- ***Eksponencijalna funkcija (baze a)*** $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

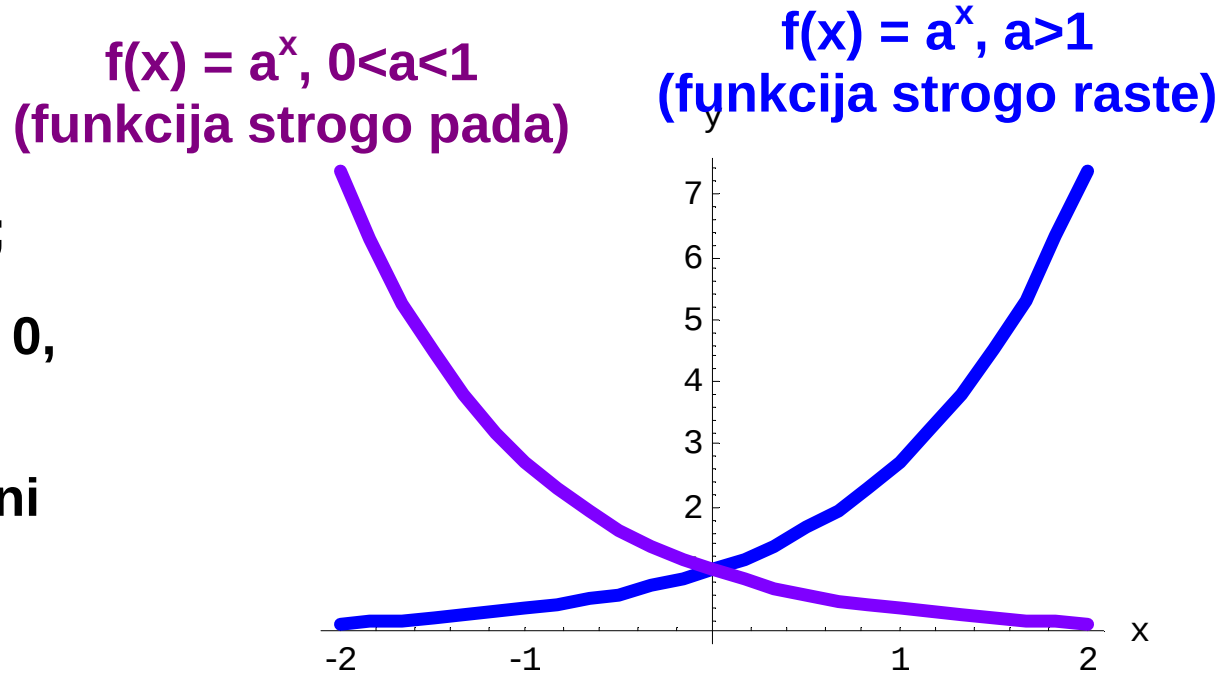
– domena $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$;

– slika funkcije $f(\mathcal{D}) = (0,+\infty)$;

– nema nultočaka, jer je $a^x > 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$;

– graf G(*f*) je krivulja u ravnini prikazana na slici desno;

– funkcija $f(x) = e^x$, gdje je



$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281828459 0$$ zove se **eksponencijalna funkcija**;

– eksponencijalne funkcije imaju ova svojstva:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y,\ a^{-x} = 1/a^x,\ (a^x)^y = a^{xy},\ \text{za sve } x,y \in \mathbb{R}.$$

- ***Logaritamska funkcija*** **$f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, je definirana kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije $g(x) = a^x$. Prema tome vrijedi:**

$$\log_a a^x = x, \quad \text{za sve } x \in \Re,$$
$$a^{\log_a x} = x, \quad \text{za sve } x \in (0,+\infty);$$

– **domena $\mathcal{D}(f) = (0,+\infty)$;**

– **slika funkcije $f(\mathcal{D}) = \mathbb{R}$;**

– **nultočaka $x = 1$;**

– **graf $G(f)$ je krivulja u ravnini prikazana na doljnjoj slici;**

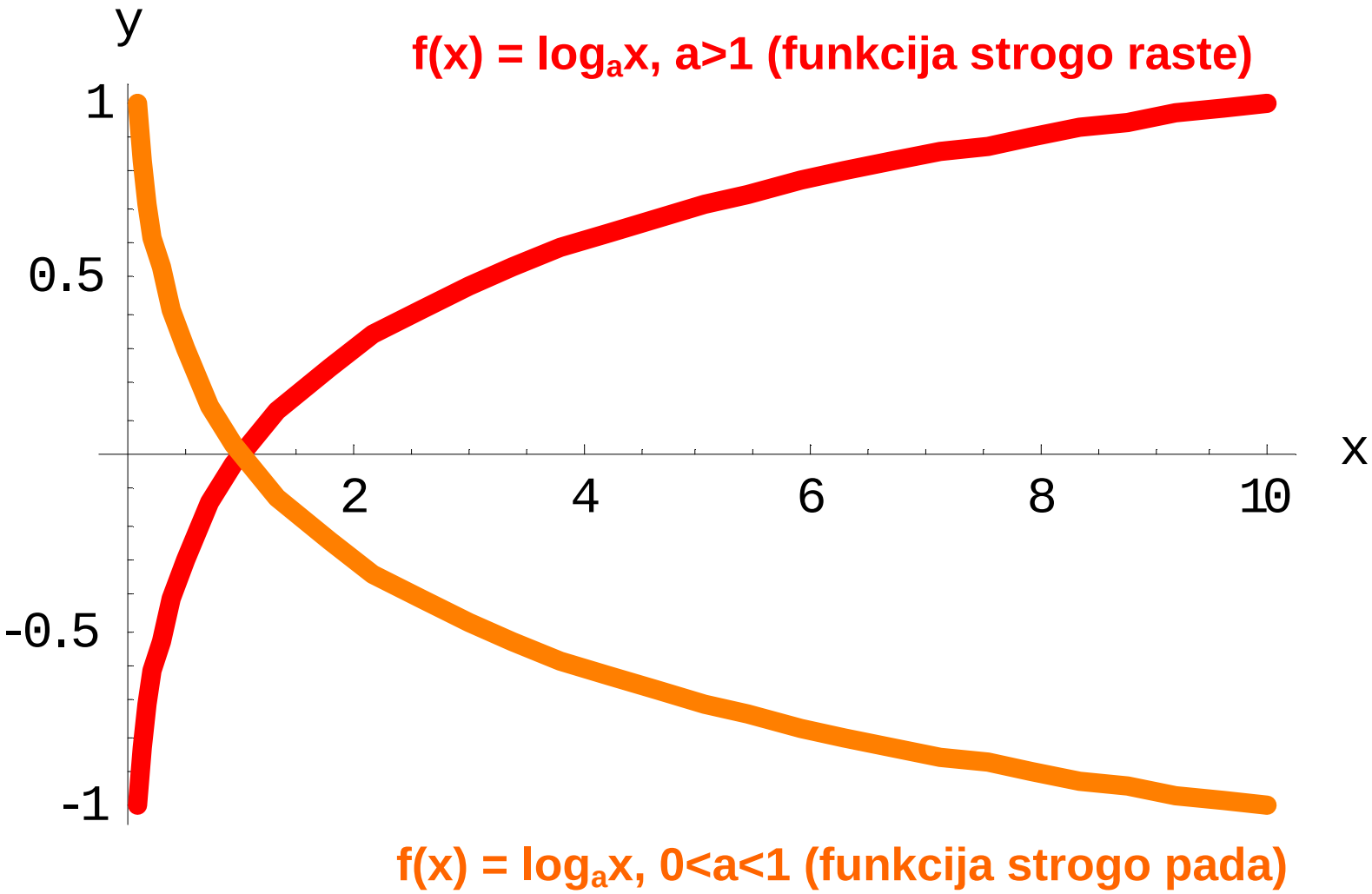
– **ako je $a = e$, tada se funkcija $\log_e x$ piše ln x i funkcija se zove prirodni logaritam;**

