Funkcije

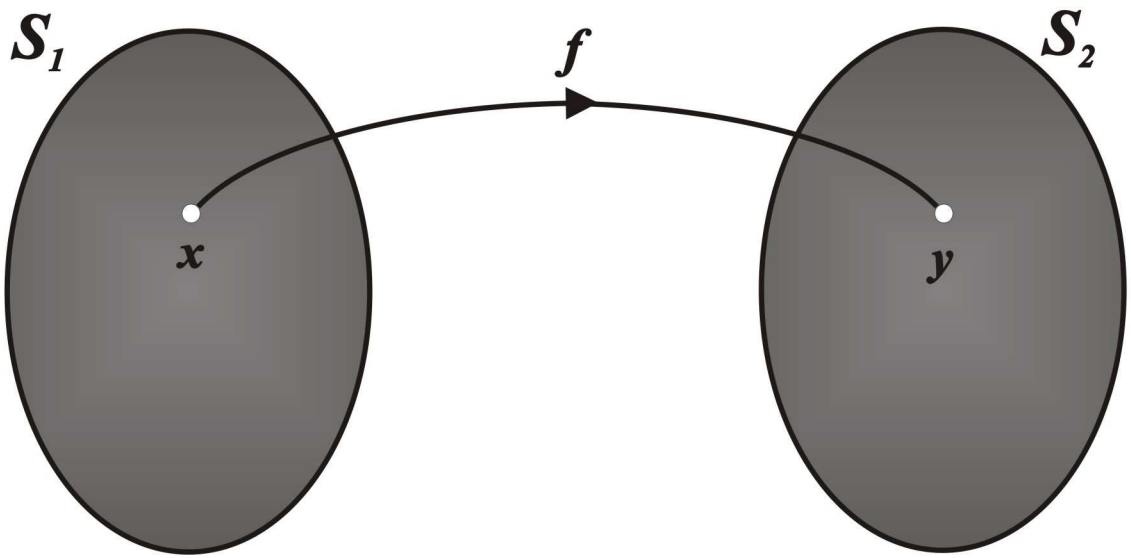
Sadržaj:

- **Pojam funkcije, svojstva, operacija s funkcijama, zadavanje funkcije**
- **Pregled osnovnih elementarnih funkcija:**
  - Polinomi
  - Racionalne funkcije
  - Iracionalne funkcije
  - Potencije
  - Eksponencijalne funkcije
  - Logaritamske funkcije
  - Trigonometrijske funkcije
  - Arcus (ciklometrijske) funkcije
  - Hiperboličke funkcije
  - Area funkcije

Preslikavanja

Jedan od najvažnijih pojmova u matematici je pojam preslikavanja.

Definicija: **Neka su S_1 i S_2 dva neprazna skupa. Kažemo da je f preslikavanje skupa S_1 u skup S_2, oznakom $f : S_1 \rightarrow S_2$, ako je svakom $x \in S_1$ pridružen nekim propisom f po jedan element $y \in S_2$, oznakom $f : x \mapsto y$.**



Element y pridružen elementu x označavamo kraće s $f(x)$ i zovemo slikom

elementa x, dok x zovemo **originalom** od $f(x)$. Ponekad se kaže da je x **nezavisna varijabla**, a $f(x)$ **zavisna varijabla**.

Skup S_1 zovemo **područjem definicije**, **domenom** ili **originalom** preslikavanja f, oznakom $\mathcal{D}(f)$.

Skup S_2 zovemo **protupodručjem** ili **kodomenom** preslikavanja f.

Skup $f(S_1) = \{f(x) : x \in S_1\} \subseteq S_2$ zovemo **područjem vrijednosti** (engl. range) ili **slikom** (engl. image) preslikavanja f. Koriste se i oznake $f(S_1) = f(\mathcal{D}) = \mathcal{R}(f) = Im(f)$.

Preslikavanja kod kojih je $S_1 \subseteq \mathbb{R}$, $S_2 = \mathbb{R}$ *zove se* ***realna funkcija realne varijable.*** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$, $f(\mathcal{D}) = \{f(x) : x \in \mathcal{D}(f)\} \subseteq \mathbb{R}$.

Ako je funkcija zadana nekim matematičkim izrazom, onda podrazumijevamo da je domena skup svih realnih brojeva na kojem je taj izraz definiran (tj. za koje je slika također realan broj). Takvu domenu zovemo **prirodna domena** ili **prirodno područje definicije**. Mi ćemo u daljnjem promatrati upravo takve

funkcije.

Primjer: ***Naći prirodne domene i područja vrijednosti sljedećih funkcija:***

a) **f(x) =** $\sqrt{x}$***;*** $\mathscr{D}$**(*f*) = [0, +∞), a također je *f*(**$\mathscr{D}$**) = [0, +∞) (razlikujemo funkciju** $\sqrt{x}$ **i** $-\sqrt{x}$**),**

b) **f(x) =** x^2+1***;*** $\mathscr{D}$**(*f*) =** $\mathbb{R}$**, *f*(**$\mathscr{D}$**) = [1, +∞),**

c) **f(x) = sin *x*;** $\mathscr{D}$**(*f*) =** $\mathbb{R}$**, *f*(**$\mathscr{D}$**) = [-1,1],**

Definicija: **Neka je** $f : S_1 \to S_2$**, t.j.** $\mathscr{D}(f) = S_1$**,** $f(\mathscr{D}) \subseteq S_2$**.**

a) **Preslikavanje f je surjektivno (surjekcija) ili preslikavanje sa** S_1 **na** S_2**, ako je** $f(\mathscr{D}) = S_2$**, t.j. ako je svako** $y \in S_2$ **slika nekoga** $x \in S_1$**, dakle:**

$$(\forall y \in S_2)\ (\exists x \in S_1)\ f(x) = y.$$

b) **Preslikavanje f je injektivno (injekcija), ako različiti originali imaju različite slike, t.j. ako**

$$(\forall x_1, x_2 \in S_1)\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

što je ekvivalentno s

$$(\forall x_1, x_2 \in S_1)\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

c) Kažemo da je preslikavanje f bijektivno (bijekcija) ako je injektivno i surjektivno, t.j. ako vrijedi

1. $(\forall y \in S_2)\ (\exists x \in S_1)\ f(x) = y,$
2. $(\forall x_1, x_2 \in S_1)\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$

Primjer:

a) ***y=x, ln x su injektivne funkcije na prirodnom području definicije.***

b) ***$y=x^2$, sin x nisu injektivne funkcije.***

Restrikcija preslikavanja. Neka je $f : S_1 \to S_2$, $X \subseteq S_1$. Onda je skup $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ f – slika podskupa X. Očigledno je $f(X) \subseteq S_2$. Ograničimo li se u djelovanju f na podskup X, dobivamo novo preslikavanje koje zovemo restrikcijom ili suženjem preslikavanja f na X, oznakom $f|_X$. Dakle za g = $f|_X$ vrijedi $\mathcal{D}(g) = X$, $g(\mathcal{D}) = f(X)$ i $g(x) = f(x)$ za svaki $x \in X$.

Graf funkcije. Funkcijom *f* je svakom realnom broju *x* iz domene pridružen jedan realan broj *f(x).* Prema tome funkcijom je odreden skup svih uredenih parova (x,f(x)) kad *x* prima sve moguće vrijednosti iz domene, tj. funkcijom je određen skup

$$G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathcal{D}\{f),\ y = f(x)\}$$

Kao što točka u ravnini u kojoj je zadan koordinatni sustav predstavlja sliku uredenog para realnih brojeva u kojem je prvi element njezina apscisa, a drugi ordinata, tako i skup G(*f*) predstavlja sliku funkcije *f*, i zove se **graf funkcije *f***. Prema tome graf funkcije može se crtati kao skup točaka u ravnini. Elemente iz domene crtamo na osi *x,* a pripadne vrijednosti funkcije *f(x)* crtamo na osi *y.* Projekcija grafa na os *x* je domena funkcije a projekcija grafa na os *y* je slika funkcije.

Svojstva realnih funkcija realne varijable

Promotrimo kvalitativna svojstva realnih funkcija realne varijable y = f(x), kao što su parnost i neparnost, monotonost i periodičnost. Sva ova svojstva će biti lako geometrijski prepoznatljiva na grafu G(f).

- **Funkcije y = f(x) je parna** ako vrijedi:

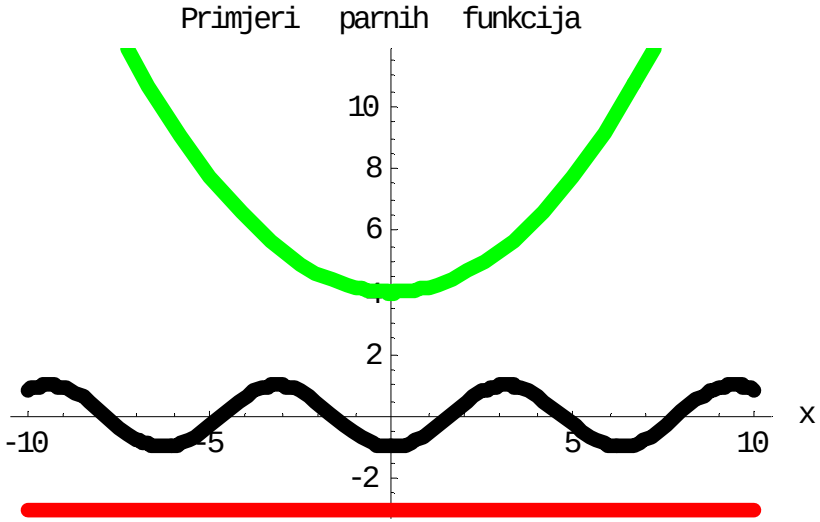
$$f(-x) = f(x), \text{ za sve } x \in \mathcal{D}(f).$$

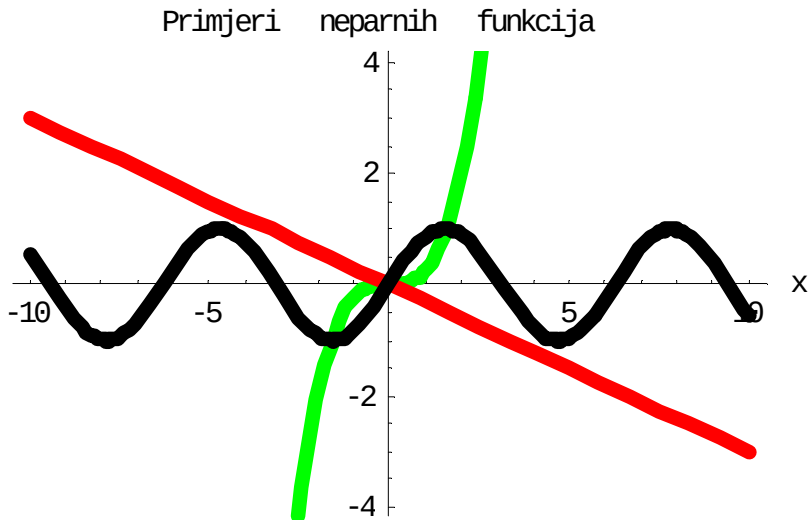
- **Funkcije y = f(x) je neparna** ako vrijedi:

$$f(-x) = -f(x), \text{ za sve } x \in \mathcal{D}(f).$$

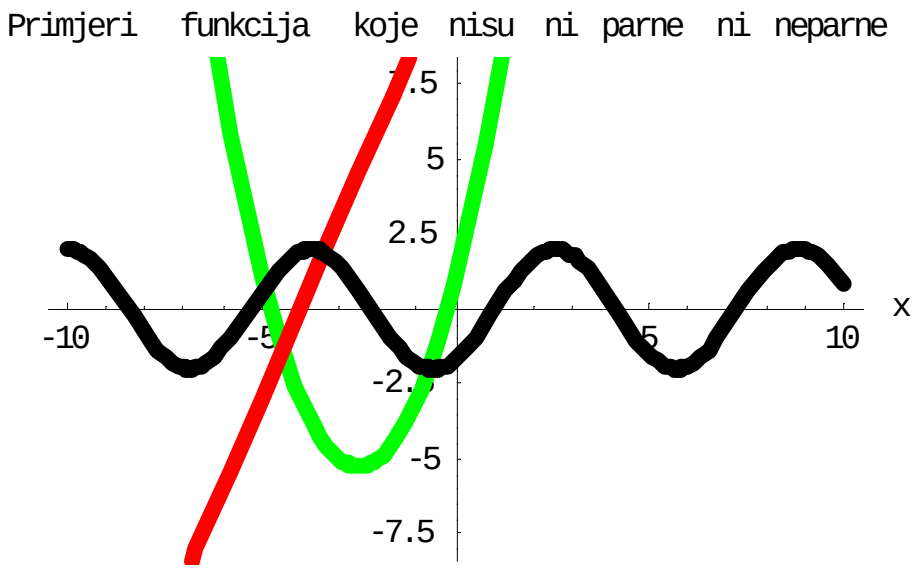
Primjetimo da za ispitivanje parnosti ili neparnosti neke funkcije njena domena $\mathcal{D}(f)$ treba biti simetrična oko x = 0.

