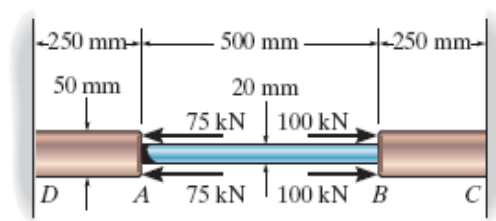


ISPIT 28.02.2012 - GRUPA A

1. Kompozitna šipka na slici desno sastoji se od čelične šipke AB ($E = 200 \text{ GPa}$) prečnika 20 mm i bronzanih šipki DA i BC ($E = 100 \text{ GPa}$) prečnika 50 mm . Ako je šipka izložena opterećenjima datim na slici, odrediti pomjeranje u tačkama A i B .



$$E_{\check{c}} := 200 \text{ GPa}$$

$$E_b := 100 \text{ GPa}$$

$$P_A := 2 \cdot 75 \text{ kN}$$

$$d_{\check{c}} := 20 \text{ mm}$$

$$d_b := 50 \text{ mm}$$

$$P_B := 2 \cdot 100 \text{ kN}$$

$$L_{\check{c}} := 500 \text{ mm}$$

$$L_b := 250 \text{ mm}$$

$$A_{\check{c}} := \frac{d_{\check{c}}^2 \cdot \pi}{4} = 314.159 \cdot \text{mm}^2$$

$$A_b := \frac{d_b^2 \cdot \pi}{4} = 1.963 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

Rješenje

Radi se o statički neodređenom aksijalnom problemu, pa treba postaviti jednačine ravnoteže i uslove kompatibilnosti. Pretpostavljamo da reakcije u osloncima D i C djeluju na lijevo.

$$\sum_i F_i = 0 \quad F_D + P_A - P_B + F_C = 0 \quad (1)$$

Koristeći princip superpozicije, imamo da je zbir pomjeranja tačke D usljed sila P_A i P_B , δ_{DP} , i reakcije F_D , δ_{DFD} , jednak nuli, tj.

$$\delta_{DP} = \delta_{DAP} + \delta_{ABP} + \delta_{BCP} = 0 + \frac{P_A \cdot L_{\check{c}}}{E_{\check{c}} \cdot A_{\check{c}}} + \frac{(P_A - P_B) \cdot L_b}{E_b \cdot A_b}$$

$$\delta_{DFD} = \frac{F_D \cdot L_b}{E_b \cdot A_b} + \frac{F_D \cdot L_{\check{c}}}{E_{\check{c}} \cdot A_{\check{c}}} + \frac{F_D \cdot L_b}{E_b \cdot A_b}$$

$$\delta_{DP} = -\delta_{DFD} \quad \frac{P_A \cdot L_{\check{c}}}{E_{\check{c}} \cdot A_{\check{c}}} + \frac{(P_A - P_B) \cdot L_b}{E_b \cdot A_b} = -\left(\frac{F_D \cdot L_b}{E_b \cdot A_b} + \frac{F_D \cdot L_{\check{c}}}{E_{\check{c}} \cdot A_{\check{c}}} + \frac{F_D \cdot L_b}{E_b \cdot A_b} \right)$$

$$F_D := -\frac{\frac{P_A \cdot L_{\check{c}}}{E_{\check{c}} \cdot A_{\check{c}}} + \frac{(P_A - P_B) \cdot L_b}{E_b \cdot A_b}}{\frac{L_b}{E_b \cdot A_b} + \frac{L_{\check{c}}}{E_{\check{c}} \cdot A_{\check{c}}} + \frac{L_b}{E_b \cdot A_b}} = -107.576 \cdot \text{kN} \quad (\text{pogrešno pretpostavljen smjer - pritisak})$$

Iz (1) imamo

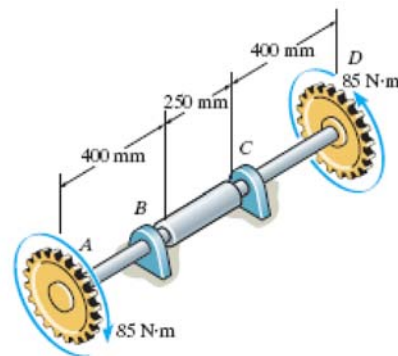
$$F_C := -P_B + P_A - F_D = 57.576 \cdot \text{kN} \quad (\text{pravilno pretpostavljen smjer - pritisak})$$