– **logaritamske funkcije imaju ova svojstva:**

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \quad \text{za sve } x, y > 0,$$

$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x, \quad \text{za sve } x > 0.$$

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x, \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, \quad \text{specijalno } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln b}.$$

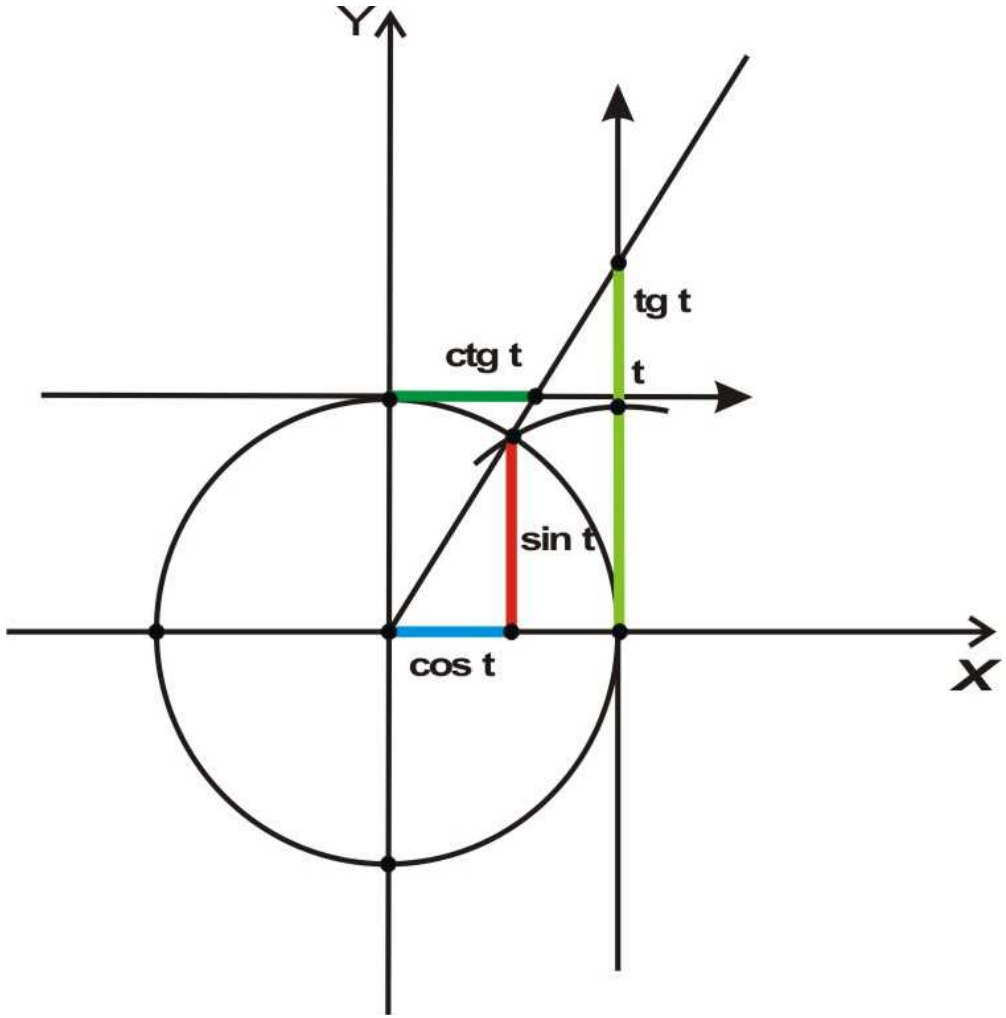


- ***Trigonometrijske funkcije.*** **Pomoću trigonometrijske funkcije**

$$f(x) = a \sin(bx+c),$$

matematički možemo opisati *valove titranja zvuka*. Zvuk koji nastaje titranjem čestica neke elastične materije ili tijela (drva, stakla, pri glasanju čovjeka ili ptice, treperenju žica na glazbenom instrumentu, pri žuboru vode ili morskih valova) putuju do našeg uha pomoću zvučnih valova koji nastaju zguščivanjem i razrjeđivanjem zraka. Ako titraji elastične materije slijede jedan za drugim u istom vremenskom razdoblju, tada kažemo da su ti titraji pravilni, te ih nazivamo *tonovima* (ljudski glas, zvukovi glazbenih instrumenata). *Ton* $f(x) = a \sin(b x + c)$ *je karakteriziran* svojom *jačinom* koja ovisi o veličini amplitude titranja odnosnoo broju *a*, te svojom *visinom* koja ovisi o frekvenciji titranja (broj titraja čestica u sekundi) odnosno o broju *b*, dok broj *c* zovemo *početnom fazom titranja* i on je u direktnoj vezi s početnim mjestom čestice prije početka titranja (mjesto izvora zvuka). *Duljinu titranja* određuje period $T = 2\pi / b$.

Trigonometrijska kružnica



Na jediničnu kružnicu sa središtem u ishodištu postavljamo brojevni pravac kao tangentu u točki (1,0) i usmjerenu kao os y. Zatim ga namotamo na kružnicu. Na taj način smo točkama kružnice pridružili realne brojeve. Tako dobivena kružnica se zove trigonometrijska ili brojevna kružnica. Ako je točki *T* na kružnici pridružen broj t, onda su istoj točki pridruženi brojevi $t + 2\cdot\pi$, $t - 2\cdot\pi$, $t + 4\cdot\pi$, $t - 4\cdot\pi$,… zato jer je duljina jedinične kružnice $2\cdot\pi$.

Pomoću brojevne kružnice definiramo trigonometrijske funkcije na sljedeći način. Neka broju *t* pripada točka T na brojevnoj kružnici. Apscisu točke T označavamo s cos *t*, a ordinatu sa sin *t*. Na taj način smo definirali funkcije

$$t \mapsto \sin t, \qquad t \mapsto \cos t$$

na $\mathbb{R}$, koje zovemo sinus i kosinus. Zatim definiramo

$$tg\, t = \frac{\sin t}{\cos t}, \qquad ctg\, t = \frac{\cos t}{\sin t},$$

koje zovemo tangens i kotangens. Zbog toga što je radius brojevne kružnice 1, vrijednosti funkcije tangens očitavamo na tangenti u točki (1,0) a vrijednosti funkcije kotangens na tangenti u točki (0,1).

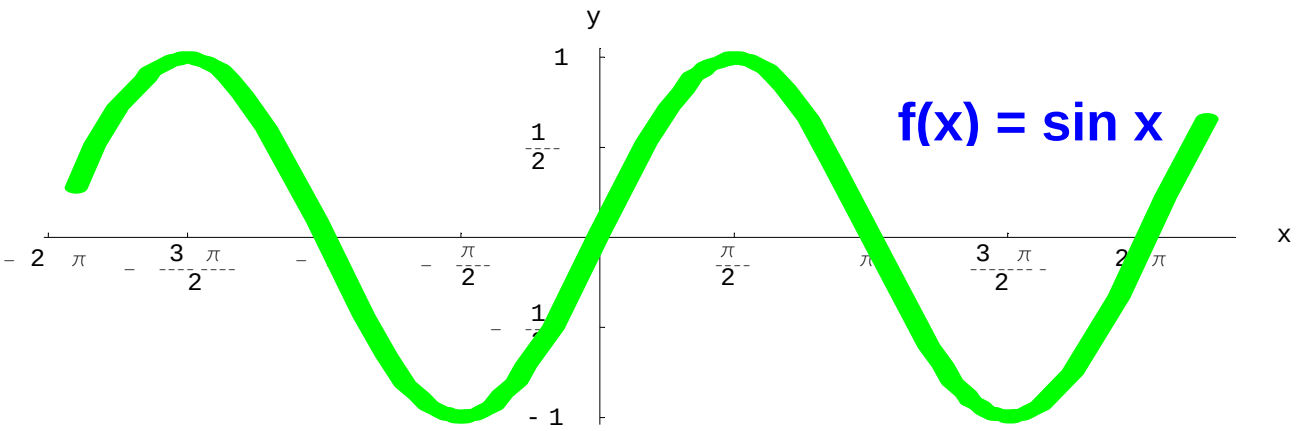
Iz ove definicije slijedi osnovni identitet za trigonometrijske funkcije, koji je posljedica Pitagorinog poučka:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

