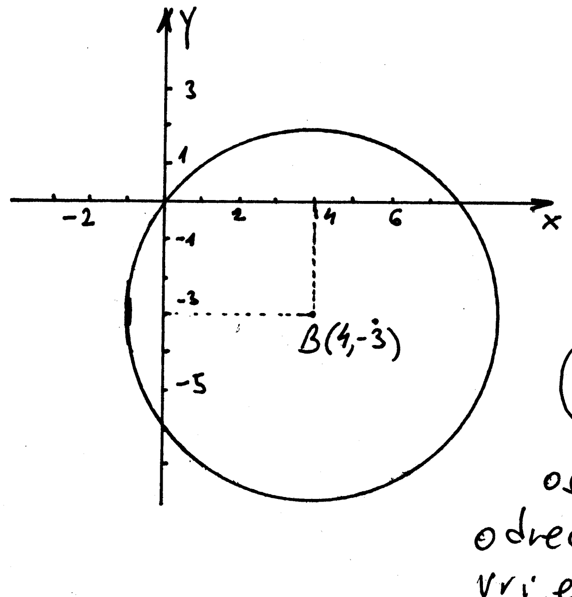
Funkcija dvije nezavisne promjenjive

Neka je S neprazan podskup prostora $\mathbb{R}^2$ i $T \subseteq \mathbb{R}$. Ako svakoj tački $M(x,y) \in S$ možemo unaprijed po datom pravilu f pridružiti jednu i samo jednu realnu vrijednost $z \in T$, tada kažemo da je data realna f-ja dvije realne promjenjive f iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$ (sa skupa $S \subseteq \mathbb{R}$ u skup $T \subseteq \mathbb{R}$) i pišemo $z = f(x,y)$. Skup S na kojem je određena f-ja f naziva se domen ili definiciono područje f-je f (označavat ćemo ga sa $\mathcal{D}(f)$), a skup $f(A)$ skup vrijednosti f-je f ili kodomen (označavat ćemo ga sa $\mathcal{R}(f)$). Ako za f-ju, zadanu analitički (formulom) nije data oblast njene definisanosti, onda se pod njom podrazumjeva skup svih tačaka $M \in \mathbb{R}^2$ u kojoj f-ja, odnosno njen analitički izraz imaju određenu realnu vrijednost.

1. Opisati geometrijski skup tačaka ravni čije koordinate zadovoljavaju nejednakost $(x-4)^2+(y+3)^2<25$.

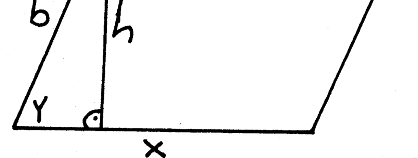
Rj. $\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2} < 5$

S obzirom da $\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2}$ predstavlja rastojanje tačke $A(x,y)$ od tačke $B(4,-3)$ to nejednakost $(x-4)^2+(y+3)^2<25$ zadovoljavaju koordinate tačaka koje leže unutar kružnice sa centrom u tački $B(4,-3)$ čiji je poluprečnik jednak 5. Tačke kružnice ne pripadaju zadanom skupu.



2. Zadana je površina P paralelograma. Odrediti obim kao f-ju njegove osnovice x i oštrog ugla y. Zatim odredite i nacrtajte područje mogućih vrijednosti x i y.

Rj.

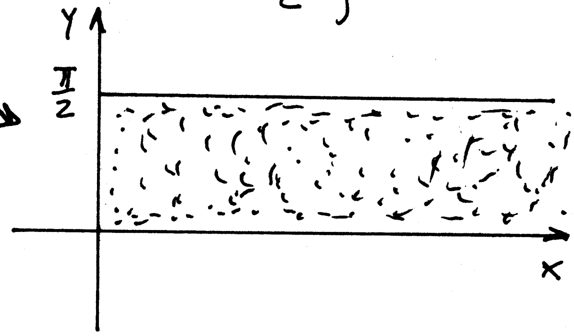


$P = x \cdot h$, $\sin y = \frac{h}{b}$ (h-visina, b-druga stranica)

$h = \frac{P}{x}$, $b = \frac{h}{\sin y} = \frac{\frac{P}{x}}{\sin y} = \frac{P}{x \sin y}$

$$S(x,y) = 2x + 2b = 2\left(x + \frac{P}{x \sin y}\right)$$

F-ja $S(x,y)$ definisana je za $x \neq 0$ i $y \neq k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. Zbog prirode zadatka mora biti $x > 0$ i $0 < y < \frac{\pi}{2}$ pa je domen f-je S: $D(S) = \{(x,y) \mid x > 0 \wedge 0 < y < \frac{\pi}{2}\}$



(3.) Odrediti i grafički predstaviti oblast definisanosti sljedećih f-ja:

a) $f(x,y) = \dfrac{2x-3y}{3x-2y}$

b) $f(x,y) = \sqrt{(x+2)(y-1)}$

c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\ln(-x-y)}$

ď) $f(x,y) = \ln(x+2)(y-3)$

ě) $f(x,y) = y^2 + \arccos \dfrac{x}{x+y}$

Rj. a) $3x - 2y \neq 0$ Oblast definisanosti je cijela ravan bez prave $3x-2y=0$.

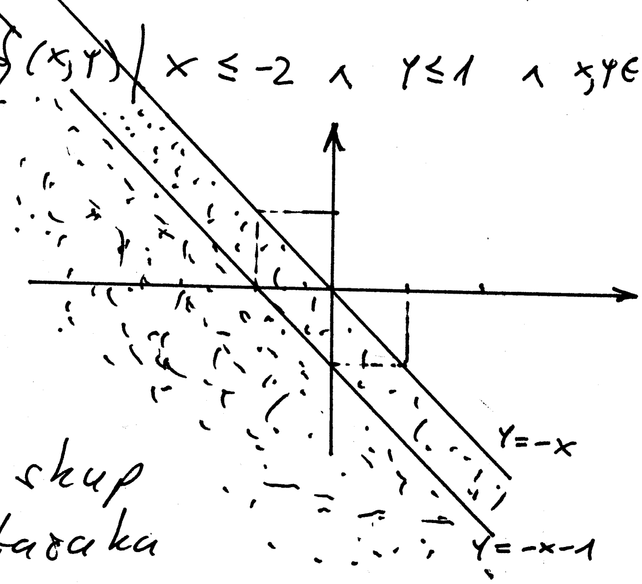
b) $\dfrac{x+2 \geq 0 \quad y-1 \geq 0}{x \geq -2 \quad y \geq 1}$ ili $\dfrac{x+2 \leq 0 \quad y-1 \leq 0}{x \leq -2 \quad y \leq 1}$

$$D(f(x,y)) = \{(x,y) \mid x \geq -2 \wedge y \geq 1 \wedge x,y \in \mathbb{R}\}$$
$$\cup \{(x,y) \mid x \leq -2 \wedge y \leq 1 \wedge x,y \in \mathbb{R}\}$$

c) $\ln(-x-y) \neq 0 \Rightarrow -x-y \neq 1$

$-x-y > 0$

$D(f(x,y)) = \{(x,y) \mid y \neq -x-1 \wedge y < -x \wedge x,y \in \mathbb{R}\}$



Geometrički ovo predstavlja skup tačaka poluravni $y < -x$ bez tačaka prave $y = -x-1$ (slika).

(4.) Odrediti definiciono područje f-ja:

a) $z = 2x + \dfrac{1}{y}$

b) $z = \sqrt{xy}$

c) $z = \sqrt{x} + y$

Tablica izvoda

1. $c' = 0$, c - konst.
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

   $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$

   $(e^x)' = e^x$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

   $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$
11. $(arc\, tg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
12. $(arc\, ctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$$sh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad ch\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

13. $(sh\, x)' = ch\, x$
14. $(ch\, x)' = sh\, x$
15. $h\, x)' = \frac{1}{ch^2 x}$
16. $(cth\, x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

Pravila izvoda:

a) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

b) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

c) $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, $g(x) \neq 0$

Izvod složene f-je: $y = f(g(x))$, $y'_x = f'_{g(x)} \cdot g'_x$

Parcijalni (djelimični) izvodi f-ja dviju i više realnih promjenjivih

$z=f(x,y)$

$$z'_x=\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$z'_y=\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

parcijalni izvodi po x-u i parcijalni izvod po y-u u tački (x,y)

$u=f(x,y,z)$

$$u'_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x},\quad u'_y=\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$u'_z=\frac{\partial u}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}$$

1. Naći sve parcijalne izvode prvog reda f-je

a) $z=x^2y^5+3x^3y-7$ c) $z=(2x^2y^2-x+1)^3$ e) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

b) $z=x^y$ d) $z=\frac{x+y^2}{x^2+y^2+1}$ f) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

g) $u=\ln(x^3-y^2+z^4)$

R: a) $z'_x=2xy^5+9x^2y$

$z'_y=x^2\cdot 5y^4+3x^3=5x^2y^4+3x^3$

b) $z'_x=yx^{y-1}$

$z'_y=x^y\ln x$

c) $z'_x=3(2x^2y^2-x+1)^2(4xy^2-1)$

$z'_y=3(2x^2y^2-x+1)^2(4x^2y)=12x^2y(2x^2y^2-x+1)^2$

d) $$z'_x=\frac{1\cdot(x^2+y^2+1)-(x+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2+1)^2}=\frac{x^2+y^2+1-2x^2-2xy^2}{(x^2+y^2+1)^2}=\frac{-x^2+y^2+1-2xy^2}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$z'_y=\frac{2y(x^2+y^2+1)-(x+y^2)(2y)}{(x^2+y^2+1)^2}=\frac{2x^2y\cancel{+2y^3}+2y-2xy\cancel{-2y^3}}{(x^2+y^2+1)^2}=\frac{2y(x^2-x+1)}{(x^2+y^2+1)^2}$$

e) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

$$z'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{(-1)\cdot y}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\cdot x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$z'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\cdot x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

f) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $$u'_x=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u'_y=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad u'_z=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

g) $u=\ln(x^3-y^2+z^4)$, $u'_x=\dfrac{3x^2}{x^3-y^2+z^4}$, $u'_y=\dfrac{-2y}{x^3-y^2+z^4}$, $u'_z=\dfrac{4z^3}{x^3-y^2+z^4}$

2. Ako je $z=x^y\cdot y^x$ dokazati da je

$$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=z\cdot(x+y+\ln z).$$

Rj.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}\cdot y^x+x^y\cdot y^x\ln y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x\cdot y^x+x^y\cdot x\,y^{x-1}$$

$$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=xy\,x^{y-1}y^x+x\ln y\,x^y y^x$$
$$=y\,x^y y^x+x\ln y\,x^y y^x$$

$$y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=y\ln x\cdot x^y y^x+x\cdot x^y y^x$$

$$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=y\,x^y y^x+\ln y^x\cdot x^y y^x+x^y y^x\ln x^y+x\,x^y y^x=$$
$$=x^y y^x\left(y+\ln(x^y\cdot y^x)+x\right)=z\cdot(x+y+\ln z)$$

što je i trebalo dobiti

Totalni i parcijalni diferencijal f-ja dviju i više realnih promjenjivih

$z = f(x,y)$

$dz = f'_x(a,b)\,dx + f'_y(a,b)\,dy$ — totalni diferencijal f-je $z=f(x,y)$ u tački (a,b)

Ako f-ja $f(x,y)$ ima konačne i određene parcijalne izvode po svim argumentima u okolini tačke (a,b) i ako su ti izvodi neprekidne f-je u tački (a,b), tada je f-ja $f(x,y)$ diferencijabilna u tački (a,b).

1. Odrediti totalni diferencijal f-je $z = \arcsin\frac{x}{y}$ u tački $(4,5)$.

Rj. f-ja je definisana za $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$$

$$dz = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\,dx + \frac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\,dy = \frac{y\,dx - x\,dy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$$

Stavljajući u dobijeni izraz $x=4$ i $y=5$ dobijemo $dz = \frac{1}{15}(5dx - 4dy)$

2. Pomoću totalnog diferencijala približno izračunati $\ln(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1)$.

Rj. Neka je $z = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)$ gdje je $x = a + \varepsilon = 1 + 0{,}03$ i $y = b + \omega = 1 - 0{,}02$

Tada je $z(a,b) = \ln(\sqrt{1} - \sqrt{1} - 1) = \ln 1 = 0$; $z = z(a,b) + \Delta z$.

($\Delta z = f(a+\varepsilon, b+\omega) - f(a,b)$ totalni priraštaj f-je u tački (a,b)).

Kako je $\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx + \frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}}dy\right) =$

$= \frac{1}{1}\left(\frac{1}{3}\cdot 0{,}03 - \frac{1}{4}\cdot 0{,}02\right) = 0{,}005$. Pa $z = z_0 + \Delta z \approx 0{,}0005$.

3. Naći totalni diferencijal i totalni priraštaj f-je $z = x^2 + y^2 + xy$ pri prelazu od tačke $(1,1)$ u tačku $(1{,}1; 0{,}9)$.

Rj. po definiciji totalnog priraštaja dobijemo

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = (x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2 + (x+\Delta x)(y+\Delta y) - (x^2+y^2+xy) =$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 + xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y - x^2 - y^2 - xy$$

$$= 2x\Delta x + \Delta x^2 + y\Delta x + 2y\Delta y + \Delta y^2 + x\Delta y + \Delta x\Delta y = (2x + y + \Delta x)\Delta x + (2y + x + \Delta x + \Delta y)\Delta y$$

Ako stavimo u formulu vrijednosti $x=1$, $y=1$, $\Delta x = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}9 - 1 = -0{,}1$ dobićemo totalni priraštaj date f-je u tački $(1,1)$

$$\Delta z = (2+1+0{,}1)\,0{,}1 + (2+1+0{,}1-0{,}1)\cdot(-0{,}1) = 3{,}1\cdot 0{,}1 + 3\cdot(-0{,}1) = 0{,}31 - 0{,}3 = 0{,}01$$

$dz = (2x+y)\,dx + (2y+x)\,dy \qquad dz = (2+1)\cdot 0{,}1 + (2+1)\cdot(-0{,}1) = 0{,}3 - 0{,}3 = 0$

$d_x f(x,y) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} dx$ parcijalni diferencijal f-je $f(x,y)$ po promjenjivoj x u tački (x_0, y_0)

$d_y f(x,y) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} dy$ parcijalni diferencijal f-je $f(x,y)$ po promjenjivoj y u tački (x_0, y_0)

4. Odrediti parcijalne diferencijale f-je $z = \sqrt[3]{x^3+y^3}$.

Rj.:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3}(x^3+y^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3}(x^3+y^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3y^2 = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$$

dobijeni izrazi za parcijalne izvode nisu definisani u tački $(0,0)$. Izvode u toj tački treba odrediti po definiciji

$$z'_x(0,0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{z(0+\varepsilon,0) - z(0,0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt[3]{\varepsilon^3+0^3} - 0}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} 1 = 1$$

$$z'_y(0,0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{z(0,0+\varepsilon) - z(0,0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt[3]{0^3+\varepsilon^3} - 0}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1$$

f-ja f ima parcijalne izvode u svim tačkama iz oblasti definisanosti. Parcijalni diferencijali su

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}} dx, & (x,y) \neq (0,0) \\ dx, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy = \begin{cases} \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}} dy, & (x,y) \neq (0,0) \\ dy, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Parcijalni izvodi i diferencijali višeg reda f-ja dvije i više promjenjivih

Parcijalnim izvodima drugog reda f-je $z = f(x,y)$ nazivamo parcijalnim izvodima njenih parcijalnih izvoda prvog reda. Za parcijalne izvode drugog reda upotrebljavamo ove oznake

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\partial \\ \text{DELTA}\end{array}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y) \quad \text{itd.}$$

Analogno se definiraju i označavaju izvodi viših redova.

Diferencijalom drugog reda f-je $z = f(x,y)$ nazivamo diferencijal diferencijala prvog reda te f-je za fiksirane priraste nezavisnih varijabli.

$$d^2 z = d(dz)$$

Analogno se određuju diferencijali f-je z višega nego drugog reda, na primjer $d^3 z = d(d^2 z)$ i općenito $d^n z = d(d^{n-1} z)$ $(n = 2, 3, \ldots)$

Ako je $z = f(x,y)$ gdje su x i y nezavisne varijable i f-ja f ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda, tada se diferencijal drugog reda f-je z računa po formuli

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Općenito, kada postoje neprekidne odgovarajuće derivacije, vrijedi simbolička formula

$$d^n z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z,$$

koja se formalno razvije po binomnom zakonu.

1. Naći parcijalne izvode drugog reda f-je

a) $z = e^{-xy}$ c) $u = x^3y + y^3x + z^3y$ e) $z = \ln tg\,\frac{x}{y}$

b) $z = x^3 + y^3 - xy$ d) $u = \ln(x+y-z)$ f) $u = \sin(x^2+y+z^3)$

Rj. a) $z = e^{-xy}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-xy}\cdot(-y) = -ye^{-xy} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (-y)e^{-xy}\cdot(-y) = y^2e^{-xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-xy}\cdot(-x) = -xe^{-xy} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-x)e^{-xy}\cdot(-x) = x^2e^{-xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -e^{-xy} - ye^{-xy}(-x) =$$

$$= e^{-xy}(xy-1)$$

b) $z = x^3 + y^3 - xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - x$$

c) $u = x^3y + y^3x + z^2y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y + y^3 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6xy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 6yz$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 + 3y^2x + z^3 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 3x^2 + 3y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2y \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 3z^2$$

d) $u = \ln(x+y-z)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x+y-z} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-1}{x+y-z} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-1}{(x+y-z)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x+y-z} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-1}{(x+y-z)^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{-1}{(x+y-z)^2}$$

završiti sami ...

③ Provjeriti da li vrijedi

a) $u=\ln(x^2+y^2) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

b) $u=e^{-\alpha x}\cdot\varphi(x-y) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\alpha\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\alpha^2 u$

Rj. a) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$ $\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2(x^2+y^2)-2x\cdot(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$ $\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2(x^2+y^2)-2y(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2y^2-2x^2+2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=0$ što je i trebalo dobiti

b) $u=e^{-\alpha x}\cdot\varphi(x-y)$

$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-\alpha x}\cdot(-\alpha)\varphi(x-y)+e^{-\alpha x}\cdot\varphi'_x=e^{-\alpha x}\left[-\alpha\varphi(x-y)+\varphi'_x\right]$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{-\alpha x}\cdot(-\alpha)\left(-\alpha\varphi(x-y)+\varphi'_x\right)+e^{-\alpha x}\left[-\alpha\varphi'_x+\varphi''_{xx}\right]$

$=e^{-\alpha x}\left(\alpha^2\varphi(x-y)-\alpha\varphi'_x-\alpha\varphi'_x+\varphi''_{xx}\right)=e^{-\alpha x}\left(\alpha^2\varphi(x-y)-2\alpha\varphi'_x+\varphi''_{xx}\right)$

$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{-\alpha x}\cdot\varphi'_y\cdot(-1)=-e^{\alpha x}\varphi'_y$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^{\alpha x}\varphi''_{yy}\cdot(-1)=e^{\alpha x}\cdot\varphi''_{yy}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\alpha\frac{\partial u}{\partial y}=e^{-\alpha x}\left(\alpha^2\varphi(x-y)-2\alpha\varphi'_x+\varphi''_{xx}-\varphi''_{yy}+2\alpha\varphi'_y\right)=$ (u slučaju da je $\varphi'_x=\varphi'_y$ i $\varphi''_{xx}=\varphi''_{yy}$) $=\alpha^2 e^{-\alpha x}\varphi(x-y)=\alpha^2 u$

Parcijalni izvodi i diferencijal složenih f-ja

Neka je $F=F(u,v)$ f-ja su dvije nezavisne promjenjive gdje su u i v f-je. Dalje, neka su $u=u(x,y)$ i $v=v(x,y)$ f-je koje zavise od x i y.

Znači imamo $F=F(u(x,y),\, v(x,y))$. Sad možemo tražiti izvode po x i po y

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

1. Naći diferencijal f-je u (naći du) ako je $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

Rj. $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$, uvedimo oznaku $t=\sqrt{x^2+y^2}$.

$u=f(t)=f(t(x,y))$, $\quad du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_t\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=f'_t\,\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x f'_t}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f'_t\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=f'_t\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y\cdot f'_t}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$du=\frac{f'_{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)(x\,dx+y\,dy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ako je $z = \dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$ tada je $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$

Dokazati.

Rj.

$$z = \frac{y}{f(\xi)} \quad \text{gdje je} \quad \xi = x^2-y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{0\cdot f(\xi) - y\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}}{f^2(\xi)} = \frac{-2xy\frac{\partial f}{\partial \xi}}{f^2(\xi)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1\cdot f(\xi) - y\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}}{f^2(\xi)} = \frac{f(\xi)+2y^2\frac{\partial f}{\partial \xi}}{f^2(\xi)}$$

Ako je $u = f(x-y,\ y-z)$ dokazati da je $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$.