Graf $\mathcal{D}(f)$ parne funkcije y = f(x) je osno simetrična krivulja s obzirom na os 0y (vidjeti sliku lijevo dolje).





Graf $\mathcal{D}$(f) neparne funkcije y = f(x) je centralno simetrična krivulja s obzirom na ishodište (0,0). (vidjeti sliku desno gore).



Tvrdnja:

a) **Ako je y = f(x) neparna funkcija i $0 \in \mathcal{D}$ (f), onda graf mora prolaziti ishodištem (0,0) koordinatnog sustava 0_{xy}. (Dokazati!)**

b) **Ako je y = f(x) parna funkcija, a y = g(x) bilo kakva realna funkcija, onda je i kompozicija $g \circ f$ parna funkcija. (Dokazati!)**

c) **Ako je y = f(x) neparna funkcija, a y = g(x) parna funkcija, onda je i kompozicija $g \circ f$ parna funkcija. Ako je y = f(x) neparna funkcija i y = g(x) neparna funkcija, onda je i kompozicija $g \circ f$ neparna funkcija. (Dokazati!)**

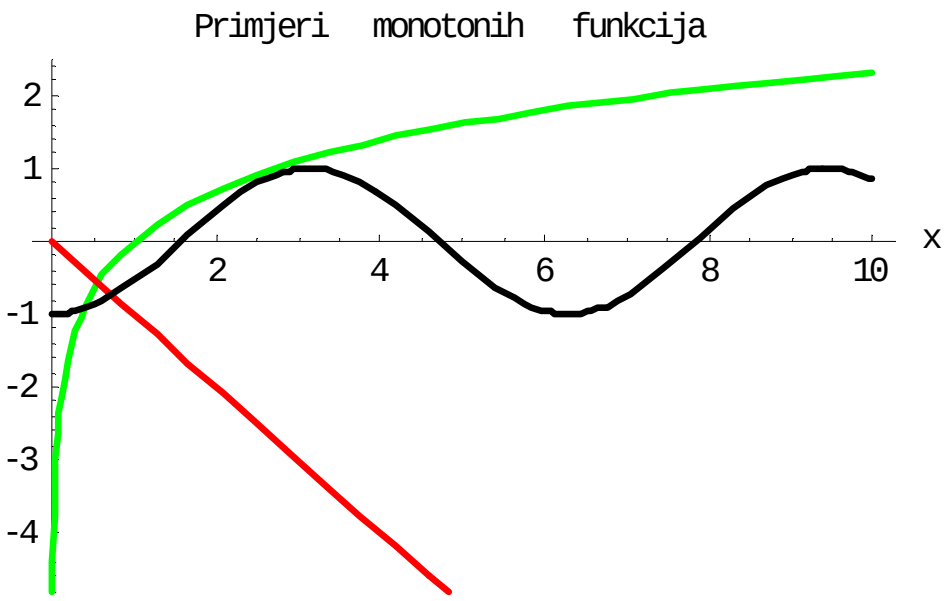
- Funkcije y = f(x) **je monotono rastuća na intervalu [a,b]** ako:

  za sve $x_1, x_2 \in [a,b]$ takve da je $x_1 \leq x_2$ vrijedi $f(x_1) \leq f(x_2)$.

- Funkcije y = f(x) **je monotono padajuća na intervalu [a,b]** ako:

  za sve $x_1, x_2 \in [a,b]$ takve da je $x_1 \leq x_2$ vrijedi $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Funkcije y = f(x) **je monotona na intervalu [a,b]** ako je ili rastuća ili padajuća na tom intervalu. Pri tome, ako vrijede stroge nejednakosti, tada kažemo da je y = f(x) **je strogo monotona.**



Tvrdnja:

a) **Ako je y = f(x) rastuća funkcija na intervalu [a,b], a y = g(x) rastuća funkcija na $\mathbb{R}$, onda je i kompozicija $g \circ f$ rastuća funkcija na intervalu [a,b]. (Dokazati!)**

b) **Ako je y = f(x) rastuća funkcija na intervalu [a,b], a y = g(x) padajuća funkcija na $\mathbb{R}$, onda je i kompozicija $g \circ f$ padajuća funkcija na intervalu [a,b]. (Dokazati!)**

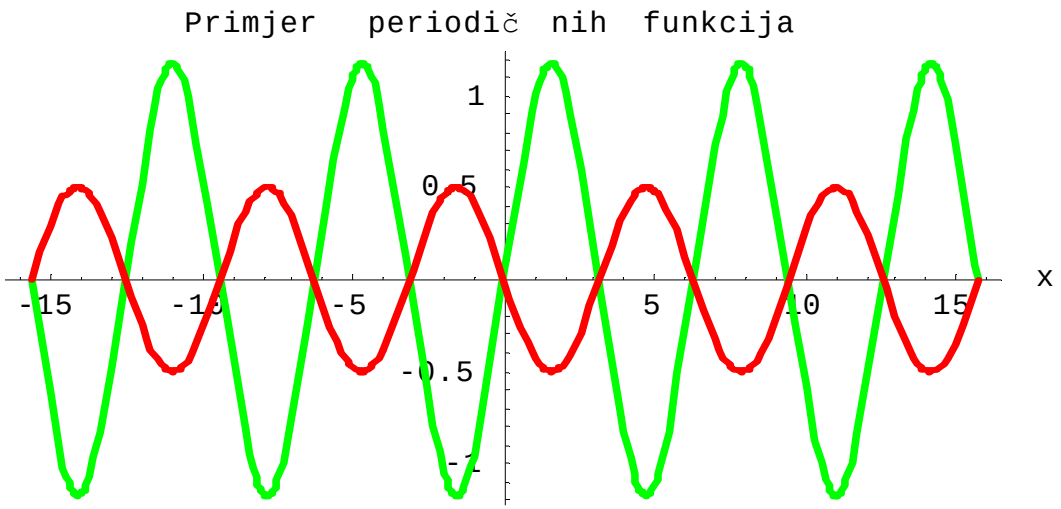
c) **Ako je y = f(x) padajuća funkcija na intervalu [a,b], a y = g(x) rastuća funkcija na $\mathbb{R}$, onda je i kompozicija $g \circ f$ padajuća funkcija na intervalu [a,b]. (Dokazati!)**

d) **Ako je y = f(x) padajuća funkcija na intervalu [a,b], a y = g(x) padajuća funkcija na $\mathbb{R}$, onda je i kompozicija $g \circ f$ rastuća funkcija na intervalu [a,b]. (Dokazati!)**

- **Funkcije y = f(x) je periodička ako postoji realan broj T > 0, takav da je:**

$$f(x + T) = f(x) \text{ za sve } x \in \mathbb{R}.$$

- **Najmanji takav broj T, ako postoji, zovemo temeljnim periodom za funkciju y = f(x).**



Tvrdnja:

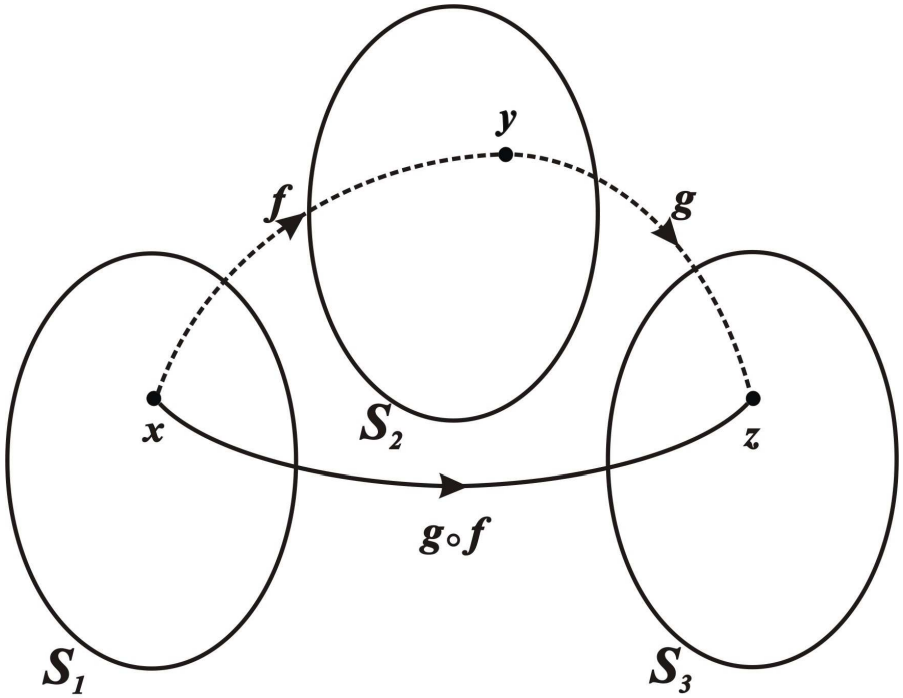
Ako je y = f(x) periodička funkcija s temeljnim periodom T, te neka je y = g(x) injektivna funkcija, tada je kompozicija $g \circ f$ također periodička funkcija sa istim periodom T.

Operacije s funkcijama

- **Funkcije se zbrajaju** tako da se zbroje njihove vrijednosti. Zbroj funkcija *f* i *g* je funkcija *h* takva da je $h(x) = f(x) + g(x)$.
- **Funkcije se množe** tako da se pomnože njihove vrijednosti. Tako je produkt funkcija *f* i *g* funkcija *h* takva da je $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- Neka su S_1, S_2 i S_3 skupovi, te $f : S_1 \to S_2$ i $g : S_2 \to S_3$. **Kompozicija ili sastavak** $g \circ f$ funkcija *f* i *g* je funkcija: $g \circ f$ definirana ovako:

$$(\forall x \in S_1)\ (g \circ f)(x) = g[f(x)].$$

Vidi se da je ova kompozicija moguća samo ako ima u domeni od f takvih *x* da je $f(x)$ u domeni od *g*.



