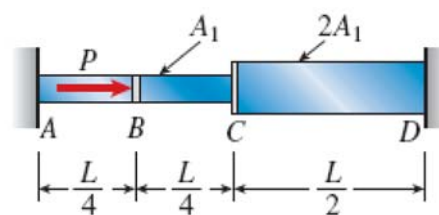


## ISPIT 28.02.2012 - GRUPA B

1. Aksijalno opterećena čelična šipka  $ABCD$  ( $E = 200 \text{ GPa}$ ), uklještena na oba kraja, je izložena sili  $P = 100 \text{ kN}$ , koja djeluje u spojnici  $B$ , kao na slici. Odrediti pomjeranje u tačkama  $B$  i  $C$ , ako je  $A_1 = 50 \text{ mm}^2$  i  $L = 1 \text{ m}$ . Veličine spojnice  $B$  i  $C$  zanemariti.



$$E := 200 \text{ GPa} \quad L := 1 \text{ m} \quad L_{AB} := \frac{L}{4} = 0.25 \text{ m} \quad P := 100 \text{ kN}$$

$$A_1 := 50 \text{ mm}^2 \quad L_{BC} := \frac{L}{4} = 0.25 \text{ m}$$

$$A_{CD} := 2A_1 = 100 \cdot \text{mm}^2 \quad L_{CD} := \frac{L}{2} = 0.5 \text{ m}$$

### Rješenje

Radi se o statički neodređenom aksijalnom problemu, pa treba postaviti jednačine ravnoteže i uslove kompatibilnosti. Pretpostavljamo da reakcije u osloncima  $A$  i  $D$  djeluju na lijevo.

$$\sum_i F_i = 0 \quad F_A - P + F_D = 0 \quad (1)$$

Koristeći princip superpozicije, imamo da je zbir pomjeranja tačke  $A$  usljed sile  $P$  i reakcije  $F_A$  jednako nuli, tj.

$$\delta_{AP} = \delta_{BCP} + \delta_{CDP} = - \left( \frac{P \cdot L_{BC}}{E \cdot A_1} + \frac{P \cdot L_{CD}}{E \cdot A_{CD}} \right)$$

$$\delta_{AFA} = \frac{F_A \cdot L_{AB}}{E \cdot A_1} + \frac{F_A \cdot L_{BC}}{E \cdot A_1} + \frac{F_A \cdot L_{CD}}{E \cdot A_{CD}}$$

$$\delta_{AP} = -\delta_{AFA} \quad - \left( \frac{P \cdot L_{BC}}{E \cdot A_1} + \frac{P \cdot L_{CD}}{E \cdot A_{CD}} \right) = - \left( \frac{F_A \cdot L_{AB}}{E \cdot A_1} + \frac{F_A \cdot L_{BC}}{E \cdot A_1} + \frac{F_A \cdot L_{CD}}{E \cdot A_{CD}} \right)$$

$$F_A := \frac{A_1 \cdot L_{CD} \cdot P + A_{CD} \cdot L_{BC} \cdot P}{A_1 \cdot L_{CD} + A_{CD} \cdot L_{AB} + A_{CD} \cdot L_{BC}} = 66.667 \cdot \text{kN} \quad (\text{pravilno pretpostavljen smjer})$$

Na osnovu (1) sada imamo:

$$F_D := P - F_A = 33.333 \cdot \text{kN} \quad (\text{pravilno pretpostavljen smjer})$$

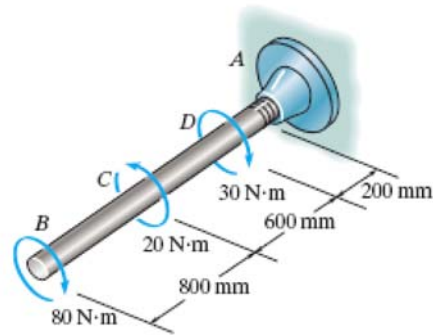
Štap  $AB$  napregnut je silom  $F_A$ , a štap  $BC$  silom  $(F_A - P)$ , pa su pomjeranja traženih tačaka kako slijedi.

$$\delta_B := \frac{F_A \cdot L_{AB}}{E \cdot A_1} = 1.667 \cdot \text{mm} \quad \text{udesno}$$

$$\delta_C := \delta_B + \frac{(F_A - P) \cdot L_{BC}}{E \cdot A_1} = 0.833 \cdot \text{mm} \quad \text{ili} \quad \delta_C := \frac{F_D \cdot L_{CD}}{E \cdot A_{CD}} = 0.833 \cdot \text{mm} \quad \text{udesno}$$