Rj.

$$u = f(\eta,\mu), \quad \eta = x-y, \quad \mu = y-z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial \mu}\cdot 0 = \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \eta}(-1) + \frac{\partial f}{\partial \mu}\cdot 1 = \frac{\partial f}{\partial \mu} - \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial \mu}\cdot(-1) = -\frac{\partial f}{\partial \mu}$$

Odavde vidimo da je $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$

qed.

(#) Ako je $x^2 = v\cdot w$, $y^2 = u\cdot w$, $z^2 = u\cdot v$ i $f(x,y,z) = F(u,v,w)$

dokazati $x\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + z\cdot\frac{\partial f}{\partial z} = u\cdot\frac{\partial F}{\partial u} + v\cdot\frac{\partial F}{\partial v} + w\cdot\frac{\partial F}{\partial w}$.

Rj: $F(u,v,w) = f(x,y,z) = f(\sqrt{v\cdot w}, \sqrt{u\cdot w}, \sqrt{u\cdot v})$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$= f'_x\cdot 0 + f'_y\cdot\frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{u}} + f'_z\cdot\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} = f'_y\cdot\frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{u}} + f'_z\cdot\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} = f'_x\cdot\frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} + f'_z\cdot\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{w}} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot 0 = f'_x\cdot\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}} + f'_y\cdot\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{w}}$$

$$u\cdot\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\sqrt{uw}}{2} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\sqrt{uv}}{2}$$

$$v\cdot\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\sqrt{vw}}{2} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\sqrt{uv}}{2}$$

$$w\cdot\frac{\partial F}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\sqrt{vw}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\sqrt{uw}}{2}$$

Prema tome $x\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + z\cdot\frac{\partial f}{\partial z} = u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v} + w\cdot\frac{\partial F}{\partial w}$

q.e.d.

(#) Naći du ako je $u=f(\xi,\eta)$, $\xi=x\cdot y$, $\eta=\frac{x}{y}$.

Rj. $u=f(\xi(x,y),\eta(x,y))=f(xy,\frac{x}{y})$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot y+\frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{1}{y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot x+\frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}y+\frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}x+\frac{\partial f}{\partial \eta}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right)dy$$

$$du=\frac{\partial f}{\partial \xi}(y\,dx+x\,dy)+\frac{\partial f}{\partial \eta}\left(\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy\right)$$

II način: $du=\frac{\partial f}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial f}{\partial \eta}d\eta$, $d\xi=\frac{\partial \xi}{\partial x}dx+\frac{\partial \xi}{\partial y}dy$ ...

(#)^{v} Ako je $x^2=v\cdot w$, $y^2=u\cdot w$, $z^2=u\cdot v$ i $f(x,y,z)=F(u,v,w)$

Dokazati $x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial f}{\partial z}=u\cdot\frac{\partial F}{\partial u}+v\cdot\frac{\partial F}{\partial v}+w\cdot\frac{\partial F}{\partial w}$.

uputa: $F(u,v,w)=f(\sqrt{v\cdot w},\sqrt{u\cdot w},\sqrt{u\cdot v})$

$$\frac{\partial F}{\partial u}=f'_x\cdot x'_u+f'_y\cdot y'_u+f'_z\cdot z'_u$$
$$=f'_y\sqrt{w}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}+f'_z\sqrt{v}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}$$
$\vdots$

ISPITNI ZADATAK

(#) Ako je $z=z(x,y)$ i $x+y+z=f(x^2+y^2+z^2)$ dokazati da je

$$(y-z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=x-y.$$

Rj. $z=f(x^2+y^2+z^2)-x-y$

$z=f(t)-x-y$, $t=x^2+y^2+z^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_t\cdot\left(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)-1 \implies \frac{\partial z}{\partial x}=2xf'_t+2zf'_t\frac{\partial z}{\partial x}-1$$

$$(1-2zf'_t)\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'_t-1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xf'_t-1}{1-2z\cdot f'_t}$$

analogno $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2yf'_t-1}{1-2zf'_t}$

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=(y-z)\frac{2xf'_t-1}{1-2z\cdot f'_t}+(z-x)\frac{2yf'_t-1}{1-2zf'_t}=$$

$$=\frac{\cancel{2xyf'_t}-y-2xzf'_t+\cancel{z}+2yzf'_t-\cancel{z}-\cancel{2xyf'_t}+x}{1-2zf'_t}=\frac{x-y-2zf'_t(x-y)}{1-2zf'_t}=\frac{(x-y)(1-2zf'_t)}{(1-2zf'_t)}=x-y$$

(#) Ako je $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$, gdje je f diferencijabilna f-ja,

izračunati $\quad \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Rj.: $\quad z = y f^{-1}(x^2-y^2) = y f^{-1}(u)$, gdje je $u=x^2-y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y(-1)f_u^{-2}(x^2-y^2)\cdot 2x = \frac{-2xy}{f_u^2(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(y f^{-1}(u)\right)'_y = 1\cdot f^{-1}(u) + y\cdot(-1)f_u^{-2}(u)\cdot(-2y) =$$

$$= \frac{1}{f(x^2-y^2)} + \frac{2y^2}{f_u^2(x^2+y^2)}$$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{f_u^2(x^2+y^2)} + \frac{1}{y f(x^2-y^2)} + \frac{2y}{f_u^2(x^2+y^2)} =$$

$$= \frac{1}{y f(x^2-y^2)} = \frac{1}{y^2}\cdot\frac{y}{f(x^2-y^2)} = \frac{z}{y^2}$$

prema tome $\quad \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

(#) Ako je $z = e^{y}\varphi\left(y e^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ gdje je φ diferencijabilna f-ja, dokazati da je $(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyz$.

Rj.

$$z = e^{y}\varphi(\xi),\ \text{gdje je}\ \xi(x,y) = y e^{\frac{x^2}{2y^2}}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = y e^{\frac{x^2}{2y^2}} \cdot 2 \cdot \frac{x}{2y^2} = \frac{x}{y} e^{\frac{x^2}{2y^2}}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = e^{\frac{x^2}{2y^2}} + y e^{\frac{x^2}{2y^2}}\left(\frac{1}{2}x^2 y^{-2}\right)'_y = e^{\frac{x^2}{2y^2}} + y e^{\frac{x^2}{2y^2}}\left(\frac{1}{2}x^2\cdot(-2)y^{-3}\right)$$

$$= e^{\frac{x^2}{2y^2}} - \frac{x^2}{y^2} e^{\frac{x^2}{2y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{x}{y} e^{y} e^{\frac{x^2}{2y^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{y}\varphi(\xi) + e^{y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} = e^{y}\varphi(\xi) + e^{y}e^{\frac{x^2}{2y^2}}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} -$$

$$- e^{y}\cdot\frac{x^2}{y^2} e^{\frac{x^2}{2y^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$$

$$(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2-y^2)\cdot\frac{x}{y} e^{y+\frac{x^2}{2y^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} +$$

$$+ xy\left(e^{y}\varphi(\xi) + e^{y+\frac{x^2}{2y^2}}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{x^2}{y^2} e^{y+\frac{x^2}{2y^2}}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)$$

$$= \underline{\frac{x^3}{y} e^{y+\frac{x^2}{2y^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}} \underline{\underline{- yx e^{y+\frac{x^2}{2y^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}}} + xy e^{y}\varphi(\xi) +$$

$$\underline{\underline{+ xy e^{y+\frac{x^2}{2y^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}}} \underline{- \frac{x^3}{y} e^{y+\frac{x^2}{2y^2}}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}} =$$

$$= xy e^{y}\varphi(\xi) = xy e^{y}\varphi\left(y e^{\frac{x^2}{2y^2}}\right) = xyz$$

Parcijalni izvodi višeg reda složenih f-ja

(#) Ako je $u=\varphi(\xi,\eta)$ pričemu je $\xi = x+y$, $\eta = x-y$ izračunati izvode $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Rj.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta \partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta \partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}.$$

(#) Ako je $u = \dfrac{\varphi(x-y) + \psi(x+y)}{x}$, gdje su φ i ψ diferencijabilne f-je izračunati $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Rj.

$$u = \frac{1}{x}\left(\varphi(x-y) + \psi(x+y)\right) = x^{-1}\left(\varphi(x-y) + \psi(x+y)\right)$$

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} = (-1)x^{-2}\left(\varphi(\underbrace{x-y}_{s}) + \psi(\underbrace{x+y}_{t})\right) + \frac{1}{x}\left(\varphi'_s \cdot s'_x + \psi'_t \cdot t'_x\right) =$$

$$= \frac{-1}{x^2}\left[\varphi(x-y) + \psi(x+y)\right] + \frac{1}{x}\left(\varphi'_s \cdot 1 + \psi'_t \cdot 1\right)$$

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -\varphi(x-y) - \psi(x+y) + x\left(\varphi'_s + \psi'_t\right) \quad \text{gdje su } s = x-y \text{ i } t = x+y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\varphi'_s \cdot 1 - \psi'_t \cdot 1 + 1\cdot\left(\varphi'_s + \psi'_t\right) + x\left(\varphi''_{ss} \cdot 1 + \psi''_{tt} \cdot 1\right)$$

$$= x\left(\varphi''_{ss} + \psi''_{tt}\right) \qquad \ldots(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}\left(\varphi'_s \cdot s'_y + \psi'_t \cdot t'_y\right) = \frac{1}{x}\left(\varphi'_s \cdot (-1) + \psi'_t \cdot 1\right) = \frac{1}{x}\left(-\varphi'_s + \psi'_t\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x}\left(-\varphi''_{ss} \cdot s'_y + \psi''_{tt} \cdot t'_y\right) = \frac{1}{x}\left(\varphi''_{ss} + \psi''_{tt}\right)$$

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\left(\varphi''_{ss} + \psi''_{tt}\right) \qquad \ldots(2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \overset{(1)\, i\, (2)}{=\!=} 0 \quad \text{traženo rješenje}$$

(#) Naći potpuni diferencijal prvog i drugog reda f-je $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$ (x i y su nezavisne promjenjive).

Rj. $u=f(\xi)$, $\xi=\sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad\qquad \xi$ KSI

$$du=\frac{\partial f}{\partial \xi}d\xi, \quad d\xi=\frac{\partial \xi}{\partial x}dx+\frac{\partial \xi}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$du=\frac{\partial f}{\partial \xi}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy\right)=\frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ potpuni diferencijal prvog reda

$$d^2u=d\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\cdot\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial f}{\partial \xi}d\left(\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}d\xi=\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\cdot\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$d\left(\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{\partial\left(\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\partial x}dx+\frac{\partial\left(\frac{dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial\left(\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\partial x}=\frac{dx\cdot\sqrt{x^2+y^2}-(x\,dx+y\,dy)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{(x^2+y^2)^2}}=\frac{\cancel{x^2dx}+y^2dx\cancel{-x^2dx}-xy\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\partial y}=\frac{dy(\sqrt{x^2+y^2})-(x\,dx+y\,dy)\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{(x^2+y^2)^2}}=\frac{x^2dy\cancel{+y^2dy}-xy\,dx\ \cancel{y^2dy}}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$d\left(\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{y^2dx^2-xy\,dx\,dy+x^2dy^2-xy\,dx\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}=\frac{(y\,dx-x\,dy)^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$d^2u=\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\left(\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{(y\,dx-x\,dy)^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$d^2u=f''\cdot\frac{(x\,dx+y\,dy)^2}{x^2+y^2}+f'\frac{(y\,dx-x\,dy)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$ potpuni diferencijal drugog reda

(#) Naći potpuni diferencijal prvog i drugog reda f-je $u=f(\xi,\eta)$, gdje je $\xi=x+y$, $\eta=x-y$. (x i y su nezavisne promjenjive).

Rj.

$$du=\frac{\partial f}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial f}{\partial \eta}d\eta$$

ξ KSI, η ETA

$$d\xi=\frac{\partial \xi}{\partial x}dx+\frac{\partial \xi}{\partial y}dy=dx+dy$$

$$d\eta=\frac{\partial \eta}{\partial x}dx+\frac{\partial \eta}{\partial y}dy=dx-dy$$

$$du=\frac{\partial f}{\partial \xi}(dx+dy)+\frac{\partial f}{\partial \eta}(dx-dy)=\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}-\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)dy$$

potpuni diferencijal prvog reda

$$d^2u=d\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)dx+d\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}-\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)dy$$

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}d\xi+\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}d\eta+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta\partial \xi}d\xi+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}d\eta$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}(dx+dy)+\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}(dx-dy)+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta\partial \xi}(dx+dy)+$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}(dx-dy)=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)dx+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)dy$$

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}-\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\underbrace{d\xi}_{(dx+dy)}+\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}\underbrace{d\eta}_{(dx-dy)}-\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}\underbrace{d\xi}_{\substack{(dx+dy)\\ -dx-dy}}-\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\underbrace{d\eta}_{\substack{(dx-dy)\\ -dx+dy}}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)dx+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)dy$$

$$d^2u=\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2dx^2+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)dx\,dy+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)dx\,dy+$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}-\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2dy^2=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}-\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)dy\right]^2$$

potpuni diferencijal drugog reda

Ekstremne vrijednosti f-ja dviju promjenjivih

Neka je data f-ja $z = f(x, y)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

SISTEM

rješenjem sistema dobijemo stacionarne tačke koje mogu ali i ne moraju biti ekstrem

npr. $M(p_1, p_2)$ je jedna stacionarna tačka.

$$A = \frac{\partial^2 z(p_1, p_2)}{\partial x^2}$$

$$B = \frac{\partial^2 z(p_1, p_2)}{\partial x \partial y}$$

$$C = \frac{\partial^2 z(p_1, p_2)}{\partial y^2}$$

$D = AC - B^2$

$D > 0$ f-ja ima ekstrem u tački $M(p_1, p_2)$

a) $A > 0$ imamo z_{min}

b) $A < 0$ imamo z_{max}

$D < 0$ f-ja nema ekstrem

$D = 0$ potrebno ispitati ponašanje f-je u okolini stacionarne tačke:

$\Delta z(M) = z(p_1 + \varepsilon, p_2 + \omega) - z(p_1, p_2)$ – priraštaj f-je

$\Delta z \geq 0 \quad \forall \varepsilon ; \forall \omega \Rightarrow$ u tački M f-ja ima minimum

$\Delta z \leq 0 \quad \forall \varepsilon ; \forall \omega \Rightarrow$ u tački M f-ja ima maksimum

(#) Naći ekstreme f-je $z = x^2 - 2x - y - \ln(2-y) + 4$.

$D: 2 - y > 0$

Rj.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -1 - \frac{1}{2-y} \cdot (-1) = \frac{1}{2-y} - 1$$

$$2x - 2 = 0$$

$$\frac{1}{2-y} - 1 = 0$$

$$x = 1, \quad y = 1$$

Tačka $M(1,1)$ je stacionarna tačka (kandidat za ekstrem)

$(2-y)^{-1}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-1)(2-y)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(2-y)^2}$$

$M(1,1)$

$A = 2, \; B = 0, \; C = 1$

$D = AC - B^2 = 2 > 0$

F-ja ima ekstrem.

$A > 0 \Rightarrow$ f-ja ima minimum

$$z_{min}(1,1) = 1 - 2 - 1 - \ln 1 + 4 = -2 + 4 = 2$$

(#) Naći ekstreme f-je $z = x^3 - 5xy + 5y^2 + 7x - 15y$.

R:

Pronađimo stacionarne tačke

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 5y + 7$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 10y - 5x - 15$$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5y + 7 &= 0 \quad / \cdot 2 \\ -5x + 10y - 15 &= 0 \\ \hline 6x^2 - 10y + 14 &= 0 \\ -5x + 10y - 15 &= 0 \quad + \\ \hline \end{aligned}$$

$$6x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{2 \cdot 6}$$

$$x_1 = \frac{-2}{2 \cdot 6} = \frac{-1}{6}, \quad x_2 = \frac{12}{12} = 1$$

$$6\left(x + \frac{1}{6}\right)(x - 1) = 0$$

Za $x_1 = -\frac{1}{6} \Rightarrow -5 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + 10y - 15 = 0$

$$10y = 15 - \frac{5}{6}$$

$$10y = \frac{90 - 5}{6} = \frac{85}{6}$$

$$y = \frac{\cancel{85}^{17}}{\cancel{10}_{2} \, 6} = \frac{17}{12}$$

$x_2 = 1 \Rightarrow -5 + 10y - 15 = 0$

$$10y = 20$$

$$y = 2$$

Stacionarne tačke su $(1,2)$ i $\left(-\frac{1}{6}, \frac{17}{12}\right)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -5$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 10$$

Za $M_1(1,2)$

$A = 6$, $B = -5$, $C = 10$, $D = AC - B^2 = 60 - 25 > 0$

f-ja ima ekstrem

$A > 0 \Rightarrow$ f-ja ima minimum

$$z_{min}(1,2) = 1 - 10 + 20 + 7 - 30 = 8 + 10 - 30 = 8 - 20 = -12$$

Za $M_2\left(-\frac{1}{6}, \frac{17}{12}\right)$

$A = -1$, $B = -5$, $C = 10$, $D = AC - B^2 = -10 - 25 = -35$

F-ja u ovoj tački nema ekstrem

(#) Naći ekstreme f-je $z = x + y - \frac{3}{2}\ln(x^2+y^2+1)$.

Rj. Izračunajmo prve parcijalne izvode

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 - \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{x^2+y^2+1} \cdot \cancel{2}x = 1 - \frac{3x}{x^2+y^2+1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{x^2+y^2+1} \cdot \cancel{2}y = 1 - \frac{3y}{x^2+y^2+1}$$

Nađimo stacionarne tačke

$$1 - \frac{3x}{x^2+y^2+1} = 0$$

$$1 - \frac{3y}{x^2+y^2+1} = 0$$

$$3x = 3y \Rightarrow x = y$$

$$1 - \frac{3x}{2x^2+1} = 0 \quad / \cdot 2x^2+1$$

$$2x^2 + 1 - 3x = 0$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = 1$$

Stacionarne tačke su $M_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ i $M_2(1,1)$

Nađimo druge parcijalne izvode

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 - 3 \cdot \frac{1\cdot(x^2+y^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2+1)^2} = -3 \cdot \frac{-x^2+y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2} = 3\,\frac{x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 - 3x \cdot (-1)(x^2+y^2+1)^{-2} \cdot 2y = 6\,\frac{xy}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 - 3\,\frac{1\cdot(x^2+y^2+1) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2+1)^2} = -3\,\frac{x^2-y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}$$

Za $M_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $A = 3 \cdot \frac{-1}{(\frac{1}{2}+1)^2} = \frac{-3}{\frac{9}{4}} = \frac{-12}{9} = -\frac{4}{3}$, $B = \frac{2}{3}$, $C = -\frac{4}{3}$

$D = AC - B^2 = \frac{16}{9} - \frac{4}{9} > 0$ f-ja ima ekstrem u tački M_1

$A < 0$ f-ja ima minimum $z_{min}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1 - \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}$

Za $M_2(1,1)$, $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{2}{3}$, $C = -\frac{1}{3}$

$D = AC - B^2 = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} < 0$ f-ja u tački M_2 nema ekstrem

(#) Naći ekstreme f-je $z = x + y - \frac{3}{2}\ln(x^2+y^2+1)$.

Rj: Pronađimo prve parcijalne izvode

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2+1} = 1 - \frac{3x}{x^2+y^2+1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2+1} = 1 - \frac{3y}{x^2+y^2+1}$$

Pronađimo stacionarne tačke

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 &\Rightarrow 1 = \frac{3x}{x^2+y^2+1}\\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 &\Rightarrow 1 = \frac{3y}{x^2+y^2+1}\end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y \text{ (dijeljenjem jednačina)}$$

Sad imamo $x = y$ i $1 = \frac{3x}{x^2+y^2+1} \Rightarrow 1 = \frac{3x}{2x^2+1} \Rightarrow 2x^2-3x+1=0$

$D = 9-8 = 1$

$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2}$

Stacionarne tačke su $M_1(1,1)$ i $M_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Pronađimo druge parcijalne izvode.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(1 - \frac{3x}{x^2+y^2+1}\right)'_x = \frac{-3(x^2+y^2+1)+3x\cdot 2x}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{3x^2-3y^2-3}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(1 - \frac{3y}{x^2+y^2+1}\right)'_y = \left|\begin{matrix}\text{zbog}\\ \text{simetričnosti}\end{matrix}\right| = \frac{3y^2-3x^2-3}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{3x\cdot 2y}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{6xy}{(x^2+y^2+1)^2}$$

Za tačku $M_1(1,1)$: $A = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, $C = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$, $D = AC - B^2$

$D = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} < 0 \Rightarrow$ u M_1 f-ja nema ekstrema

Za tačku $M_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: $A = \frac{-3}{(\frac{3}{2})^2} = -\frac{3}{\frac{9}{4}} = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3} \Rightarrow C = -\frac{4}{3}$

$B = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{4}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$, $D = AC - B^2 = \frac{16}{9} - \frac{4}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} > 0 \Rightarrow$ f-ja u tački M_2 ima ekstrem

$A < 0 \Rightarrow$ u M_2 f-ja ima maximum. $z_{max}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\ln(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1) = 1 - \ln\frac{27}{8}$

\# Naći ekstreme f-je $z = \frac{8}{x} + \frac{x^2}{y} + y + 1$.