- **Funkcija *sinus*** $f(x) = \sin x$;
  - domena $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$;
  - slika funkcije $f(\mathcal{D}) = [-1,1]$;
  - nultočake su $x = k\cdot\pi$, za sve $k \in \mathbb{Z}$;
  - sinus funkcija je periodička s temeljnim periodom $T = 2\cdot\pi$, odnosno

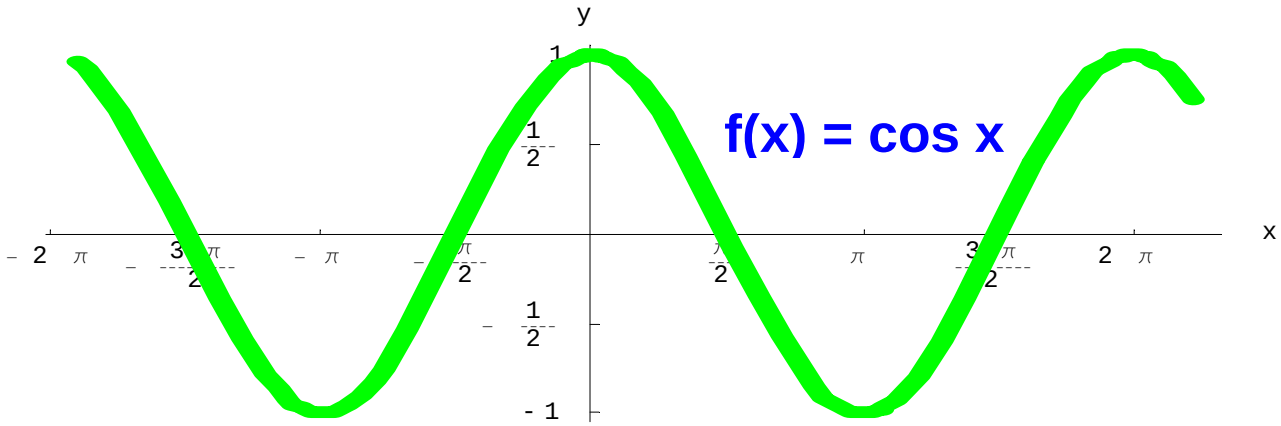
$$\sin(x + 2\cdot\pi) = \sin x, \text{ za sve realne brojeve } x;$$

  - graf $G(f)$ je sinusoida prikazana na doljnjoj slici;



- **Funkcija *kosinus*** f(x) = cos x;
  - domena $\mathcal{D}$(f) = $\mathbb{R}$;
  - slika funkcije f($\mathcal{D}$) = [-1,1];
  - nultočake su x = $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, za sve k $\in \mathbb{Z}$;
  - kosinus funkcija je periodička s temeljnim periodom T = 2·π, odnosno

    cos (x + 2·π) = cos x, za sve realne brojeve x;
  - graf G(*f*) je kosinusoida prikazana na doljnjoj slici;



Trigonometrijske funkcije sinus i kosinus zadovoljavaju adicione formule:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Iz njih slijede formule za funkcije polovičnog i dvostrukog argumenta:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Formule zbroja i razlike funkcija su:

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2},$$
$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2},$$
$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}.$$

Formule produkta funkcija su:

$$\sin x \ \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right],$$

$$\cos x \ \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right],$$

$$\sin x \ \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right].$$

- **Funkcija *tangens*** f(x) = tg x je definirana formulom:

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \text{za sve } x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in Z;$$

– domena $\mathcal{D}$(f) = $\bigcup_{k \in Z} \left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \right)$;

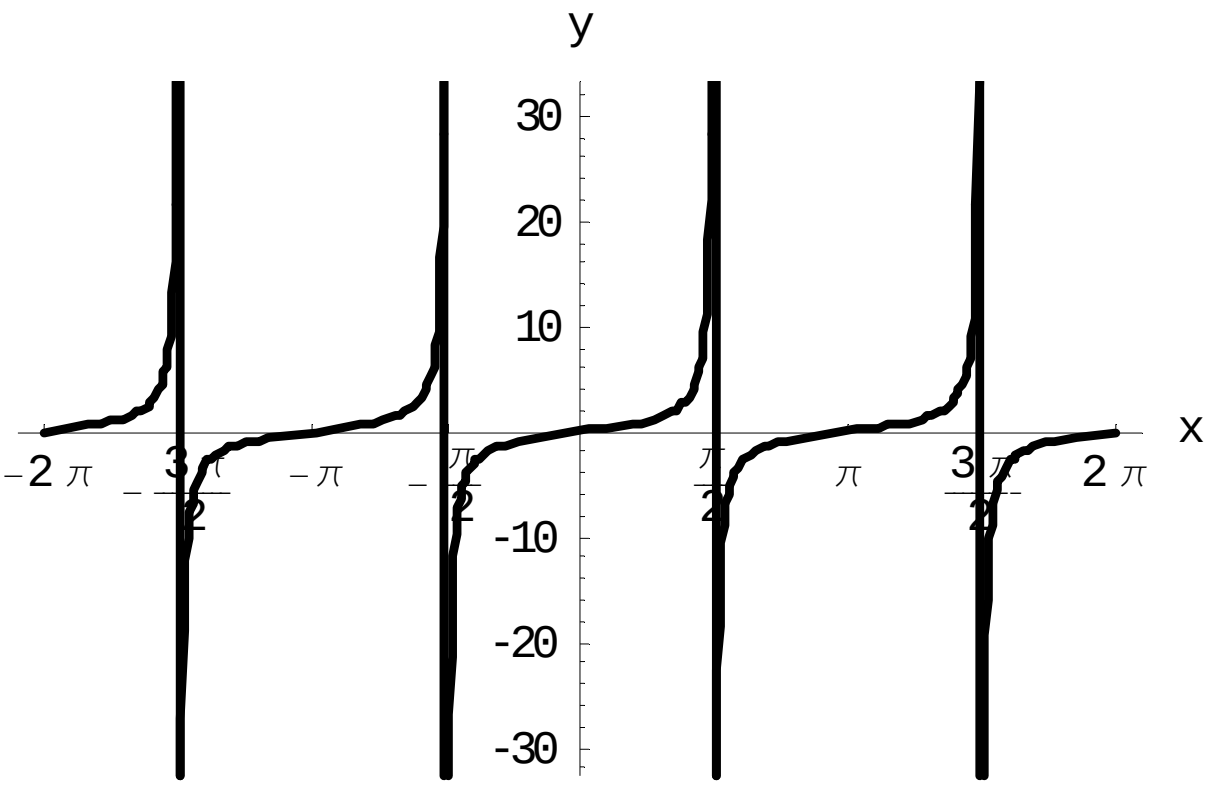
– slika funkcije f($\mathcal{D}$) = $\mathbb{R}$;

– nultočake su x = $k \cdot \pi$, za sve k $\in \mathbb{Z}$;

– **tangens funkcija je periodička s temeljnim periodom T = π, odnosno**

$$\mathbf{tg\,(x + \pi) = tg\,x,\ za\ sve\ realne\ brojeve}\ x \in \mathcal{D}(\mathbf{f});$$