\*\*\*\*\*

2. Čelično vratilo ( $E = 200 \text{ GPa}$ ) prečnika  $20 \text{ mm}$  izloženo je momentima uvijanja kao na slici desno. Izračunati ugao uvijanja u presjeku  $B$  u stepenima. Na koju stranu se uvija vratilo (u smjeru kretanja kazaljke na satu, ili suprotno)?



$$E := 200 \text{ GPa}$$

$$L_{BC} := 800 \text{ mm}$$

$$T_B := 80 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$d := 20 \text{ mm}$$

$$\nu := 0.3$$

$$L_{CD} := 600 \text{ mm}$$

$$T_C := 20 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$I_o := \frac{d^4 \pi}{32} = 15.708 \text{ m}\cdot\text{mm}^3$$

$$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = 76.923 \cdot \text{GPa}$$

$$L_{DA} := 200 \text{ mm}$$

$$T_D := 30 \text{ N}\cdot\text{m}$$

### Rješenje

Reakcija u osloncu (pretpostavi se da moment uvijanja u osloncu A ima smjer kretanja kazaljke na satu)

$$\sum_i T_i = 0 \quad T_B - T_C + T_D + T_A = 0 \quad (1)$$

Iz (1) sijedi:  $T_A := -T_B + T_C - T_D = -90 \cdot \text{N}\cdot\text{m}$  (pogrešno pretpostavljen smjer)

Ugao uvijanja u presjeku B jednak je zbiru uvijanja pojedinih dijelova BC, CD i DA, pri čemu se na osnovu momenata uvijanja može zaključiti da su momenti uvijanja u pojedinim dijelovima jednaki

$$T_{BC} := T_B = 80 \cdot \text{N}\cdot\text{m}$$

$$T_{CD} := T_B - T_C = 60 \cdot \text{N}\cdot\text{m}$$

$$T_{DA} := T_{CD} + T_D = 90 \cdot \text{N}\cdot\text{m} \quad \text{ili} \quad T_{DA} := -T_A = 90 \cdot \text{N}\cdot\text{m}$$

$$\varphi_{BC} := \frac{T_{BC} \cdot L_{BC}}{I_o \cdot G} = 0.053 \quad \varphi_{BC} = 3.035^\circ$$

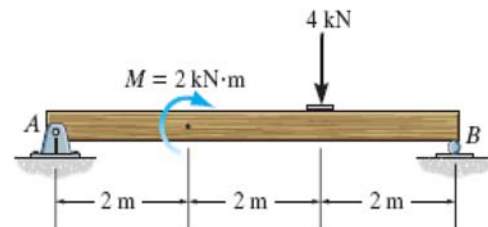
$$\varphi_{CD} := \frac{T_{CD} \cdot L_{CD}}{I_o \cdot G} = 0.03 \quad \varphi_{CD} = 1.707^\circ$$

$$\varphi_{DA} := \frac{T_{DA} \cdot L_{DA}}{I_o \cdot G} = 0.015 \quad \varphi_{DA} = 0.854^\circ$$

$$\varphi := \varphi_{BC} + \varphi_{CD} + \varphi_{DA} = 5.595^\circ \quad (\text{u smjeru kretanja kazaljke na satu})$$

\*\*\*\*\*

3. Odredi najmanju dimenziju  $b$  drvene grede kvadratnog poprečnog presjeka opterećene kao na slici desno. Dozvoljeni napon na savijanje je  $\sigma_{\text{doz}} = 10 \text{ MPa}$ , a dozvoljeni tangencijalni napon je  $\tau_{\text{doz}} = 0.8 \text{ MPa}$ .



$$L_1 := 2\text{m}$$

$$F := 4\text{kN}$$

$$\sigma_{\text{doz}} := 10\text{MPa}$$

$$A = b^2$$

$$L_2 := 2\text{m}$$

$$M := 2\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\tau_{\text{doz}} := 0.8\text{MPa}$$

$$I = \frac{b^4}{12}$$

$$L_3 := 2\text{m}$$

## Rješenje

Reakcije u osloncima A i B (pretpostavlja se da sile  $F_A$  i  $F_B$  djeluju prema gore).