Rj.

Pronađimo stacionarne tačke

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8\cdot(-1)\,x^{-2} + 2\,\frac{x}{y} = \frac{-8}{x^2} + 2\,\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\cdot(-1)\,y^{-2} + 1 = \frac{-x^2}{y^2} + 1$$

$$-\frac{8}{x^2} + \frac{2x}{y} = 0$$

$$-\frac{x^2}{y^2} + 1 = 0$$

$$\frac{8}{x^2} - 2\,\frac{x}{y} = 0$$

$$\frac{x^2}{y^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1$$

Prema tome $\frac{x}{y} = 1$ i $\frac{x}{y} = -1$

Za $\frac{x}{y} = 1 \Rightarrow \frac{8}{x^2} - 2\cdot 1 = 0$

$$\frac{8}{x^2} = 2 \quad /\cdot x^2 \ (x \neq 0)$$

$2x^2 = 8$

$x^2 = 4$

$x_1 = -2, \ x_2 = 2$

$x_1 = -2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 1$

$y = -2$

$(-2, -2)$

za $x_2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{y} = 1$

$y_2 = 2$

$(2, 2)$

Za $\frac{x}{y} = -1$ imamo

$$\frac{8}{x^2} + 2 = 0$$

$$\frac{8}{x^2} = -2 \quad /\cdot x^2 \ (x \neq 0)$$

$-2x^2 = 8$

ova jednačina nema rješenja u skupu realnih brojeva

Stacionarne tačke su $M_1(-2,-2)$ i $M_2(2,2)$.

Nađimo druge parcijalne izvode

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (-8)(-2)\,x^{-3} + \frac{2}{y} = \frac{16}{x^3} + \frac{2}{y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x\cdot(-1)\,y^{-2} = \frac{-2x}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2\cdot(-2)\,y^{-3} = \frac{2x^2}{y^3}$$

Za $M_1(-2,-2)$

$A = \frac{16}{-8} + \frac{2}{-2} = -2 - 1 = -3$

$B = \frac{-2\cdot(-2)}{4} = 1, \quad C = \frac{2\cdot 4}{-8} = -1$

$D = AC - B^2 = 3 - 1 = 2 > 0$

f-ja u tački $M_1(-2,-2)$ ima ekstrem,

$A < 0$ f-ja ima maksimum

$z_{max}(-2,-2) = -4 - 2 - 2 + 1 = -7$

Za $M_2(2,2)$

$A = 2 + 1 = 3, \quad B = \frac{-4}{4} = -1, \quad C = \frac{8}{8} = 1$

$D = AC - B^2 = 3 - 1 = 2 > 0$ f-ja ima ekstrem

$A > 0 \Rightarrow$ f-ja ima minimum

$z_{min}(2,2) = 4 + 2 + 2 + 1 = 9$

Naći ekstreme f-je $z=(x^2+y)\sqrt{e^y}$.

Rj. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\sqrt{e^y}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{e^y} + (x^2+y)\frac{1}{2\sqrt{e^y}}\cdot e^y = \sqrt{e^y} + (x^2+y)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{e^y}$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y + 1\right)\sqrt{e^y} = \frac{1}{2}(x^2+y+2)\sqrt{e^y}$$

$2x\sqrt{e^y} = 0$

$\frac{1}{2}(x^2+y^2+1)\sqrt{e^y} = 0$

$e^y > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

prema tome $x=0$

$\sqrt{e^y} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2 + y + 2 = 0$

$x=0 \Rightarrow y+2=0$

$y=-2$

$M(0,-2)$ je stacionarna tačka (kandidat za ekstrem)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\sqrt{e^y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x\frac{1}{2\sqrt{e^y}}\cdot e^y = x\sqrt{e^y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{e^y} + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y + 1\right)\frac{e^y}{2\sqrt{e^y}}\cdot\frac{\sqrt{e^y}}{\sqrt{e^y}} = \frac{1}{2}\sqrt{e^y}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y + 2\right)$$

$M(0,-2)$

$A = 2\sqrt{e^{-2}} = 2\frac{1}{\sqrt{e^2}}$

$B = 0$

$C = \frac{1}{2}\sqrt{e^{-2}}\left(\frac{1}{2}0 + \underbrace{\frac{1}{2}(-2)}_{-1} + 2\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{e^2}}$

$D = AC - B^2 = \frac{2}{\sqrt{e^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e^2}} = \frac{1}{e^2}$

$D > 0 \Rightarrow$ f-ja ima ekstrem

$A > 0 \Rightarrow$ f-ja ima minimum

$$z_{min}(0,-2) = (0-2)\sqrt{e^{-2}} = (-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{e^2}} \approx -0.7358$$

(#) Naći ekstreme f-je $z = e^{-2x^2}(x-y^2)$.

Rj. Nađimo stacionarne tačke

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-2x^2}\cdot(-4)x(x-y^2) + e^{-2x^2}\cdot 1 = e^{-2x^2}(-4x^2+4xy^2+1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-2x^2}\cdot(-2)y = -2ye^{-2x^2}$$

$$\begin{aligned} e^{-2x^2}(-4x^2+4xy^2+1) &= 0 \\ -2y\,e^{-2x^2} &= 0 \end{aligned}$$

e^{-2x^2} je uvijek pozitivno

$$\begin{aligned} -4x^2+4xy^2+1 &= 0 \\ -2y &= 0 \Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

$$-4x^2+1=0$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Stacionarne tačke su $M_1(-\frac{1}{2}, 0)$ i $M_2(\frac{1}{2}, 0)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{-2x^2}\cdot(-4x)(-4x^2+4xy^2+1) + e^{-2x^2}(-8x+4y^2) =$$

$$= e^{-2x^2}(16x^3-16x^2y^2-4x-8x+4y^2) = e^{-2x^2}(16x^3-16x^2y^2-12x+4y^2)$$

$$= 4e^{-2x^2}(4x^3-4x^2y^2-3x+y^2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{-2x^2}(8xy) = 8xy\,e^{-2x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2e^{-2x^2}$$

Za tačku $M_1(-\frac{1}{2}, 0)$

$$A = 4e^{-2\cdot\frac{1}{4}}\left(4\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) - 4\cdot\frac{1}{4}\cdot 0 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 0\right) = 4e^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{e}}$$

$$B = 0, \quad C = -2e^{-2\cdot\frac{1}{4}} = -2e^{-\frac{1}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{e}}$$

$$D = AC - B^2 = \frac{-8}{e} < 0$$

F-ja z u tački M_1 nema ekstrem

Za tačku $M_2(\frac{1}{2}, 0)$

$$A = 4e^{-2\cdot\frac{1}{4}}\left(4\cdot\frac{1}{8} - 0 - 3\cdot\frac{1}{2} + 0\right) =$$

$$= 4e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right) = \frac{-4}{\sqrt{e}}$$

$$B = 0, \quad C = -2e^{-2\cdot\frac{1}{4}} = \frac{-2}{\sqrt{e}}$$

$D = AC - B^2 = \frac{8}{e} > 0 \Rightarrow$ f-ja z u tački M_2 ima ekstrem

$A < 0 \Rightarrow z_{max}(\frac{1}{2}, 0) = e^{-2\cdot\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$

(#) Odrediti ekstremne vrijednosti f-je

$$z = \frac{xy}{2} + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right).$$

Rj.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}y + (-1)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right) + (47 - x - y)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y + \frac{47}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y$$

$$= -\frac{2}{3}x + \frac{6-3-4}{12}y + \frac{47}{3} = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{12}y + \frac{47}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}x + (-1)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right) + (47 - x - y)\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y + \frac{47}{4} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y$$

$$= -\frac{1}{12}x - \frac{1}{2}y + \frac{47}{4}$$

$$-\frac{2}{3}x - \frac{1}{12}y + \frac{47}{3} = 0 \quad /\cdot 12$$

$$-\frac{1}{12}x - \frac{1}{2}y + \frac{47}{4} = 0 \quad /\cdot 12$$

$$-8x - y + 188 = 0$$

$$-x - 6y + 141 = 0$$

$$-8x - y + 188 = 0$$

$$x = -6y + 141$$

$$-8(-6y + 141) - y + 188 = 0$$

$$48y - 1128 - y + 188 = 0$$

$$47y = 940$$

$$y = 20$$

$$x = -6y + 141 = -120 + 141 = 21$$

Stacionarna tačka je $M(21, 20)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{12}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}$$

$D = AC - B^2$

$M(21, 20)$

$A = -\frac{2}{3}, \quad B = -\frac{1}{12}, \quad C = -\frac{1}{2}$

$$D = \frac{2}{6} - \frac{1}{144} = \frac{1}{3} - \frac{1}{144} > 0$$

f-ja z ima ekstrem

$A < 0$ f-ja ima maksimum

$$z_{max}(21, 20) = 21\cdot 10 + (47 - 41)(7 + 5) = 210 + 6\cdot 12 = 210 + 72 = 282$$

$z_{max}(21, 20) = 282$ traženi ekstrem f-je

Nađi ekstreme f-je $z = x^4 + y^4 - 2x^2$.

Rj: $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x$ $\qquad$ $4x^3 - 4x = 0 \;|:4$ $\qquad$ $x(x^2-1) = 0$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3$ $\qquad$ $4y^3 = 0 \;|:4$ $\qquad$ $y^3 = 0$

$x^3 - x = 0$ $\qquad$ $x(x-1)(x+1) = 0$

$y^3 = 0$ $\qquad$ $y^3 = 0$

$y = 0 \wedge (x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1)$

Stacionarne tačke f-je su $M_1(-1,0)$, $M_2(0,0)$ i $M_3(1,0)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2$$

za $M_1(-1,0)$, $A = 8$, $B = 0$, $C = 0$

$D = 0$ ispitujemo ponašanje f-je u okolini tačke $M_1(-1,0)$

$$\Delta z = z(-1+\varepsilon, 0+\omega) - z(-1,0) =$$
$$= (-1+\varepsilon)^4 + \omega^4 - 2(-1+\varepsilon)^2 - [(-1)^4 + 0^4 - 2(-1)^2]$$
$$= 1 - 4\varepsilon + 6\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \omega^4 - 2(1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2) - (1-2)$$
$$= 1 - 4\varepsilon + 6\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \omega^4 - 2 + 4\varepsilon - 2\varepsilon^2 + 1$$
$$= \varepsilon^4 - 4\varepsilon^3 + 4\varepsilon^2 + \omega^4 = \varepsilon^2(\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 4) + \omega^4$$
$$= \varepsilon^2(\varepsilon - 2)^2 + \omega^4 \geq 0 \text{ za } \forall \varepsilon \text{ i } \forall \omega$$

paskalov trougao

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

f-ja ima minimum u tački $M_1(-1,0)$, $z_{min} = -1$

za $M_2(0,0)$, $A = -4$, $B = 0$, $C = 0$, $D = AC - B^2 = 0$

ispitujemo ponašanje f-je u okolini tačke

$$\Delta z = z(0+\varepsilon, 0+\omega) - z(0,0) = \varepsilon^4 + \omega^4 - 2\varepsilon^2 = \varepsilon^2(\varepsilon^2 - 2) + \omega^4$$

$\varepsilon = 0$: $\Delta z = \omega^4$

$\omega = 0$: $\Delta z = \varepsilon^2(\varepsilon^2 - 2) \Rightarrow \Delta z < 0$ za $\varepsilon^2 < 2$

$\Delta z > 0$ za $\varepsilon^2 > 2$

Priraštaj f-je je promjenjivog znaka pa f-ja nema ekstrem u tački M_2

za $M_3(1,0)$, $A = 8$, $B = 0$, $C = 0$, $D = AC - B^2 = 0$ ispitujemo ponašanje f-je u okolini tačke

$$\Delta z = z(1+\varepsilon, 0+\omega) - z(1,0) = (1+\varepsilon)^4 + \omega^4 - 2(1+\varepsilon)^2 - (1-2)$$
$$= 1 + 4\varepsilon + 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \omega^4 - 2 - 4\varepsilon - 2\varepsilon^2 + 1 = \varepsilon^4 + 4\varepsilon^3 + 4\varepsilon^2 + \omega^4$$

$$\Delta z = \varepsilon^2(\varepsilon + 2)^2 + \omega^4 \geq 0 \quad \forall \varepsilon \text{ i } \forall \omega$$

f-ja z u tački M_3 ima min $z_{min} = -1$

(#) Naći ekstreme f-je $z=(2x^2+3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

Rj.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x\cdot e^{-x^2-y^2}+(2x^2+3y^2)e^{-x^2-y^2}\cdot(-2x)=(4x-4x^3-6xy^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=6y e^{-x^2-y^2}+(2x^2+3y^2)e^{-x^2-y^2}\cdot(-2y)=(6y-4x^2y-6y^3)e^{-x^2-y^2}$$

$$2x(2-2x^2-3y^2)e^{-x^2-y^2}=0$$
$$2y(3-2x^2-3y^2)e^{-x^2-y^2}=0$$

$e^{-x^2-y^2}\neq 0\ \forall(x,y\in\mathbb{R})$

$x=0$; $y=0$, $M_1(0,0)$

ili

$x=0$ i $3-2x^2-3y^2=0$

$3y^2=3$

$y^2=1$

$y_{1,2}=\pm 1$

$M_2(0,-1)$

$M_3(0,1)$

ili $2-2x^2-3y^2=0$; $y=0$

$2x^2=2$

$x^2=1$

$x_{1,2}=\pm 1$

$M_4(-1,0)$

$M_5(1,0)$

ili

$$\begin{array}{r} 2-2x^2-3y^2=0\\ -\quad 3-2x^2-3y^2=0\\ \hline -1=0\end{array}$$

sistem nema rješenja

Stacionarne tačke su M_1, M_2, M_3, M_4 i M_5.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(4-12x^2-6y^2)e^{-x^2-y^2}+(4x-4x^3-6xy^2)e^{-x^2-y^2}(-2x)=(8x^4+12x^2y^2-20x^2-6y^2+4)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(-12xy)e^{-x^2-y^2}+(4x-4x^3-6xy^2)e^{-x^2-y^2}(-2y)=(-20xy+8x^3y+12xy^3)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(6-4x^2-18y^2)e^{-x^2-y^2}+(6y-4x^2y-6y^3)e^{-x^2-y^2}\cdot(-2y)=(-30y^2+12y^4+8x^2y^2-4x^2+6)e^{-x^2-y^2}$$

za $M_1(0,0)$, $A=4$, $B=0$, $C=6$, $D=AC-B^2=24>0$ ima ekstrem

$A>0$ ima minimum, $z_{min}(0,0)=0$

za $M_2(0,-1)$, $A=-2e^{-1}$, $B=0$, $C=-12e^{-1}$, $D=AC-B^2=24e^{-2}>0$ ima ekstrem

$A<0$ ima maksimum, $z_{max}(0,-1)=3e^{-1}$

za $M_3(0,1)$, $A=-2e^{-1}$, $B=0$, $C=-12e^{-1}$, $D=AC-B^2=24e^{-2}>0$ ima ekstrem

$A<0$ ima maksimum $z_{max}(0,1)=3e^{-1}$

za $M_4(-1,0)$, $A=-8e^{-1}$, $B=0$, $C=2e^{-1}$, $D=AC-B^2=-16e^{-2}<0$

f-ja u tački $M_4(-1,0)$ nema ekstrem

za $M_5(1,0)$, $A=-8e^{-1}$, $B=0$, $C=2e^{-1}$,

f-ja u tački $M_5(1,0)$ nema ekstrem

(#) Naći stacionarne tačke f-je $z = xy\ln(x^2+y^2)$.

Rj.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\ln(x^2+y^2) + xy\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x = y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\ln(x^2+y^2) + xy\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y = x\ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$$

$$y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0$$
$$x\ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

$$y\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right) = 0$$
$$x\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right) = 0$$

$y=0$ ili $\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} = 0$

$x=0$ ili $\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} = 0$

$y=0$ i $x=0$ $\quad M_1(0,0)$

za M_1 f-ja nije definisana

ili

$y=0$ i $\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} = 0$

$\ln x^2 = 0$

$x^2 = 1$

$x_1=-1, \quad x_2=1$

$M_2(-1,0), \quad M_3(1,0)$

ili

$\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} = 0$ i $x=0$

$\ln y^2 = 0$ $\quad M_4(0,-1)$

$y_1=-1 \quad y_2=1$ $\quad M_5(0,1)$

ili

$$\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} = 0 \quad (1)$$
$$\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} = 0 \quad (2)$$

(1)-(2): $\frac{2x^2}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{x^2+y^2} = 0$

$2x^2-2y^2=0$

$2(x^2-y^2)=0$

$2(x-y)(x+y)=0$

$x=y$ ili $x=-y$.

za $x=y$: $\ln(2x^2)+1=0$

$\ln(2x^2) = -1$ $\quad x^2 = \frac{1}{2e}$

$e^{-1} = 2x^2$ $\quad x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}$

$M_6\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right), \quad M_7\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$

za $y=-x$: $\ln(2x^2)+1=0$

$x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}$

$M_8\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$

$M_9\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$

Stacionarne tačke su: $M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8$ i M_9.

Uslovni ekstremi f-ja dviju promjenjivih

Ako trebamo naći ekstrem f-je $z=f(x,y)$ tako da x i y zadovoljavaju neki uslov $g(x,y)=0$ tada tražimo ekstrem Lagranžove f-je $F(x,y;\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

SISTEM

rješavanjem sistema dobićemo neke stacionarne tačke i dalji proces se nastavlja kao kod traženja ekstrema f-je dvije promjenjive

II način: neka je $M(p_1,p_2)$ neka stacionarna tačka

$$d^2F(p_1,p_2)=F''_{xx}(p_1,p_2)\,dx^2+2F''_{xy}(p_1,p_2)\,dx\,dy+F''_{yy}(p_1,p_2)\,dy^2$$

$$d^2F(p_1,p_2)>0 \quad\Rightarrow\quad z_{min}(p_1,p_2)$$
$$d^2F(p_1,p_2)<0 \quad\Rightarrow\quad z_{max}(p_1,p_2)$$

Ako se desi slučaj da imamo više uslova, onda uvodimo više parametara $(\lambda,\mu,\dots)$.

1. Naći ekstreme f-je $z=6-4x-3y$ uz uslov $x^2+y^2=1$.

Rj. $F(x,y)=6-4x-3y+\lambda(x^2+y^2-1)\neq\cancel{0}$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-4+2\lambda x$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=-3+2\lambda y$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-1$$

$$2\lambda x-4=0$$
$$2\lambda y-3=0$$
$$x^2+y^2-1=0$$

$$2\lambda x=4$$
$$2\lambda y=3$$
$$x^2+y^2=1$$

$$x=\frac{2}{\lambda}$$
$$y=\frac{3}{2\lambda}$$
$$x^2+y^2=1$$

$$\frac{4}{\lambda^2}+\frac{9}{4\lambda^2}=1$$
$$\frac{25}{4\lambda^2}=1$$

$$4\lambda^2=25$$
$$\lambda_{1,2}=\pm\frac{5}{2}$$

$\lambda_1=-\frac{5}{2} \Rightarrow x_1=-\frac{4}{5}$; $y_1=\frac{3}{2\cdot(-\frac{5}{2})}=-\frac{3}{5}$

$\lambda_2=\frac{5}{2} \Rightarrow x_2=\frac{2}{\frac{5}{2}}=\frac{4}{5}$; $y_2=\frac{3}{2\cdot\frac{5}{2}}=\frac{3}{5}$

Stacionarne tačke su $M(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$ za $\lambda=-\frac{5}{2}$ i $N(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$ za $\lambda=\frac{5}{2}$.