– **graf G(*f*) je tangesoida prikazana na doljnjoj slici;**



f(x) = tg x

- **Funkcija *kotangens*** f(x) = ctg x je definirana formulom:

$$ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \text{za sve } x \neq k \cdot \pi, k \in Z;$$

– domena $\mathcal{D}$(f) = $\bigcup_{k \in Z} (k \cdot \pi, \pi + k \cdot \pi)$;

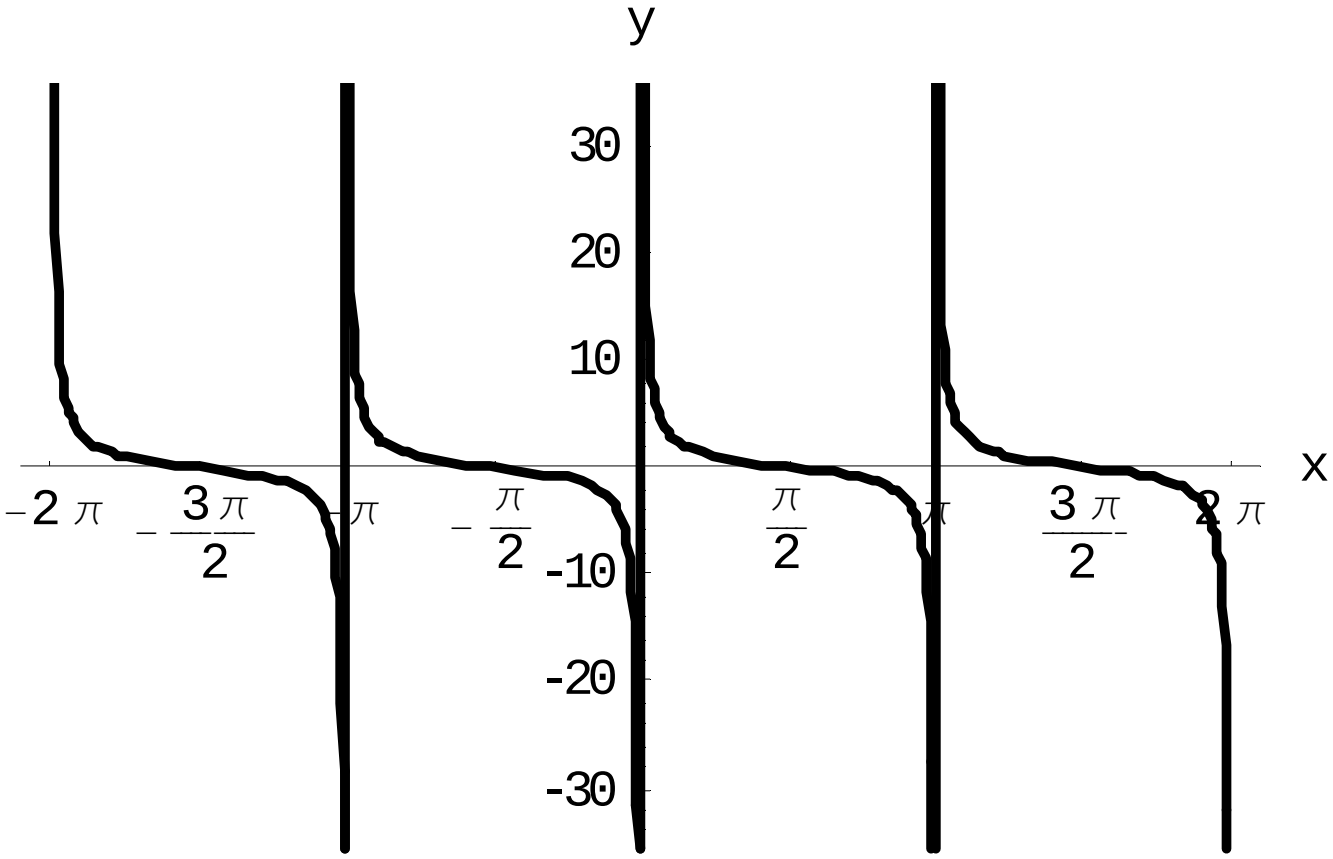
– slika funkcije f($\mathcal{D}$) = $\mathbb{R}$;

– nultočake su x = $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, za sve k $\in \mathbb{Z}$;

– kotangens funkcija je periodička s temeljnim periodom T = π, odnosno

ctg (x + π) = ctg x, za sve realne brojeve $x \in \mathcal{D}$(f);

– graf G(*f*) je kotangesoida prikazana na doljnjoj slici;



f(x) = ctg x

Trigonometrijske funkcije tangens i kotangens zadovoljavaju adicione formule:

$$\mathrm{tg}(x \pm y) = \frac{\mathrm{tg}\, x \pm \mathrm{tg}\, y}{1 \mp \mathrm{tg}\, x\ \mathrm{tg}\, y}, \qquad \mathrm{ctg}(x \pm y) = \frac{\mathrm{ctg}\, x\, \mathrm{ctg}\, y \mp 1}{\mathrm{ctg}\, x \pm \mathrm{ctg}\, y}.$$

Iz njih slijede formule za funkcije polovičnog i dvostrukog argumenta:

$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}, \qquad \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x},$$

$$\mathrm{tg} 2x = \frac{2\, \mathrm{tg}\, x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}, \qquad \mathrm{ctg} 2x = \frac{\mathrm{ctg}^2 x - 1}{2\, \mathrm{ctg}\, x}.$$

Formule zbroja i razlike funkcija su:

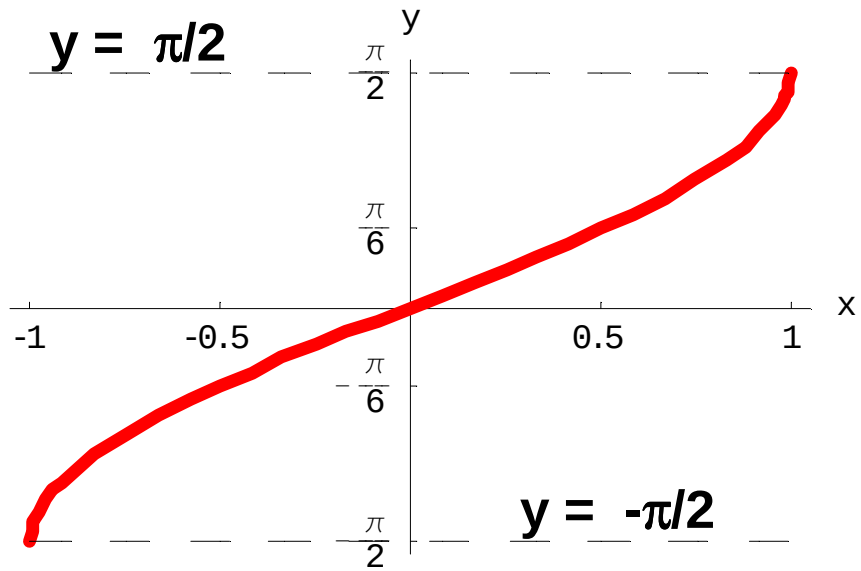
$$\mathrm{tg}\, x \pm \mathrm{tg}\, y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x\ \cos y}, \qquad \mathrm{ctg}\, x \pm \mathrm{ctg}\, y = \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x\ \sin y},$$

$$\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, y = \frac{\cos(x - y)}{\sin x\ \cos y}, \qquad \mathrm{ctg}\, x - \mathrm{tg}\, y = \frac{\cos(x + y)}{\sin x\ \cos y}.$$

- ***Ciklometrijske funkcije.*** **Ciklometrijske funkcije ili takozvane arcus-funkcije su po definiciji inverzne funkcije bijektivnih restrikcija trigonomertijskih funkcija.**

➢ ***Arcus-sinus* funkcija** **f(x) = arc sin x je inverzna funkcija funkcije g(x) = sin x,** $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **(t.j. g(x) je restrikcija funkcije sin x na interval** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$**)**

