

4. FUNKCIJE

4.1 Osnovni pojmovi i definicija funkcije

Funkcija je odnos dviju velicina - varijabli, za koje vrijedi, da je svakoj vrijednosti jedne varijable *nezavisna promjenjiva*, pridružena samo jedna vrijednost druge varijable, *zavisna promjenjiva*.

Velicina koja se mijenja po volji naziva se *nezavisna promjenjiva*

Velicina koja poprima vrijednosti po funkcijskoj zavisnosti, naziva se *zavisna promjenjiva*

Funkcija se može predstaviti i graficki. Ako se povuci vertikalni pravac koji sijeće graf funkcije u samo jednoj točki, tada graf predstavlja funkcionalni odnos. U suprotnom, graf predstavlja relacioni odnos tih dviju velicina.

Vrijednost nezavisne promjenjive, za koju je funkcija definirana, naziva se *domena* ili *interval definiranosti funkcije*.

Vrijednosti mogućih rješenja koje poprima zavisna promjenjiva, naziva se *funkcijske vrijednosti* ili *range funkcije*

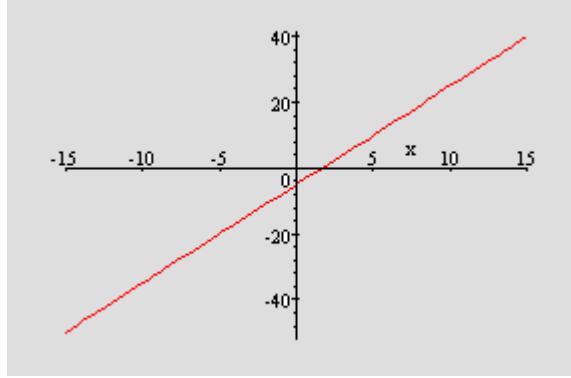
Funkcija se može prikazati u sljedećim oblicima:

1. Eksplisitnom obliku: $y = ax + b$
2. Implicitnom obliku: $y - ax - b = 0$
3. Tabelarno, nizom vrijednosti sa zavisnu i nezavisnu promjenjivu
4. Graficki, krivuljom u raznim koordinatnim sustavima.

Promatrajmo zadatu funkciju i odredimo tablicu vrijednosti: $f(x) = 3x - 5$

Za vrijednosti $-1, 0, 1, 2, 3$, funkcija poprima vrijednosti

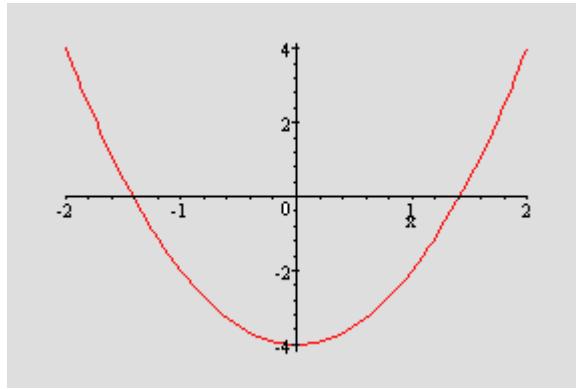
$f(x) = -8, -5, -2, 1, 4$; Graficki prikaz tabelarnih podataka je slijedeci



Promatrajmo zadatu funkciju i odredimo tablicu vrijednosti: $f(x) = 2x^2 - 4$

Za vrijednosti $-2, -1, 0, 1, 2$ funkcija poprima vrijednosti $f(x) = 4, -2, -4, -2, 4$

Graficki prikaz tabelarnih podataka je slijedeci:



Kaze se da je funkcija simetricna obzirom na neki pravac ili točku, kada svakom paru vrijednosti (x, y) odgovara par vrijednosti $(\pm x, \pm y)$; odnosno njihova kombinacija), ovisno o kojoj je vrsti simetrije rijec.

- a) Simetricnost obzirom na koordinatnu os y :
Poznata i kao **parna funkcija** ili parna relacija. Ako par (x, y) leži na grafu $f(x)$, tada par $(-x, y)$ isto tako leži na grafu $f(x)$, odnosno $f(-x) = f(x)$
- b) Simetricnost obzirom na koordinatnu os x :
Ako par (x, y) leži na grafu f , tada par $(x, -y)$ isto tako leži na grafu f . Ovdje treba napomenuti da se to odnosi na relacioni odnos a ne na funkcionalni odnos.
Relacioni odnos je odnos parova (x, y) . Domena relacije je skup svih prvih brojeva koji cine relaciju; područje cine skup svih rezultirajućih brojeva (drugih brojeva) u relaciji (vidi primjer u nastavku).
- c) Simetricnost obzirom na ishodiste $(0,0)$:
Poznata i kao **neparna funkcija** ili neparna relacija. Ako par (x, y) leži na grafu $f(x)$, tada par $(-x, -y)$ isto tako leži na grafu $f(x)$, odnosno $f(-x) = -f(x)$.
- d) Simetricnost obzirom na pravac $y = x$:
Ako par (x, y) leži na grafu $f(x)$, tada par (y, x) isto tako leži na grafu $f(x)$.
Odredjivanje grafickim putem, da li je neki relacioni odnos ujedno i funkcionalni odnos, vrsi se tzv. testom vertikalnog pravca:
Ako vertikalni pravac kroz bilo koju točku u koordinatnom sistemu, sječe zadanu krivulju (graf) samo u jednoj točki, tada je ta krivulja (graf) - funkcija.
U suprotnom, to je relacioni odnos.