Na osnovu ovoga možemo zaključiti da je štap DA napregnut silom F_D , a štap BC silom F_C , pa su tražena pomjeranja

$$\delta_A := \frac{F_D \cdot L_b}{E_b \cdot A_b} = -0.137 \cdot \text{mm} \quad \text{ulijevo}$$

$$\delta_B := \frac{F_C \cdot L_b}{E_b \cdot A_b} = 0.073 \cdot \text{mm} \quad \text{udesno}$$

2. Čelično vratilo ($E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$), sačinjeno od šupljih cilindričnih dijelova AB i CD i punog dijela BC , izloženo je momentima uvijanja kao na slici desno. Izračunati ugao uvijanja u presjeku A u odnosu na D u stepenima. Šuplji dijelovi imaju vanjski prečnik od 30 mm i unutrašnji prečnik od 20 mm , dok je puni dio prečnika 40 mm .



$$T := 85 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$L_{AB} := 400 \text{ mm}$$

$$d_s := 30 \text{ mm}$$

$$E := 200 \text{ GPa}$$

$$L_{BC} := 250 \text{ mm}$$

$$d_u := 20 \text{ mm}$$

$$\nu := 0.3$$

$$L_{CD} := 400 \text{ mm}$$

$$d_{BC} := 40 \text{ mm}$$

$$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = 76.923 \cdot \text{GPa}$$

$$I_{o\check{s}} := \frac{(d_s^4 - d_u^4) \cdot \pi}{32} = 6.381 \times 10^4 \cdot \text{mm}^4$$

$$I_{oBC} := \frac{d_{BC}^4 \pi}{32} = 2.513 \times 10^5 \cdot \text{mm}^4$$

Rješenje

Vratilo je cijelom dužinom izloženo konstantnom momentu uvijanja T , a ugao uvijanja jednak je zbiru uglova pojedinih segmenata.

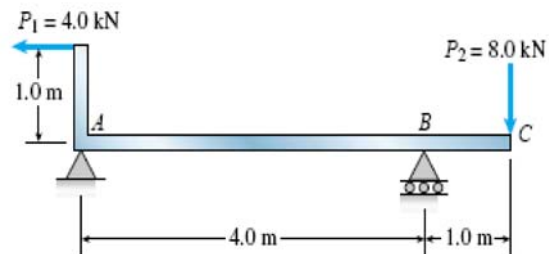
$$\varphi_{AB} := \frac{T \cdot L_{AB}}{I_{o\check{s}} \cdot G} = 0.397 \cdot ^\circ$$

$$\varphi_{CD} := \varphi_{AB} = 0.397 \cdot ^\circ$$

$$\varphi_{BC} := \frac{T \cdot L_{BC}}{I_{oBC} \cdot G} = 0.063 \cdot ^\circ$$

$$\varphi := \varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} = 0.857 \cdot ^\circ$$

3. Odredi najmanju dimenziju d čelične grede kružnog poprečnog presjeka opterećene kao na slici desno. Dozvoljeni napon na savijanje je $\sigma_{doz} = 300 \text{ MPa}$, a dozvoljeni tangencijalni napon je $\tau_{doz} = 100 \text{ MPa}$. U analizi uzeti samo dio grede ABC .



$$L_{P1} := 1 \text{ m}$$

$$P_1 := 4 \text{ kN}$$

$$\sigma_{doz} := 300 \text{ MPa}$$

$$A = \frac{d^2 \pi}{4}$$

$$L_{AB} := 4 \text{ m}$$

$$P_2 := 8 \text{ kN}$$

$$\tau_{doz} := 100 \text{ MPa}$$

$$I = \frac{d^4 \cdot \pi}{64}$$

$$L_{BC} := 1 \text{ m}$$

Rješenje

Posmatrajmo samo raspodjelu transferzalnih sila i momenata savijanja za gredu ABC .

Reakcije u osloncima A i B (pretpostavlja se da sile F_A i F_B djeluju prema gore).