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$

$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda$

za $M(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$, $\lambda = -\frac{5}{2}$

$A = -5$, $B = 0$, $C = -5$, $D = AC - B^2 = 25 > 0$

f-ja ima ekstrem, $A < 0$ f-ja ima maksimum

$z_{max}(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) = 6 - 4(-\frac{4}{5}) - 3(-\frac{3}{5}) = \frac{30+16+9}{5} = \frac{55}{5} = 11$

za $N(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, $\lambda = \frac{5}{2}$, $A = 5$, $B = 0$, $C = 5$, $D = AC - B^2 = 25 > 0$

f-ja ima ekstrem u tački N, $A > 0$ f-ja ima minimum

$z_{min}(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = 6 - 4 \cdot \frac{4}{5} - 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{30-16-9}{5} = \frac{5}{5} = 1$

2. Nađi uslovne ekstreme f-je $z = y + 2x + 3$ uz uslov $x^2 - 6x + y + 5 = 0$.

Rj. $F(x,y) = 2x + y + 3 + \lambda(x^2 - 6x + y + 5)$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2 + 2\lambda x - 6\lambda$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + \lambda$

$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 - 6x + y + 5$

$2\lambda x - 6\lambda + 2 = 0 \quad /:2$

$\lambda + 1 = 0$

$x^2 - 6x + y + 5 = 0$

$\lambda x = 3\lambda - 1$

$\lambda = -1$

$x^2 - 6x + y + 5 = 0$

$-x = -3 - 1$

$x = 4$

$x^2 - 6x + y + 5 = 0$

$16 - 24 + y + 5 = 0$

$y = 3$

Tačka $M(4,3)$ je stacionarna tačka, za $\lambda = -1$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$

$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$

$M(4,3)$, $\lambda = -1$

$A = -2$, $B = 0$, $C = 0 \Rightarrow D = AC - B^2 = 0$

$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cancel{dxdy} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2$

$d^2F = 2\lambda\, dx^2 \Rightarrow d^2F = -2\, dx^2 < 0$

U tački $M(4,3)$ f-ja ima maksimum, $z_{max}(4,3) = 3 + 8 + 3 = 14$

3. Odrediti ekstreme f-je $z = x^2 + y^2$ uz uslov $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

Rj. $z_{min}(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}) = \frac{36}{13}$, $\lambda = -\frac{72}{13}$

4. Nađi uslovne ekstreme f-je $z = \ln(x+y)$, ako je $x^2 + 2y^2 = 4$.

Rj. $z_{max}(2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}) = \ln(3\sqrt{\frac{2}{3}})$, $\lambda = -\frac{1}{8}$

(#) Naći uslovne ekstreme f-je $z=2x^4+8y^4+24$ ako je $8x+4y=1$.

Rj. $F(x,y,\lambda)=2x^4+8y^4+24+\lambda(8x+4y-1)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=8x^3+8\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=32y^3+4\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=8x+4y-1$$

$8x^3+8\lambda=0 \quad /:8$

$32y^3+4\lambda=0 \quad /:4$

$x^3+\lambda=0$

$-\ 8y^3+\lambda=0$

$x^3-8y^3=0$

$x^3=8y^3$

$x=2y$

$8x+4y-1=0$

$8\cdot 2y+4y-1=0$

$20y=1$

$y=\frac{1}{20}$

$x=2\cdot\frac{1}{20}=\frac{1}{10}$.

$M_1\left(\frac{1}{10},\frac{1}{20}\right)$ je stacionarna tačka

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=24x^2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=96y^2$$

$D=AC-B^2$

$M_1\left(\frac{1}{10},\frac{1}{20}\right)$

$A=24\cdot\frac{1}{100}=\frac{24}{100}=\frac{12}{50}=\frac{6}{25}$

$B=0$

$C=\cancel{96}^{\cancel{48}\ 24}\cdot\frac{1}{\cancel{20}_{10}\cdot\cancel{20}_{10}}=\frac{24}{100}=\frac{12}{50}=\frac{6}{25}$

$D=\left(\frac{6}{25}\right)^2>0$ f-ja ima ekstrem

$A>0$ f-ja ima minimum

$$z_{min}\left(\frac{1}{10},\frac{1}{20}\right)=2\cdot\frac{1}{10^4}+8\cdot\frac{1}{20^4}+24=\frac{2}{10\,000}+\frac{\cancel{8}^{\cancel{4}\ 1}}{\cancel{20}_{10}\cdot\cancel{20}_{10}\cdot\cancel{20}_{10}\cdot 20}+24$$

$$=\frac{2}{10\,000}+\frac{1}{20\,000}+\frac{24\,000}{1\,000}=\frac{4+1+480\,000}{20\,000}=$$

$$=\frac{480\,005}{20\,000}\ \frac{:5}{:5}=\frac{96\,001}{4\,000}$$

$z_{min}=\frac{96\,001}{4000}$ je minimum f-je u tački $M\left(\frac{1}{10},\frac{1}{20}\right)$

(#) Naći uslovne ekstreme f-je $z=(x-y)^4+1$ ako je $x^2+y^2=18$.

Rj. $F(x,y,\lambda)=(x-y)^4+1+\lambda(x^2+y^2-18)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=4(x-y)^3+2\lambda x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=4(x-y)^3\cdot(-1)+2\lambda y$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-18$$

$$4(x-y)^3+2\lambda x=0 \quad \dots(1)$$
$$-4(x-y)^3+2\lambda y=0 \quad \dots(2)$$
$$x^2+y^2-18=0 \quad \dots(3)$$

(1) (2): $2\lambda x+2\lambda y=0 \quad /:2$

$\lambda(x+y)=0$

$\lambda=0$ ili $x+y=0$

a) $x+y=0$

$x=-y$

$(-y)^2+y^2=18$

$2y^2=18$

$y_{1,2}=\pm 3$

$y_1=-3 \Rightarrow x_1=3$

$y_2=3 \Rightarrow x_2=-3$

$M_1(3,-3)$, $M_2(-3,3)$

za M_1 (1) $\Rightarrow 6\lambda=-4\cdot 6^3$

za M_2 (1) $\Rightarrow -6\lambda=-4\cdot(-6)^3$

$\Rightarrow \lambda=-144$

b) $\lambda=0$

(1) $\Rightarrow 4(x-y)^3=0$

$x=y$

$2y^2=18$

$y_{3,4}=\pm 3$

$M_3(-3,-3)$

$M_4(3,3)$

$\lambda=0$

Stacionarne tačke su $M_1(3,-3)$ $M_2(-3,3)$ za $\lambda=-144$ i $M_3(-3,-3)$ i $M_4(3,3)$ za $\lambda=0$.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=12(x-y)^2+2\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial x\partial y}=-12(x-y)^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y^2}=12(x-y)^2+2\lambda$$

$D=AC-B^2$

$M_1(3,-3)$, $\lambda=-144$

$A=12\cdot 36-2\cdot 144=144$

$B=-12\cdot 36=-432$

$C=144$

$D=20\,736-186\,624$

f-ja u tački M_1 nema ekstrema

$M_2(-3,3)$, $\lambda=-144$

$\left.\begin{array}{l} A=144 \\ B=432 \\ C=144 \end{array}\right\} D<0$

f-ja u tački M_2 nema ekstrem

$M_3(-3,-3)$, $\lambda=0$

$A=0$, $B=0$, $C=0$ $\Rightarrow$ $D=0$ potrebno je ispitati f-ju u okolini tačke $M_3(-3,-3)$

$$\Delta z(M_3)=z(-3+\varepsilon,-3+\omega)-z(-3,-3)=(-3+\varepsilon+3-\omega)^4+1-1=(\varepsilon-\omega)^4>0 \quad \forall\varepsilon \text{ i } \forall\omega$$

Priraštaj f-je u okolini tačke M_3 je pozitivan pa f-ja u M_3 ima minimum, $z_{min}(-3,-3)=1$

$M_4(3,3)$, $\lambda=0$

$A=0$, $B=0$, $C=0$ $\Rightarrow$ $D=0$ potrebno je ispitati f-ju u okolini tačke $M_4(3,3)$

$$\Delta z(M_4)=z(3+\varepsilon,3+\omega)-z(3,3)=(3+\varepsilon-3-\omega)^4+1-1=(\varepsilon-\omega)^4>0 \quad \forall\varepsilon \text{ i } \forall\omega$$

Priraštaj f-je u okolini tačke M_4 je pozitivan pa f-ja u M_4 ima minimum, $z_{min}(3,3)=1$.

(#) Nađi uslovne ekstreme f-je $z = 2x+4y$ ako je $\frac{2}{x} + \frac{4}{y} = 3$.

Rj. Formirajmo Lagranžovu f-ju $F(x,y,\lambda) = 2x+4y+\lambda\left(\frac{2}{x}+\frac{4}{y}-3\right)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2 + 2\lambda \cdot \frac{(-1)}{x^2} \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)(x^{-2}) \qquad (x^{-2})' = (-2)x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4 + 4\lambda \cdot \frac{(-1)}{y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{2}{x} + \frac{4}{y} - 3$$

Formirajmo sistem

$$4 - \frac{4\lambda}{y^2} = 0 \quad /:4$$
$$2 - \frac{2\lambda}{x^2} = 0 \quad /:2$$
$$\frac{2}{x} + \frac{4}{y} = 3$$

$$1 - \frac{\lambda}{x^2} = 0 \qquad 1 = \frac{\lambda}{x^2} \quad (1)$$
$$1 - \frac{\lambda}{y^2} = 0 \qquad 1 = \frac{\lambda}{y^2} \quad (2)$$
$$\frac{2}{x} + \frac{4}{y} = 3 \qquad \frac{2}{x} + \frac{4}{y} = 3 \quad (3)$$

(1) i (2) $\Rightarrow \frac{\lambda}{x^2} = \frac{\lambda}{y^2} \Rightarrow x^2 = y^2$

tj. $x = \pm y$

Za $x = y$ iz (3) $\frac{2}{x} + \frac{4}{x} = 3$

$\frac{6}{x} = 3 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2$

Za $x = -y$ iz (3)

$\frac{2}{x} - \frac{4}{x} = 3 \Rightarrow -\frac{2}{x} = 3$

$3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow y = \frac{2}{3}$

Za $M_1(2,2) \Rightarrow 2 - 2\lambda \cdot \frac{1}{4} = 0$

$\lambda = 4$

Za $M_2\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow 2 - 2\lambda \cdot \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{9}$

Stacionarne tačke su $M_1(2,2)$ za $\lambda = 4$ i $M_2\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ za $\lambda = \frac{4}{9}$.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{4\lambda}{x^3}$$

Za $M_1(2,2)$, $\lambda = 4$

$A = \frac{16}{8} = 2$, $B = 0$, $C = \frac{32}{8} = 4$, $D = AC - B^2 = 8 > 0$ f-ja ima ekstrem

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

$A > 0 \Rightarrow$ f-ja ima minimum

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{8\lambda}{y^3}$$

$z_{min}(2,2) = 4 + 8 = 12$

Za $M_2\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\lambda = \frac{4}{9}$, $A = \frac{\frac{16}{9}}{-\frac{8}{27}} = -\frac{16 \cdot 27}{8 \cdot 9} = -2 \cdot 3 = -6$

$B = 0$, $C = \frac{\frac{32}{9}}{\frac{8}{27}} = \frac{32 \cdot 27}{8 \cdot 9} = 4 \cdot 3 = 12$, $D = AC - B^2 = -72 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f-ja u tački M_2 nema ekstremnu vrijednost

(#) Naći uslovne ekstreme f-je $z=xy$ ako je $x^2+y^2=2ax$, $a>0$.

Rj: Posmatramo f-ju $F(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x^2+y^2-2ax)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y+2\lambda x-2a\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x+2\lambda y$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-2ax$$

$$\begin{aligned} y+2\lambda x-2a\lambda&=0\\ x+2\lambda y&=0\\ x^2+y^2-2a\cdot x&=0 \end{aligned}$$

(1) $y+2\lambda(x-a)=0 \Rightarrow x-a=\frac{-y}{2\lambda}$ ...(*)

(2) $x=-2\lambda y$

(3) $x^2-2\cdot x\cdot a+a^2-a^2+y^2=0$

(2) u (1): $y+2\lambda(-2\lambda y-a)=0$

(3): $(x-a)^2+y^2=a^2$

$$y-4\lambda^2y-2a\lambda=0$$

$$y(1-4\lambda^2)=2a\lambda$$

$$y=\frac{2a\lambda}{1-4\lambda^2}$$

(*) u (3):

$$\frac{y^2}{4\lambda^2}+y^2=a^2$$

$$y^2\left(\frac{1}{4\lambda^2}+1\right)=a^2$$

$$y^2\left(\frac{1+4\lambda^2}{4\lambda^2}\right)=a^2$$

$$y^2=\frac{4a^2\lambda^2}{1+4\lambda^2}$$

$$y=\frac{2a\lambda}{\pm\sqrt{1+4\lambda^2}}$$

$$y=\frac{2a\lambda}{1-4\lambda^2}=\frac{2a\lambda}{\pm\sqrt{1+4\lambda^2}} \Rightarrow 1-4\lambda^2=\pm\sqrt{1+4\lambda^2}$$

$$(1-4\lambda^2)^2=1+4\lambda^2$$

$$16\lambda^4-8\lambda^2+1=1+4\lambda^2$$

$$16\lambda^4-12\lambda^2=0$$

$$\lambda^2(16\lambda^2-12)=0$$

$\lambda_1=0$

$$\lambda_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{12}{16}}=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\lambda_1=0$: $y=0$, $x=0$

$\lambda_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\begin{aligned} y+\sqrt{3}x-a\sqrt{3}&=0\\ x+y\sqrt{3}&=0 \quad /\cdot\sqrt{3}\\ x^2+y^2-2ax&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3}x+y&=a\sqrt{3}\\ -\quad \sqrt{3}x+3y&=0\\ \hline -2y&=a\sqrt{3} \end{aligned}$$

$y=\frac{-a}{2}\sqrt{3}$, $x=\frac{3}{2}a$

$\lambda_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\begin{aligned} y-x\sqrt{3}+a\sqrt{3}&=0\\ x-y\sqrt{3}&=0 \quad /\cdot\sqrt{3}\\ x^2+y^2-2ax&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x\sqrt{3}+y&=-a\sqrt{3}\\ +\quad x\sqrt{3}-3y&=0\\ \hline -2y&=-a\sqrt{3} \end{aligned}$$

$y=\frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow x=\frac{3}{2}a$

Stacionarne tačke su $M_1(0,0)$ za $\lambda=0$, $M_2\left(\frac{3}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$ za $\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $M_3\left(\frac{3}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$ za $\lambda=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=1$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2\lambda$$

$M_1(0,0)$, $\lambda=0$

$D=AC-B^2=-1<0 \Rightarrow$ f-ja u tački $M_1(0,0)$ nema ekstrem

$M_2\left(\frac{3}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$, $\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$D=AC-B^2=3-1=2>0 \Rightarrow$ f-ja u tački M_2 ima ekstrem

$A=\sqrt{3}>0 \Rightarrow$ f-ja ima minimum

$$Z_{min}\left(\frac{3}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

$M_3\left(\frac{3}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$ za $\lambda=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$D=AC-B^2=3-1>0 \Rightarrow$ f-ja ima ekstrem

$A=-\sqrt{3}<0 \Rightarrow$ f-ja u tački M_3 ima maksimum

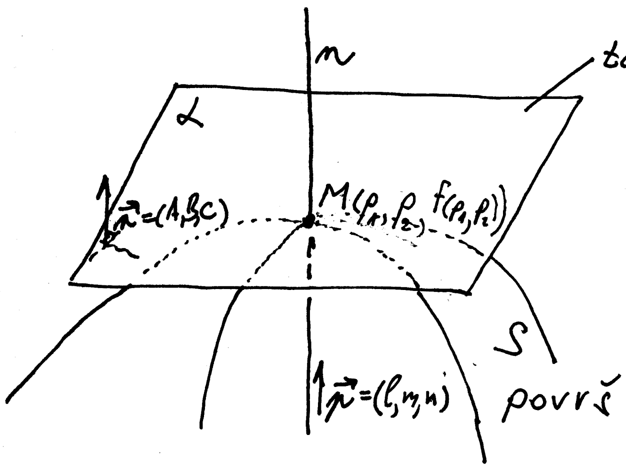
$$Z_{max}\left(\frac{3}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

Jednačina tangentne ravni i jednačina normale na površ

Jednačina tangentne ravni (hiperravni) na površ S, čija je jednačina $z=f(x_1,x_2)$, u tački $M(\rho_1,\rho_2,f(\rho_1,\rho_2))$ (ako je f diferencijabilna u tački (ρ_1,ρ_2) glasi:

$$z-f(\rho_1,\rho_2)=f'_{x_1}(\rho_1,\rho_2)(x_1-\rho_1)+f'_{x_2}(\rho_1,\rho_2)(x_2-\rho_2)$$

Može li se uspostaviti sličnost sa jednačinom tangente na krivu liniju $y=f(x)$ u ravni?



tangentna ravan

$$Ax+By+Cz+D=0$$

$M(\rho_1,\rho_2,f(\rho_1,\rho_2))$ tačka dodira

n - normala na površ $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$

Jednačina normale na površ $z=f(x,y)$ u tački $M(\rho_1,\rho_2,f(\rho_1,\rho_2))$ (ako je f diferencijabilna u (ρ_1,ρ_2)) glasi:

$$\frac{x-\rho_1}{f'_x(\rho_1,\rho_2)}=\frac{y-\rho_2}{f'_y(\rho_1,\rho_2)}=\frac{z-f(\rho_1,\rho_2)}{-1}$$

sličnost sa krivom $y=f(x)$ u ravni:
$k_1\cdot k_2=-1$, $M(\rho_1,\rho_2)$ $y-\rho_2=f'(\rho_1)(x-\rho_1)$
$k_2=\frac{-1}{k_1}$, $y-\rho_2=\frac{-1}{f'(\rho_1)}(x-\rho_1)$
$\frac{x-\rho_1}{f'(\rho_1)}=\frac{y-\rho_2}{-1}$

Ako površ S ima jednačinu u implicitnom obliku $F(x,y,z)=0$

$$\alpha:\ F'_x(\rho_1,\rho_2,f(\rho_1,\rho_2))(x-\rho_1)+F'_y(\rho_1,\rho_2,f(\rho_1,\rho_2))(y-\rho_2)+F'_z(\rho_1,\rho_2,f(\rho_1,\rho_2))(z-f(\rho_1,\rho_2))=0$$

$$n:\ \frac{x-\rho_1}{F'_x(\rho_1,\rho_2,f(\rho_1,\rho_2))}=\frac{y-\rho_2}{F'_y(\rho_1,\rho_2,f(\rho_1,\rho_2))}=\frac{z-f(\rho_1,\rho_2)}{F'_z(\rho_1,\rho_2,f(\rho_1,\rho_2))}$$

(#) Naći jednačinu tangentne ravni i normale na površ

a) $z=\frac{x^2}{2}-y^2$ u tački $M(2,-1,1)$

b) $3xyz-z^3=a^3$ u tački za koju je $x=0,\ y=a$

c)ˇ $z=x^2+2y^2$ u tački $A(1,1,3)$

d)ˇ $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ u tački $(1,1,\frac{\pi}{4})$ → rj. $\alpha:\ z=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-y)$

$n:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$

e)ˇ $z=\sqrt{169-x^2-y^2}$ → rj. u tački $(3,4,z(3,4))$ $\alpha:\ 3x+4y+12z-169=0$

$n:\ \frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12}$

f)ˇ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{8}=0$ u tački $M(4,3,4)$ → rj. $\alpha:\ 3x+4y-6z=0$

$n:\ \frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{-6}$

g)ˇ $x^2+y^2+z^2=2Rz$ u tački $(R\cos\alpha,\ R\sin\alpha,\ R)$ $(R>0)$.

Rj. a) $z=f(x,y)$, $z-f(p_1,p_2)=f'_x(p_1,p_2)(x-p_1)+f'_y(p_1,p_2)(y-p_2)$ jedn. tang. ravni

$z=\frac{x^2}{2}-y^2$, $z'_x=x$, $z'_x(2,-1)=2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y$, $z'_y(2,-1)=2$

$M(2,-1,1)$, $f(2,-1)=1$

$z-1=2(x-2)+2(y+1)$

$2x+2y-z-1$ jednačina tangentne ravni

$$\frac{x-p_1}{f'_x(p_1,p_2)}=\frac{y-p_2}{f'_y(p_1,p_2)}=\frac{z-f(p_1,p_2)}{-1}\ \Rightarrow\ \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$$ jedn. normale

b) Nađimo tačku dodira tangentne ravni i površi:

$x=0,\ y=a$, $3xyz-z^3=a^3\ \Rightarrow\ -z^3=a^3\ \Rightarrow\ z=-a$

Tačka dodira je $M(0,a,-a)$

$F'_x=3yz\ \Rightarrow\ F'_x(0,a,-a)=-3a^2$

$F'_y=3xz\ \Rightarrow\ F'_y(0,a,-a)=0$

$F'_z=3xy-3z^2\ \Rightarrow\ F'_z(0,a,-a)=-3a^2$

$\alpha:\ F'_x(p_1,p_2,f(p_1,p_2))(x-p_1)+F'_y(p_1,p_2,f(p_1,p_2))(y-p_2)+F'_z(p_1,p_2,f(p_1,p_2))(z-f(p_1,p_2))=0$

$-3a^2(x-0)+0(y-a)+(-3a^2)(z-(-a))=0\ \Rightarrow\ -3a^2x-3a^2z-3a^3=0$

tj. $x+z+a=0$ jedn. tang. ravni

$$\frac{x-0}{-3a^2}=\frac{y-a}{0}=\frac{z+a}{-3a^2}\ \Rightarrow\ \frac{x}{1}=\frac{y-a}{0}=\frac{z+a}{1}$$ jednačina normale

c)ˇ rj. $\alpha:\ 2x+4y-z-3=0$

$n:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{-1}$

g)ˇ rj. $\alpha:\ x\cos\alpha+y\sin\alpha-R=0$

$n:\ \frac{x-R\cos\alpha}{\cos\alpha}=\frac{y-R\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{z-R}{0}$

Na površ $x^2+2y^2+3z^2=21$ postaviti tangentnu ravan paralelnu ravni $x+4y+6z=0$.