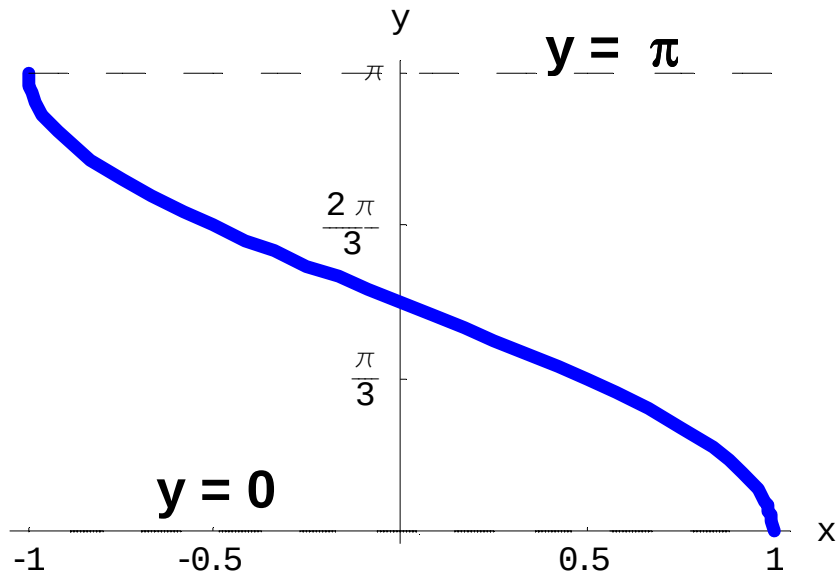
- **domena** $\mathcal{D}$**(f) = [-1,1];**
- **slika funkcije f(**$\mathcal{D}$**) =** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$**;**
- **nultočaka je x = 0;**
- **graf G(*f*) je krivulja u ravnini prikazana na slici desno;**



- **arc sin 0 = 0, arc sin (1/2) =π/6, arc sin (**$\sqrt{2}$**/2) = π/4, arc sin (**$\sqrt{3}$**/2) = π/3, arc sin 1 = π/2;**

- ***Arcus-kosinus* funkcija** f(x) = arc cos x je inverzna funkcija funkcije g(x) = cos x, $x \in [0,\pi]$ (t.j. g(x) je restrikcija funkcije cos x na interval $[0,\pi]$)

  - domena $\mathcal{D}$(f) = [-1,1];
  - slika funkcije f($\mathcal{D}$) = $[0,\pi]$;
  - nultočaka je x = 1;
  - graf G(*f*) je krivulja u ravnini prikazana na slici desno;



  - arc cos 0 = π/2, arc cos (1/2) = π/3, arc cos ($\sqrt{2}$/2) = π/6, arc sin ($\sqrt{3}$/2) = π/6, arc sin 1 = 0;

Funkcije akrus-sinus i arkus-kosinus zadovoljavaju sljedeću temeljne jednakost:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \text{ za sve } x \in [-1,1].$$

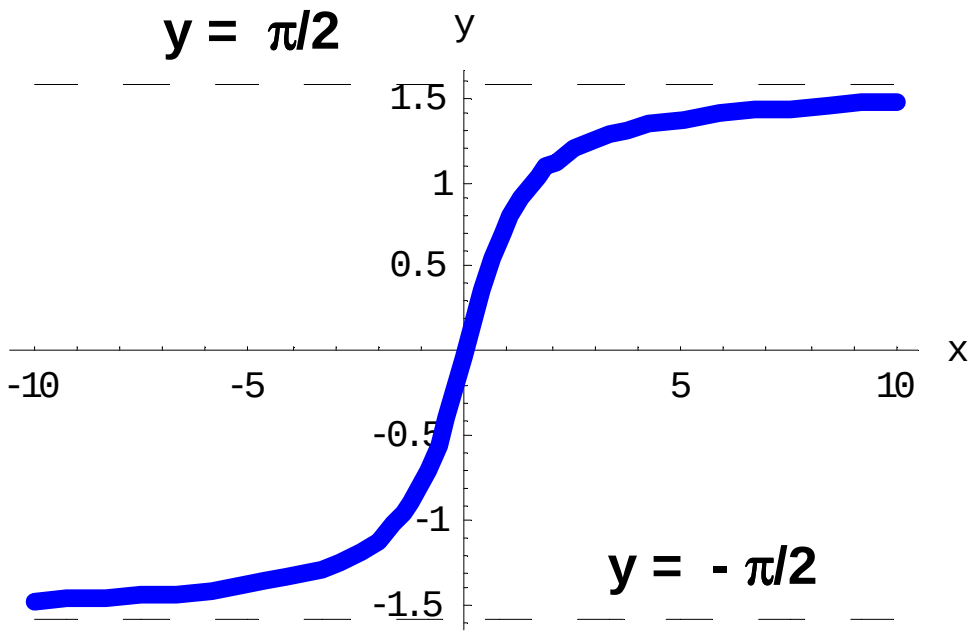
Dokaz: Koristeći adicione formule i jednakosti $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ i $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ dobivamo

$$\sin(\arcsin x + \arccos x) = \sin(\arcsin x)\cos(\arccos x) + \cos(\arcsin x)\sin(\arccos x)$$

$$= x \cdot x + \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} \cdot \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = x^2 + 1 - x^2 = 1.$$

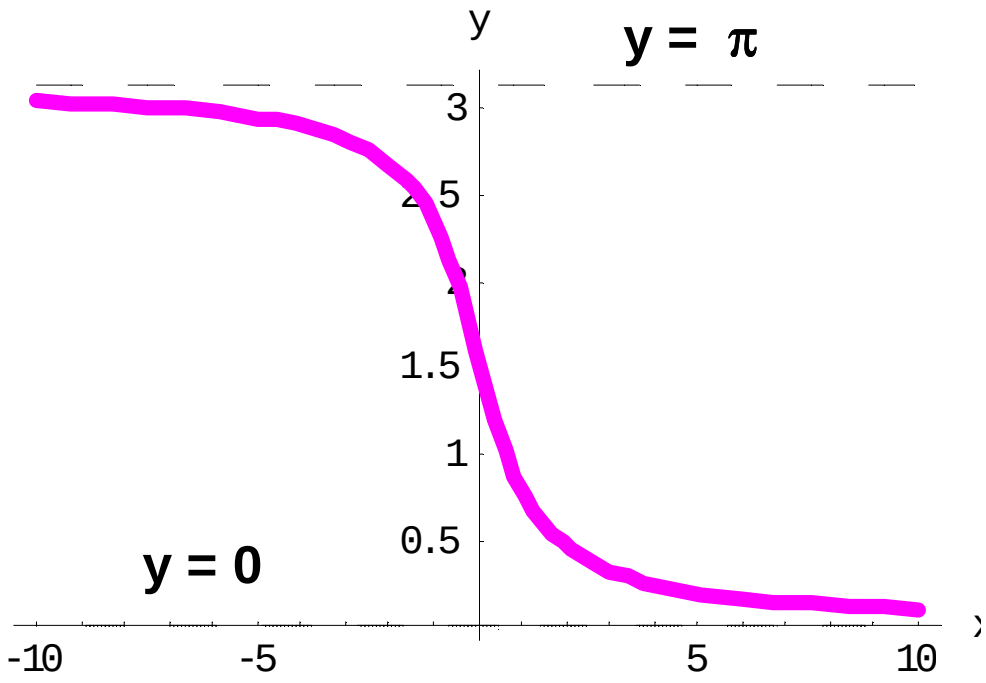
- ***Arcus-tangens* funkcija** f(x) = arc tg x je inverzna funkcija funkcije g(x) = tg x, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (t.j. g(x) je restrikcija funkcije tg x na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$);