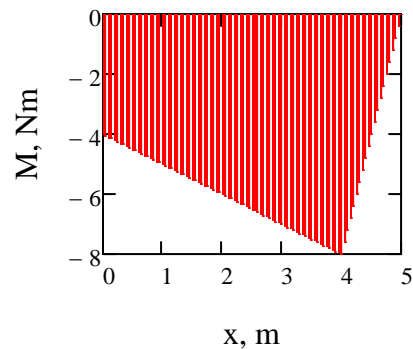
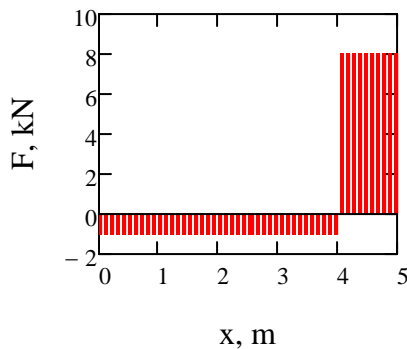
$$\sum_i F_i = 0 \quad F_A - P_2 + F_B = 0 \quad (1)$$

$$\sum_i M_A = 0 \quad -P_1 \cdot L_{P1} - F_B \cdot L_{AB} + P_2 \cdot (L_{AB} + L_{BC}) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Iz (2) sijedi:} \quad F_B := \frac{P_2 \cdot (L_{AB} + L_{BC}) - P_1 \cdot L_{P1}}{L_{AB}} = 9 \cdot \text{kN}$$

$$\text{Iz (1) slijedi:} \quad F_A := P_2 - F_B = -1 \cdot \text{kN} \quad (\text{pogrešno prepostavljen smjer})$$

Dijagrami momenata savijanja i sila



$$\text{Maksimalni moment savijanja je za } L_1 + L_2 : \quad M_{\max} := |M(L_{AB})| = 8 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot \frac{d}{2}}{I} = \frac{M_{\max} \cdot \frac{d}{2}}{\left(\frac{d^4 \cdot \pi}{64} \right)} = \sigma_{\text{doz}}$$

$$d := \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}}{\sigma_{\text{doz}} \cdot \pi}} = 64.762 \cdot \text{mm}$$

Provjera tangencijalnog napona:

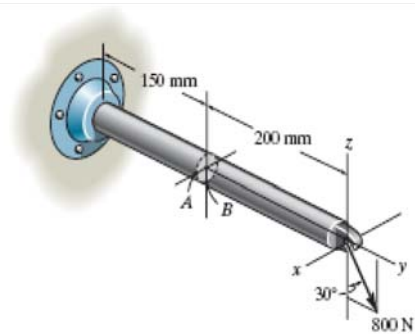
Maksimalna transferzalna sila (po intenzitetu): $F_{\max} := F_{\text{tr}}(L_{AB} + L_{BC}) = 8 \cdot \text{kN}$

$$A := \frac{d^2 \pi}{4} = 3.294 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

$$\tau_{\max} := \left| \frac{4F_{\max}}{3A} \right| = 3.238 \cdot \text{MPa} \quad \tau_{\max} < \tau_{\text{doz}}$$

pa dimenzija 64.76 mm zadovoljava.

4. Šipka prečnika 40 mm izložena je sili od 800 N, kao na slici desno. Naći napone koji djeluju u tački A.



$$L_1 := 150 \text{ mm}$$

$$F := 800 \text{ N}$$

$$d := 40 \text{ mm}$$

$$L_2 := 200 \text{ mm}$$

$$\alpha := 30^\circ$$

$$I := \frac{d^4 \pi}{64} = 1.257 \times 10^5 \cdot \text{mm}^4$$

$$F_y := F \cdot \sin(\alpha) = 400 \text{ N}$$

$$I_O := 2I = 2.513 \times 10^5 \cdot \text{mm}^4$$

$$F_z := F \cdot \cos(\alpha) = 692.82 \text{ N}$$

$$A := \frac{d^2 \pi}{4} = 1.257 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

Rješenje

Tačka A je izložena sljedećim naponima usljed djelovanja sile P .

a) Normalni naponi - zatezanje silom F_y

$$\sigma_{Fy} := \frac{F_y}{A} = 0.318 \cdot \text{MPa}$$

b) Tangencijalni naponi - smicanje silom F_z

$$\tau := \frac{4F_z}{3A} = 0.735 \cdot \text{MPa}$$

Maksimalan i minimalan normalni napon:

$$\sigma_1 := \frac{\sigma_{Fy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Fy}}{2}\right)^2 + \tau^2} = 0.911 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_2 := \frac{\sigma_{Fy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Fy}}{2}\right)^2 + \tau^2} = -0.593 \cdot \text{MPa}$$

Maksimalni tangencijalni napon:

$$\tau_{\text{max}} := \frac{\sigma_{Fy}}{2} = 0.159 \cdot \text{MPa} \quad \text{ili} \quad \tau_{\text{max}} := \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = 0.159 \cdot \text{MPa}$$