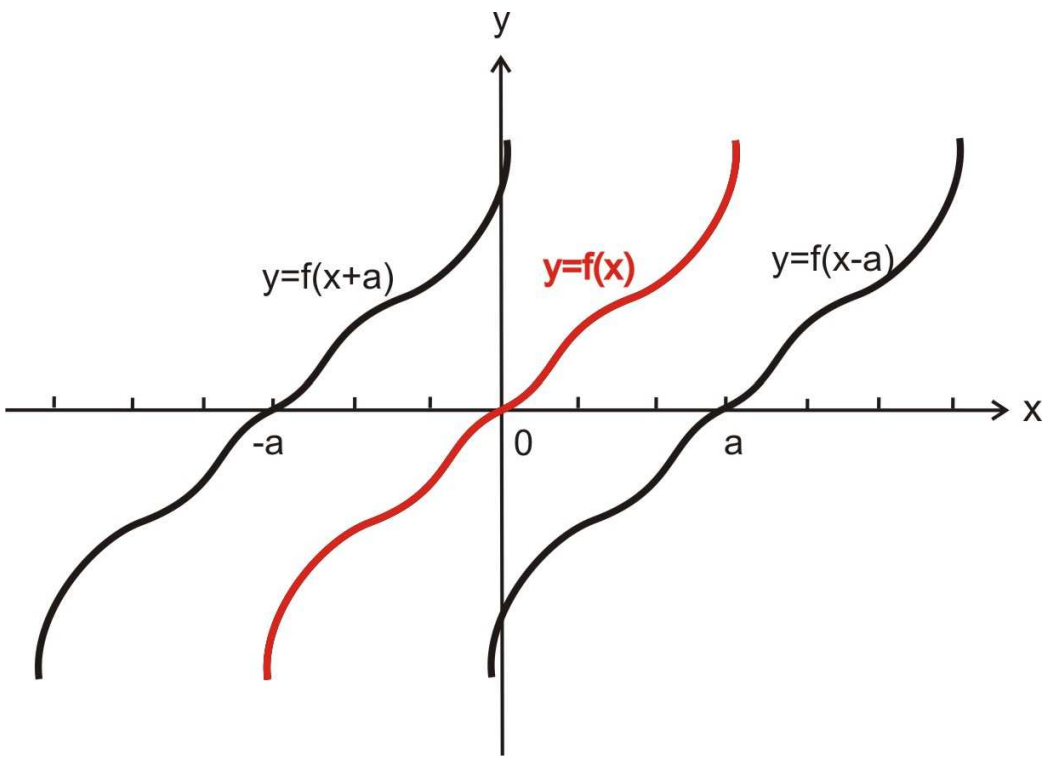
Primjedba:

a) **Kompozicija bijekcija je opet bijekcija. (Pokazati!)**

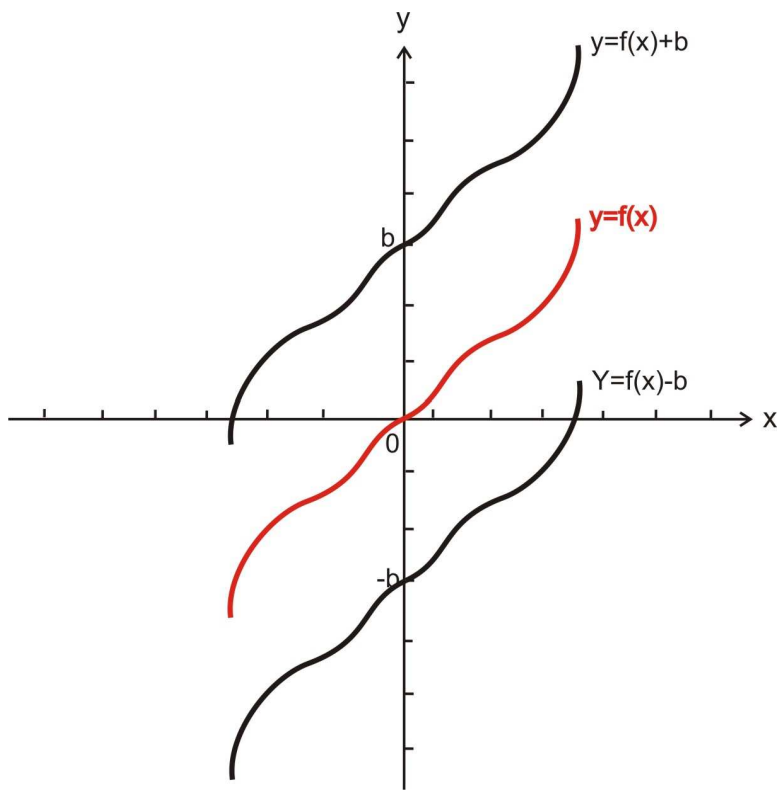
b) **Kompozicija funkcija je asocijativna, t.j. za $f : S_1 \to S_2$, $g : S_2 \to S_3$ i $h : S_3 \to S_4$ vrijedi:** $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ **. (Pokazati!)**

- LINEARNE TRANSFORMACIJE GRAFA:

Posebno su interesantne kopozicije funkcije f s funkcijom *g(x) = x - a* i to obzirom na graf. Tako je graf funkcije $f \circ g(x) =$ *f(g(x))* = *f(x-a)* ustvari translatirani graf funkcije f u desno za pozitivno *a.* Ako je *a* negativan, onda je translacija u lijevo. S druge strane graf funkcije $g \circ f(x) =$ *g(f(x))* = *f(x) - a* je graf funkcije f translatiran za pozitivno *a* prema dolje, a za negativno *a* prema gore.



- -



Nadalje, točke grafa funkcije y = f(βx), dobivaju se zamjenom točke $(x_0, y_0) \in \Gamma_f$ točkom $(\frac{x_0}{\beta}, y_0)$. Mogućnosti su sljedeće:

a) β = -1 ⇒ simetrija s obzirom na os y;

b) |β| > 1 ⇒ skupljanje (suženje) grafa Gf |β| puta u smjeru osi x. U slučaju da je β negativan transformacija je praćena i simetrijom s obzirom na os y;

c) |β| < 1, β ≠ 0 ⇒ rastezanje (proširenje) grafa Gf |β| puta u smjeru osi x. U slučaju da je β negativan transformacija je praćena i simetrijom prema osi y.

- Slično prethodnom, za dobivanje grafa funkcije y = αf(x), mogućnosti su sljedeće:

a) α = -1 ⇒ simetrija s obzirom na os x;

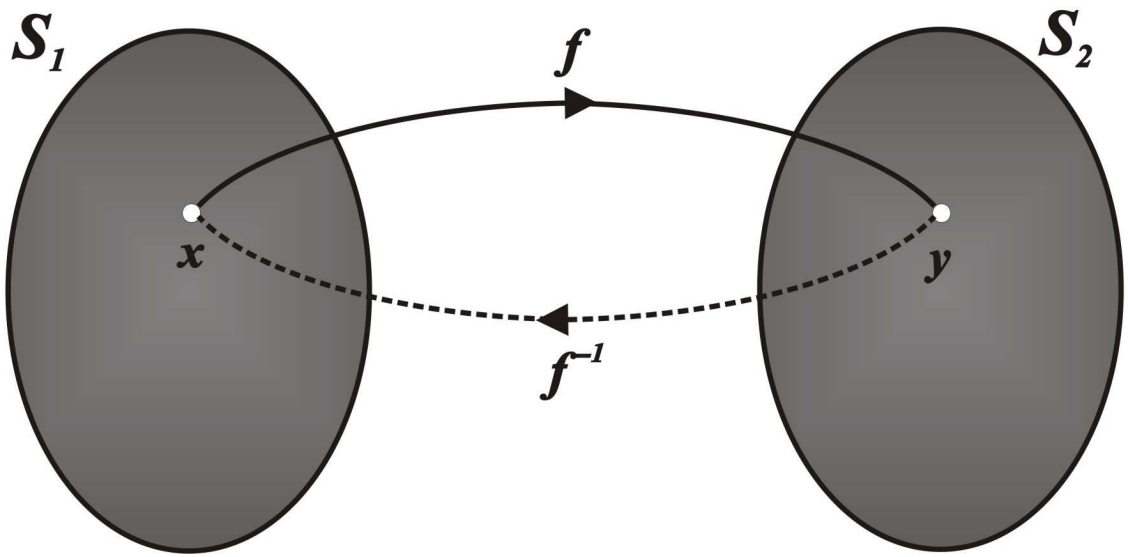
b) |α| > 1 ⇒ rastezanje (proširenje) grafa Gf |α| puta u smjeru osi y. U slučaju da je α negativan transformacija je praćena i simetrijom s obzirom na os x;

c) |α| < 1, α ≠ 0 ⇒ skupljanje (suženje) grafa Gf |α| puta u smjeru osi y. U slučaju da je α negativan transformacija je praćena i simetrijom prema osi x.

- Do grafa funkcije $y = \alpha f(\beta x+a)+b$ dolazimo kombinacijom gornjih postupaka.

- INVERZNA FUNKCIJA

- Funkcija koja broju *f(x)* pridružuje broj *x* zove se **inverzna funkcija funkcije f**, i označava f^{-1}. Domena od f^{-1} je slika funkcije *f* , a slika od f^{-1} je domena od *f* .

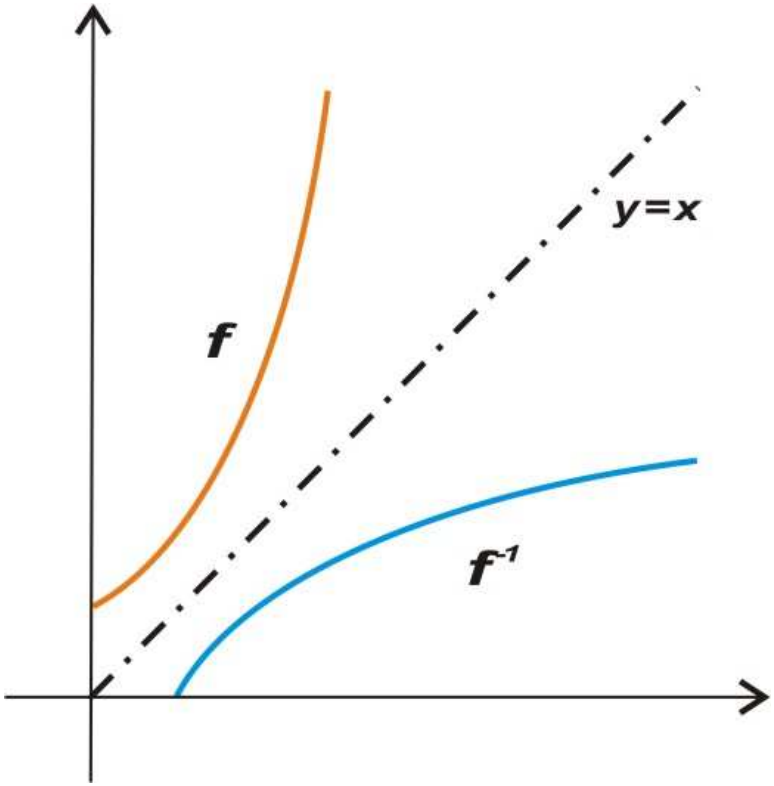


Za funkciju $f : S_1 \rightarrow S_2$ postoji inverzna funkcija ako i samo ako je funkcija *f* bijekcija. (*Dokaži!*) Stoga je inverzna funkcija jedinstvena.

Zbog toga što je $f^{-1}[f(x)] = x$ graf od f^{-1} je

$$G(f^{-1}) = \{ (f(x),x) : x \in \mathcal{D}(f) \},$$

pa je prema tome graf inverzne funkcije f^{-1} sime-trična slika grafa originalne funkcije f u odnosu na simetralu prvog i trećeg kvadranta, t.j. u odnosu na pravac $y = x$.



