Funkcije
Materijali za vježbe iz Matematike 1

Ksenija Smoljak i Kristina Krulić

2008/09

Definicija funkcije

Funkcija iz skupa X u skup Y je svako pravilo f po kojemu se elementu $x \in X$ pridružuje jedinstveni element $y \in Y$.
Kraće zapisujemo

$$f : X \to Y \text{ ili } y = f(x).$$

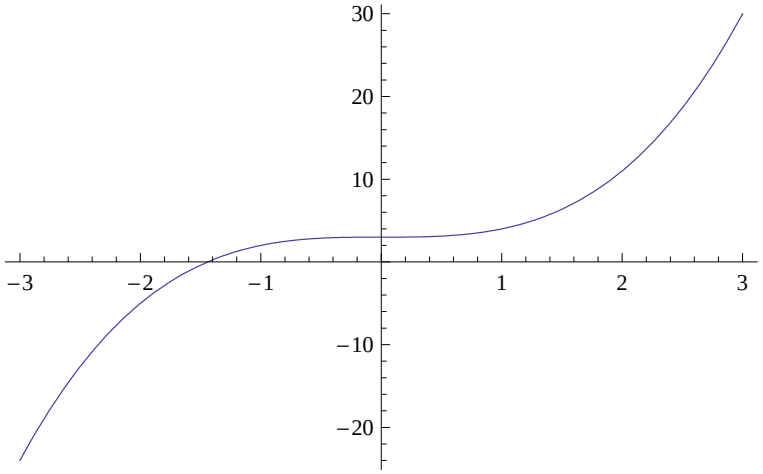
Skup X nazivamo područje definicije (domena) funkcije f, oznaka D_f. Skup Y je kodomena funkcije f, a $f(X) = R_f$ je skup vrijednosti (podskup kodomene).
Graf funkcije je skup G_f koji čine točke $(x, f(x))$ za $x \in D_f$,

$$G_f = \{(x, y) : y = f(x),\ x \in D_f\}.$$

Zadavanje funkcija

Funkcije možemo zadati:

- analitički (zakonom pridruživanja), npr. $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$
- implicitno, npr. $x^2 + y^2 = 1$
- grafički



- tablično

Svojstva funkcija

Pretpostavimo da interval I leži u domeni funkcije f. Kažemo da funkcija f

- strogo raste na intervalu I ako za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- raste na intervalu I ako za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- strogo pada na intervalu I ako za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- pada na intervalu I ako za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Svojstva funkcija

Funkcija je konstantna na intervalu I ako za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi $f(x_1) = f(x_2)$.
Padajuće ili rastuće funkcije zovemo monotonim funkcijama.

Funkcija f je ograničena ako postoje brojevi m i M za koje vrijedi

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in D_f.$$

Funkcija f je parna ako i samo ako vrijedi

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in D_f.$$

Graf parne funkcije je simetričan obzirom na y-os.

Svojstva funkcija

Funkcija f je neparna ako i samo ako vrijedi

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in D_f.$$

Graf neparne funkcije je simetričan s obzirom na ishodište.

Za funkciju f kažemo da je periodična ako postoji broj $T > 0$ takav da za sve $x \in D_f$ vrijedi

$$f(x) = f(x + T).$$

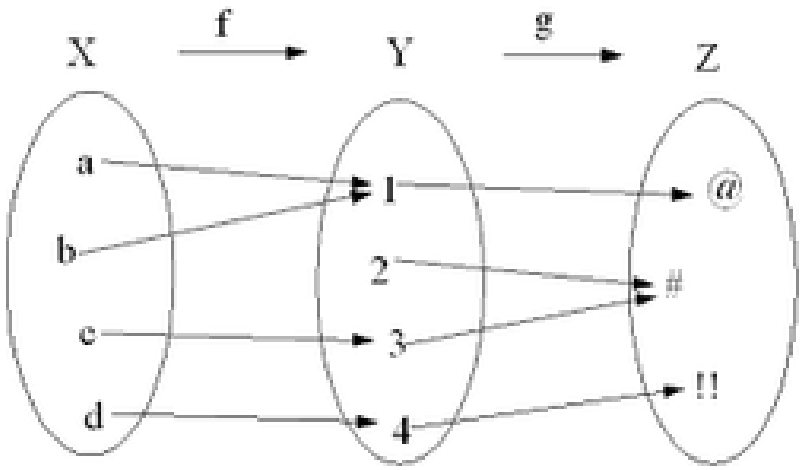
Broj T naziva se period funkcije f. Najmanji pozitivni broj T za koji vrijedi gornja relacija naziva se temeljni period.