Rj.

$\beta: Ax+By+Cz+D=0$

$\beta: ?$ $\quad \alpha \parallel \beta$

$\alpha: x+4y+6z=0$

$\vec{n}_\alpha=(1,4,6)$, $\vec{n}_\beta \parallel \vec{n}_\alpha$

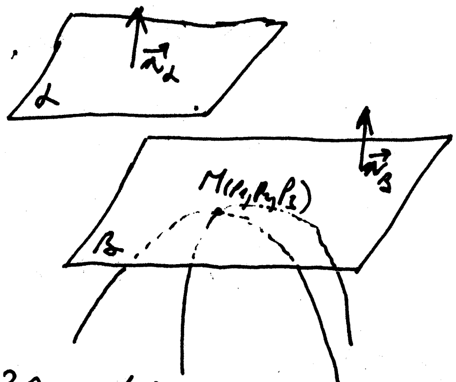
Treba nam tačka dodira tražene tangentne ravni sa površi $x^2+2y^2+3z^2=21$.

$$F'_x(p_1,p_2,p_3)(x-p_1)+F'_y(p_1,p_2,p_3)(y-p_2)+F'_z(p_1,p_2,p_3)(z-p_3)=0$$

$F'_x=2x$

$F'_y=4y$

$F'_z=6z$



$$n: \frac{x-p_1}{F'_x(p_1,p_2,p_3)}=\frac{y-p_2}{F'_y(p_1,p_2,p_3)}=\frac{z\,z_0}{F'_z(p_1,p_2,p_3)}$$

Vektor normale tražene tangentne ravni je

$$\vec{n}_\beta=(2p_1,4p_2,6p_3)$$

$$\vec{n}_\alpha \parallel \vec{n}_\beta \Rightarrow \frac{2p_1}{1}=\frac{4p_2}{4}=\frac{6p_3}{6} \Rightarrow 2p_1=p_2=p_3$$

odredimo p_1, p_2 i p_3

$p_1^2+2\cdot 4p_1^2+3\cdot 4p_1^2=21$

$21p^2=21$

$p_1=\pm 1 \Rightarrow p_2=p_3=\pm 2$

I rješenje:

$p_1=-1,\ p_2=p_3=-2$

$-2(x+1)-8(y+2)-12(z+2)=0$

$-2x-8y-12z=42$

$x+4y+6z=-21$

II rješenje $p_1=1,\ p_2=p_3=2$

$2(x-1)+8(y-2)+12(z-2)=0$

$2x+8y+12z-42=0 \quad /:2$

$x+4y+6z=21$

jednačina tražene tangentne ravni

(#) Odrediti jednačine normale i jednačinu tangentne ravni površi $z=\sqrt{169-x^2-y^2}$ u tački $(3,4,\ z(3,4))$.

Rj:

$$z(3,4)=\sqrt{169-9-16}=\sqrt{144}=12$$

$$M(3,4,12)$$

jednačina tangentne ravni i normale na površ $z=f(x,y)$ u tački $M(p_1,p_2,p_3)$: $z-p_3=z'_x(p_1,p_2)(x-p_1)+z'_y(p_1,p_2)(y-p_2)$

$$\frac{x-p_1}{z'_x(p_1,p_2)}=\frac{y-p_2}{z'_y(p_1,p_2)}=\frac{z-p_3}{-1}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{169-x^2-y^2}}(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{169-x^2-y^2}}\Rightarrow z'_x(3,4)=\frac{-3}{\sqrt{169-25}}=\frac{-3}{12}=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{169-x^2-y^2}}(-2y)=\frac{-y}{\sqrt{169-x^2-y^2}}\Rightarrow z'_y(3,4)=\frac{-4}{12}=-\frac{1}{3}$$

$$z-12=-\frac{1}{4}(x-3)-\frac{1}{3}(y-4)\quad /\cdot 12$$

$$12z-144=-3(x-3)-4(y-4)$$

$$3x+4y+12z-144-9-16=0$$

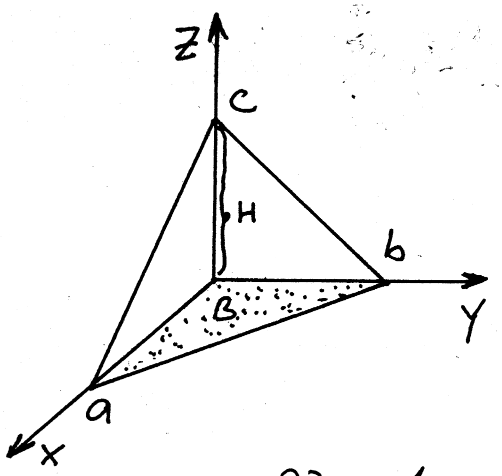
$$3x+4y+12z-169=0$$ jednačina tangentne ravni na površ z

$$\frac{x-3}{-\frac{1}{4}}=\frac{y-4}{-\frac{1}{3}}=\frac{z-12}{-1}\quad /\cdot\left(\frac{1}{-12}\right)$$

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12}$$ jednačina normale na površ z

(#) Dokazati da tangentne ravni površi $z = \frac{1}{xy}$ tvore s koordinatnim ravnima piramide konstantne zapremine.

Rj. Jednačina tangentne ravni na površ $z = f(x,y)$ u tački $M(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$: $z - \rho_3 = z'_x(\rho_1,\rho_2)(x-\rho_1) + z'_y(\rho_1,\rho_2)(y-\rho_2)$



$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ kanonični oblik jednačine ravni gdje su a, b i c odsječci koje ravan odsjeca na koordinatnim osama

$$V_{piramide} = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{\frac{a \cdot b}{2} \cdot c}{3} = \frac{a \cdot b \cdot c}{6}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2 y} \Rightarrow z'_x(\rho_1,\rho_2) = \frac{-1}{\rho_1^2 \rho_2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{y^2} = \frac{-1}{x y^2} \Rightarrow z'_y(\rho_1,\rho_2) = \frac{-1}{\rho_1 \rho_2^2}$$

$$\rho_3 = f(\rho_1,\rho_2) = \frac{1}{\rho_1 \cdot \rho_2}$$

$$z - \frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{-1}{\rho_1^2 \rho_2}(x-\rho_1) + \frac{-1}{\rho_1 \rho_2^2}(y-\rho_2) \quad / \cdot \rho_1^2 \rho_2^2$$

$$\rho_1^2 \rho_2^2 z - \rho_1 \rho_2 = -\rho_2(x-\rho_1) - \rho_1(y-\rho_2)$$

$$\rho_1^2 \rho_2^2 z + \rho_2 x + \rho_2 y = \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_2 \quad / \cdot \frac{1}{\rho_1\rho_2}$$

$$\frac{x}{\rho_1} + \frac{y}{\rho_1} + \rho_1 \rho_2 z = 3 \quad / \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{3\rho_1} + \frac{y}{3\rho_2} + \frac{z}{\frac{3}{\rho_1\rho_2}} = 1 \Rightarrow V_{piramide} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}\rho_1 \cdot 3\rho_2 \cdot \frac{3}{\rho_1\rho_2}}{\underset{2}{\cancel{6}}} = \frac{9}{2}$$

zapremina piramide za sve tangentne ravni na površ

(#) Nađite udaljenost ishodišta koordinatnog sistema od tangentne ravni (helikoida) $y = x\, tg\frac{z}{a}$ u tački $(a, a, \frac{\pi a}{4})$.

Rj: $F'_x(p_1,p_2,p_3)(x-p_1) + F'_y(p_1,p_2,p_3)(y-p_3) + F'_z(p_1,p_2,p_3)(z-p_3) = 0$

jednačina tangentne ravni na površ $F(x,y,z)=0$

$y - x\, tg\frac{z}{a} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x} = -tg\frac{z}{a} \Rightarrow F'_x(a,a,\frac{\pi a}{4}) = -tg\frac{\frac{\pi a}{4}}{a} = -tg\frac{\pi}{4} = -1$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 \Rightarrow F'_y(a,a,\frac{\pi a}{4}) = 1$

$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{-x}{\cos^2\frac{z}{a}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{-x}{a\cos^2\frac{z}{a}} \Rightarrow F'_z(a,a,\frac{\pi a}{4}) = \frac{-a}{a\cos^2\frac{\pi}{4}} = \frac{-1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$F'_z(a,a,\frac{\pi a}{4}) = -2$

$-1(x-a) + 1\cdot(y-a) + (-2)(z-\frac{\pi a}{4}) = 0$

$-x + y - 2z + a - a + \frac{\pi a}{2} = 0$

$-x + y - 2z + \frac{\pi a}{2} = 0$

jednačina tangentne ravni helikoida u tački $(a,a,\frac{\pi a}{4})$.

$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $O(0,0,0)$

$d = \frac{0+0+0+\frac{\pi a}{2}}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{\pi a}{2\sqrt{6}}$

udaljenost početka koordinatnog sistema od tangentne ravni

(#) Napisati jednačinu tangentne ravni i normale na površ $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$ u tački $M(2,2,1)$.

Rj. Ako površ S ima jednačinu u implicitnom obliku $F(x,y,z)=0$ tada jednačina tangentne ravni i normale na površ S u tački $M(p_1,p_2,p_3)$ se računaju po formuli:

$$\alpha: F'_x(p_1,p_2,p_3)(x-p_1)+F'_y(p_1,p_2,p_3)(y-p_2)+F'_z(p_1,p_2,p_3)(z-p_3)=0$$

$$n: \frac{x-p_1}{F'_x(p_1,p_2,p_3)}=\frac{y-p_2}{F'_y(p_1,p_2,p_3)}=\frac{z-p_3}{F'_z(p_1,p_2,p_3)}$$

$$2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$$

$$\left(\frac{x}{z}\right)'_z=(xz^{-1})'_z=(-1)xz^{-2}$$

$$F(x,y,z)=2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}-8=0$$

$$F'_x=2^{\frac{x}{z}}\ln 2\cdot\frac{1}{z} \Rightarrow F'_x(2,2,1)=4\ln 2.$$

$$F'_y=2^{\frac{y}{z}}\ln 2\cdot\frac{1}{z} \Rightarrow F'_y(2,2,1)=4\ln 2$$

$$F'_z=2^{\frac{x}{z}}\ln 2\cdot\left(\frac{x}{z}\right)'_z+2^{\frac{y}{z}}\ln 2\left(\frac{y}{z}\right)'_z=-\frac{x}{z^2}2^{\frac{x}{z}}\ln 2-\frac{y}{z^2}2^{\frac{y}{z}}\ln 2$$

$$=-\frac{1}{z^2}\ln 2\left(x2^{\frac{x}{z}}+y2^{\frac{y}{z}}\right)$$

$$F'_z(2,2,1)=-\ln 2(2\cdot 4+2\cdot 4)=-16\ln 2$$

$$4\ln 2(x-2)+4\ln 2(y-2)+(-16\ln 2)(z-1)=0.$$

$4x\ln 2+4y\ln 2-16z\ln 2+8\ln 2=0$ jednačina tangentne ravni

$$\frac{x-2}{4\ln 2}=\frac{y-2}{4\ln 2}=\frac{z-1}{-16\ln 2} \Rightarrow \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}$$

jednačina normale na površ

\# Naći jednačinu tangentne ravni elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ koja na koordinatnim osama odsjeca jednake pozitivne odsječke.

Rj: Jednačina tangentne ravni na površ $F(x,y,z)=0$ u tački $M(p_1,p_2,p_3)$ ima jednačinu $F'_x(p_1,p_2,p_3)(x-p_1)+F'_y(p_1,p_2,p_3)(y-p_2)+F'_z(p_1,p_2,p_3)(z-p_3)$

Nađimo jednačinu tangentne ravni na elipsoid u proizvoljnoj tački $M(p_1,p_2,p_3)$: (U našem slučaju $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$)

$$F'_x=\frac{1}{a^2}\cdot 2x=\frac{2x}{a^2},\quad F'_y=\frac{2y}{b^2},\quad F'_z=\frac{2z}{c^2}$$

$$F'_x(M)=\frac{2p_1}{a^2},\quad F'_y(M)=\frac{2p_2}{b^2},\quad F'_z(M)=\frac{2p_3}{c^2}$$

$$\frac{2p_1}{a^2}(x-p_1)+\frac{2p_2}{b^2}(y-p_2)+\frac{2p_3}{c^2}(z-p_3)=0 \quad /\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{p_1}{a^2}x+\frac{p_2}{b^2}y+\frac{p_3}{c^2}z=\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}$$

Napišimo jednačinu ravni u kanonskom obliku

$$\frac{x}{\frac{a^2}{p_1}\left(\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}\right)}+\frac{y}{\frac{b^2}{p_2}\left(\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}\right)}+\frac{z}{\frac{c^2}{p_3}\left(\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}\right)}=1$$

Odavde možemo primijetiti da ako želimo da jednačina tangentne ravni na kordanatnim osama odsjeca jednake odsječke, potrebno i dovoljno je da $\frac{a^2}{p_1}=\frac{b^2}{p_2}$, $\frac{a^2}{p_1}=\frac{c^2}{p_3}$ i $\frac{b^2}{p_2}=\frac{c^2}{p_3}$. ... (*)

Isto tako primjetimo da je $\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}=1$ (ZAŠTO?) ...(**)

$(*) \Rightarrow p_1=\frac{a^2}{b^2}p_2,\ p_3=\frac{c^2}{b^2}p_2$ ...(1) Sad imamo:

$$\frac{x}{\frac{a^2}{\frac{a^2}{b^2}p_2}}+\frac{y}{\frac{b^2}{p_2}}+\frac{z}{\frac{c^2}{\frac{c^2}{b^2}p_2}}=1 \quad /:p_2$$

$$\frac{x}{b^2}+\frac{y}{b^2}+\frac{z}{b^2}=\frac{1}{p_2}$$

Kada (1) stavimo u (**) dobićemo da je $p_2=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Prema tome:

$x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ je jednačina tražene tangente

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Функции многих переменных, их обозначение и область определения

Переменная u называется функцией n переменных (аргументов) $x, y, z, \ldots, t$, если каждой системе значений $x, y, z, \ldots, t$, из области их изменения, соответствует определенное значение u.

Функциональная зависимость u от $x, y, z, \ldots, t$ символически обозначается: $u=f(x, y, z, \ldots, t)$, где после символа функции (которым может быть не только буква f, но и другие буквы) в скобках указываются все переменные, от которых зависит данная функция.

Частное значение функции $P(x, y, z, \ldots, t)$ при $x=a$, $y=b$, $z=c, \ldots, t=l$ обозначается $P(a, b, c, \ldots, l)$. Например, если $F(x, y, z)=\frac{3x}{y-\lg z}$, то $F(-2; 3; 10)=\frac{-6}{3-1}=-3$.

Геометрически каждая система значений двух переменных x, y изображается точкой на плоскости, а функция двух переменных $z=f(x, y)$ — некоторой поверхностью в пространстве; система значений трех переменных x, y, z изображается точкой в пространстве. (Обычно значения переменных рассматриваются как абсцисса, ордината и аппликата точки в прямоугольной системе координат.)

Система значений четырех и большего числа переменных не имеет геометрического изображения. Однако, в целях общности, для упрощения записей и рассуждений, *систему значений любого числа n переменных $x, y, z, \ldots, t$ называют точкой n-мерного пространства $M(x, y, z, \ldots, t)$, а функцию u, зависящую от n переменных, называют функцией точки n-мерного пространства $u=f(x, y, z, \ldots, t)=f(M)$.*

Областью определения (существования) функции называется совокупность всех точек, в которых она имеет определенные действительные значения.

Для функции двух переменных $z=f(x, y)$ область определения представляет некоторую совокупность точек плоскости, а для функции трех переменных $u = F(x, y, z)$ — некоторую совокупность точек пространства.

707. Вычислить частное значение функции:

1) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ при $x = 5$, $y = -3$;

2) $u = \ln\frac{x+z}{2y-z}$ в точке $A(6; 2; -1)$.

Решение. 1) $f(5; -3) = \sqrt{5^2 - (-3)^2} = 4$;

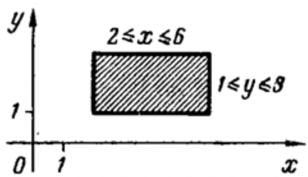
2) $u(A) = \ln\frac{6-1}{4+1} = 0$.

708. Построить область D изменения переменных x и y, заданную следующими неравенствами:

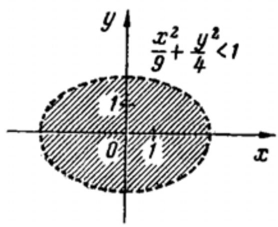
1) $2 \leqslant x \leqslant 6$, $1 \leqslant y \leqslant 3$; 2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$;

3) $4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9$; 4) $0 < y < x$.

Решение. 1) Данным неравенствам удовлетворяют координаты любой точки, находящейся внутри и на границе прямоугольника, стороны которого лежат на прямых $x = 2$, $x = 6$, $y = 1$ и $y = 3$. Этот прямоугольник и есть область D изменения



Черт .135



Черт. 136

переменных x и y (черт. 135). Такая область, в которую входит и ее граница, называется замкнутой.

2) Здесь область D есть совокупность всех точек, лежащих внутри эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, так как все эти точки, и только они, удовлетворяют данному неравенству (черт. 136). Такая область, в которую не входит ее граница, называется открытой.

3) Здесь область D есть круговое кольцо, ограниченное окружностями $x^2 + y^2 = 4$ и $x^2 + y^2 = 9$ с общим центром в начале координат и радиусами $r_1 = 2$ и $r_2 = 3$, черт. 137 (замкнутая область).

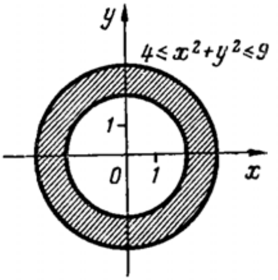
4) Здесь область D (открытая) ограничена биссектрисой первого координатного угла и осью абсцисс (черт. 138).

709. Найти области определения следующих функций:

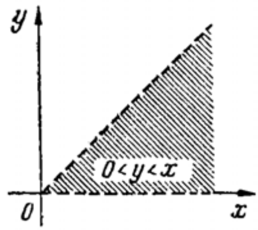
1) $z = 4 - x - 2y$; 2) $p = \frac{3}{x^2 + y^2}$; 3) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

4) $q = \frac{1}{\sqrt{xy}}$; 5) $u = \frac{x^2 y}{2x + y}$; 6) $v = \arcsin(x + y)$.

Решение. Руководствуясь указаниями § 2, гл. I, последовательно находим:



Черт. 137



Черт. 138

1) Функция z, как и всякая целая рациональная функция, определена (может быть вычислена) при любых значениях x и y, т. е. область определения функции z есть вся числовая плоскость xOy, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$. Геометрическое изображение (график) этой функции есть плоскость, пересекающая координатные оси в точках $A(4; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ и $C(0; 0; 4)$.

2) Функция p определена при любой системе значений x, y, кроме системы $x = 0$, $y = 0$, при которой ее знаменатель обращается в нуль. Поэтому областью определения функции p является вся числовая плоскость, кроме точки $(0; 0)$.

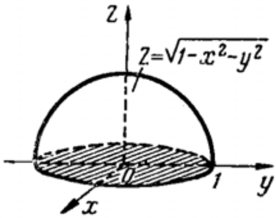
3) Область определения функции z есть круг с центром в начале координат и радиусом $r = 1$, включая и его границу — окружность $x^2 + y^2 = 1$ (замкнутая область). Внутри круга подкоренное выражение положительно, на его границе — равно нулю, а вне круга — отрицательно. Графическим изображением функции является полусфера, расположенная над плоскостью xOy (черт. 139).