Tvrdnja: **Ako su $f : S_1 \to S_2$ i $g : S_2 \to S_3$ bijekcije, onda vrijedi: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. (Dokazati!)**

Primjer: Promatrajmo funkciju f : **$R \to [0,+\infty)$, $f(x) = x^2$ i $g = f|_{[0,+\infty)}$. Funkcija f nije injektivna, jer je $f(-x)=f(x) = x^2$, pa nema inverzne funkcije. Funkcija $g = f|_{[0,+\infty)}$ *je surjektivna i injektivna (dakle, bijektivna), pa ima inverznu funkciju* $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $g^{-1} : [0,+\infty) \to [0, +\infty)$.**

Zadavanje funkcije

1. **Tablicom (tabelarno)** - tablica sadrži vrijednosti x i vrijednosti funkcije f(x);

2. **Grafom (grafički)** - graf prati promjenu neke veličine npr. o vremenu;

3. **Formulom:**

   a) Eksplicitno;

   b) Implicitno;

   c) Parametarski.

a) **Eksplicitno zadavanje funkcije:** Ako je pravilo po kojem se vrijednosti npr. od y dobivaju direktno za odbrani x, kažemo da je y zadan kao eksplicitna funkcija od x. Zapis: $y=f(x)$.

b) **Implicitno zadavanje funkcije:** Funkcija je zadana implicitno ako je dana jednadžba koja sadržava varijable x i y, pa se iz nje y određuje rješavanjem jednadžbe, za zadani x ili obratno. Prebace li se svi članovi na lijevu stranu jednadžbe, ona prima oblik $F(x,y)=0$, gdje je lijeva strana neki izraz koji sadržava x i y.

Primjer: Jednađba kružnice

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow \begin{cases} y = +\sqrt{1-x^2}, \\ y = -\sqrt{1-x^2}. \end{cases}$$

Skup K={ (x,y) | $x^2 + y^2 = 1$} nije funkcijski, ali se mogu izdvojiti skupovi koji to jesu: K_1 = { (x, $\sqrt{1-x^2}$) | $x^2 + y^2 = 1$} i K_2 = { (x, -$\sqrt{1-x^2}$) | $x^2 + y^2 = 1$}.

c) Funkcije zadane parametarski: Funkcija zadana je u parametarskom obliku, ako su x i y zadani u eksplicitnom obliku kao funkcije neke pomoćne varijable t, koju zovemo parametrom, tj.

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}, \quad t \in I \subseteq R$$

Svakoj vrijednosti *t*$\in$ *I* odgovara par vrijednosti (x, y), odnosno jedna točka ravnine.

Primjer: Parametarska Jednađba kružnice:

$$\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{aligned}, \quad t \in R.$$

Osnovne elementarne funkcije i njihova svojstva

Elementarne funkcije **su funkcije koje se mogu dobiti iz osnovnih elementarnih funkcija pomoću konačnog broja aritmetičkih operacija (+,-,·,:) i konačnog broja kompozicija elementarnih funkcija.**

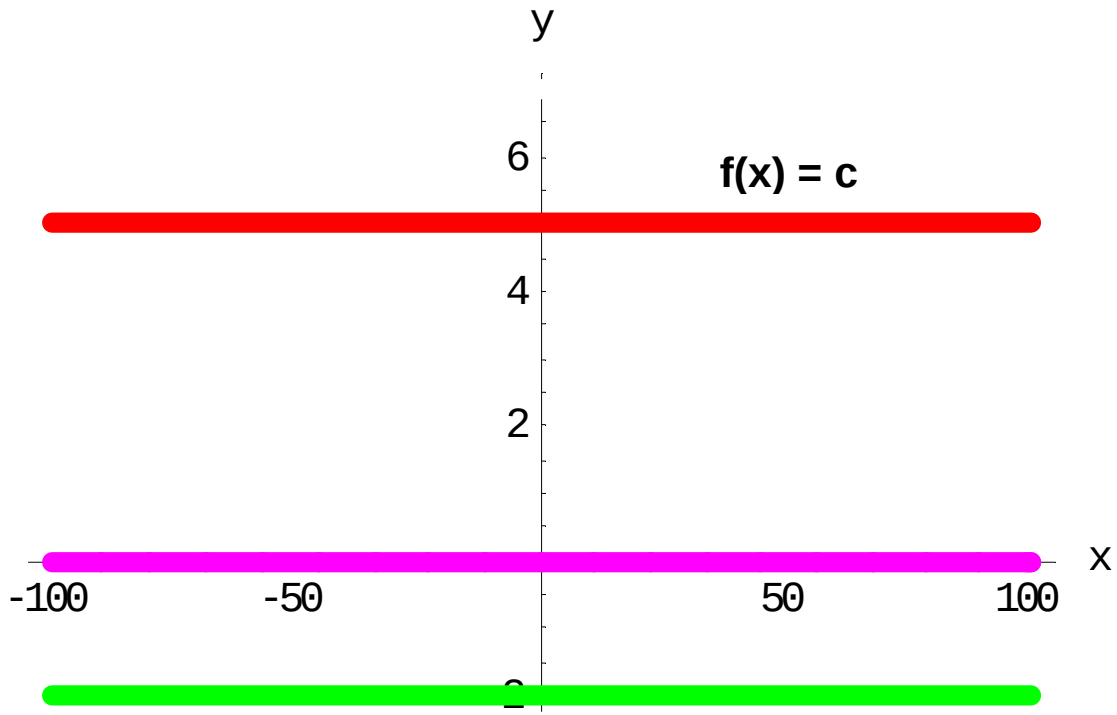
Algebarske funkcije **su one elementarne funkcije koje su dane pomoću kompozicije racionalnih funkcija, potenciranja s racionalnim eksponentom i sa četri osnovne računske operacije.**

Transcedentne funkcije **su one elementarne funkcije koje nisu algebarske. Tu spadaju eksponencijalne, logaritamske, trigonometrijske, ciklometrijske, hiperbolične i area funkcije.**

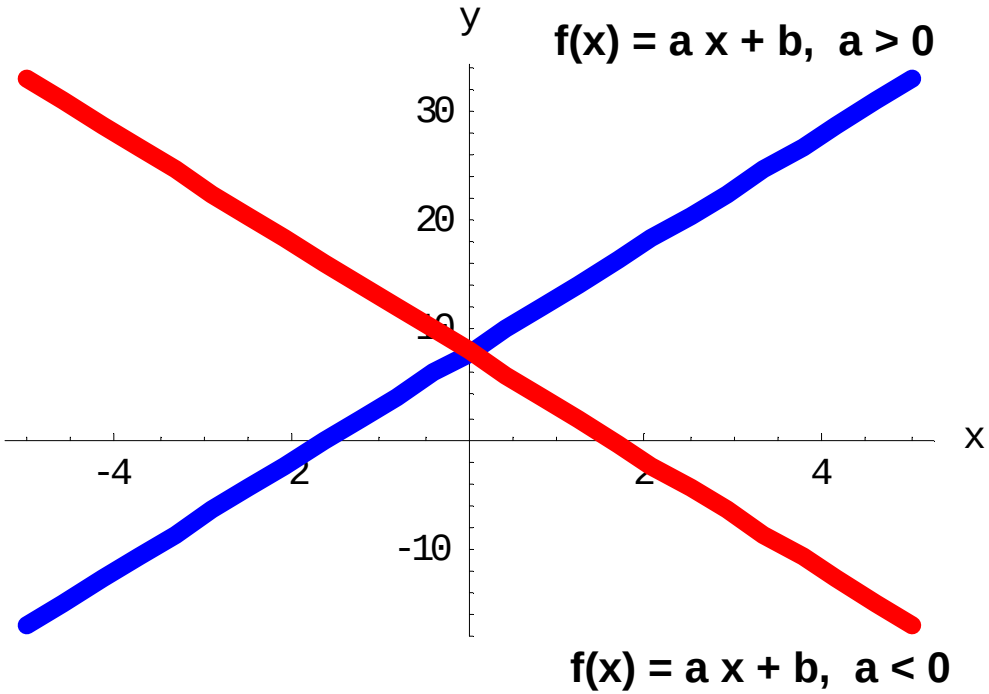
Slijedi pregled osnovnih elementarnih funkcija i njihova svojstva

Polinomi.

- ***Konstanta*** **f(x) = c**
  - **domena $\mathcal{D}$(f) = $\mathbb{R}$;**
  - **slika funkcije f($\mathcal{D}$) = {c};**
  - **ako je c = 0 svaki realni broj je nultočka, ako c $\neq$ 0 nema nultočaka;**
  - **graf G(*f*) je pravac u ravnini prikazan na slici desno.**



- ***Afina funkcija*** **f(x) = a x + b**
  - **domena $\mathcal{D}$(f) = $\mathbb{R}$;**
  - **slika funkcije f($\mathcal{D}$) = $\mathbb{R}$;**
  - **nultočka je $x = -\frac{b}{a}$, uz uvjet da je a $\neq$ 0;**
  - **graf G(*f*) je pravac u ravnini prikazan na slici desno.**



- ***Kvadratna funkcija*** **f(x) = a x^2 + b x + c, gdje je a $\neq$ 0**

  – **domena $\mathcal{D}$(f) = $\mathbb{R}$;**

  – **slika funkcije**

  f($\mathcal{D}$) = $\left[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$ **za a > 0, f($\mathcal{D}$)**

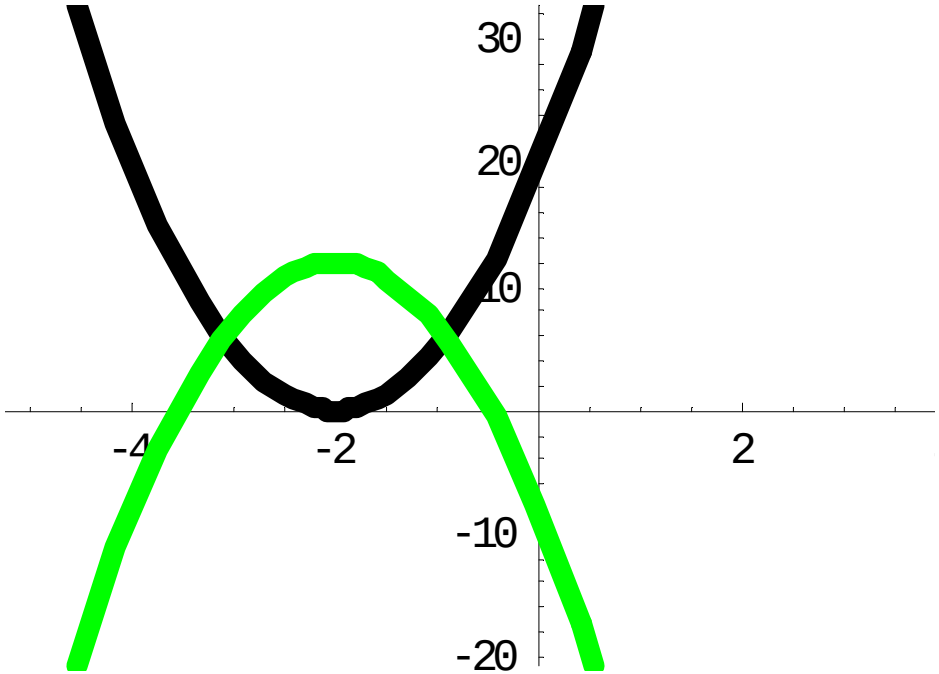
  = $\left(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}\right]$ **za a < 0;**