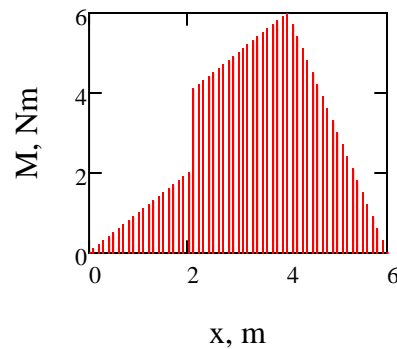
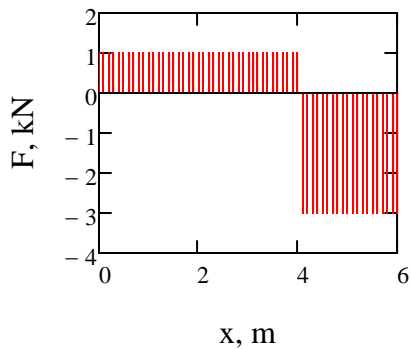
$$\sum_i F_i = 0 \quad F_A - F + F_B = 0 \quad (1)$$

$$\sum_i M_A = 0 \quad M + F \cdot (L_1 + L_2) - F_B \cdot (L_1 + L_2 + L_3) = 0 \quad (2)$$

Iz (2) slijedi:  $F_B := \frac{M + F \cdot (L_1 + L_2)}{L_1 + L_2 + L_3} = 3 \cdot \text{kN}$  (pogrešno pretpostavljen smjer)

Iz (1) slijedi:  $F_A := F - F_B = 1 \cdot \text{kN}$

Dijagrami momenata savijanja i sila



Maksimalni moment savijanja je za  $L_1 + L_2$ :  $M_{\max} := M(L_1 + L_2) = 6 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot \frac{b}{2}}{I} = \frac{M_{\max} \cdot \frac{b}{2}}{b^4} = \sigma_{\text{doz}}$$

$$b := \sqrt[3]{\frac{M_{\max}}{\sigma_{\text{doz}}} \cdot \frac{1}{2}} = 66.943 \cdot \text{mm}$$

Provjera tangencijalnog napona:

Maksimalna transferzalna sila (po intenzitetu):  $F_{\max} := F_B = 3 \cdot \text{kN}$

$$A := b^2 = 4.481 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

$$\tau_{\max} := \left| \frac{3F_{\max}}{2A} \right| = 1.004 \cdot \text{MPa} \quad \tau_{\max} > \tau_{\text{doz}}$$

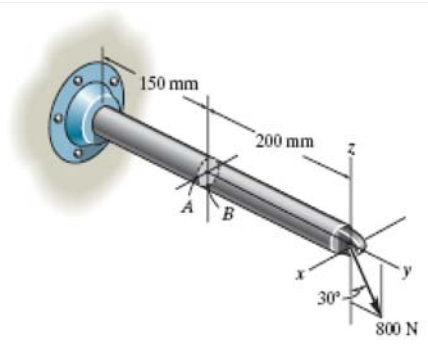
pa se dimenzionisanje mora uraditi prema tangencijalnoj sili:

$$b := \sqrt{\frac{3F_{\max}}{2\tau_{\text{doz}}}} = 75 \cdot \text{mm}$$

Dakle, najmanja dimenzija grede je 75 mm.

\*\*\*\*\*

4. Šipka prečnika 40 mm izložena je sili od 800 N, kao na slici desno. Naći napone koji djeluju u tački B.



$$L_1 := 150 \text{ mm}$$

$$F := 800 \text{ N}$$

$$d := 40 \text{ mm}$$

$$L_2 := 200 \text{ mm}$$

$$\alpha := 30^\circ$$

$$I := \frac{d^4 \pi}{64} = 1.257 \times 10^5 \cdot \text{mm}^4$$

$$F_y := F \cdot \sin(\alpha) = 400 \text{ N}$$

$$I_{yy} := 2I = 2.513 \times 10^5 \cdot \text{mm}^4$$

$$F_z := F \cdot \cos(\alpha) = 692.82 \text{ N}$$

$$A := \frac{d^2 \pi}{4} = 1.257 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

Rješenje

Tačka  $B$  je izložena sljedećim naponima usljed djelovanja sile  $P$ .

a) Normalni naponi

zatezanje silom  $F_x$   $\sigma_{Fy} := \frac{F_y}{A} = 0.318 \cdot \text{MPa}$

savijanje momentom  $F_x \cdot L_2$  - pritisni napon  $\sigma_{Fz} := \frac{-F_z \cdot L_2 \cdot \frac{d}{2}}{I} = -22.053 \cdot \text{MPa}$

b) Tangencijalni naponi - nema djelovanja tangencijalnih napona

Maksimalan normalni napon:  $\sigma_{\max} := \sigma_{Fy} + \sigma_{Fz} = -21.735 \cdot \text{MPa}$

Maksimalni tangencijalni napon:  $\tau_{\max} := \frac{\sigma_{\max}}{2} = -10.867 \cdot \text{MPa}$

\*\*\*\*\*