  - domena $\mathcal{D}$(f) = $\mathbb{R}$;
  - slika funkcije f($\mathcal{D}$) = $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
  - nultočaka je x = 0;
  - graf G(*f*) je krivulja u ravnini prikazana na slici desno;



- ***Arcus-kotangens* funkcija** f(x) = arc ctg x je inverzna funkcija funkcije g(x) = ctg x, $x \in (0,\pi)$ (t.j. g(x) je restrikcija funkcije tg x na interval $(0,\pi)$);

  - domena $\mathcal{D}$(f) = $\mathbb{R}$;
  - slika funkcije f($\mathcal{D}$) = $(0,\pi)$;
  - nema nultočaka jer je arc ctg x > 0 za sve x $\in \mathbb{R}$;
  - graf G(*f*) je krivulja u ravnini prikazana na slici desno;



Funkcije akrus-tangens i arkus-kotanges zadovoljavaju sljedeću temeljne jednakost:

$$\text{arc tg}\, x + \text{arc ctg}\, x = \frac{\pi}{2}, \text{ za sve } x \in R.$$

- ***Hiperboličke funkcije.***

➢ ***Sinus hiperbolički*** **f(x) = sh x je definiran formulom**

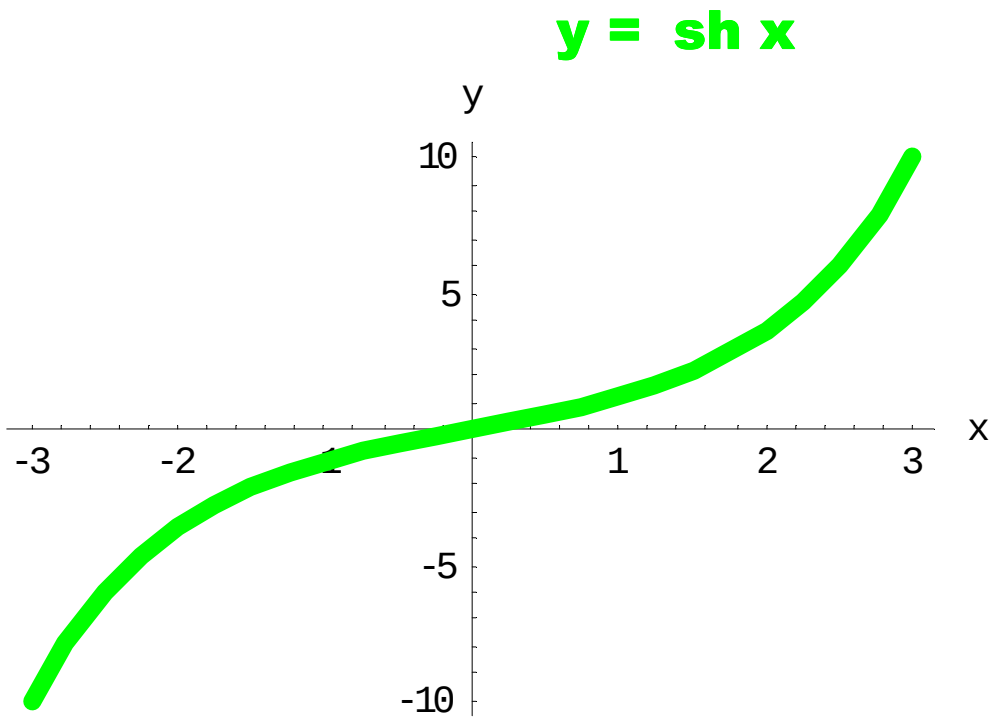
$$\text{sh}\, x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}, \text{ za sve } x \in \mathbb{R};$$

– **domena $\mathcal{D}$(f) = $\mathbb{R}$;**

– **slika funkcije f($\mathcal{D}$) = $\mathbb{R}$;**

– **nultočaka je x = 0;**

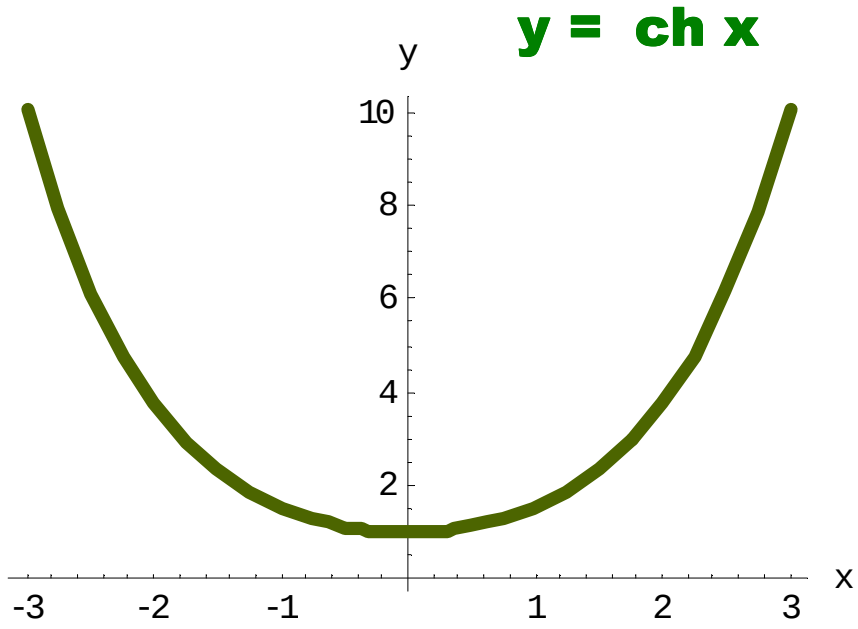
– **graf G(*f*) je krivulja u ravnini prikazana na slici desno;**



- ***Kosinus hiperbolički*** **f(x) = ch x je definiran formulom**

$$\text{ch}\, x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \text{ za sve } x \in \mathbb{R};$$

- **domena $\mathcal{D}$(f) = $\mathbb{R}$;**
- **slika funkcije f($\mathcal{D}$) = [1,+∞);**
- **nema nultočaka jer je ch x > 0 za sve x ∈ $\mathbb{R}$;**
- **graf G(*f*) je krivulja u ravnini prikazana na slici desno;**



Funkcije sinus i kosinus hiperbolički su povezane osnovnim identitetom:

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1.$$ **(Dokazati!)**

Kao i za trigonometrijske funkcije sin x i cos x, tako i za hiperboličke funkcije sh x i ch x vrijede adicione formule:

$$sh(x \pm y) = sh\,x\;ch\,y \pm ch x\;sh\,y,$$
$$ch(x \pm y) = ch\,x\;ch\,y \mp sh\,x\;sh\,y.$$

Iz njih slijede formule za funkcije polovičnog i dvostrukog argumenta:

$$sh^2 x = \frac{1}{2}(ch\,2x - 1), \qquad ch^2 x = \frac{1}{2}(ch\,2x + 1),$$
$$sh\,2x = 2sh\,x\;ch\,x, \qquad ch\,2x = ch^2 x + sh^2 x.$$