4) Функция q определена в тех и только в тех точках плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют неравенству $xy > 0$. Все эти точки лежат внутри первого и третьего квадрантов (открытая область).

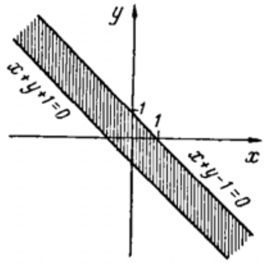
5) Областью определения функции u является вся плоскость xOy, за исключением прямой $2x + y = 0$, в точках которой знаменатель функции u обращается в нуль.

6) Область определения функции v есть совокупность систем значений x и y, удовлетворяющих неравенствам $-1 \leqslant x+y \leqslant 1$. На плоскости xOy эта область представляет полосу, ограниченную параллельными прямыми $x+y+1=0$ и $x+y-1=0$ (черт. 140).

710. $\varphi(x, y)=\frac{2x-y}{x-2y}$; вычислить $\varphi(1; 2)$, $\varphi(3; 1)$, $\varphi(a; 2a)$, $\varphi(2b, -b)$.



Черт. 139



Черт. 140

711. $F(x, y) = 3x^2y-\sqrt{x^6-y^6}$; показать, что $F(tx, ty)= =t^3F(x, y)$.

712. Построить области изменения переменных x и y, заданные неравенствами:

1) $-1<x<1$, $-1<y<1$; 2) $x^2+y^2 \leqslant 9$, $y \leqslant 0$;
3) $x^2+2y^2<4$, $x>0$, $y>0$; 4) $1 \leqslant x-y \leqslant 3$.

713. Найти области определения функций:

1) $z=a^2-x^2-2y^2$; 2) $u=-\sqrt{2-x^2-2y^2}$;

3) $v=\frac{1}{x^2-y^2}$; 4) $w=\sqrt{3x}-\frac{5}{\sqrt{y}}$;

5) $p=\frac{\ln(x^2y)}{\sqrt{y-x}}$; 6) $q=\arccos(x^2+y^2)$.

§ 2. Предел функции многих переменных. Непрерывность

Число A называется пределом функции $f(M)$ в точке M_0:

$$\lim_{M \to M_0} f(M)=A,$$

если абсолютное значение разности $f(M)-f(M_0)$ будет меньше любого заранее данного положительного числа ε, когда расстояние MM_0 меньше некоторого положительного числа δ (зависящего от ε).

Функция $f(M)$ называется непрерывной, в точке M_0, если

$$\lim_{M \to M_0} f(M)=f(M_0).$$

Для непрерывности функции $f(M)$ в точке M_0 необходимо выполнение следующих условий:

1) $f(M)$ должна быть определена в точке M_0 и вблизи этой точки;

2) $f(M)$ должна иметь предел, когда точка $M \longrightarrow M_0$ произвольным способом;

3) этот предел должен быть равен $f(M_0)$.

Функция $f(M)$, непрерывная в каждой точке некоторой области D, называется непрерывной в этой области.

714. Найти пределы:

$$1)\ \lim_{\substack{x \to 3 \\ y \to 0}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}; \qquad 2)\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x}{x+y}.$$

Решение. Убедившись, что функция не определена в предельной точке, делаем преобразования, руководствуясь указаниями § 7, гл. I:

$$1)\ \lim_{\substack{x \to 3 \\ y \to 0}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y} = \lim x \cdot \lim \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy} = 3 \cdot 1 = 3, \text{ так как } \lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = 1.$$

$$2)\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x}{x+y} = \lim \frac{1}{1+\frac{y}{x}}$$ — не существует, ибо отношение $\frac{y}{x}$ не имеет предела при произвольном стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(0; 0)$. Так, если $M \longrightarrow M_0$ вдоль различных прямых $y = kx$, то $\frac{y}{x} = k$, т. е. зависит от углового коэффициента прямой, по которой движется точка M.

715. В каких случаях функция многих переменных $f(M)$ будет разрывна в точке M_0? Пояснить их примерами.

Решение. 1) Функция $f(M)$ будет разрывна в точке M_0, если она определена вблизи этой точки, но не определена в самой точке M_0.

Например, функция $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}$ определена на всей плоскости xOy, но не определена в точке $M_0(0; 0)$, поэтому в этой точке функция разрывна. Во всех других точках числовой плоскости она непрерывна.

2) Функция $f(M)$ будет разрывна в точке M_0, если она определена вблизи этой точки и в самой точке, но не имеет предела, когда точка $M \longrightarrow M_0$.

Например, функция

$$u = \begin{cases} \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{при } x \neq 0,\ y \neq 0 \\ 3 & \text{при } x = y = 0 \end{cases}$$

разрывна в точке $M_0(0;\ 0)$, так как она определена вблизи этой точки и в самой точке (на всей плоскости xOy), но не имеет предела при $M \to M_0$. В остальных точках плоскости xOy она непрерывна.

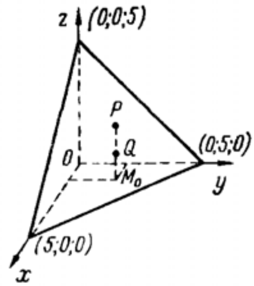
3) Функция $f(M)$ будет разрывна в точке M_0, если она определена вблизи этой точки и в самой точке, но $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) \neq f(M_0)$.

Например, функция

$$z = \begin{cases} 5-x-y & \text{при } x \neq 1,\ y \neq 2 \\ 1 & \text{при } x = 1,\ y = 2 \end{cases}$$

разрывна в точке $M_0(1;\ 2)$, ибо она определена вблизи этой точки и в самой точке, но ее предел при $M \to M_0$ не совпадает с частным значением в точке M_0; $\lim\limits_{M \to M_0} z = 2 \neq z(M_0) = 1$.

Графиком этой функции является вся плоскость $z = 5 - x - y$ без точки $P(1;\ 2;\ 2)$, вместо которой графику принадлежит точка $Q(1;\ 2;\ 1)$ (черт. 141).



Черт. 141

Функция двух переменных $z = f(x, y)$ может иметь множество точек разрыва; если они составляют линию, то она называется линией разрыва функции.

Например, функция $z = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$ разрывна в каждой точке окружности $x^2 + y^2 = 1$. Эта окружность есть линия разрыва данной функции.

716. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{a - \sqrt{a^2 - xy}}{xy}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \dfrac{xy}{\sin(xy)}$. 3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2x^3 + 3y^2}{x^2 + y^2}$.

717. Указать точки или линии разрыва функций:

1) $z = \dfrac{10x}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$; 2) $z = \dfrac{3y}{2x - y}$; 3) $z = \dfrac{x^2}{x^2 - 2y^2 - 4}$.

§ 3. Частные производные функции многих переменных

Функцию $u = f(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)$ можно дифференцировать по каждому из ее аргументов, считая при этом все остальные аргументы постоянными.

Производная от функции $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ по x, взятая в предположении, что все остальные аргументы $y,\ z,\ \ldots,\ t$ являются постоянными, называется частной производной от u по x

и обозначается $\frac{\partial u}{\partial x}$ или u'_x, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z, \ldots, t) - f(x, y, z, \ldots, t)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные от функции u по каждому из остальных ее аргументов.

Частные производные функции многих переменных находятся по известным правилам дифференцирования функции одной независимой переменной (гл. II).

718. Найти частные производные от функций:

1) $z = x^3 + 5xy^2 - y^3$; 2) $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$; 3) $v = \sqrt[x]{e^y}$.

Решение. 1) Считая z функцией только одного аргумента x, по формулам гл. II, находим $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 5y^2$.

Аналогично, считая z функцией только y, получим $\frac{\partial z}{\partial y} = 10xy - 3y^2$.

2) Считая u функцией только x, затем только y и только z, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{z}{x^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{x}.$$

3) Заменяя корень степенью с дробным показателем и затем дифференцируя по каждой из двух переменных, получим:

$$v = e^{\frac{y}{x}}; \quad v'_x = -\frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}}; \quad v'_y = \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}}.$$

719. Вычислить значения частных производных данных функций при указанных значениях аргументов:

1) $f(\alpha, \beta) = \cos(m\alpha - n\beta)$; $\alpha = \frac{\pi}{2m}$, $\beta = 0$;

2) $z = \ln(x^2 - y^2)$; $x = 2$, $y = -1$.

Решение. 1) По формулам дифференцирования (гл. II) находим частные производные:

$$f'_\alpha = -m \sin(m\alpha - n\beta); \qquad f'_\beta = n \sin(m\alpha - n\beta).$$

Полагая $\alpha = \frac{\pi}{2m}$, $\beta = 0$, получим $f'_\alpha\left(\frac{\pi}{2m}, 0\right) = -m$; $f'_\beta\left(\frac{\pi}{2m}, 0\right) = n$.

2) Находим производные, затем вычисляем их частные значения в указанной точке:

$$z'_x = \frac{2x}{x^2 - y^2}; \quad z'_y = -\frac{2y}{x^2 - y^2}; \quad z'_x(2; -1) = \frac{4}{3}; \quad z'_y(2; -1) = \frac{2}{3}.$$

720. Проверить, что функция $z=x\ln\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

Решение. Тождественно преобразуем данную функцию и находим ее частные производные по x и по y:

$$z=x(\ln y-\ln x);\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\ln y-\ln x-1=\ln\frac{y}{x}-1;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}.$$

Подставляя z, $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в данное уравнение, получим тождество $x\left(\ln\frac{y}{x}-1\right)+y\frac{x}{y}=x\ln\frac{y}{x}$; $0=0$. Это значит, что данная функция удовлетворяет данному уравнению (является его решением).

Найти частные производные от функций:

721. $z=(5x^3y^2+1)^3$. **722.** $r=\sqrt{ax^2-by^2}$.

723. $v=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$. **724.** $p=\arcsin\frac{x}{t}$.

725. $f(m,\ n)=(2m)^{3n}$; вычислить f'_m и f'_n в точке $A\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$.

726. $p(x,\ y,\ z)=\sin^2(3x+2y-z)$; вычислить $p'_x(1;\ -1;\ 1)$, $p'_y(1;\ 1;\ 4)$, $p'_z\left(-\frac{1}{2};\ 0;\ -1\right)$.

727. Проверить, что функция $v=x^y$ удовлетворяет уравнению $\frac{x}{y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial v}{\partial y}=2v$.

728. Проверить, что функция $w=x+\frac{x-y}{y-z}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=1$.

§ 4. Дифференциалы функции многих переменных

Частным дифференциалом функции $u=f(x,\ y,\ \ldots,\ t)$ *по* x *называется главная часть соответствующего частного приращения* $\Delta_x u=f(x+\Delta x,\ y,\ \ldots,\ t)-f(x,\ y,\ \ldots,\ t)$, *линейная относительно приращения* Δx (или, что то же, дифференциала dx).

Аналогично определяются частные дифференциалы функции u по каждому из остальных ее аргументов. Частные дифференциалы функции u по x, по y, $\ldots$, по t обозначаются, соответственно, d_xu, d_yu, $\ldots$, d_tu.

Из определения частных производных следует, что

$$d_xu=\frac{\partial u}{\partial x}dx;\quad d_yu=\frac{\partial u}{\partial y}dy;\quad \ldots;\quad d_tu=\frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

Полным дифференциалом функции $u=f(x, y, \ldots, t)$ называется главная часть ее полного приращения

$$\Delta u=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ \ldots,\ t+\Delta t)-f(x,\ y,\ \ldots,\ t),$$

линейная относительно приращений $\Delta x, \Delta y, \ldots, \Delta t$ (или, что то же, дифференциалов $dx, dy, \ldots, dt$).

Полный дифференциал du функции u (если он существует) равен сумме всех ее частных дифференциалов

$$du=d_x u+d_y u+\ldots+d_t u=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\ldots+\frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

Функция $u(x, y, \ldots, t)$ называется дифференцируемой в точке $(x, y, \ldots, t)$, если в этой точке она имеет полный дифференциал.

При достаточно малых (по абсолютному значению) приращениях аргументов полное приращение функции можно с как угодно малой относительной погрешностью заменить ее полным дифференциалом

$$\Delta u \approx du.^*$$

Вычисление полного дифференциала функции значительно проще, чем вычисление ее полного приращения. Поэтому указанное приближенное равенство используется для приближенных вычислений, простейшие из которых разъясняются в задаче 731.

729. Найти полные дифференциалы функций:

1) $z=3x^2y^5$; 2) $u=2x^{yz}$; 3)* $p=\arccos\frac{1}{uv}$.

Решение.

1) а. Находим частные производные данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6xy^5;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=15x^2y^4.$$

б. Умножая частные производные на дифференциалы соответствующих аргументов, получим частные дифференциалы функции:

$$d_x z=6xy^5\,dx;\quad d_y z=15x^2y^4\,dy.$$

в. Искомый полный дифференциал функции найдем как сумму ее частных дифференциалов: $dz=d_x z+d_y z=6xy^5\,dx+15x^2y^4\,dy$.

2) Следуя указанному плану, последовательно находим:

а) $u'_x=2yzx^{yz-1}$; $u'_y=2zx^{yz}\ln x$; $u'_z=2yx^{yz}\ln x$;

б) $d_x u=2yzx^{yz-1}\,dx$; $d_y u=2zx^{yz}\ln x\,dy$; $d_z u=2yx^{yz}\ln x\,dz$;

в) $du=2x^{yz}\left(\frac{yz}{x}\,dx+z\ln x\,dy+y\ln x\,dz\right)$.

3)* а) $\frac{\partial p}{\partial u}=\frac{|uv|}{u^2v\sqrt{u^2v^2-1}}$; $\frac{\partial p}{\partial v}=\frac{|uv|}{uv^2\sqrt{u^2v^2-1}}$;

---

* Исключая точки, где $u'_x=u'_y=\ldots=u'_t=0$.

б) $d_u p = \frac{|v|\,du}{v|u|\sqrt{u^2v^2-1}}$; $\quad d_v p = \frac{|u|\,dv}{u|v|\sqrt{u^2v^2-1}}$;

в) $dp = \frac{1}{\sqrt{u^2v^2-1}}\left(\frac{|v|\,du}{v|u|} + \frac{|u|\,dv}{u|v|}\right)$.

730. Вычислить значение полного дифференциала функции $z = \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{y}$ при $x=1$, $y=3$, $dx=0{,}01$, $dy=-0{,}05$.

Решение. Находим частные производные, затем частные дифференциалы и полный дифференциал данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}; \quad dz = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Подставляя заданные значения независимых переменных x, y, dx и dy, функцией которых является полный дифференциал dz, получим

$$dz = \frac{1\cdot(-0{,}05) - 3\cdot 0{,}01}{1+9} = -0{,}008.$$

731. Вычислить приближенное значение:

1) $1{,}08^{3,96}$; 2) $\frac{\sin 1{,}49\cdot \operatorname{arc\,tg} 0{,}07}{2^{2,95}}$.

Решение. Если требуется вычислить значение функции $f(x, y, \ldots, t)$ в точке $M_1(x_1, y_1, \ldots, t_1)$ и если проще вычислить значения этой функции и ее частных производных в точке $M_0(x_0, y_0, \ldots, t_0)$, то при достаточно малых, по абсолютной величине, значениях разностей $x_1 - x_0 = dx$, $y_1 - y_0 = dy$, $\ldots$, $t_1 - t_0 = dt$ можно заменить полное приращение функции ее полным дифференциалом:

$$f(M_1) - f(M_0) \approx f'_x(M_0)\,dx + f'_y(M_0)\,dy + \ldots + f'_t(M_0)\,dt,$$

и отсюда найти приближенное значение искомой величины по формуле

$$f(M_1) \approx f(M_0) + f'_x(M_0)\,dx + f'_y(M_0)\,dy + \ldots + f'_t(M_0)\,dt. \quad (a)$$

1) Полагая, что $1{,}08^{3,96}$ есть частное значение функции $f(x, y) = x^y$ в точке M_1 (1,08; 3,96) и что вспомогательная точка будет $M_0(1;\ 4)$, получим

$$f(M_0) = 1^4 = 1; \; f'_x(M_0) = yx^{y-1}\Big|_{\substack{x=1\\y=4}} = 4; \; f'_y(M_0) = x^y \ln x\Big|_{\substack{x=1\\y=4}} = 0;$$

$$dx = 1{,}08 - 1 = 0{,}08; \; dy = 3{,}96 - 4 = -0{,}04.$$

Подставляя в формулу (a), найдем

$$1{,}08^{3,96} \approx f(M_0) + f'_x(M_0)\,dx + f'_y(M_0)\,dy = 1 + 4\cdot 0{,}08 = 1{,}32.$$

2) Пусть $\frac{\sin 1{,}49 \cdot \operatorname{arc\,tg} 0{,}07}{2^{2{,}95}}$ есть частное значение функции трех переменных $\varphi(x, y, z) = 2^x \sin y \operatorname{arc\,tg} z$ в точке $M_1(-2{,}95;\ 1{,}49;\ 0{,}07)$ и пусть вспомогательная точка будет $M_0\left(-3;\ \frac{\pi}{2};\ 0\right)$.
Тогда $dx = -2{,}95 - (-3) = 0{,}05$; $dy = 1{,}49 - 1{,}57 = -0{,}08$; $dz = 0{,}07$;

$$\varphi(M_0) = 2^{-3} \sin\frac{\pi}{2} \operatorname{arc\,tg} 0 = 0;\ \varphi'_x(M_0) = 2^x \ln 2 \cdot \sin y \operatorname{arc\,tg} z\,|_{M_0} = 0;$$

$$\varphi'_y(M_0) = 2^x \cos y \operatorname{arc\,tg} z\,|_{M_0} = 0;\ \varphi'_z(M_0) = \left.\frac{2^x \sin y}{1+z^2}\right|_{M_0} = 2^{-3}.$$

Подставляя в формулу (a), получим

$$\frac{\sin 1{,}49 \cdot \operatorname{arc\,tg} 0{,}07}{2^{2{,}95}} \approx 2^{-3} \cdot 0{,}07 \approx 0{,}01.$$

Найти полные дифференциалы функций:

732. $z = y \ln 2x$.

733. $u = \sin^2 t \cos^2 x$.

734. $v = \frac{xy}{z}$.

735. $f(m, n, p) = e^{am} \cos\frac{bn}{p}$.

736. Вычислить значение полного дифференциала функции:

1) $z = \frac{x}{x-y}$ при $x = 2$, $y = 1$, $dx = -\frac{1}{3}$, $dy = \frac{1}{2}$;

2) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ при перемещении точки $M(x, y, z)$ из положения $M_0(10;\ -10;\ 5)$ в положение $M_1(9;\ -11;\ 6)$.

737. Найти приближенное значение $1{,}94^2 e^{0{,}12}$, исходя из значения функции $f(x, y) = x^2 e^y$ в точке $M_0(2;\ 0)$ и заменяя ее полное приращение полным дифференциалом *.

738. Найти приближенное значение $\sin 1{,}59 \operatorname{tg} 3{,}09$, исходя из значения функции $z = \sin x \operatorname{tg} y$ в точке $M_0\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ и заменяя ее приращение дифференциалом *.

739. Найти приближенное значение $2{,}68^{\sin 0{,}05}$, исходя из значения функции $z = x^{\sin y}$ в точке $M_0(e,\ 0)$ и заменяя ее приращение дифференциалом.*

§ 5. Дифференцирование сложных функций

Переменная z называется сложной функцией от независимых переменных $x, y, \ldots, t$, если она задана через посредство промежуточных аргументов $u, v, \ldots, w$:

$$z = F(u, v, \ldots, w),$$

---

* Все вычисления выполнять с точностью до 0,01.

где

$$u=f(x,\ y,\ \ldots,\ t),\ \ v=\varphi(x,\ y,\ \ldots,\ t),\ \ldots,\ \ w=\psi(x,\ y,\ \ldots,\ t).$$

Частная производная сложной функции по одной из независимых переменных равна сумме произведений ее частных производных по промежуточным аргументам на частные производные этих аргументов по независимой переменной:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}. \qquad (*)$$

Если, в частности, все аргументы $u,\ v,\ \ldots,\ w$ будут функциями от одной независимой переменной x, то и z будет сложной функцией только от x. Производная такой сложной функции (от одной независимой переменной) называется полной производной и определяется формулой

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}. \qquad (**)$$

(Она получается из формулы для полного дифференциала функции $z(u,\ v,\ \ldots,\ w)$ путем деления на dx.)

740. Найти производные сложных функций:

1) $y=u^2e^v$, $u=\sin x$, $v=\cos x$; 2) $p=u^v$, $u=\ln(x-y)$, $v=e^{\frac{x}{y}}$;

3) $z=x\sin v\cos w$, $v=\ln(x^2+1)$, $w=-\sqrt{1-x^2}$.