  – **nultočke su** $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$**,**

  uz uvjet da je $b^2-4ac\geq 0$**, inače nema nultočaka;**

  – **graf G(*f*) je parabola u ravnini prikazan na slici desno.**

f(x) = a x^2 + b x + c, a > 0

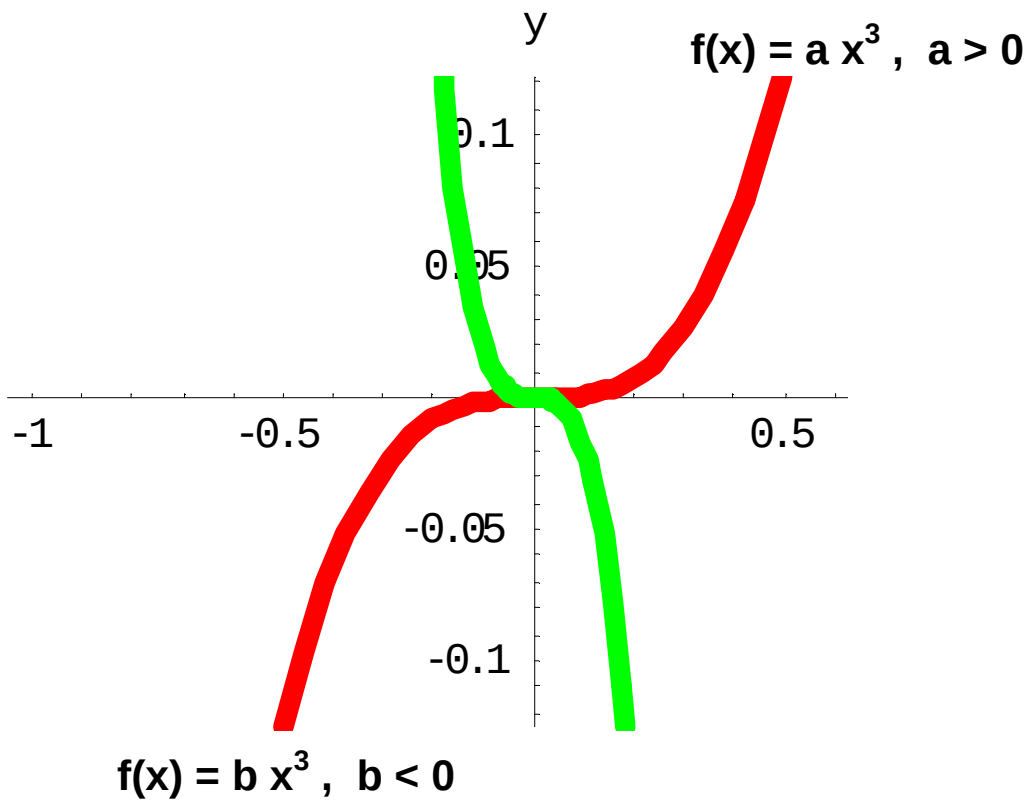


f(x) = a x^2 + b x + c, a < 0

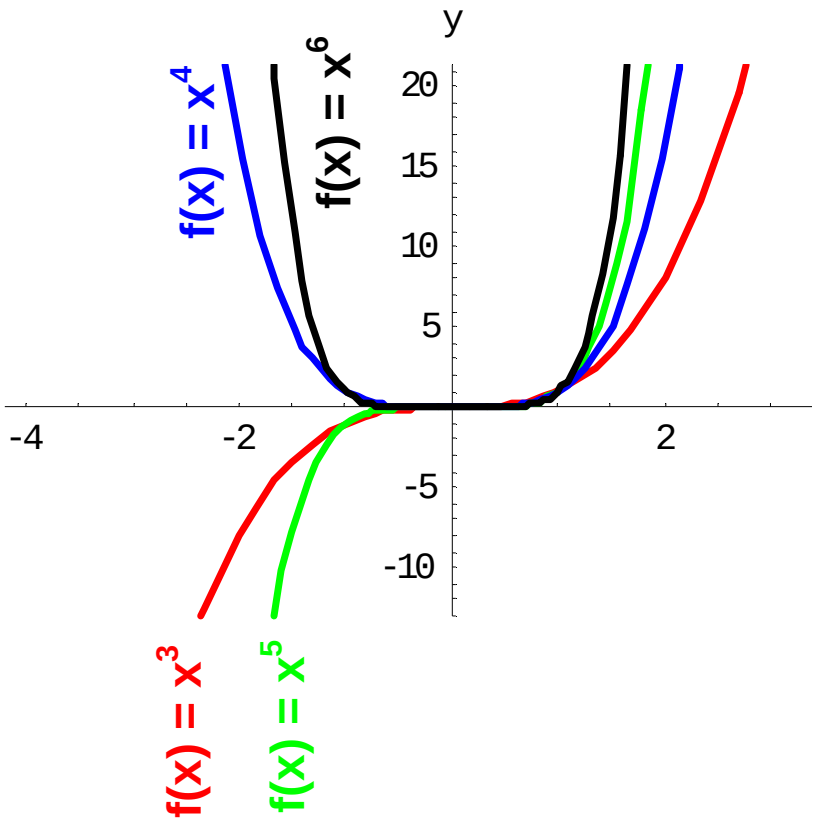
- ***Kubna funkcija*** **f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d, gdje je a $\neq$ 0**
  - **domena $\mathcal{D}$(f) = $\mathbb{R}$;**
  - **slika funkcije f($\mathcal{D}$) = $\mathbb{R}$;**
  - **ako je b=c=d = 0 nultočka je x = 0, općenito može imati najviše 3 realna korijena što ovisi o predznaku njene diskriminante D=p^2+q^3, gdje**

    je $3p = \dfrac{3ac - b^2}{3a^2}$,

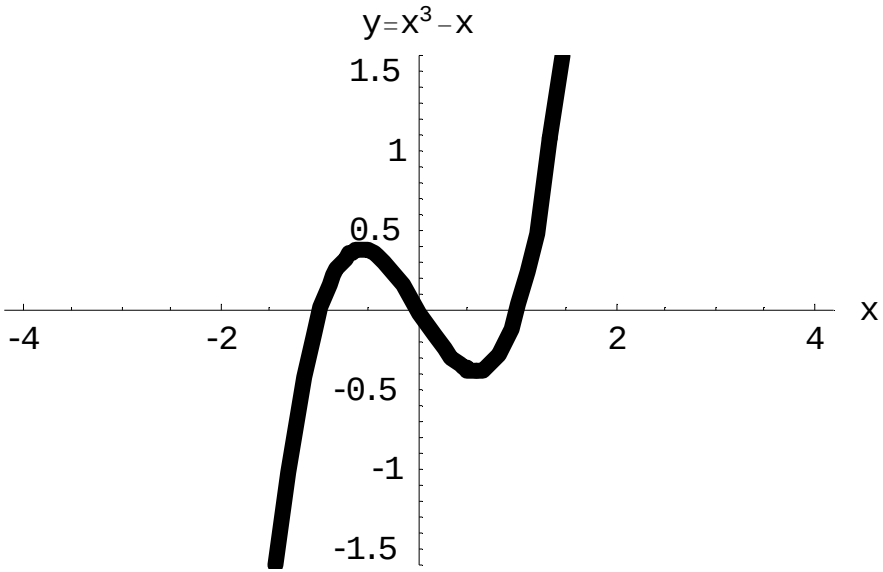
    $2q = \dfrac{2b^3}{27a^3} - \dfrac{bc}{3a^2} + \dfrac{d}{a}$;
  - **primjer grafa G(*f*) za funkcije f(x)=ax^3 je krivulja u ravnini prikazan na slici desno (kubna parabola).**

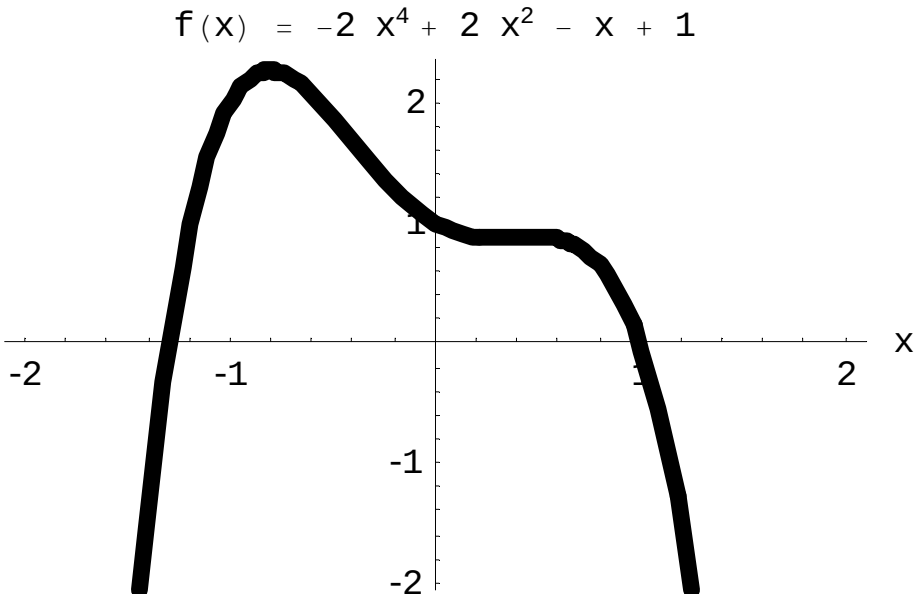


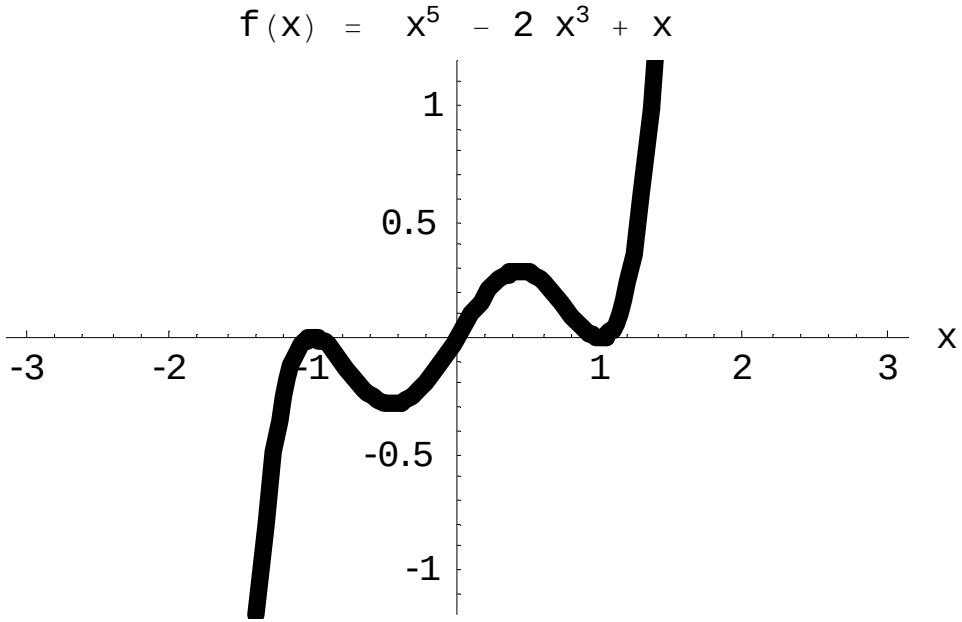
- ***Polinom n-tog stupnja*** $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, gdje je $a_n \neq 0$
  - domena $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, odnosno polinomi nemaju uvjeta za svoju domenu;
  - slika funkcije $f(\mathcal{D}) = \mathbb{R}$, ako je stupanj n neparan broj;
  - ne postoji općenita formula za pronalaženje nultočaka polinoma stupnja većeg od 4;
  - graf G(*f*) je krivulja u ravnini čiji oblik ovisi o stupnju polinoma (broju n) i koeficijentima $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$. Primjer grafa za funkcije $f(x)=x^n$ (potencije) je krivulja u ravnini parabolnog tipa (parabola reda n).