Kompozicija funkcija

Kompozicija funkcija $f : X \to Y$ i $g : W \to Z$, gdje je $R_f \subset W$, je funkcija $h : X \to Z$ definirana s $h(x) = g(f(x))$. Ponekad pišemo: $h = g \circ f$.

Vrijedi:

1. Kompozicija funkcija nije komutativna operacija, $f \circ g \neq g \circ f$.
2. Kompozicija funkcija je asocijativna operacija, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.



Inverzna funkcija

Funkcija $f : X \to Y$ je:

- injekcija ako vrijedi: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, za sve $x_1, x_2 \in D_f$
- surjekcija ako je $R_f = Y$, odnosno za svaki $y \in Y$ postoji $x \in X$ takav da je $f(x) = y$.
- bijekcija ako je injekcija i surjekcija

Primjer bijekcije je identiteta $i_x : X \to X$ definirana sa $i_x(x) = x$, za svaki $x \in X$.
Neka je $f : X \to Y$ bijekcija. Tada postoji funkcija $g : Y \to X$ takva da vrijedi: $g \circ f = i_x$ i $f \circ g = i_y$, gdje su i_x, i_y identitete.
Funkcija g je jedinstvena i zovemo je inverzna funkcija funkcije f, oznaka f^{-1}.

Računanje inverzne funkcije

Inverznu funkciju funkcije f nalazimo sljedećim postupkom:

1. Jednadžbu $y = f(x)$ riješimo po nepoznanici x.
2. Ako postoji jedinstveno rješenje te jednadžbe, onda funkcija ima inverznu funkciju, $x = f^{-1}(y)$.
3. Zamijenimo imena nepoznanicama x i y da dobijemo zapis $y = f^{-1}(x)$.

Graf inverzne funkcije

Označimo sa G_f graf funkcije f, a sa $G_{f^{-1}}$ graf funkcije f^{-1}. Ako vrijedi $y = f(x)$, onda točka $(x, y) \in G_f$, a točka $(y, x) \in G_{f^{-1}}$. Zato vrijedi:
Graf funkcije f i njoj inverzne funkcije f^{-1} simetrični su obzirom na pravac $y = x$.

Elementarne funkcije

Osnovne elementarne funkcije:

- Polinomi i racionalne funkcije
- Eksponencijalne i logaritamske funkcije
- Opća potencija
- Trigonometrijske i arkus (ciklometrijske) fukcije

Elemetarna funkcija je svaka funkcija koja se može dobiti primjenom konačnog broja operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i komponiranja osnovnih elemenarnih funkcija.

Polinomi i racionalne funkcije

Polinomi

Kanonski oblik polinoma

Polinom stupnja n je funkcija $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ realni brojevi, $a_n \neq 0$.
Brojeve $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazivamo koeficijentima polinoma.
Koeficijent a_n nazivamo vodeći koeficijent, koeficijent a_0 slobodni koeficijent.
Stupanj polinoma je najveća potencija nepoznanice x.

Primjer

$$f(x) = 4x - 2 \text{ polinom stupnja } 1$$
$$g(x) = 2x^2 + x - 1 \text{ polinom stupnja } 2$$
$$h(x) = x^5 - 2x^3 + 1 \text{ polinom stupnja } 5.$$

Operacije s polinomima

Jednakost polinoma

Polinomi P i Q su jednaki ako za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $P(x) = Q(x)$. Pišemo $P = Q$.

Kriterij jednakosti polinoma

Polinomi P i Q su jednaki ako i samo ako su istog stupnja i ako im se koeficijenti u kanonskom prikazu podudaraju.