Решение. 1) Здесь y есть сложная функция одной независимой переменной x. Пользуясь формулой (**), получим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx}=2ue^v\cos x+u^2e^v(-\sin x).$$

2) p есть сложная функция двух переменных x и y. По общим формулам (*), найдем

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=vu^{v-1}\cdot\frac{1}{x-y}+u^v\ln u\cdot\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}};$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=vu^{v-1}\cdot\frac{1}{y-x}+u^v\ln u\cdot\left(-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right).$$

3) z есть сложная функция одной переменной x вида: $z=F(x,\ v,\ w)$, $v=f(x)$, $w=\varphi(x)$. Формулу для полной производной такой функции получим, полагая $u=x$ в формуле (**):

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}.$$

Согласно этой формуле, найдем

$$\frac{dz}{dx}=\sin v\cos w+x\cos v\cos w\cdot\frac{2x}{x^2+1}-x\sin v\sin w\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

741. $u=e^{z-2y}$, $z=\sin x$, $y=x^3$; $\frac{du}{dx}$?

742. $z=\ln(e^x+e^t)$; найти 1) $\frac{\partial z}{\partial t}$, 2) $\frac{dz}{dt}$, если $x=t^3$.

743. $p=u^2\ln v$, $u=\frac{x}{y}$, $v=3x-2y$; $\frac{\partial p}{\partial x}$? $\frac{\partial p}{\partial y}$?

744. $f(x)=\arcsin\frac{x}{y}$, $y=\sqrt{x^2+1}$; $\frac{df}{dx}$?

§ 6. Дифференцирование неявных функций

Переменная u называется неявной функцией от независимых переменных x, y, . . ., t, если она задана уравнением $f(x, y, \ldots, t, u)=0$, *которое не разрешено относительно u.* При этом, если функция $f(x, y, \ldots, t, u)$ и ее частные производные $f'_x, f'_y, \ldots, f'_t, f'_u$ определены и непрерывны в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, \ldots, t_0, u_0)$ и вблизи нее и если $f(M_0)=0$, а $f'_u(M_0)\neq 0$, то уравнение $f(x, y, \ldots, t, u)=0$ вблизи точки $P(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ и в самой этой точке определяет u как однозначную, непрерывную и дифференцируемую функцию от $x, y, \ldots, t$.

Производные неявной функции u, заданной уравнением $f(x, y, \ldots, t, u)=0$, при соблюдении указанных условий определяются формулами

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{f'_x}{f'_u};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{f'_y}{f'_u};\quad \ldots;\quad \frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{f'_t}{f'_u}. \tag{А}$$

В частности, если y есть неявная функция одной переменной x, заданная уравнением $f(x, y)=0$, то

$$\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{f'_x}{f'_y}. \tag{Б}$$

745. Найти производную неявной функции y, заданной уравнением: 1) $x^2+y^2+2x-6y+2=0$; 2) $x^y=y^x$, и вычислить ее значение при $x=1$.

Р е ш е н и е. 1) Обозначив левую часть данного уравнения через $f(x, y)$, найдем частные производные $f'_x=2x+2$, $f'_y=2y-6$ и, подставив их в формулу (Б), получим $y'=\frac{x+1}{3-y}$.

Далее, подставляя в исходное уравнение $x=1$, найдем два соответствующих значения функции $y_1=1$ и $y_2=5$. Поэтому при $x=1$ и производная имеет два значения: $y'_1(1)=1$, $y'_2(1)=-1$.

2) Преобразовав данное уравнение к виду $x^y - y^x = 0$, согласно формуле (Б), получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x^y - y^x)'_x}{(x^y - y^x)'_y} = \frac{y^x \ln y - yx^{y-1}}{x^y \ln x - xy^{x-1}} .$$

При $x=1$ из данного уравнения определяем $y=1$. Искомое значение $y'(1) = 1$.

746. Найти частные производные неявной функции $z(x, y)$, заданной уравнением: 1) $x^2+y^2+z^2-z=0$; 2) $ax+by-cz=$ $=k\cos(ax+by-cz)$.

Решение. 1) Обозначив левую часть уравнения через $\varphi(x, y, z)$ и пользуясь формулами (А), получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_z} = -\frac{2x}{2z-1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\varphi'_y}{\varphi'_z} = -\frac{2y}{2z-1} .$$

2) Преобразуя уравнение к виду $ax+by-cz-k\cos(ax+$ $+by-cz)=0$ и обозначая его левую часть через $F(x, y, z)$ по формулам (А) найдем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{a+ak\sin(ax+by-cz)}{-c-ck\sin(ax+by-cz)} = \frac{a}{c};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{b+bk\sin(ax+by-cz)}{-c-ck\sin(ax+by-cz)} = \frac{b}{c} .$$

Найти производные неявных функций:

747. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$; $\frac{dy}{dx}$? **748.** $uv=-\ln(uv)$; $\frac{dv}{du}$?

749. $y^2=\frac{x+y}{x-y}$; $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=2}$? **750.** $x\sin y+\cos 2y=\cos y$; $y'|_{y=\frac{\pi}{2}}$?

751. $x^2+y^2+z^2+2xz=1$; z'_x? z'_y? **752.** $e^u=\cos v\cos t$; $\frac{\partial u}{\partial v}$? $\frac{\partial u}{\partial t}$?

753. Проверить, что функция $4\sin(3x+2y+5z)=3x+2y+5z$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+1=0$.

§ 7. Частные производные высших порядков

Функцию многих аргументов $u=f(x, y, \ldots, t)$ можно дифференцировать по каждому аргументу. Полученные частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\ldots$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ (первого порядка) обычно зависят от тех же аргументов и каждую из них также можно дифференцировать по каждому аргументу.

Частные производные от частных производных первого порядка называются частными производными второго порядка. Они обозначаются:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u''_{xx}\,;\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=u''_{xy}\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=u''_{yx}\,;\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u''_{yy}\,;$$

. . . .

Частные производные от частных производных второго порядка называются частными производными третьего порядка. Они обозначаются:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=f'''_{xxx}\,;\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=f'''_{xxy}\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=f'''_{xyy}\,;\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial x}=f'''_{xyx}\,.$$

. . . .

Аналогично определяются и обозначаются частные производные четвертого, пятого и других высших порядков.

Частные производные высших порядков, отличающиеся только последовательностью дифференцирования, равны, если они непрерывны. Например,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\,;\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial x^2}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial x}\,.$$

Согласно этому положению, функция двух переменных $z=f(x,y)$ имеет три различных частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

четыре различных частных производных третьего порядка

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

и вообще $n+1$ различных частных производных n-го порядка.

Частные производные высших порядков находятся путем последовательного нахождения одной производной вслед за другой по правилам дифференцирования функции одной переменной (гл. II).

754. Найти частные производные второго порядка следующих функций: 1) $z=x^3-2x^2y+3y^2$; 2) $u\ (x,\ y,\ t)=e^{xyt}$.

Решение. 1) Сначала находим частные производные первого порядка, затем искомые частные производные второго порядка:

$$z'_x=3x^2-4xy;\quad z'_y=-2x^2+6y;$$

$$z''_{xx}=6x-4y;\quad z''_{xy}=z''_{yx}=-4x;\quad z''_{yy}=6.$$

2) Последовательно дифференцируя, находим

$$u'_x = yte^{xyt}; \quad u'_y = xte^{xyt}; \quad u'_t = xye^{xyt}; \quad u''_{xx} = y^2t^2e^{xyt};$$
$$u''_{xy} = u''_{yx} = t(1+xyt)e^{xyt}; \quad u''_{xt} = u''_{tx} = y(1+xyt)e^{xyt};$$
$$u''_{yt} = u''_{ty} = x(1+xyt)e^{xyt}; \quad u''_{yy} = x^2t^2e^{xyt}; \quad u''_{tt} = x^2y^2e^{xyt}.$$

755. Проверить, что $z''_{xy} = z''_{yx}$ для функций: 1) $z = \cos(ax - by)$, 2) $z = \ln(x^2 + y^2 + 1)$.

Решение. 1) Дифференцируя z по x, найдем $z'_x = -a\sin(ax - by)$; дифференцируя z'_x по y, найдем $(z'_x)'_y = z''_{xy} = ab\cos(ax - by)$.

Дифференцируем в другом порядке: сначала найдем производную от z по y, $z'_y = b\sin(ax - by)$, затем производную от z'_y по x, $(z'_y)'_x = z''_{yx} = ab\cos(ax - b)$.

Сопоставляя полученные результаты, заключаем, что для данной функции $z''_{xy} = z''_{yx}$.

2) Последовательно дифференцируя, находим z''_{xy}, затем z''_{yx}:

$$z'_x = \frac{2x}{x^2+y^2+1}; \quad z''_{xy} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2};$$
$$z'_y = \frac{2y}{x^2+y^2+1}; \quad z''_{yx} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2}.$$

Следовательно, и для этой функции $z''_{xy} = z''_{yx}$.

756. Проверить, что функция $z = 2\cos^2\left(y - \frac{x}{2}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0$.

Решение. Найдем частные производные второго порядка, содержащиеся в данном уравнении:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cdot 2\cos\left(y - \frac{x}{2}\right)\cdot\left[-\sin\left(y - \frac{x}{2}\right)\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \sin(2y - x);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\cos(2y - x); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 2\cos(2y - x).$$

Подставляя их в данное уравнение, получим тождество: $0 = 0$.

757. Найти частные производные второго порядка следующих функций: 1) $z = \frac{x^2}{2y - 3}$; 2) $u = e^x\ln y + \sin y\ln x$.

758. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}$, если $u = \ln(x + y)$.

759. Найти u'''_{xyy}, если $u = \sin(xy)$.

760. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$, если $u = 2^{xyz}$.

761. Проверить, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функций:

1) $z = \ln\frac{x}{y}$; 2) $z = \operatorname{arcctg}(x + 2y)$.

762. Проверить, что $\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^3 v}{\partial y\,\partial x^2}$ для функции $v=\frac{t}{xyz}$.

763. Проверить, что функция $p=\ln(x^2+y^2)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0$.

764. Проверить, что функция $u=e^{\frac{x}{y}}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0$.

§ 8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z)=0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на ней, то:

касательная плоскость к поверхности в точке M_0 определяется уравнением

$$(x-x_0)F'_x(M_0)+(y-y_0)F'_y(M_0)+(z-z_0)F'_z(M_0)=0; \qquad \text{(I)}$$

нормаль к поверхности в точке M_0 (прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно к касательной плоскости) определяется уравнениями

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}. \qquad \text{(II)}$$

Точки поверхности $F(x, y, z)=0$, где одновременно обращаются в нуль все частные производные первого порядка F'_x, F'_y, F'_z, называются особыми. В таких точках поверхность не имеет ни касательной плоскости, ни нормали.

765. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к эллиптическому параболоиду $z=2x^2+y^2$ в точке A (1; -1; 3).

Решение. Преобразуем уравнение поверхности к виду $2x^2+y^2-z=0$ и, обозначив его левую часть через $F(x, y, z)$, найдем частные производные $F'_x=4x$, $F'_y=2y$, $F'_z=-1$, вычислим их числовые значения в данной точке $F'_x(A)=4$, $F'_y(A)=-2$, $F'_z(A)=-1$ и, подставляя в общие уравнения (I) и (II), получим:

уравнение касательной плоскости $4(x-1)-2(x+1)-(z-3)=0$ или $4x-2y-z-3=0$;

уравнения нормали $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$.

766. На сфере $x^2+y^2+z^2=676$ найти точки, где касательная плоскость параллельна плоскости $3x-12y+4z=0$.

Решение. Пользуясь общим уравнением (I), составим уравнение касательной плоскости к данной сфере в ее точке (x_0, y_0, z_0):

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0$$

или

$$x_0x + y_0y + z_0z = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 676.$$

Согласно условию параллельности двух плоскостей, чтобы касательная плоскость была параллельна данной плоскости, в их уравнениях коэффициенты при текущих координатах должны быть пропорциональны: $\frac{x_0}{3} = \frac{y_0}{-12} = \frac{z_0}{4} = \lambda$.

Определив отсюда $x_0 = 3\lambda$, $y_0 = -12\lambda$, $z_0 = 4\lambda$ и подставляя в уравнение сферы, находим два значения коэффициента пропорциональности: $\lambda = \pm 2$ и две искомых точки на сфере (6; -24; 8) и (-6; 24; -8), в которых касательная плоскость параллельна данной плоскости.

767. Показать, что касательные плоскости к поверхности $xyz = m^3$ образуют с координатными плоскостями тетраэдр постоянного объема.

Решение. Уравнение касательной плоскости к данной поверхности в точке $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$ будет $y_0z_0x + x_0z_0y + x_0y_0z = 3x_0y_0z_0$. Она отсекает на осях координат отрезки $a = 3x_0$, $b = 3y_0$, $c = 3z_0$. Эти отрезки являются взаимно перпендикулярными ребрами тетраэдра, образованного касательной плоскостью и плоскостями координат. Приняв одно из этих ребер за высоту тетраэдра, найдем, что его объем $V = \frac{1}{6}abc = \frac{9}{2}x_0y_0z_0 = \frac{9}{2}m^3$ (так как точка P лежит на данной поверхности) не зависит от координат точки касания P. Из этого следует, что различные касательные плоскости к данной поверхности образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного (одинакового) объема.

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности:

768. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ в точке (1; -1; 1).

769. $2z = x^2 - y^2$ в точке (3; 1; 4).

770. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точках $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и $(a,\ b,\ c)$.

771. Найти касательные плоскости к эллипсоиду $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$, параллельные плоскости $12x - 3y + 2z = 0$.

772. Найти уравнения касательных плоскостей к параболоиду $4z = x^2 + y^2$ в точках пересечения его с прямой $x = y = z$.

773. Проверить, что поверхности $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ и $4 + x + 2y = \ln z$ касаются друг друга, т. е. имеют общую касательную плоскость, в точке (2; -3; 1).

§ 9. Экстремум функции многих переменных

Значение функции $f(M)$ в точке M_0 называется максимумом (минимумом), если оно является наибольшим (наименьшим) по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках.

Функция многих переменных может иметь максимум или минимум (экстремум) только в точках, лежащих внутри области определения функции, в которых все ее частные производные первого порядка равны нулю или не существуют *. Такие точки называются критическими.

Критическая точка M_0 будет точкой экстремума функции $f(M)$, если для всех точек M, достаточно близких к M_0 (в окрестности M_0), приращение функции $\Delta f = f(M) - f(M_0)$ не изменяет знака. При этом, если Δf сохраняет положительный знак, то M_0 есть точка минимума, а если Δf сохраняет отрицательный знак, то M_0 есть точка максимума функции.

Для функции двух переменных $f(x, y)$ вместо исследования знака Δf можно исследовать каждую критическую точку M_0, в которой функция дважды дифференцируема, по знаку определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2,$$

где

$$A = f''_{xx}(M_0), \quad B = f''_{xy}(M_0), \quad C = f''_{yy}(M_0).$$

При этом:

1) если $\Delta > 0$, то M_0 есть точка экстремума: при $A < 0$ (или $C < 0$) точка максимума, а при $A > 0$ (или $C > 0$) точка минимума;

2) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума;

3) если $\Delta = 0$, то для решения вопроса о наличии или отсутствии экстремума в точке M_0 требуется дальнейшее исследование, например по знаку приращения Δf вблизи этой точки.

Условия 1) и 2) являются достаточными условиями наличия или отсутствия экстремума.

774. Найти экстремумы функций:

1) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$; 2) $u = x^3 + y^2 - 3x + 4\sqrt{y^5}$;

3) $v = (x - y)^2 + (y - 1)^3$; 4) $w = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}$.

Решение. 1) Находим частные производные 1-го порядка z'_x и z'_y и критические точки, в которых они равны нулю или не существуют и которые лежат внутри области опре-

---

* Это необходимые условия экстремума (но недостаточные, они могут выполняться и в точках, где нет экстремума).

деления функции: $z'_x = 3x^2 - 6y$; $z'_y = 24y^2 - 6x$. Решая систему уравнений $z'_x = 0$, $z'_y = 0$, найдем две точки: $M_1(0; 0)$ и $M_2\left(1; \frac{1}{2}\right)$. Обе точки являются критическими, так как функция z определена на всей плоскости xOy. Других критических точек нет, так как z'_x и z'_y существуют при любых значениях x и y.

Далее исследуем критические точки M_1 и M_2 по знаку определителя Δ, составленного из частных производных второго порядка: $z''_{xx} = A = 6x$; $z''_{xy} = B = -6$; $z''_{yy} = C = 48y$.

Для точки M_1 получим $A = 0$, $B = -6$, $C = 0$ и $\Delta(M_1) = AC - B^2 < 0$. Следовательно, согласно достаточному условию 2), в точке M_1 нет экстремума.

Для точки M_2 имеем $A = 6$, $B = -6$, $C = 24$ и $\Delta(M_2) > 0$. Согласно достаточному условию 1), M_2 есть точка минимума. $z_{\min} = z(M_2) = 4$.

2) Ищем критические точки $u'_x = 3x^2 - 3$; $u'_y = 2y + 2\sqrt{y^3}$. Из системы уравнений $u'_x = 0$, $u'_y = 0$ найдем точки $P_1(1; 0)$ и $P_2(-1; 0)$. Эти точки принадлежат области определения исследуемой функции: $-\infty < x < +\infty$, $0 \leqslant y < +\infty$ (которая представляет половину плоскости xOy, лежащую выше оси Ox, включая и ось Ox), но они расположены не внутри этой области, а на ее границе $y = 0$. Поэтому точки P_1 и P_2 не являются критическими. Частные производные u'_x и u'_y существуют во всей области определения функции u. Поэтому данная функция, как не имеющая критических точек, не имеет экстремума. (Если не учесть, что граничные точки не могут быть точками экстремума, то, определив знак Δ в точке P_1, придем к ошибочному заключению, что она есть точка минимума.)

3) Ищем критические точки $v'_x = 2(x - y)$; $v'_y = -2(x - y) + 3(y - 1)^2$.

Решая систему уравнений $v'_x = 0$, $v'_y = 0$, найдем единственную точку $M_0(1; 1)$, которая является единственной критической точкой функции v.

Далее, чтобы установить, будет ли экстремум в точке M_0, вычисляем значение Δ в этой точке: $v''_{xx} = 2$, $v''_{xy} = -2$, $v''_{yy} = 2 + 6(y - 1)$; $\Delta(M_0) = 0$.

Здесь оказалось, что $\Delta(M_0)$ не имеет знака (случай 3). Чтобы установить, имеет ли экстремум функция v в критической точке M_0, исследуем знак ее приращения $\Delta v = v(M) - v(M_0) = (x - y)^2 + (y - 1)^3$ вблизи точки M_0.

Пусть точка M лежит на биссектрисе $y = x$. Тогда $\Delta v = (y - 1)^3$. Если M будет ниже M_0, т. е. если $y_M < 1$, то $\Delta v < 0$, а если M будет выше M_0, т. е. если $y_M > 1$, то $\Delta v > 0$. Здесь оказалось, что вблизи M_0 разность Δv не сохраняет знака, вследствие чего в точке M_0 нет экстремума.

4) Ищем критические точки $w'_x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; $w'_y = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$; $w'_z = \frac{2}{3\sqrt[3]{z}}$.

Эти частные производные не обращаются в нуль ни при каких значениях x, y, z; они не существуют (обращаются в бесконечность) в точке $P_0(0; 0; 0)$. Точка P_0 лежит внутри области определения функции w, которая представляет совокупность всех точек (x, y, z) пространства. Поэтому P_0 критическая точка.

Исследуя знак разности $w(P) - w(P_0) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}$ вблизи точки P_0, убеждаемся, что при любых отличных от нуля значениях x, y, z она сохраняет положительный знак. Поэтому P_0 есть точка минимума, $w_{\min} = w(P_0) = 0$.

Исследовать на экстремум функции:

775. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$. **776.** $v = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

777. $p = 2xy - 2x - 4y$. **778.** $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.

779. $\varphi = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$. **780.** $q = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$.

781.*. $z = 2 + (x-1)^4(y+1)^6$. **782*.** $u = 1 - (x-2)^{\frac{4}{5}} - y^{\frac{4}{5}}$.

§ 10. Наибольшее и наименьшее значения функции

Понятия наибольшего и наименьшего значений функции многих переменных определяются так же, как и для функции одной переменной (гл. III, § 5).

Наибольшее или наименьшее из всех значений функции нельзя смешивать с максимумом или минимумом функции, которые являются наибольшим или наименьшим значением функции только по сравнению с ее значениями в соседних точках.