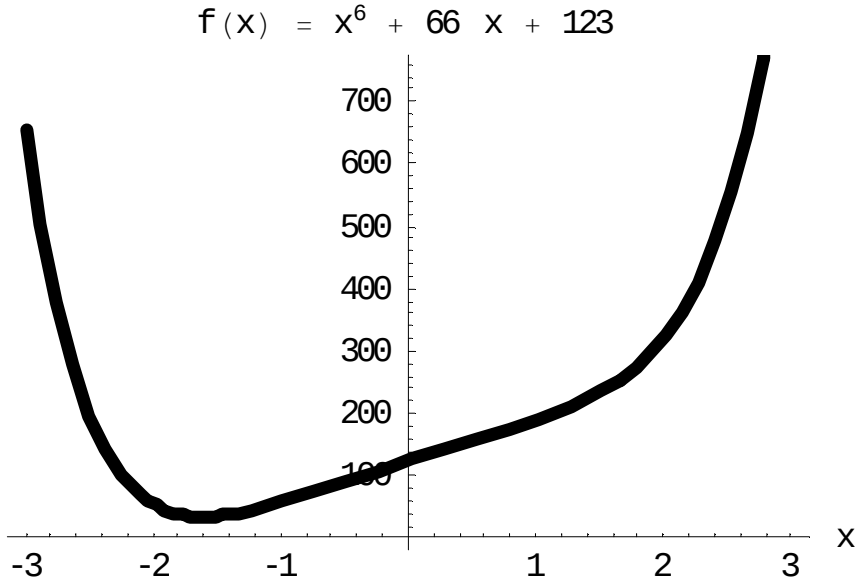


Grafovi nekih polinoma






f(x) = x^5 - 2 x^3 + x
1
0.5
-0.5
-1
-3
-2
-1
1
2
3
x


f(x) = x^6 + 66 x + 123
700
600
500
400
300
200
100
-3
-2
-1
1
2
3
x

- ***Racionalne funkcije*** $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, **gdje su P(x) i Q(x) polinomi**

  – **domena $\mathcal{D}$(f) = {x $\in \mathbb{R}$: Q(x) $\neq$ 0};**

  – **slika funkcije f($\mathcal{D}$) ovisi o polinomima P(x) i Q(x);**

  – **nultočake polinoma u brojniku su ujedno nultočke funkcije. Nultočke nazivnika su točke u kojima funkcija nije definirana i zovu se polovi funkcije;**

  – **graf G(*f*) je krivulja u ravnini čiji oblik ovisi o polinomima P(x) i Q(x).**

Opišimo kako se crta graf racionalne funkcije $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$,

gdje je P_n(x) polinom stupnja n i Q_m(x) polinom stupnja m. Pretpostavit ćemo da je racionalna funkcija *skraćena* tako da P_n(x) i Q_m(x) nemaju zajedničkih nultočaka.

- **Vertikalne asimptote. Racionalna funkcija ima vertikalne asimptote u nultočkama nazivnika (koje zbog naše pretpostavke nisu nultočke**

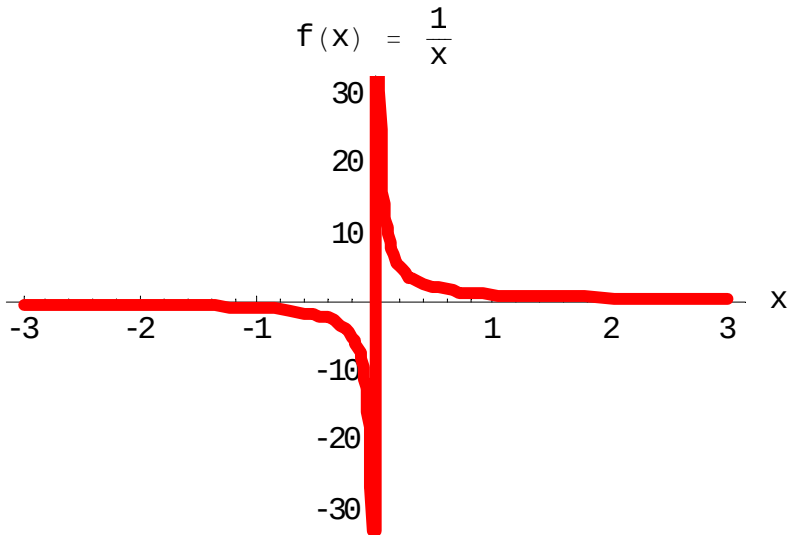
brojnika). Kratnost nultočke određuje ponašanje funkcije s obiju strana asimptote. Ako je nultočka neparne kratnosti, funkcija će biti različitih predznaka. Kažemo da graf funkcije ‘dolazi s različitih strana asimptote’. Ako je nultočka parne kratnosti, funkcija će biti istog predznaka i njen graf ‘dolazi s iste strana asimptote’.

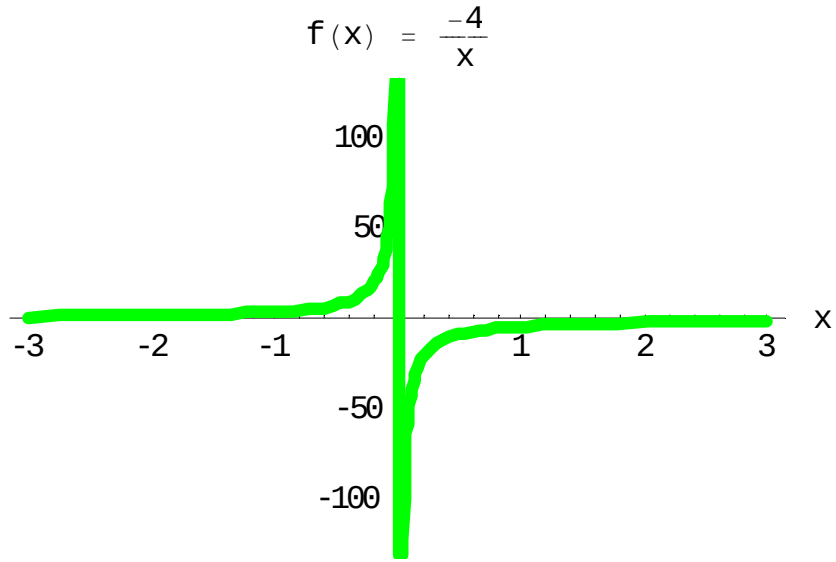
- **Horizontalne asimptote.** Racionalna funkcija ima horizontalne asimptote (istovremeno lijevu i desnu) onda i samo onda ako je stupanj brojnika manji ili jednak stupnju nazivnika. Ako je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika, onda je pravac $y=0$ horizontalna asimptota. Ako je stupanj brojnika jednak stupnju nazivnika, onda je pravac $y=a_n/b_n$ horizontalna asimptota, gdje su a_n i b_n vodeći koeficijenti polinoma u brojniku i nazivniku.

- **Kose asimptote.** Ako je stupanj brojnika za jedan veći od stupnja nazivnika, racionalna funkcija ima kosu asimptotu (istovremeno lijevu i desnu). Ako je stupanj brojnika barem za dva veći od stupnja nazivnika, racionalna funkcija nema horizonatlnih i kosih asimptota.

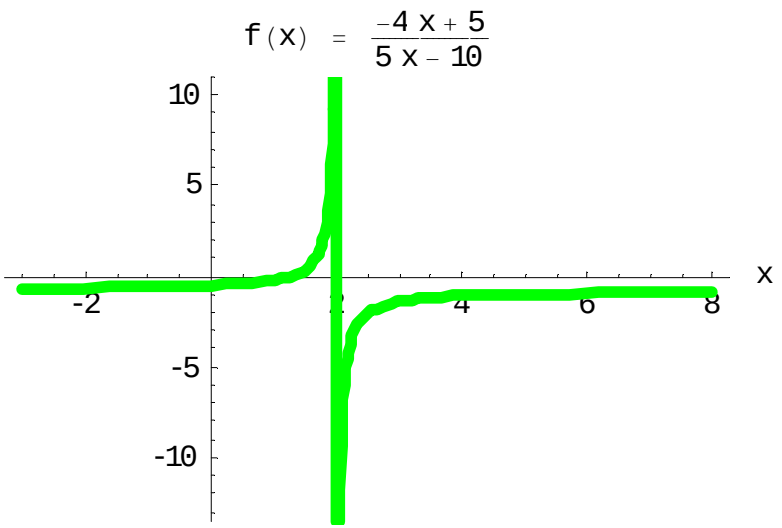
Slijede primjeri grafova za neke racionalne funkcije:

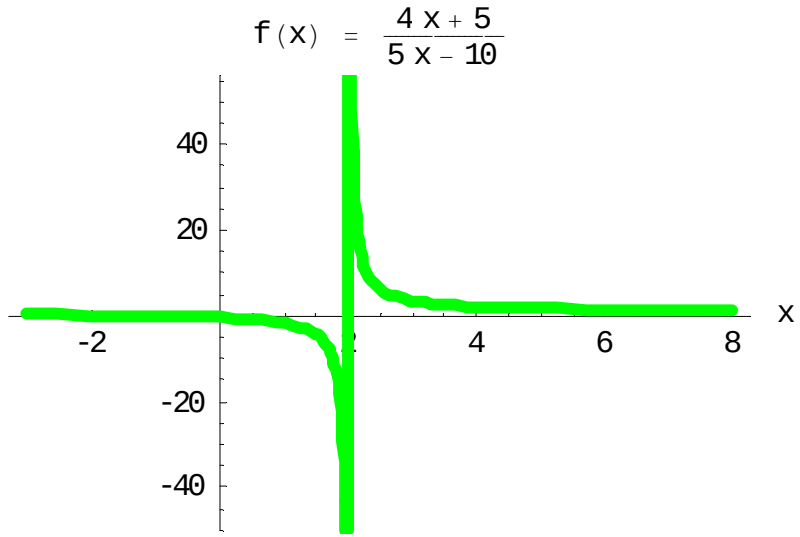
- **obrnuta proporcionalnost:** $y = \frac{a}{x}$



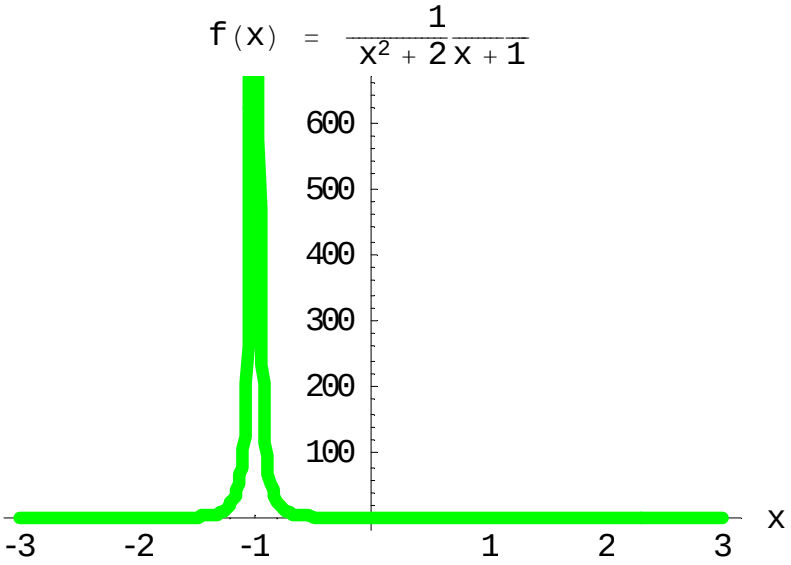


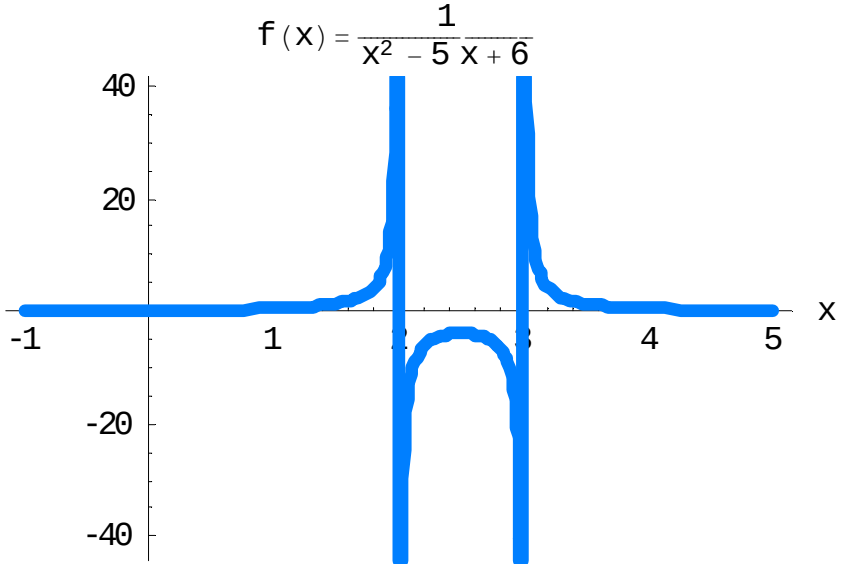
- **razlomljena linearna funkcija:** $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$