Operacije sa polinomima:

- polinomi se zbrajaju (oduzimaju) tako da se zbroje (oduzmu) istovjetni monomi
- polinomi se množe tako da prvi polinom množimo monomima drugog polinoma i zbrajamo pribrojnike

Operacije s polinomima

Primjer

Neka je $P(x) = 2x^2 + 3x + 7$, a $Q(x) = 2x - 1$. Tada vrijedi:

$$
\begin{aligned}
(P+Q)(x) &= P(x) + Q(x) = 2x^2 + 5x + 6 \\
(P-Q)(x) &= P(x) - Q(x) = 2x^2 + x + 8 \\
(P \cdot Q)(x) &= P(x) \cdot Q(x) = (2x^2 + 3x + 7) \cdot (2x - 1) \\
&= (4x^3 + 6x^2 + 14x) - (2x^2 + 3x + 7) \\
&= 4x^3 + 4x^2 + 11x - 7 \\
(P \circ Q)(x) &= P(Q(x)) = P(2x - 1) \\
&= 2(2x-1)^2 + 3(2x-1) + 7 = 8x^2 - 2x + 6 \\
(Q \circ P)(x) &= Q(P(x)) = Q(2x^2 + 3x + 7) \\
&= 2(2x^2 + 3x + 7) - 1 = 4x^2 + 6x + 13
\end{aligned}
$$

Operacije s polinomima

Racionalna funcija

Ako su $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ i $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ dva zadana polinoma, onda je njihov kvocijent funkcija f definirana formulom

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Funkciju f nazivamo racionalna funkcija. Ona je definirana u svim $x \in \mathbb{R}$ takvim da je $Q(x) \neq 0$.

Djeljivost polinoma

Polinom P djeljiv je polinomom Q ako postoji polinom P_1 takav da vrijedi $P = P_1 \cdot Q$, odnosno za svaki x vrijedi $P(x) = P_1(x) \cdot Q(x)$.

Dijeljenje polinoma

Ako je $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ racionalna funkcija takva da je stupanj polinoma P manji ili jednak od stupnja polinoma Q, onda f nazivamo prava racionalna funkcija.

Kvocijent dvaju polinoma P i Q možemo napisati u obliku

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \text{ ili } P(x) = P_1(x) \cdot Q(x) + R(x).$$

Ako je $stP = n \geq m = stQ$, onda je polinom P_1 stupnja $n - m$. Polinom R je ostatak dijeljenja i to je polinom stupnja manjeg od m.

Dijeljenje polinoma provodimo na način analogan dijeljenju brojeva.

Dijeljenje polinoma

Primjer

Neka je $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 + 1$ i $Q(x) = x^2 + 2$. Tada:

$$
\begin{array}{l}
(2x^4 - 3x^3 - x^2 \qquad\qquad + 1) : (x^2 + 2) = 2x^2 - 3x - 5 \\
\underline{2x^4 \qquad\quad + 4x^2} \\
\qquad - 3x^3 - 5x^2 \qquad + 1 \\
\underline{\quad -3x^3 \qquad\qquad - 6x} \\
\qquad\qquad - 5x^2 + 6x + 1 \\
\underline{\qquad\quad -5x^2 \qquad\quad - 10} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 6x + 11
\end{array}
$$

$$\frac{2x^4 - 3x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 2} = 2x^2 - 3x - 5 + \frac{6x + 11}{x^2 + 2}.$$

Nultočke polinoma

Broj x_1 za koji vrijedi $P(x_1) = 0$ naziva se nultočka polinoma P.

Osnovni teorem algebre:

Svaki polinom n-tog stupnja ima točno n nultočaka $x_1, x_2, ..., x_n$, računajući i kratnost i može se napisati kao:

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Za polinome sa realnim koeficijentima vrijedi:

Ako je $z = a + ib$ nultočka polinoma, onda je i $\bar{z} = a - ib$ nultočka.

Zadaci

Zadatak

Podijelite polinom $P(x) = x^4 + 3x - 2$ polinomom $Q(x) = x^2 - 2x + 3$.