Если функция разрывна или непрерывна в незамкнутой области, то она может не иметь ни наибольшего, ни наименьшего значения.

Функция $f(M)$, непрерывная в некоторой ограниченной замкнутой области D, обязательно имеет в этой области наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются ею или в точках экстремума, лежащих внутри области D, или в точках, лежащих на границе области.

Чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции $f(M)$ в ограниченной замкнутой области D, где она непрерывна, можно руководствоваться следующим правилом:

А. Найти критические точки, лежащие внутри области D, и вычислить значения функции в этих точках (не вдаваясь в исследование, будет ли в них экстремум функции и какого вида).

Б. Найти наибольшее (наименьшее) значение функции на границе области D.

В. Сравнить полученные значения функции: самое большее (меньшее) из них и будет наибольшим (наименьшим) значением функции во всей области D.

783. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $z = x^2 - y^2 + 2a^2$ в круге $x^2 + y^2 \leqslant a^2$;

2) $v = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 4$.

Решение. 1) Согласно указанному правилу:

А. Найдем критические точки функции z, лежащие внутри круга, и вычислим ее значения в этих точках: $z'_x = 2x$, $z'_y = -2y$; решая систему уравнений $z'_x = 0$, $z'_y = 0$, найдем критическую точку $K(0; 0)$, которая лежит внутри круга. Других критических точек нет. Значение функции в этой точке $z(K) = 2a^2$.

Б. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на границе заданной области — на окружности $x^2 + y^2 = a^2$. Уравнение окружности связывает между собой переменные x и y. Определяя из этого уравнения одну переменную через другую, например $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$, и подставляя в выражение функции z, преобразуем ее в функцию одной переменной: $z(x) = 2x^2 + a^2$, где x изменяется на отрезке $[-a, a]$.

Далее ищем наибольшее и наименьшее значения функции $z(x)$ на отрезке $[-a, a]$, которые и будут искомыми наибольшим и наименьшим значениями функции $z(x, y)$ на границе заданной области — на окружности.

Согласно правилу, указанному в гл. III, § 5:

I. Ищем критические точки функции $z(x)$, лежащие внутри отрезка $[-a, a]$, и вычисляем ее значения в этих точках: $z'(x) = 4x$; $z'(x) = 0$ в точке $x = 0$. Эта единственная критическая точка лежит внутри данного отрезка. Значение $z(x)$ в этой точке $z(0) = a^2$.

II. Вычисляем значения $z(x)$ на концах данного отрезка: $z(-a) = z(a) = 3a^2$.

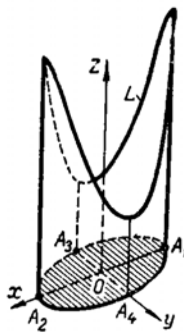
III. Сравнивая вычисленные значения $z(x)$ во внутренней критической точке $x = 0$ и на концах отрезка $x = -a$ и $x = a$, заключаем: наибольшее значение функции $z(x)$ на отрезке $[-a, a]$ [или что то же, функции $z(x, y)$ на границе данной области — на окружности $x^2 + y^2 = a^2$] равно $3a^2$, а наименьшее значение $z(x)$ на данном отрезке [или, что то же, $z(x, y)$ на данной границе] равно a^2.

В. Сравнивая значение z во внутренней критической точке K с ее наибольшим и наименьшим значениями на окружности, заключаем: наибольшее значение функции z в данной замкнутой области — круге равно $3a^2$ и достигается ею в граничных точках $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$, а ее наименьшее значение в этой области равно a^2 и достигается в граничных точках $A_3(0, -a)$ и $A_4(0, a)$, (черт. 142). Ординаты точек A_1, A_2, A_3, A_4, которые лежат на окружности, вычислены из уравнения окружности по известным их абсциссам.

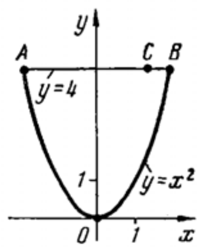
2) Руководствуясь указанным правилом:

А. Ищем критические точки функции v, лежащие внутри заданной области (черт. 143) $v'_x = 6x^2 + 8x - 2y$; $v'_y = 2y - 2x$; решая систему уравнений $v'_x = 0$, $v'_y = 0$, найдем две критические точки $(0;\ 0)$ и $(-1;\ -1)$, из которых ни одна не лежит внутри заданной области. Других критических точек функция v не имеет.

Б. Ищем наибольшее и наименьшее значения v на границе заданной области. Она состоит из двух участков AOB и AB, имеющих различные уравнения. Поэтому вначале найдем наибольшее и наименьшее значения v на каждом из этих участ-



Черт. 142



Черт. 143

ков, затем, сопоставляя их, найдем наибольшее и наименьшее значения v на всей границе.

На участке AOB имеем $y = x^2$, $v_1(x) = x^4 + 4x^2$, где x изменяется на отрезке $[-2;\ 2]$.

Согласно правилу гл. III, § 5, ищем наибольшее и наименьшее значения v_1 на отрезке $[-2;\ 2]$:

I. $v'_1 = 4x^3 + 8x$; $v'_1 = 0$ при $x = 0$; $v_1(0) = 0$.

II. $v_1(-2) = v_1(2) = 32$.

III. Сравнивая значения v_1 во внутренней критической точке $x = 0$ и на концах отрезка $x = -2$, $x = 2$, заключаем: наибольшее значение v_1 на отрезке $[-2;\ 2]$ равно 32 (в точках $x = \pm 2$), а наименьшее значение v_1 на этом отрезке равно нулю (в точке $x = 0$).

На участке AB имеем $y = 4$, $v_2(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$, где $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

Ищем наибольшее и наименьшее значения v_2 на отрезке $[-2;\ 2]$:

I. $v'_2 = 6x^2 + 8x - 8$; внутри данного отрезка $v'_2 = 0$ при $x = \frac{2}{3}$ (в точке C); $v_2\left(\frac{2}{3}\right) = 16\frac{22}{27}$.

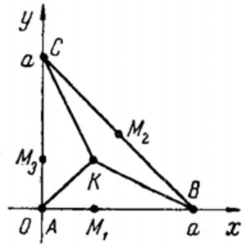
II. $v_2(-2) = v_2(2) = 32$.

III. Наибольшее значение v_2 на отрезке $[-2;\ 2]$ равно 32 (в точках $x=\pm 2$), а наименьшее значение v_2 на этом отрезке равно $16\frac{22}{27}$ $\left(\text{в точке}\ \ x=\frac{2}{3}\right)$.

Сопоставляя значения v на участках AOB и AB, приходим к выводу: на всей границе $AOBA$ наибольшее значение функции v равно 32 (в точках A и B), а ее наименьшее значение равно нулю (в точке O).

В. Внутри заданной замкнутой области функция v не имеет точек экстремума, ее наибольшее и наименьшее значения достигаются в точках, лежащих на границе этой области. В граничных точках $A(-2;\ 4)$ и $B(2;\ 4)$ функция v имеет наибольшее значение, $v_{нб}=v(A)=v(B)=32$, а в граничной точке $O(0,\ 0)$ она имеет наименьшее значение, $v_{нм}=$ $=v(O)=0$.

784. Найти такую точку равнобедренного прямоугольного треугольника, для которой сумма квадратов расстояний до его вершин будет наименьшая.



Черт. 144

Решение. Выберем прямоугольную систему координат xOy, как показано на черт. 144, тогда координаты вершин треугольника будут $A(0,\ 0)$, $B(a,\ 0)$, $C(0,\ a)$. Возьмем произвольную точку треугольника $M(x,\ y)$ и определим сумму квадратов расстояний ее до вершин треугольника $u=MA^2+MB^2+MC^2=3x^2+$ $+3y^2-2ay-2ax+2a^2$. Она зависит от двух переменных x и y, которые согласно условию могут принимать любые значения из замкнутой области треугольника ABC.

Далее, согласно правилу, указанному в начале этого параграфа, найдем наименьшее значение функции $u(x,\ y)$ в треугольнике ABC:

А. $u'_x=6x-2a$; $u'_y=6y-2a$.

Из системы уравнений $u'_x=0$, $u'_y=0$ найдем единственную критическую точку $K\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3}\right)$, лежащую внутри треугольника ABC. Значение u в этой точке $u(K)=\frac{4}{3}a^2$.

Б. На стороне AB имеем: $y=0$, $u(x,\ 0)=u_1=3x^2-2ax+$ $+2a^2$, где $0\leqslant x\leqslant a$.

I. $u'_1=6x-2a$; $u'_1=0$ при $x=\frac{a}{3}$ (в точке M_1); $u_1\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{5}{3}a^2$.

II. $u_1(0)=2a^2$; $u_1(a)=3a^2$.

III. Наименьшее значение $u_1(x)$ на отрезке $[0,\ a]$ равно $\frac{5}{3}a^2$.

На стороне BC имеем: $x=a-y$ (из уравнения прямой BC); $u(a-y,\ y)=u_2=6y^2-6ay+3a^2$, где $0\leqslant y\leqslant a$.

I. $u'_2=12y-6a$; $u'_2=0$ при $y=\frac{a}{2}$ (в точке M_2); $u_2\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2$.

II. $u_2(0)=u_2(a)=3a^2$.

III. Наименьшее значение $u_2(y)$ на отрезке $[0,\ a]$ равно $\frac{3}{2}a^2$.

На стороне CA имеем: $x=0$; $u(0,\ y)=u_3=3y^2-2ay+2a^2$, где $0\leqslant y\leqslant a$.

I. $u_3'=6y-2a$; $u_3'=0$ при $y=\frac{a}{3}$ (в точке M_3); $u_3\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{5}{3}a^2$.

II. $u_3(0)=2a^2$; $u_3(a)=3a^2$.

III. Наименьшее значение $u_3(y)$ на отрезке $[0,\ a]$ равно $\frac{5}{3}a^2$.

Сравнивая значения u на сторонах AB, BC, CA, заключаем: наименьшее значение u на всей границе $ABCA$ равно $\frac{5}{3}a^2$.

В. Сопоставляя значение u во внутренней критической точке K с ее наименьшим значением на границе области, приходим к выводу, что среди всех значений u в различных точках треугольника ABC наименьшим является ее значение в точке $K\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3}\right)$. Легко убедиться, что точка K является центром тяжести данного треугольника.

Эту задачу можно решить и для любого треугольника; искомая точка также будет его центром тяжести.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

785. $\varphi=x^3+y^3-9xy+27$ в квадрате $0\leqslant x\leqslant 4$, $0\leqslant y\leqslant 4$.

786. $r=3xy$ в круге $x^2+y^2\leqslant 2$.

787. Найти наибольшее значение функции $v=xy(4-x-y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x=1$, $y=0$, $x+y=6$.

788*. Найти наименьшее значение функции $u=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$ в квадрате $0\leqslant x\leqslant 1{,}5\pi$, $0\leqslant y\leqslant 1{,}5\pi$.

789. Найти точку треугольника $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$, сумма квадратов расстояний которой до его вершин имеет наибольшее значение.

790. Какой треугольник с данным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь? (Использовать формулу для площади треугольника по трем его сторонам.)

791. Найти точку четырехугольника $(0,\ 0)$, $(a,0)$, $(a,\ a)$, $(0,\ 2a)$, сумма квадратов расстояний которой до его вершин имеет наименьшее значение.

792. Из куска проволоки длиной l сделать каркас прямоугольного параллелепипеда с наибольшим объемом.

793. Определить размеры открытого прямоугольного ящика с данным объемом V и с наименьшей поверхностью.

593. $\frac{1}{24}$. 594. $\frac{4-\pi}{2}$. 595. 3. 596. $0{,}8(2\sqrt[4]{2}-1)$. 597. $\frac{81\pi}{8}$. 598. $-\frac{17}{6}$. 599. $\ln 2$. 600. $\ln\frac{4}{3}$. 601. $1{,}5(\ln 4-1)$. 602. $\frac{3(\pi-2)}{2}$ (подстановка $x=6\sin^2 t$). 603. $\frac{8}{21}$. 605. 36. 606. $\frac{24}{5}\sqrt[3]{2}$. 607. $\frac{3\pi a^2}{8}$. 608. $3\pi a^2$. 609. $\frac{125}{6}$. 610. $\frac{a^2(e^2-1)}{2e}$. 611. 6,76. 612. 1,5. 613. 0,95. 614. a^2. 615. $\frac{4}{3}a^2\pi^3$. 616. $\frac{1}{4}\pi a^2$. 617. $2a^2\left(\frac{5\pi}{8}-1\right)$. 618. $4ab\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ (перейти к полярным координатам). 622. $\frac{1}{2}abk^2\pi$. 623. $\frac{2}{3}ab^2$. 624. $\frac{16a}{3}$. 626. $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. 627. π^2. 628. $34\frac{2}{15}\pi$. 629. 12π. 630. $\frac{2048\pi}{35}$. 631. $\frac{128\pi}{3}$. 632. $\frac{\pi a^3}{15}$. 633. $2\pi^2a^2b$. 634. $5a^3\pi^2$. 637. $\frac{28}{3}$. 638. $6a$. 639. $\frac{a}{2}(e-e^{-1})$. 640. $\sqrt{6}+$ $+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. 641. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 642. $8a$. 643. $\pi a\sqrt{4\pi^2+1}+$ $+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1})$. 644. $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$. 645. $10\left(\frac{67}{27}+\sqrt{5}\right)$; $p[2+$ $+\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. 649. $\frac{14\pi}{3}$. 650. $\frac{64}{3}\pi a^2$. 651. $4\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. 652. $29{,}6\pi$. 653. $2\pi(4+3\ln 3)$. 654. $4ab\pi^2$. 669. $256T$; $\frac{256}{3}T$; $170\frac{2}{3}T$. 670. 244,8 *кГ*. 671. 4000π *кГм*. 672. 1134 *кГм*; 1430 *кГм*; 1661 *кГм*. 673. 919 *кГм*; 1099 *кГм*; 1226 *кГм*. 674. 750π *кГм*. 675. $\frac{1}{2}\delta^2c^2ab=$ $=23{,}04$ *кГм*. 676. 0,24 *кГм*. 677. $a\sqrt{R^3}$; $a\sqrt{R^3}(2\sqrt{2}-1)$, где $a=$ $=\frac{H\sqrt{2}}{0{,}9S\sqrt{g}}$. 678. $0{,}4ah\sqrt{2gh}$. 679. $\frac{k\pi H^4\operatorname{tg}^2\alpha}{4}$. 683. $\left(0,\ -\frac{2a}{\pi}\right)$. 684. $\left(0,\ \frac{4a}{3\pi}\right)$. 685. $\left(\frac{4a}{3\pi},\ \frac{4b}{3\pi}\right)$. 686. (9; 9). 687. $\left(\frac{2a}{5},0\right)$. 688. $\left(\frac{5a}{8},\right.$ $\left.\frac{15\pi a}{256}\right)$. 691. e. 692. π. 693. -1. 694. $\frac{2}{3}\sqrt[4]{125}$. 695. -1. 696. Расходится. 697. $6\sqrt[3]{2}$. 698. Расходится. 699. 3. 700. 2π. 703. 1) $\ln 2\approx 0{,}6931$; 0,7188; 0,6688; 0,6938; 0,6932; 2) $\frac{\pi}{4}\approx 0{,}7854$; 0,8100; 0,7600; 0,7850; 0,7854. 704. $n_1>100$; $n_2>4$; $n_3>1$. 705. 1,118; 0,157. 706. 34,008. 710. 0; 5; 0; $\frac{5}{4}$. 713. 1) Вся числовая плоскость; 2) точки, лежащие внутри эллипса $x^2+2y^2=2$ и на этом эллипсе; 3) вся плоскость xOy, кроме прямых $y=\pm x$; 4) $x\geqslant 0$, $y>0$ — первый квадрант плоскости xOy; 5) $y>x$, $y>0$, $x\neq 0$ — второй квадрант и точки, лежащие выше биссектрисы первого координатного угла плоскости xOy; 6) круг $x^2+y^2\leqslant 1$. 716. $\frac{1}{2a}$; 1; не существует. 717. Одна точка разрыва (1; -1); линия разрыва — прямая $y=2x$, линия разрыва — гипербола $x^2-2y^2=4$. 721. $z_x'=$

$= 45x^2y^2(5x^3y^2+1)^2$; $z'_y = 30x^3y(5x^3y^2+1)^2$. **722.** $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{ax}{r}$; $\frac{\partial r}{\partial y}=-\frac{by}{r}$. **723.** $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}$. **724.** $\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{|t|}{t\sqrt{t^2-x^2}}$; $\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{x}{|t|\sqrt{t^2-x^2}}$. **725.** 12; 0. **726.** 0; $2\sin 2\approx 1{,}82$; $-\sin(-1)\approx 0{,}84$. **732.** $\frac{y}{x}\,dx+\ln 2x\,dy$. **733.** $\sin 2t\cos^2 x\,dt-\sin^2 t\sin 2x\,dx$. **734.** $\frac{yz\,dx+xz\,dy-xy\,dz}{z^2}$. **735.** $e^{am}\left(a\cos\frac{bn}{p}\,dm-\frac{b}{p}\sin\frac{bn}{p}\,dn+\frac{bn}{p^2}\sin\frac{bn}{p}\,dp\right)$. **736.** $\frac{4}{3}$; $\frac{1}{3}$. **737.** 4,24. **738.** $-0{,}05$. **739.** 1,05. **741.** $e^{z-2y}(\cos x-6x^2)$. **742.** $\frac{e^t}{e^x+e^t}$; $\frac{e^t+3t^2e^x}{e^x+e^t}$. **743.** $\frac{u}{vy}(3x+2v\ln v)$, $-\frac{2xu}{vy^2}(y+v\ln v)$. **744.** $\frac{1}{x^2+1}$. **747.** $-\sqrt{\frac{y}{x}}$. **748.** $-\frac{v}{u}$. **749.** -9. **750.** -1. **751.** -1; $-\frac{y}{x+z}$. **752.** $-\operatorname{tg} v$; $-\operatorname{tg} t$. **757.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2}{2y-3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{4x}{(2y-3)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{8x^2}{(2y-3)^3}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^x\ln y-\frac{\sin x}{x^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{e^x}{y}+\frac{\cos y}{x}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{e^x}{y^2}-\sin y\ln x$. **758.** $\frac{2}{(x+y)^3}$. **759.** $-2xu-x^2y\cos(xy)$. **760.** $(1+x^2y^2z^2\ln^2 2+3xyz\ln 2)\,2^{xyz}\ln 2$. **768.** $x-2y+3z=6$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$. **769.** $3x-y-z=4$. **770.** $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}=1$. **771.** $12x-3y+2z=\pm 13$. **772.** $z=0$; $x+y-z=2$. **775.** $z_{\min}=z(1;\ 4)=-21$. **776.** $v_{\max}=v(4;\ 4)=15$. **777.** Нет экстремума. **778.** $z_{\min}=z(\sqrt{3},\ -3)=-6\sqrt{3}$; $z_{\max}=z(-\sqrt{3},\ -3)=6\sqrt{3}$. **779.** $\varphi_{\min}=\varphi(0;\ -2)=-\frac{2}{e}$. **780.** $q_{\max}=q(6;\ 4)=5\ln 2$.

781. В единственной критической точке $M_0\ (1;\ -1)$ определитель $\Delta=0$. Исследование знака $z(M)-z(M_0)$ показывает, что M_0 есть точка минимума, где $z=2$. **782.** В единственной критической точке $P_0\ (2;\ 0)$ функция не дифференцируема. Исследование знака $u(P)-u(P_0)$ показывает, что P_0 есть точка максимума, где $u=1$. **785.** $\varphi_{нб}=\varphi(4;\ 0)=\varphi(0;\ 4)=91$; $\varphi_{нм}=\varphi(3;\ 3)=0$. **786.** $r_{нб}=r(1;\ 1)=r(-1;\ -1)=3$; $r_{нм}=r(1;\ -1)=r(-1;\ 1)=-3$. **787.** $v_{нб}=v\left(\frac{4}{3};\ \frac{4}{3}\right)=\frac{64}{27}$. **788.** $u_{нм}=u\left(\frac{3\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)=-3$. **789.** Вершины B и C. **790.** Равносторонний треугольник. **791.** $\left(\frac{a}{2},\ \frac{3a}{2}\right)$. **792.** Куб с ребром $\frac{l}{12}$. **793.** Искомый ящик имеет квадратное основание и высоту, равную половине ребра основания. **797.** 26; $-11{,}2$; $\frac{e-1}{2}$; $\frac{506}{15}$. **798.** 9; $\frac{a^3}{2}$. **799.** $\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$; $\ln 2$. **800.** $\frac{4}{5}a^5$; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{504}$. **801.** 3. **802.** $\int\limits_2^4 dx\int\limits_2^x f(x,y)\,dy$. **803.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1} u\,dx$.