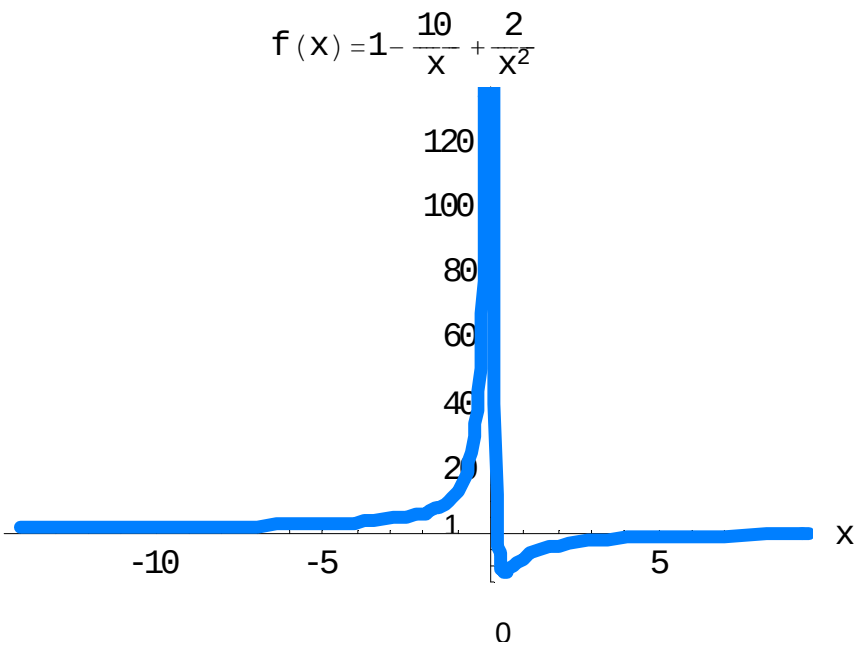


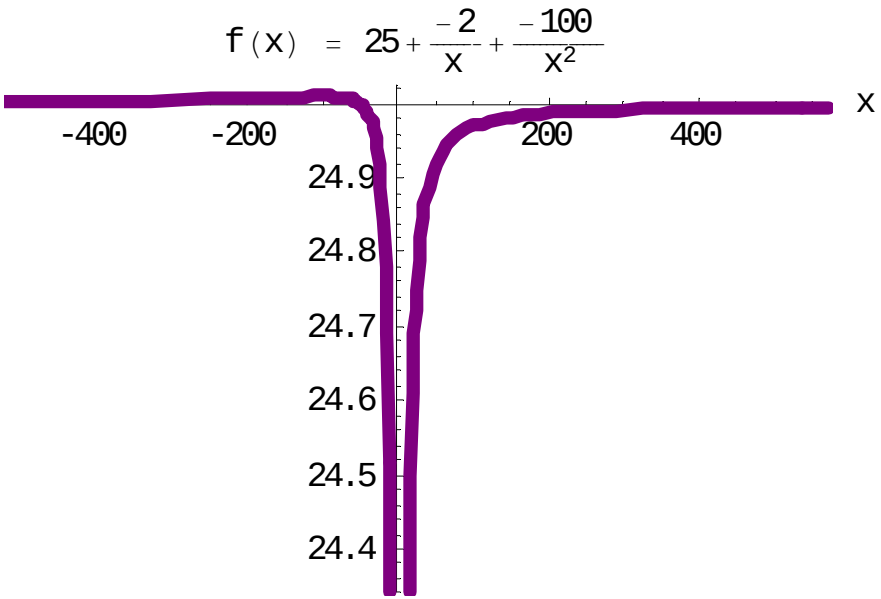
- **funkcija:** $y = \dfrac{1}{a x^2 + b x + c}$



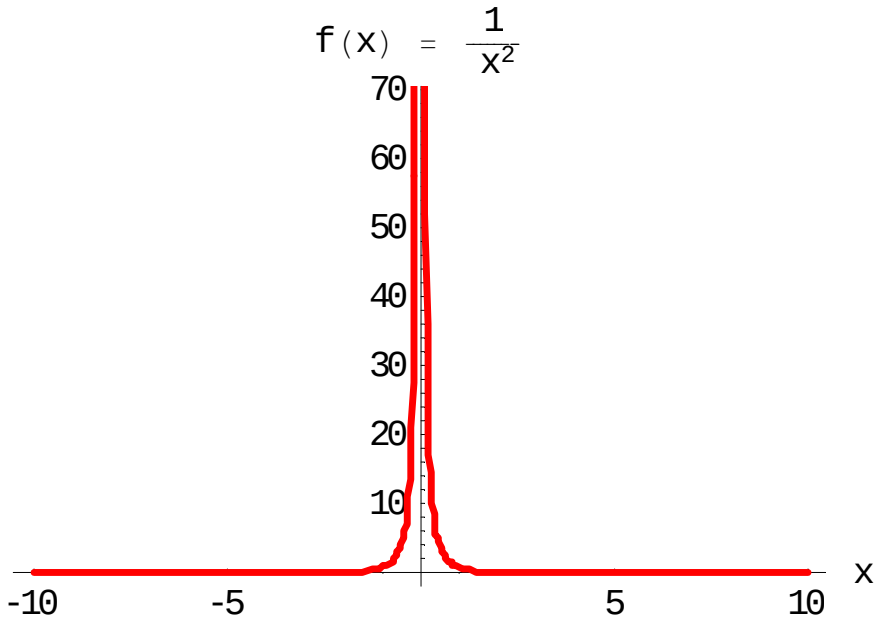


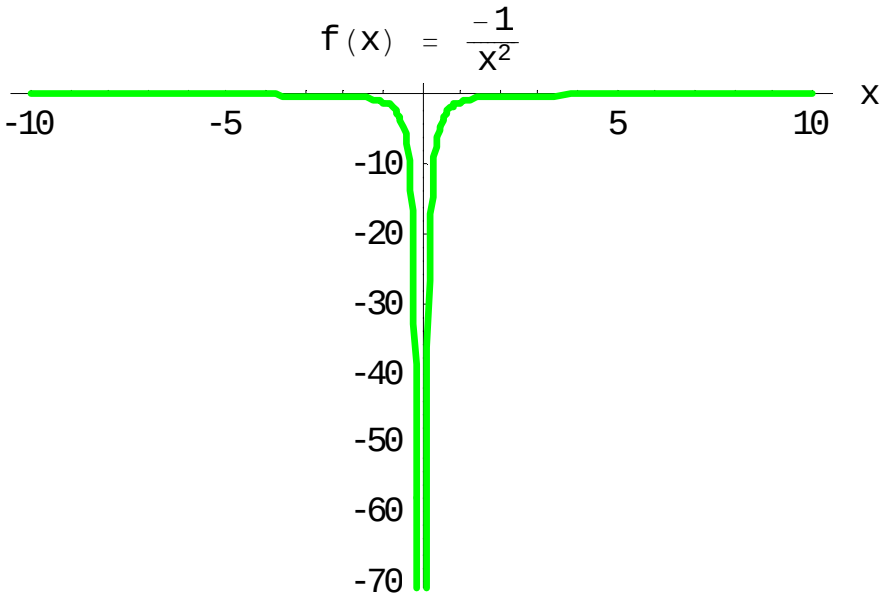
- **funkcija:** $y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \left(= \frac{ax^2 + bx + c}{x^2} \right)$



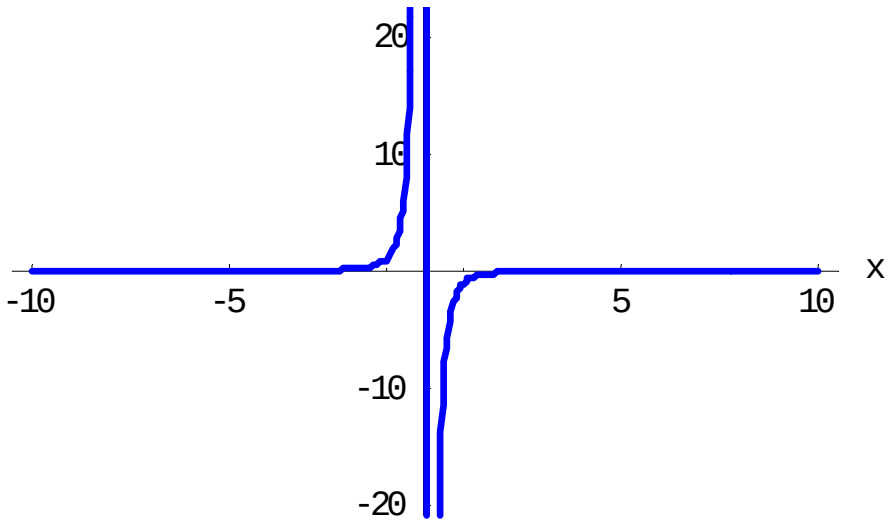


- **potencija:** $y = \frac{a}{x^n}$**, gdje je n prirodan broj**

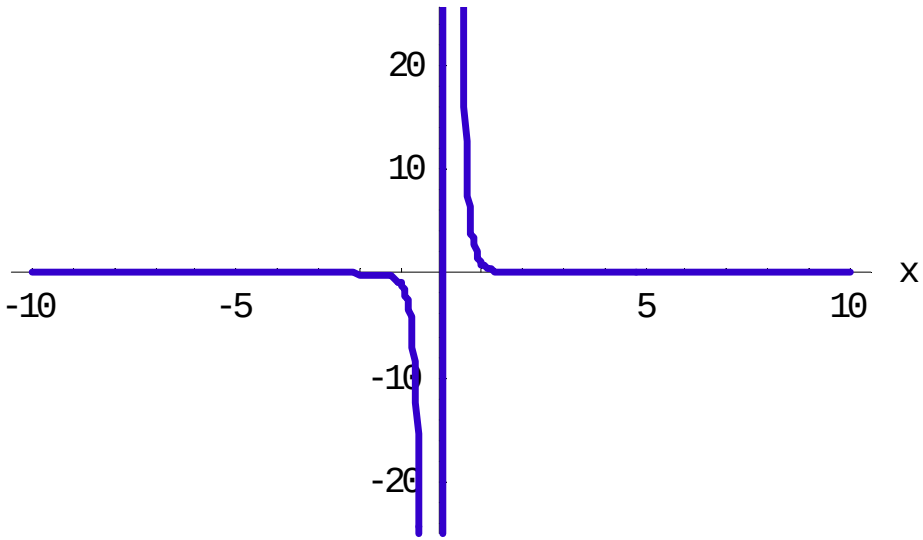




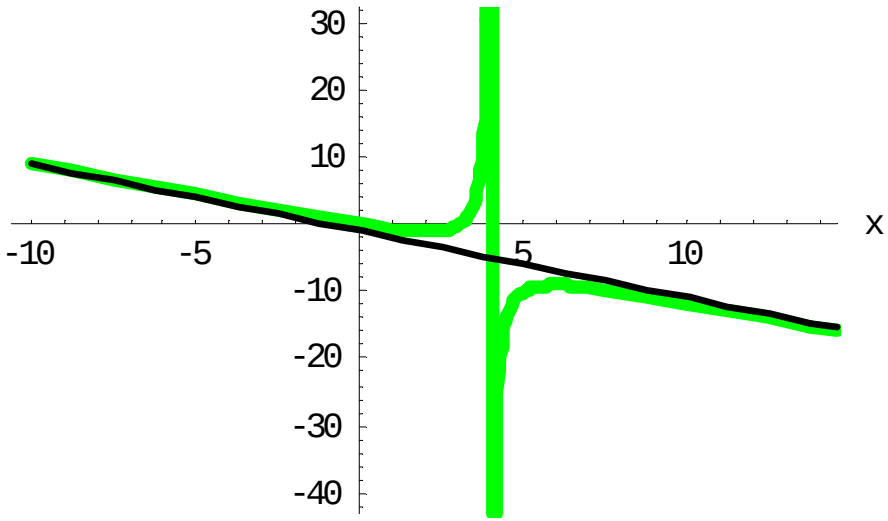
$$f(x) = \frac{-1}{x^3}$$



$$f(x) = \frac{1}{x^5}$$



$$f(x) = \frac{3x - x^2}{x - 4}, \quad \text{kosa asimptota} \quad y = -x - 1$$



- ***Iracionalne funkcije*** **definiramo kao inverzne funkcije polinoma**

  - ***Funkcija kvadratni korijen*** $f(x) = \sqrt{x}$ **je inverzna funkcija funkcije g(x) = x^2, x $\in$ [0,+∞) (t.j. g(x) je restrikcija kvadratne funkcije x^2 na interval [0,+∞)). Prema tome vrijedi:**