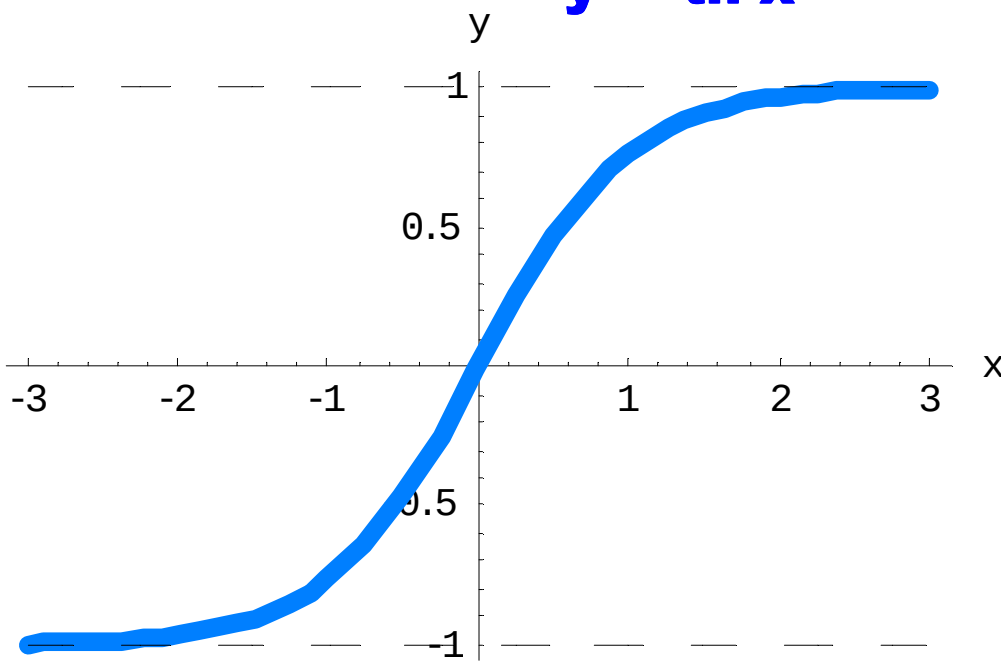
Formule zbroja i razlike funkcija su:

$$sh\,x \pm sh\,y = 2sh\frac{x \pm y}{2}\,ch\frac{x \mp y}{2},$$
$$ch\,x + ch\,y = 2ch\frac{x + y}{2}\,ch\frac{x - y}{2},$$
$$ch\,x - ch\,y = 2sh\frac{x + y}{2}\,sh\frac{x - y}{2}.$$

- ***Tangens hiperbolički*** **f(x) = th x je definiran formulom**

$$\text{th}\, x = \frac{sh\, x}{ch\, x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}, \text{ za sve } x \in \mathbb{R};$$

y = th x

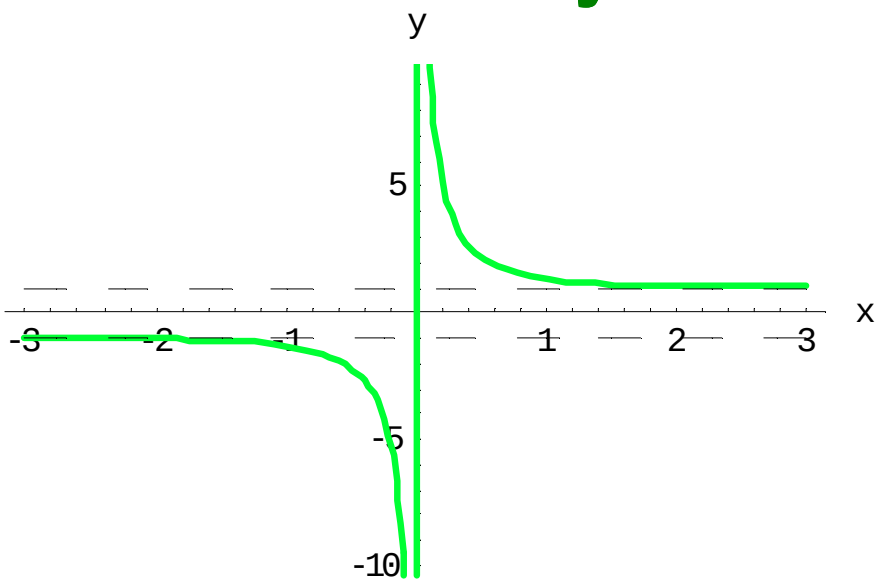


- **domena $\mathcal{D}$(f) = $\mathbb{R}$;**
- **slika funkcije f($\mathcal{D}$) = (-1,1);**
- **nultočaka je x = 0;**
- **graf G(*f*) je krivulja u ravnini prikazana na slici desno;**

- ***Kotangens hiperbolički*** **f(x) = cth x je definiran formulom**

$$\text{cth}\, x = \frac{ch\, x}{sh\, x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}, \text{ za sve } x \neq 0;$$

y = cth x



- **domena $\mathcal{D}$(f) = $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;**
- **slika funkcije f($\mathcal{D}$) =(-∞,-1) ∪ (1,+∞);**
- **nema nultočaka jer je cth x < 0 za sve x < 0 i cth x > 0 za sve x > 0 i;**
- **graf G(*f*) je krivulja u ravnini prikazana na slici desno;**

Funkcije tangens i kotangens hiperbolički su povezane osnovnim identitetom:

$$\text{th}x \cdot \text{cth}x = 1, \text{ odnosno } \text{th}\, x = \frac{1}{\text{cth}\, x}, \quad x \neq 0.$$

Kao i za trigonometrijske funkcije tg x i cth x, tako i za hiperboličke funkcije thx i cthx vrijede adicione formule:

$$\mathrm{th}(x \pm y) = \frac{\mathrm{th}\,x \pm \mathrm{th}\,y}{1 \mp \mathrm{th}\,x\,\mathrm{th}\,y}, \qquad \mathrm{cth}(x \pm y) = \frac{1 \mp \mathrm{cth}\,x\,\mathrm{cth}\,y}{\mathrm{cth}\,x \pm \mathrm{cth}\,y}.$$

Iz njih slijede formule za funkcije polovičnog i dvostrukog argumenta:

$$\mathrm{th}\frac{x}{2} = \frac{sh\,x}{1 + ch\,x}, \qquad \mathrm{cth}\frac{x}{2} = \frac{1 + ch\,x}{sh\,x},$$

$$\mathrm{th}2x = \frac{2\,\mathrm{th}\,x}{1 + \mathrm{th}^2\,x}, \qquad \mathrm{cth}2x = \frac{\mathrm{cth}^2\,x + 1}{2\,\mathrm{cth}\,x}.$$

Formule zbroja i razlike funkcija su:

$$\mathrm{th}\,x \pm \mathrm{th}\,y = \frac{sh(x \pm y)}{ch\,x\,ch\,y}.$$

- ***Area-funkcije.*** **Area-funkcije su, po definiciji, inverzne funkcije hiperboličkih funkcija ili njihovih bijektivnih restrikcija.**

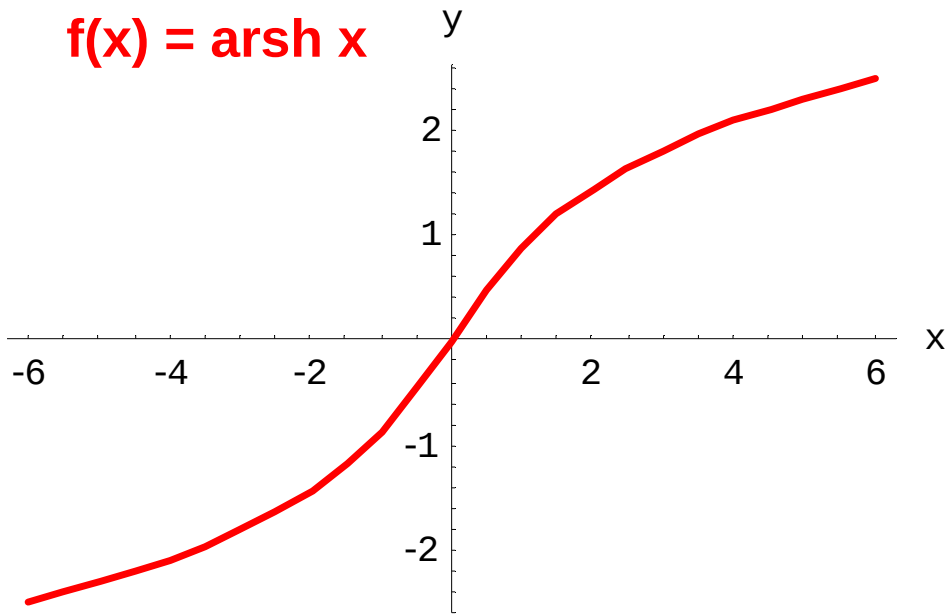
➢ **Funkcija *Area-sinus* f(x) = arsh x je inverzna funkcija funkcije sh x;**