Zadatak

Odredite nultočke polinoma:

- $P(x) = 2x + 1$
- $P(x) = x^2 + x + 1$
- $P(x) = x^2 - 3x + 2$
- $P(x) = x^3 - 2x^2 + x$
- $P(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

Potencije

Funkcija $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$ je specijalan slučaj polinoma. Definirana je za svaki $x \in \mathbb{R}$ rekurzivno:

$$x^0 = 1$$

$$x^1 = x$$

$$x^{n+1} = x^n \cdot x$$

i vrijedi

- $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
- $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$
- $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$
- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Potencije

Zadatak

Nacrtajte grafove funkcija

(a) $f(x) = x$

(b) $f(x) = x^2$

(c) $f(x) = x^3$

i navedite bitna svojstva tih funkcija.
Odredite inverzne funkcije i nacrtajte njihove grafove.

Sva svojstva funkcije $f(x) = x^2$ vrijede i za parne potencije, odnosno funkcije $f(x) = x^{2k}$ za $k \in \mathbb{N}$.

OPREZ! Funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ je definirana na $\mathbb{R}_0^+$, odnosno $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$. To svojstvo vrijedi i za sve parne korijene.

Potencije

Svojstva funkcije $f(x) = x^3$ vrijede i za neparne potencije, odnosno $f(x) = x^{2k-1}$ za $k \in \mathbb{N}$.

OPREZ! Funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x}$ je definirana na $\mathbb{R}$, odnosno $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. To svojstvo vrijedi i za sve neparne korijene.

Zadatak

Zadane su funkcije f i g:

(a) $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$

(b) $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$

(c) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$

(d) $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$

(e) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, $g(x) = -x + 1$.

Odredite domenu, nultočke i predznak funkcija $f, g, f \circ f, f \circ g, g \circ f$ te $g \circ g$ te skicirajte njihove grafove.

Neformalna definicija limesa funkcije

Ako se vrijednost funkcije $f(x)$ približava vrijednosti L kada se nezavisna varijabla x približava točki a, onda kažemo da $f(x)$ teži prema L kada x teži prema a, odnosno $f(x) \to L$ kada $x \to a$.

Broj L je limes ili granična vrijednost funkcije f kada $x \to a$, odnosno

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Osnovna svojstva limesa

Neka funkcije f i g imaju limese kada $x \to a$. Tada vrijedi:

$$\lim_{x \to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \text{ ako je } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0.$$

Limes funkcije slijeva i zdesna

U postupku računanja limesa funkcije u točki a promatramo bilo koji niz x_n koji teži k a.

Ako pritom uzimamo samo one nizove za koje je $x_n < a$, onda kažemo da varijabla x teži k a slijeva i pišemo $x \to a^-$.

Ako uzimamo samo one nizove za koje je $x_n > a$, onda kažemo da varijabla x teži k a zdesna i pišemo $x \to a^+$.

Ti limesi se ne moraju podudarati.

U zadacima koji slijede važan je i limes:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

odnosno za svaki prirodan broj n vrijedi

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Limes racionalnih funkcija

Limes racionalnih funkcija

Ako se brojnik i nazivnik racionalne funkcije poništavaju u točki a, onda se limes te funkcije u točki a računa tako da se i brojnik i nazivnik podijele s $x - a$.

Primjer

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-x-6} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to -2} \frac{x+1}{x-3} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^3+x^2-2}{2x^3-3x+2} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}}{2-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}} = \frac{1}{2}$$

Asimptote

Asimptota funkcije je pravac sa svojstvom da udaljenost između točke na grafu funkcije i tog pravca teži k nuli kada točka na grafu teži u beskonačnost.
Funkcija može imati vertikalne, horizontalne i kose asimptote.
Pravac $x = x_0$ je

- vertikalna asimptota funkcije f u točki x_0 s lijeve strane ako je

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

- vertikalna asimptota funkcije f u točki x_0 s desne strane ako je

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty.$$

Vertikalne asimptote se mogu nalaziti u točkama prekida funkcije ili u otvorenim rubovima područja definicije.

Asimptote

Pravac $y = y_0$ je

- horizontalna asimptota funkcije f u lijevoj strani ako je $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$
- horizontalna asimptota funkcije f u desnoj strani ako je $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0$.

Pravac $y = kx + l$ nazivamo kosa asimptota funkcije f u lijevoj strani ako:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k,\ k \neq 0, \infty, -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = l,\ l \neq \infty, -\infty$$

Kosu asimptotu funkcije f u desnoj strani definiramo analogno.

