovna veza izmedju diferencijalnog i integralnog računa.

Newton-Leibnizova formula i osnovna veza izmedju diferencijalnog i integralnog računa je

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Tako je

$$\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$

$$\int_1^e \ln xdx = 1.$$

Primjetimo da za

$$f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, b],\ a < b$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \geq 0.$$

Ako je

$$f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b], \ a < b$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \leq 0$$

Tako je

$$\int_{-1}^0 xdx = -\frac{1}{2}.$$

te

$$P = |\int_{-1}^0 xdx| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}.$$

Ako na funkciju f nemamo restrikciju predznaka onda se

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

naziva relativna površina.

Imamo

$$\int_{-1}^{1} x dx = \frac{x^2}{2}|_{-1}^{1} = 0$$

no površina koju zatvaraju pravci $y = x$, $x = -1$, $x = 1$ i $y = 0$ je jednaka 1.

Takodjer vrijedi

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = F(b)+G(b)-F(a)-G(a) =$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(b)-F(a)+F(c)-F(b) = \int_a^c f(x)dx.$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0.$$

$$k\int_a^b f(x)dx = k(F(b)-F(a)) = \int_a^b kf(x)dx.$$

Ako je funkcija f parna funkcija tj.

$$f(-x) = f(x)$$

onda je

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Tako je

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = 2\int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

Ako je funkcija f neparna funkcija tj.

$$f(-x) = -f(x)$$

onda je

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Površina ravninskog lika

Ako je $f(x) \geq 0$ za svako $x \in [a, b]$ onda je S površina ravninskog lika kojeg zatvara krivulja $y = f(x)$ te pravci $y = 0$, $x = a$ i $x = b$ i

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Ako je

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [a, b]$$

onda je površina ravninskog lika koju zatvaraju krivulje $y = f(x)$, $y = g(x)$ i pravci $x = a$ i $x = b$

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx.$$

Primjeri:

1. Izračunajte površinu koju zatvaraju krivulje $y = 4x - x^2$ i $y = x^2$.

Tražena površina je

$$\int_0^2 (4x - 2x^2)dx = \frac{8}{3}.$$

2. Dane su krivulje $y = \sqrt{x^3}$, $y = 8$ i $x = 0$ površina koju one zatvaraju je

$$\int_0^4 (8 - \sqrt{x^3})dx = 8x - \frac{2}{5}\sqrt{x^5}\,|_0^4 = \frac{96}{5}.$$

3. Ako su krivulje

$$y = \sin x, \;\; y = \cos x \;\; x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

one sa osi x zatvaraju površinu

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 - \sqrt{2}.$$

4. Izračunajte površinu koju zatvara krivulja

$$x = 2 - y - y^2$$

s osi y. Ako je $x = 0$ imamo $y = 1$ i $y = -2$ pa je

$$S = \int_{-2}^{1} (2 - y - y^2) dy = \frac{9}{2}.$$

Nepravi integral

Računali smo površine ravninskih likova koji su ograničeni. Nepravi integral računa površinu **neograničenog ravninskog lika.**

Integral s beskonačnim granicama

To je integral u kojem je barem jedna granica ∞ ili $-\infty$.

- Ako je f neprekidna funkcija na $[a, \infty)$ onda je

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a).$$

- Ako je f neprekidna funkcija na $(-\infty, b]$ onda je

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a).$$

- Ako je f neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$ onda je

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a).$$

Ako navedeni limes postoji i jednak je realnom broju, onda kažemo da integral konvergira.
U suprotnom slučaju kažemo da integral divergira.

Primjeri:

1.
$$\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$$

2.
$$\int_0^\infty e^{-o.1x} dx = 10$$

3. Za $a > 0$
$$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a}.$$

Integral prekidne funkcije

Ako funkcija f ima točku prekida u $c \in [a, b]$ i neprekidna na $[a, c) \cup (c, b]$ onda je

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx =$$

$$= F(b) - F(a) + \lim_{\varepsilon \to 0+} F(c - \varepsilon) - \lim_{\varepsilon \to 0-} F(c - \varepsilon).$$

Ako navedeni limesi postoje i konačni su,onda je integral konvergentan. u suprotnom je divergentan.
Ako je primitivna funkcija F neprekidna na $[a, b]$, onda je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Primjer:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2.$$

Diferencijalne jednadžbe

Diferencijalna jednadžba prvog reda

To je jednakost kojom je dana veza izmedju

- jedne varijable x
- funkcije $y = y(x)$
- derivacije funkcije $y' = y'(x)$.

Jednadžba je

$$H(x, y, y') = 0.$$

Rješenje je analitički izraz

$$h(x, y) = 0$$

koji zadovoljava danu jednadžbu.

Rješenje je

$$h(x, y) = 0$$

i time je **implicitno zadana funkcija** $y = y(x)$.
Rješenje može biti i **eksplicitno zadana funkcija** $y = y(x)$.
Opće rješenje diferencijalne jednadžbe ima neodredjenu konstantu C.
Posebno ili partikularno rješenje ima odredjenu konstantu C koja se računa iz rubnog ili početnog uvjeta $y(x_0) = y_0$.

Rješavati danu diferencijalnu jednadžbu ili kažemo još integrirati, jer u slučaju najjednostavnije diferencijalne jednadžbe

$$y' = f(x)$$

imamo rješenje integral

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Metoda separacije varijabli

Ako je diferencijalna jednadžba oblika

$$g(y)y' = f(x)$$

ili radi

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

$$g(y)dy = f(x)dx$$

imamo

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

pa je opće rješenje

$$G(y) = F(x) + C.$$

Primjeri:

1. Odredite funkciju kojoj je koeficijent elastičnosti jednak n.

Odgovor:

$E_{y,x} = n \Rightarrow y = Cx^n$. Dobili smo opće rješenje.

Ako pri tom imamo uvjet $y(1) = 1$ onda dobivamo posebno rješenje $y = x^n$.

Izvršite provjeru!

2. Riješite

$$y' + \frac{x}{y} = 0.$$

Opće rješenje je

$$x^2 + y^2 = C.$$

Uz uvjet $y(1) = 1$ imamo posebno rješenje

$$x^2 + y^2 = 2.$$

3. Riješite

$$E_{y,x} = ax.$$

Rješenje je

$$y = Ce^{ax}.$$

4. Riješite

$$E_{y,x} = -x^2$$

uz uvjet

$$y(0) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}.$$

Rješenje je

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-0.5x^2}.$$

5. Ako je funkcija graničnih troškova $T' = 21$ i $T(2) = 73$ odredite funkciju ukupnih i funkciju prosječnih troškova.

Imamo

$$T = 21Q + 31$$

i

$$\frac{T}{Q} = 21 + \frac{31}{Q}.$$

Općenito

$$T(Q) = \int T'(Q)dq + T_0$$

gdje je Q razina proizvodnje, T_0 fiksni troškovi, T je funkcija ukupnih troškova i T' funkcija graničnih troškova.