- Zadana je funkcija $f(x) = 2x + 1$ Nadji vrijednosti za: $f(1), f(-1)$

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$$

2. Zadana je funkcija $Y(y) = \frac{y+1}{\sqrt{y-2}}$. Nadji područje definiranosti funkcije, domenu funkcije.
1. Funcija je definirana za sve vrijednosti $y > 2$
 2. Za vrijednosti $y < 2$ funkcija poprima negativnu vrijednost pod korjenom i pada u imaginarno područje.
3. Zadana je funkcija $H(h) = 2h + \sqrt{h} + 1$. Nadji područje definiranosti funkcije, domenu.
1. Funcija je definirana za sve vrijednosti $h \geq 0$
 2. Za vrijednosti $h < 0$ funkcija poprima negativnu vrijednost pod korjenom i pada u imaginarno područje.
4. Zadana je funkcija $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 2 \\ 5 & x \geq 2 \end{cases}$. Nadji vrijednosti funkcije za $f(-1)$ i $f(3)$.
1. $f(-1) = 2(-1) - 1 = -3$
 2. $f(3) = 5$ jer je $3 > 2 \Rightarrow f(x) = 5$ za sve vrijednosti x koje su jednake ili veće od 2
5. Duzina puta zaustavljanja automobila dana je funkcijom $d = 0.2v + 0.008v^2$, gdje v označava brzinu. Izracunaj $d = f(v)$, za vrijednosti $f(30)$, $f(2v)$ i $f(60)$.
- $$f(30) = 0.2 \cdot 30 + 0.008 \cdot 30^2 = 6 + 7.2 = 13.2$$
- $$f(2v) = 0.2 \cdot 2v + 0.008 \cdot (2v)^2 = 0.4v + 0.032v^2 = 0.4 \cdot 30 + 0.032 \cdot 30^2 = 0.8$$
- $$f(60) = 0.2 \cdot 60 + 0.008 \cdot (60)^2 = 12 + 28.8 = 40.8$$
6. Kugla za rusenje zgrada, visi na visini h iznad zemlje i funkcija je vremena t . Nakon što se kugla spusti, put-visina, je izrazen sa $h = 17.5 - 9.8t^2$. Kako je $h = f(t)$, nadji $f(1.2)$.
- $$h = 17.5 - 9.8t^2 = 17.5 - 9.8 \cdot 1.2^2 = 3.388$$
7. Dobit D nakon prodaje 40 komada proizvoda, jedinicne cijene 24 kune, jednaka je umnosku 40 i $c - 24$; gdje je $c - 24$ proizvodna cijena proizvoda. Izrazi funkciju za dobit.
- $$D = f(c) \Rightarrow f(c) = 40(c - 24)$$
8. Motorist putuje brzinom 40 km/h za dva sata i potom brzinom od 55 km/h za t sati.
- Izrazi predjeni put s kao funkciju vremena.
- $$s = 40 \cdot 2 + 55 \cdot t$$
9. Raketno gorivo izgara brzinom 2 kg/min prije ulaska u zemljinu atmosferu. Ako je tezina goriva prije ulaska bila 5500 kg, izrazi tezinu goriva w kao funkciju vremena t u minutama.
- $$w = f(t) = 5500 - 2t$$

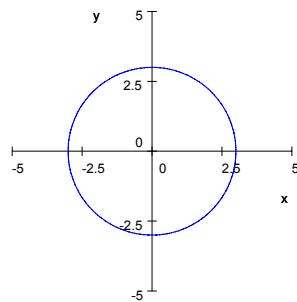
Mate Vijuga: Rjeseni zadaci iz matematike za srednju skolu

10. Definiraj da li je zadana funkcija simetricna obzirom na y -os: $x^2 + y^2 = 9$

$$(x, y) \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$$

$$(-x, y) \Rightarrow (-x)^2 + y^2 = x^2 + y^2 = 9$$

Zadana funkcija je simetricna obzirom na y -os.