Racionalna funkcija

Ponovimo:

Racionalna funcija

Ako su $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ i $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ dva zadana polinoma, onda je njihov kvocijent funkcija f definirana formulom

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Funkciju f nazivamo racionalna funkcija.

Ako je $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ racionalna funkcija takva da je stupanj polinoma P manji ili jednak od stupnja polinoma Q, onda f nazivamo prava racionalna funkcija.

Racionalna funkcija

Svojstva racionalne funkcije:

- Domena funkcije je $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$.
- Nul-točke: $f(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$ i $Q(x) \neq 0$.
- Predznak funkcije:
  $f(x) > 0 \Leftrightarrow (P(x) > 0 \text{ i } Q(x) > 0) \text{ ili } (P(x) < 0 \text{ i } Q(x) < 0)$

  $f(x) < 0 \Leftrightarrow (P(x) < 0 \text{ i } Q(x) > 0) \text{ ili } (P(x) > 0 \text{ i } Q(x) < 0)$

Nultočke polinoma $Q(x)$ (točke u kojima f nije definirana) nazivamo polovima racionalne funkcije. U tim točkama funkcija ima vertikalne asimptote, ako one nisu istovremeno i nultočke.

Zadaci

Zadatak

Odredite domenu, nultočke, polove i predznak funkcije te skicirajte njezin graf ako je

(a) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-2x}$

(b) $f(x) = \frac{x-3}{x^3-x}$.

Zadatak

Odredite domenu, nultočke, polove i predznak funkcije te skicirajte njezin graf ako je

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Sva svojstva funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ vrijede i za funkcije $f(x) = \frac{1}{x^{2k-1}}$ za $k \in \mathbb{N}$, dok funkcije $f(x) = \frac{1}{x^{2k}}$ za $k \in \mathbb{N}$ imaju ista svojstva kao i funkcija $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Bilinearna funkcija

Funkciju oblika $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, a \neq 0,\ c \neq 0$ nazivamo bilinearna funkcija jer su $ax + b$ i $cx + d$ polinomi 1. stupnja, odnosno linearne funkcije.
Domena bilinearne funkcije:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,:\, cx + d \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}.$$

Svaka bilinearna funkcija se može prikazati kao

$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx + d)},\ x \neq -\frac{d}{c}$$

pa graf funkcije f možemo dobiti linearnim transformacijama grafa funkcije $y = \frac{1}{x}$.

Zadaci

Zadatak

Ako je $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ i $g(x) = \sqrt{x}$, onda:

(a) odredite domenu funkcija $f \circ g$ i $g \circ f$ te ponašenje funkcija u rubnim točkama domene

(b) odredite $f^{-1}(x)$, njezinu domenu i skicirajte njezin graf

(c) skicirajte graf funkcije $g \circ f$.

Zadatak

Za funkciju $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

(a) odredite domenu, nultočke i predznak funkcije

(b) odredite polove, vertikalne i horizontalne asimptote

(c) skicirajte graf funkcije.

Eksponencijalne i logaritamske funkcije

Svojstva potencija

Prisjetimo se definicije i osnovnih svojstava potencija:

Za pozitivne brojeve a i b te x, $y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$

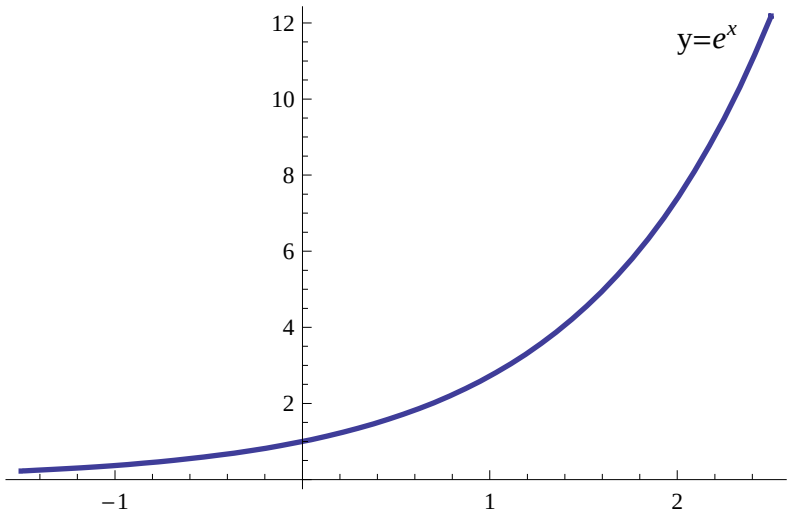
Potenciranje sa negativnim eksponentom: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
Potenciranje nulom: za svaki $a > 0$ vrijedi $a^0 = 1$.
Potenciranje sa racionalnim eksponentom: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Eksponencijalna funkcija