– **domena $\mathcal{D}$(f) = $\mathbb{R}$;**

– **slika funkcije f($\mathcal{D}$) = $\mathbb{R}$;**

– **nultočaka je x = 0;**

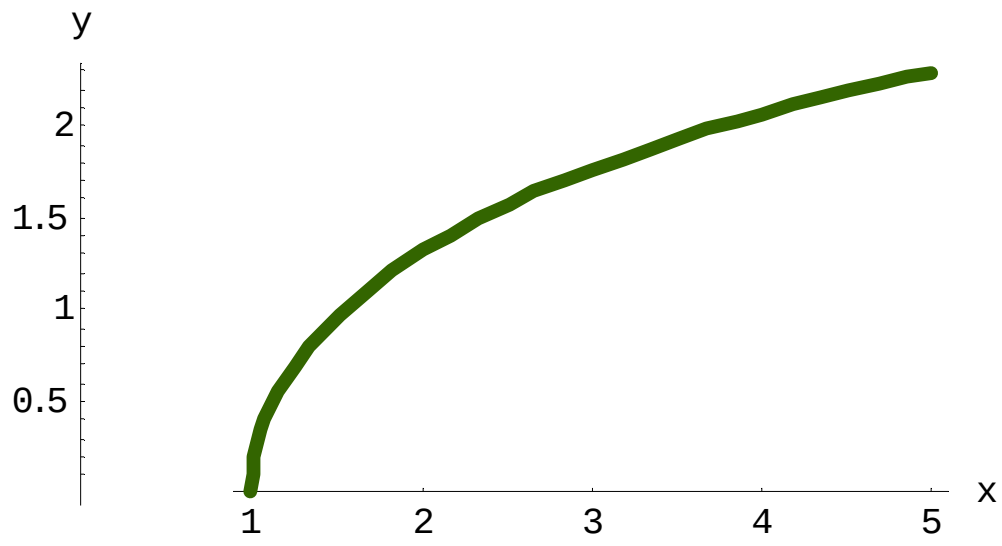
– **graf G(*f*) je krivulja u ravnini prikazana na slici desno;**



– **Vrijedi** $arsh\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$**. Dokazati!**

- **Funkcija *Area-kosinus*** f(x) = arch x je inverzna funkcija funkcije ch x, $x \in [0,+\infty)$ (g(x) je restrikcija funkcije ch x na interval $[0,+\infty)$);

f(x) = arch

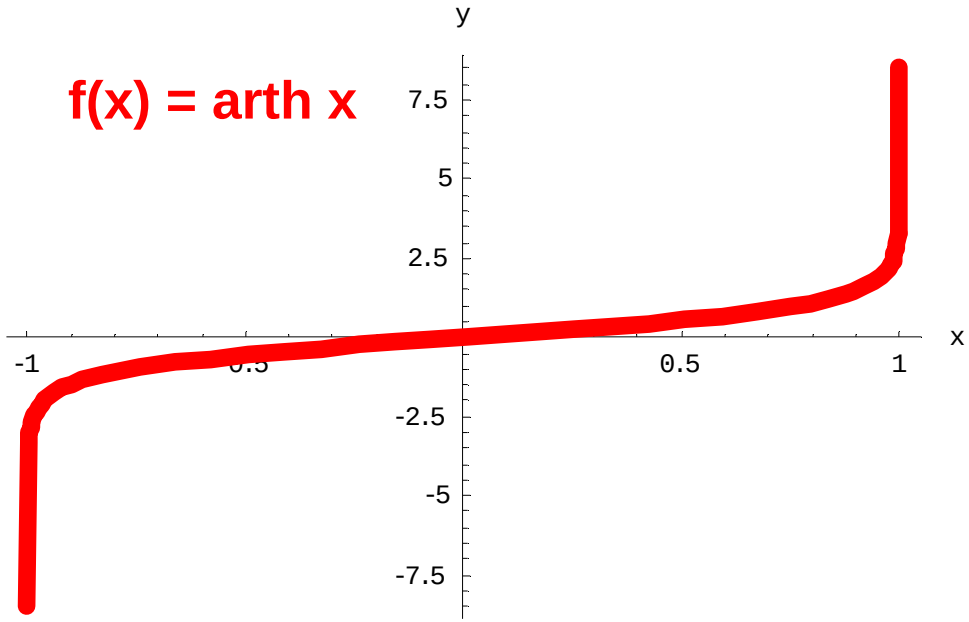


- domena $\mathcal{D}$(f) = $[1,+\infty)$;
- slika funkcije f($\mathcal{D}$) = $[0,+\infty)$;
- nultočaka je x = 1;
- graf G(*f*) je krivulja u ravnini prikazana na slici desno;

- Vrijedi $arch\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Dokazati!

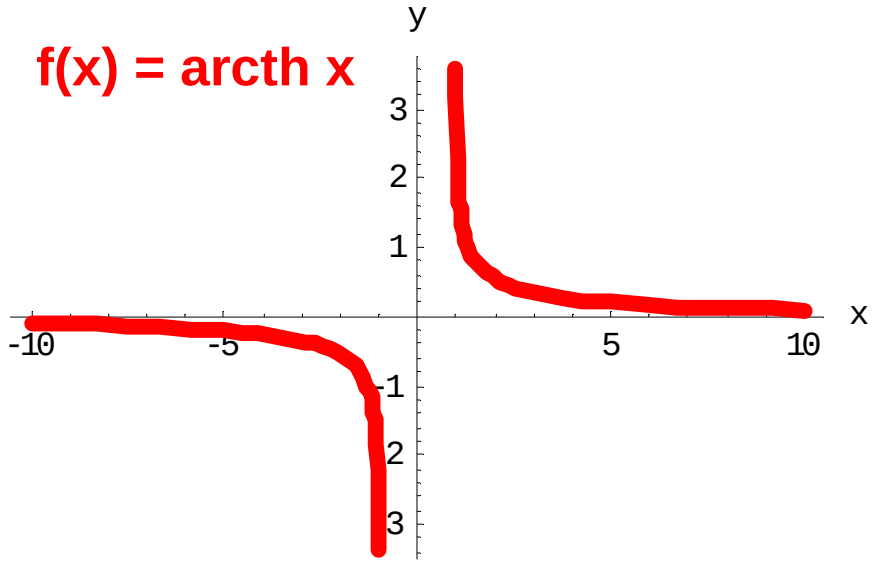
- **Funkcija *Area-tangens*** f(x) = arth x je inverzna funkcija funkcije th x;

  - domena $\mathcal{D}$(f) = (-1,1);
  - slika funkcije f($\mathcal{D}$) = $\mathbb{R}$;
  - nultočaka je x = 0;
  - graf G(*f*) je krivulja u ravnini prikazana na slici desno;



  - Vrijedi $arth\, x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, za sve x $\in$ (-1,1). Dokazati!

- **Funkcija *Area-cotangens*** f(x) = arcth x je inverzna funkcija funkcije cth x;
  - domena $\mathcal{D}$(f) = (-∞,-1) ∪ (1,∞);
  - slika funkcije f($\mathcal{D}$) = (-∞,0) ∪ (0,∞);
  - nema nultočaka jer je arcth x < 0 za sve x < -1 i arcth x > 0 za sve x > 1;
  - graf G(*f*) je krivulja u ravnini prikazana na slici desno;



  - Vrijedi $arcth\, x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, za sve x ∈ (-∞,-1) ∪ (1,∞). Dokazati!