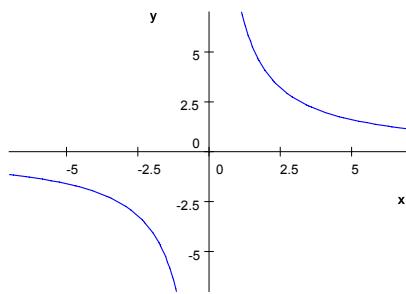


11. Odredi da li je zadana funkcija neparna: $xy = 8$

$$(x, y) \Rightarrow xy = 8$$

$$(-x, -y) \Rightarrow (-x)(-y) = xy = 8$$

Zadana funkcija je parna funkcija.

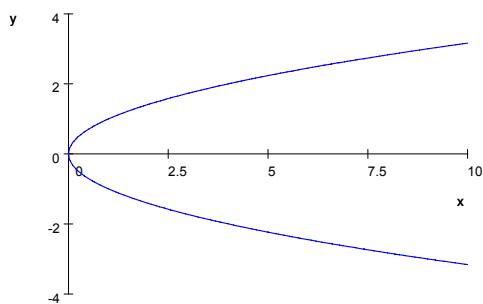


12. Definiraj da li je zadana relacija simetricna obzirom na x -os: $x = y^2$

$$(x, y) \Rightarrow x = y^2$$

$$(x, -y) \Rightarrow x = (-y)^2 = y^2$$

Zadana relacija je simetricna obzirom na x -os:



13. Odredi sve vrste simetrije za zadane funkcije: $y = 2x - 1$ $(x, y) \Rightarrow y = 2x - 1$

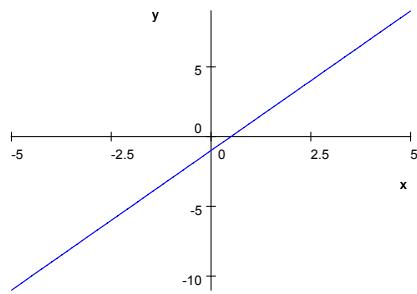
$$(-x, y) \Rightarrow y = -2x - 1 \quad \text{nije simetricna po } y\text{-osi}$$

$$(x, -y) \Rightarrow -y = 2x - 1 \quad \text{nije simetricna po } x\text{-osi}$$

$$(-x, -y) \Rightarrow -y = -2x - 1 \quad \text{nije simetricna po koordinatnom ishodistu.}$$

$$(y, x) \Rightarrow x = 2y - 1 \quad \text{nije simetricna po pravcu } y = x.$$

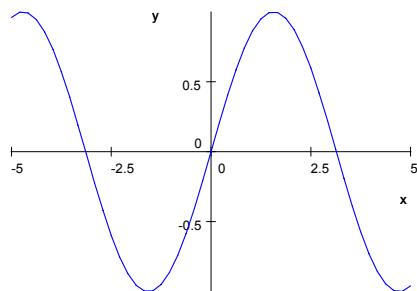
Zadani graf nema simetrije!



14. Odredi sve vrste simetrije za zadane funkcije: $y = \sin x$ $(x, y) \Rightarrow y = \sin x$

$$(-x, y) \Rightarrow y = \sin(-x) = \sin x \rightarrow \text{nije simetricna po } y\text{-osi}$$

$$(-x, -y) \Rightarrow -y = \sin(-x) = -\sin x \rightarrow \text{funkcija je parna, simetricna po ishodistu.}$$



4.2 Inverzne funkcije

Inverzna funkcija, zadane funkcije, je funkcija koja se dobije, ako se uloge argumenta i funkcije zamijene, drugim riječima, ako x i y zamijene uloge. Postupak određivanja inverzne funkcije je slijedeci:

1. Zamjeni $f(x)$ sa y
2. Upisi y na mjestu x i suprotno
3. Rjesi jednadžbu po y
4. Zamjeni y sa $f^{-1}(x)$

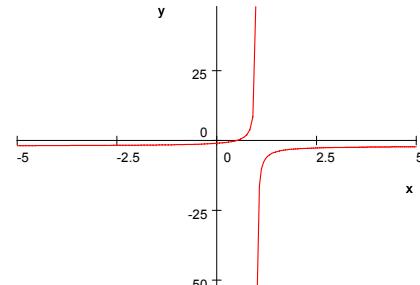
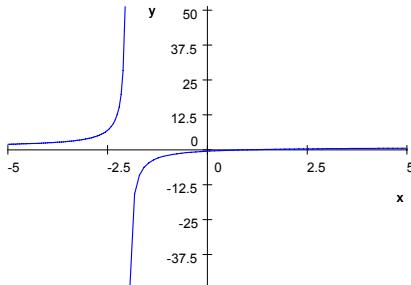
1. Izracunaj inverznu funkciju za: $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

$$1. \text{ Zamjeni } f(x) \text{ sa } y \Rightarrow x = \frac{y-1}{y+2}$$

2. Upisi y na mjestu x i suprotno

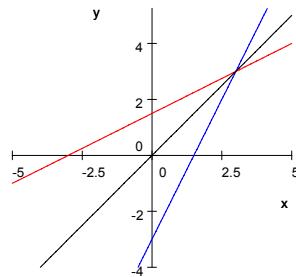
$$3. \text{ Rjesi jednadžbu po } y \Rightarrow x(y+2) = y-1 \Rightarrow y = \frac{2x-1}{1-x}$$

$$4. \text{ Zamjeni } y \text{ sa } f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{1-x}$$