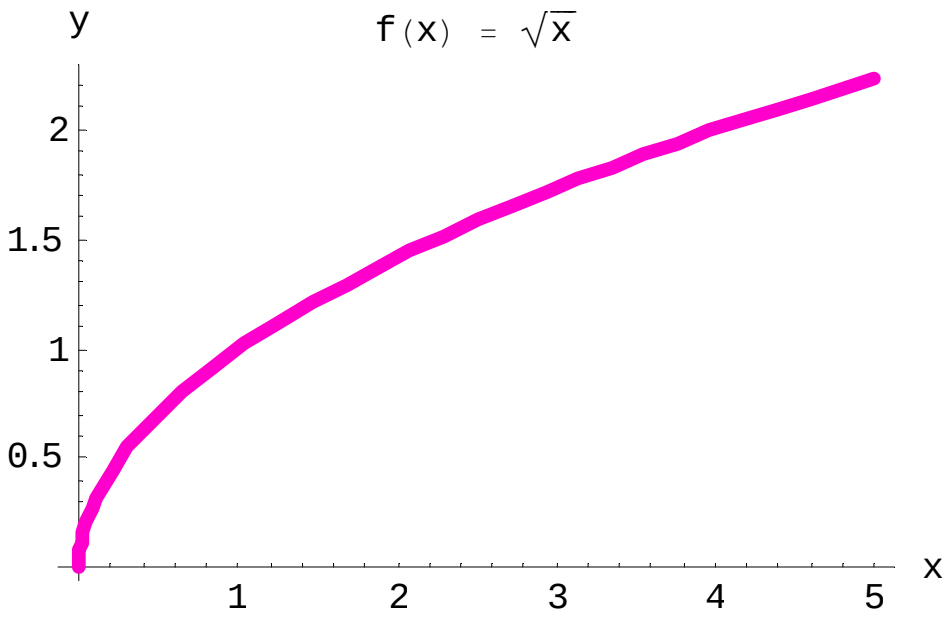
$$\sqrt{x^2} = x, \quad \text{za sve } x \in [0,+\infty),$$
$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x, \quad \text{za sve } x \in [0,+\infty);$$

– **domena $\mathcal{D}$(f) = [0,+∞);**

– **slika funkcije f($\mathcal{D}$) = [0,+∞);**

– **nultočake je x = 0;**

– **graf G(*f*) je krivulja u ravnini prikazana na slici desno:**

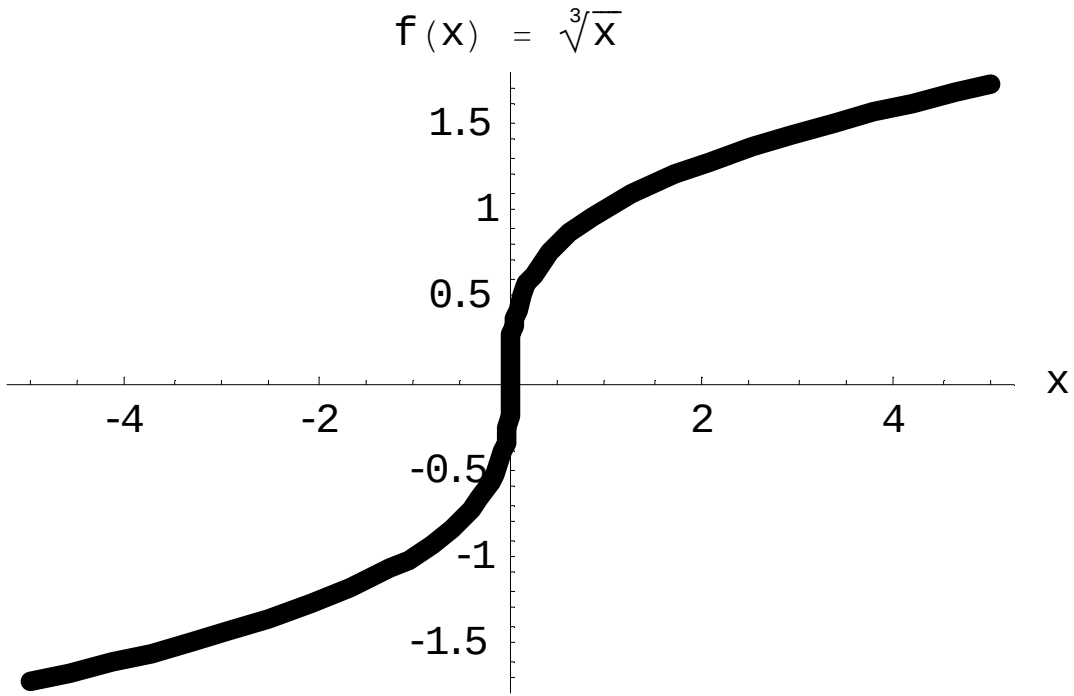


- ***Funkcija kubni korijen*** $f(x)=\sqrt[3]{x}$ **je inverzna funkcija funkcije g(x) = x^3, x $\in \mathbb{R}$. Prema tome vrijedi:**

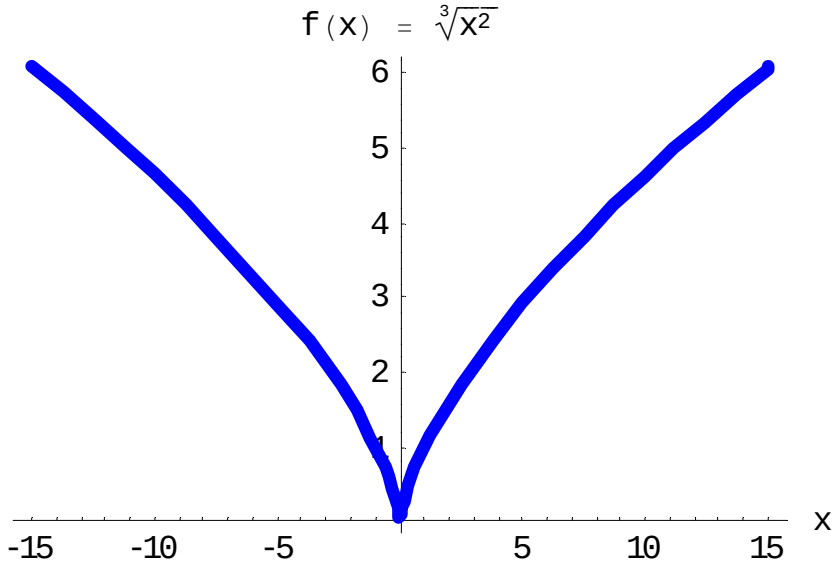
$$\sqrt[3]{x^3}=x, \quad \text{za sve } x\in(-\infty,+\infty),$$

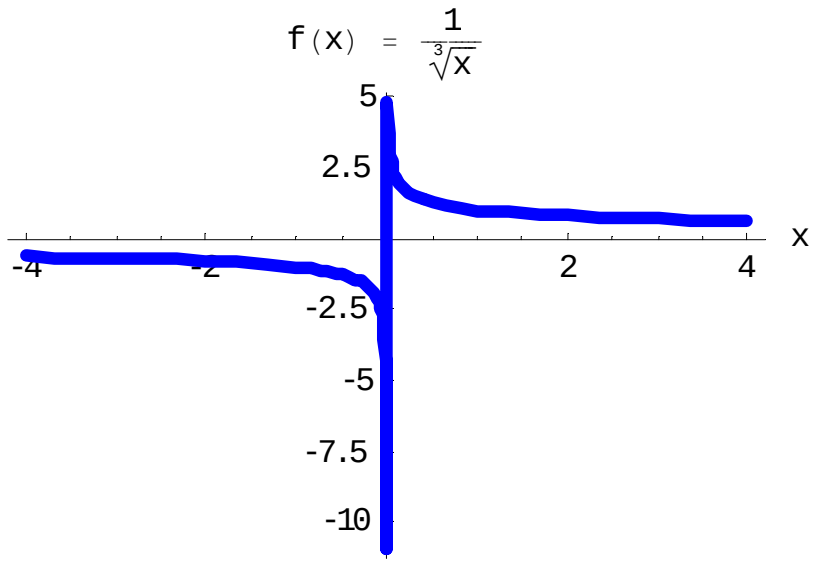
$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3=x, \quad \text{za sve } x\in(-\infty,+\infty);$$

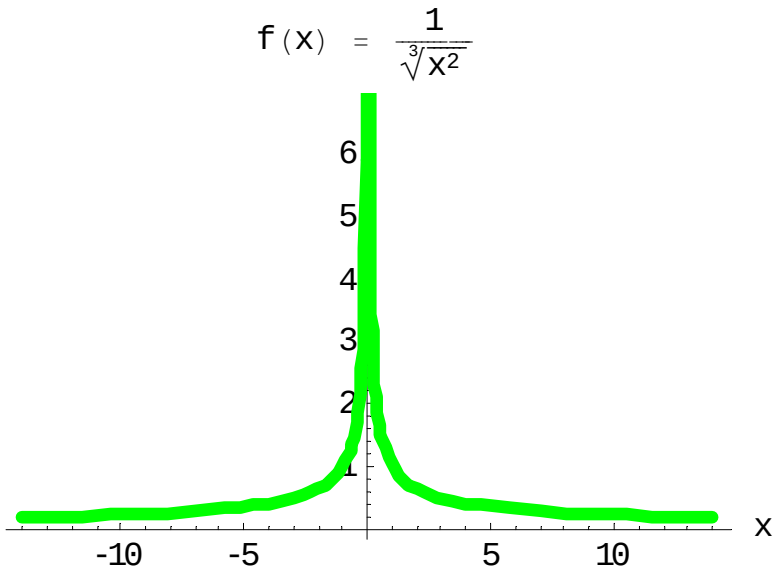
- **domena $\mathcal{D}$(f) = $\mathbb{R}$;**
- **slika funkcije f($\mathcal{D}$) = $\mathbb{R}$;**
- **nultočake je x = 0;**
- **graf G(*f*) je krivulja u ravnini prikazana na slici desno:**



Grafovi nekih iracionalnih funkcija







- ***Opća potencija*** **je funkcija oblika $f(x) = x^c$, $x>0$, $c \in \mathbb{R}$.**

- $x^c = (e^{\ln x})^c = e^{c \ln x}$;
- domena $\mathcal{D}(f) = (0,+\infty)$;
- slika funkcije $f(\mathcal{D}) = (0,+\infty)$;