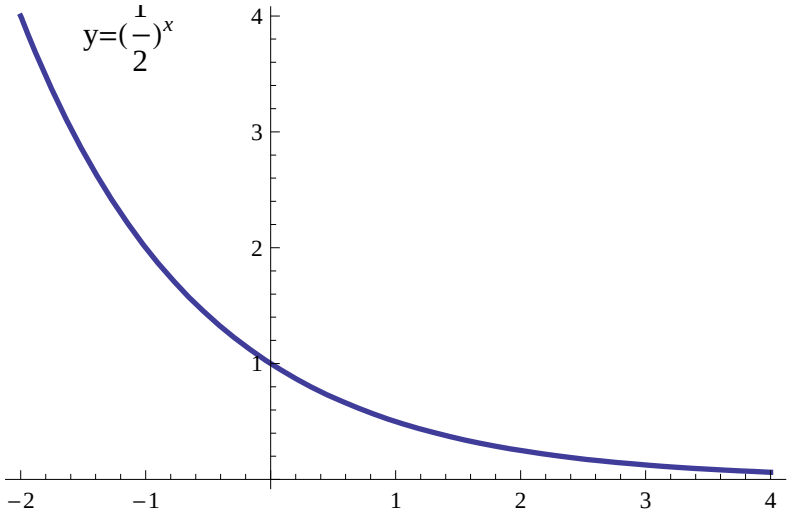
Neka je $a > 0$, $a \neq 1$ realan broj. Funkcija $f(x) = a^x$ definirana za svaki realni broj x naziva se eksponencijalna funkcija baze a.

Graf eksponencijalne funkcije

$a > 1$



$0 < a < 1$



$a^0 = 1$ pa svi grafovi prolaze točkom $(0, 1)$.

Svojstva eksponencijalne funkcije

Napomena: Grafovi eksponencijalnih funkcija s bazama koje su recipročni brojevi simetrični su s obzirom na $y-$os.

Injektivnost eksponencijalne funkcije

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Monotonost potencije:

Ako je $a > 1$, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} < a^{x_2}$.
(strogo rastuća funkcija)

Ako je $0 < a < 1$, onda $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} > a^{x_2}$.
(strogo padajuća funkcija)

Logaritamska funkcija

Funkcija $f(x) = a^x$ je bijekcija pa postoji $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ koju zovemo logaritamska funkcija i pišemo $f^{-1}(x) = \log_a(x)$.

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \Leftrightarrow a^{\log_a x} = x,\ x > 0$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \Leftrightarrow \log_a a^x = x,\ x \in \mathbb{R}$$

Za rješavanje jednadžbi važno je znati:

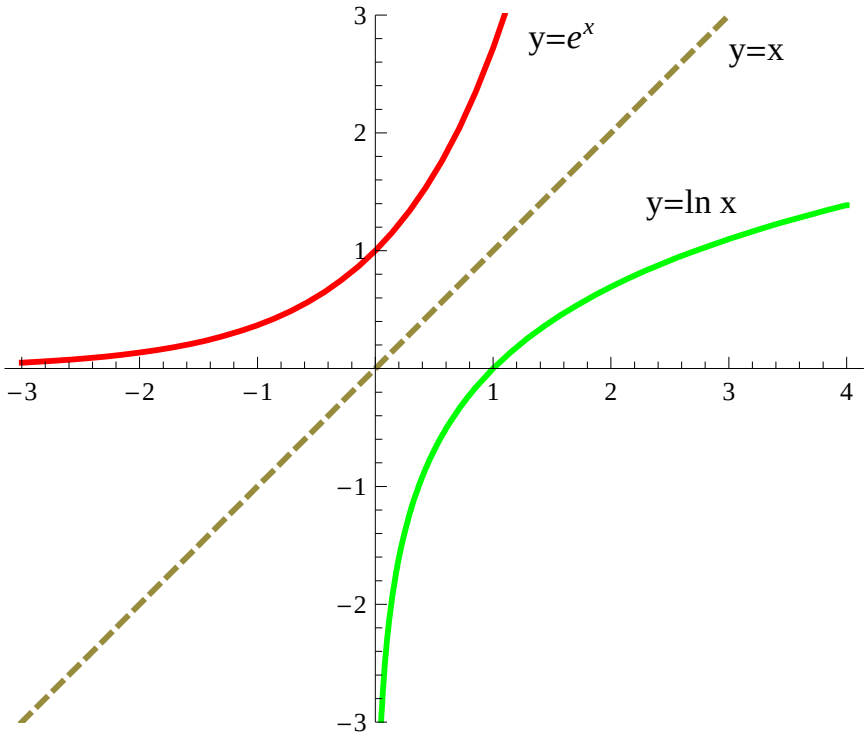
$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

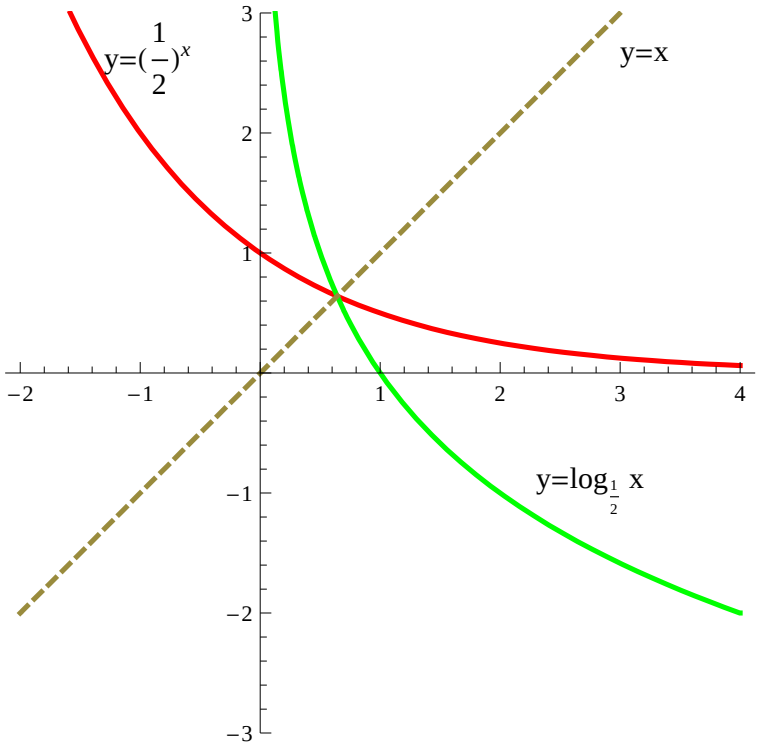
Graf logaritamske funkcije

Logaritamska funkcija inverzna je eksponencijalnoj funkciji, pa su njihovi grafovi simetrični obzirom na pravac $y = x$.