2. Izracunaj inverznu funkciju za: $f(x) = 2x - 3$

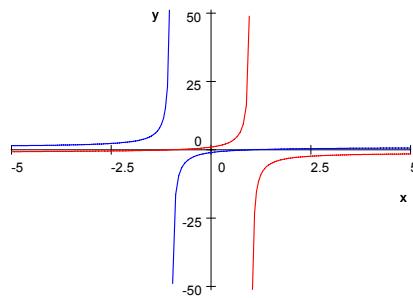
$$y = 2x - 3 \Rightarrow x = 2y - 3 \Rightarrow 2y = x + 3 \Rightarrow y = \frac{x+3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$$



4. Izracunaj inverznu funkciju za: $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$$y = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow x = \frac{y-1}{y+1} \Rightarrow xy + x = y - 1 \Rightarrow xy - y = -x - 1 \Rightarrow y(x-1) = -(x+1)$$

$$y = \frac{-(x+1)}{(x-1)} = \frac{x+1}{1-x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-x}$$



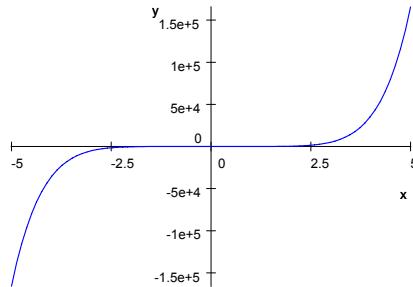
5. Kakvu simetriju ima funkcija $y = 2x^7 + 3x^5 - 2x$?

$$(x, y) \Rightarrow y = 2x^7 + 3x^5 - 2x$$

$$(-x, y) \Rightarrow y = 2(-x)^7 + 3(-x)^5 - 2(-x) = -2x^7 - 3x^5 + 2x \text{ nije simetricna po } y\text{-osi}$$

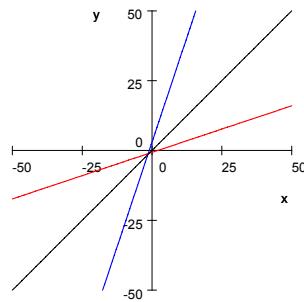
$$(x, -y) \Rightarrow -y = 2x^7 + 3x^5 - 2x \quad \text{nije simetricna po } x\text{-osi}$$

$$(-x, -y) \Rightarrow -y = -2x^7 - 3x^5 + 2x \Rightarrow y = 2x^7 + 3x^5 - 2x \quad \text{simetricna po ishodistu}$$



6. Izracunaj inverznu funkciju za: $f(x) = 3x + 3$

$$y = 3x + 3 \Rightarrow x = 3y + 3 \Rightarrow y = \frac{x-2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$$



7. Izracunaj $(h - k)(x)$ ako je $h(x) = x^2 + 1$ i $k(x) = 3x$

$$(h - k)(x) = h(x) - k(x) = x^2 + 1 - 3x = x^2 - 3x + 1$$

8. Rijesи $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $h \neq 0$, za $f(x) = x^2 - 3$

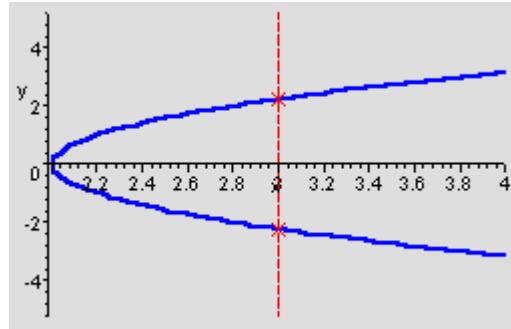
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{[(x+h)^2 - 3] - [x^2 - 3]}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3 - x^2 + 3}{h} = 2x + h$$

9. Odredi da li je zadani graf funkcijski ili relacioni odnos, koristeci test vertikalnog pravca.

Povucimo vertikalni pravac tako da sjece krivulju.

Vidimo da pravac ima dva presjecista sa krivuljom.

Krivulja je graf relacionog odnosa a ne funkcionalnog odnosa



10. Za funkcijski odnos $y = \sin x$, pravac sijece krivulju samo u jednoj tocki.