$a > 1$

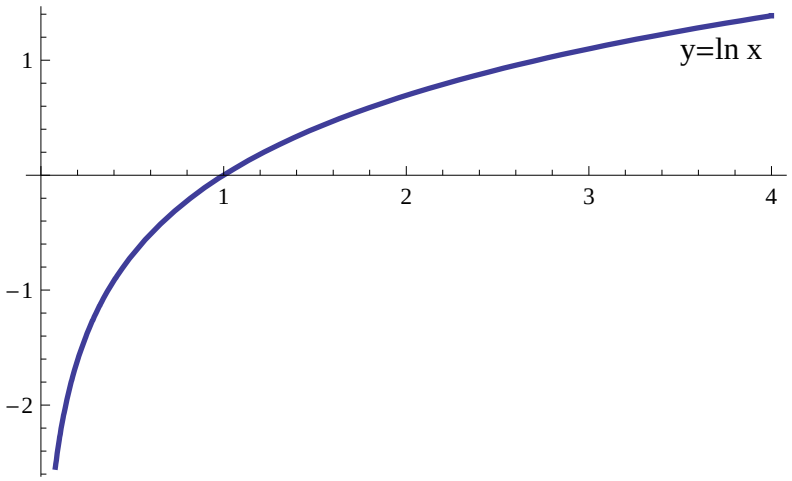


$0 < a < 1$

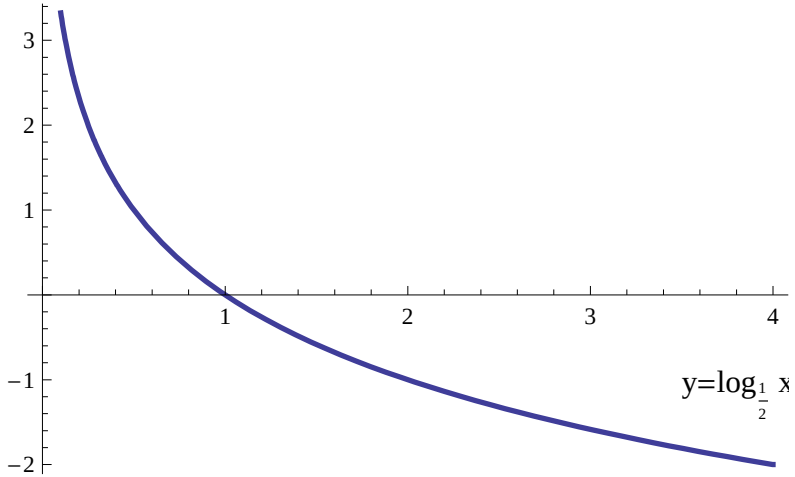


Graf i svojstva logaritamske funkcije

$a > 1$



$0 < a < 1$



Svojstva logaritamske funkcije:

1. $D = \mathbb{R}^+$ (domena logaritamske funkcije)
2. $R = \mathbb{R}$ (kodomena logaritamske funkcije)
3. $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad x_1, x_2 > 0$
4. $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2, \quad x_1, x_2 > 0$

Svojstva logaritamske funkcije

5. za svaki $r \in \mathbb{R}$ vrijedi $\log_a x^r = r \log_a x, \quad x > 0$
6. $$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ specijalno: } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$
7. za svaki broj $a > 0$, $a \neq 0$ vrijedi $\log_a 1 = 0$
8. ako je $a > 1$, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $\log_a x_1 < \log_a x_2$ (strogo rastuća funkcija)
9. ako je $0 < a < 1$, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $\log_a x_1 > \log_a x_2$ (strogo padajuća funkcija)
10. ako je $\log_a x_1 = \log_a x_2$, onda vrijedi $x_1 = x_2$ (injektivnost)

Napomene i primjeri

Dekadski logaritam

Logaritam po bazi 10 označavamo simbolom log i nazivamo dekadski logaritam.

Prirodni logaritam

Logaritam po bazi e označavamo simbolom ln i nazivamo prirodni logaritam.

Opća potencija: $x^r = e^{\ln x^r} = e^{r \ln x}$, $x > 0$, $r \in \mathbb{R}$

Primjer

$\sqrt[5]{16} = 16^{\frac{1}{5}} = 16^{0.2} = 10^{0.2 \log 16} = 10^{0.2408} = 1.714$

Zadaci

Zadatak

Izračunajte: $2^{\frac{1}{2}\log_2 8}$, $\log_3 81$, $e^{\frac{1}{2}\ln 2}$, $\ln e^e$, $\log_2 \frac{\sqrt[5]{4}}{2}$, $\log_2 0.125$.

Zadatak

Dokažite da vrijedi $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$, a zatim izračunajte $\log_8 \sqrt{2}$, $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$, $\log_{\sqrt{3}} 81$.

Zadatak

Riješite sljedeće jednadžbe i nejednadžbe:

(a) $3^{x+1} = 9$, $3^{x+1} = 10$, $3^{x+1} > 1$, $e^{-x} \leq 2$

(b) $2^{x^2-4} = 1$, $2^{x^2-4} < 1$, $2^{x^2-4} > 1$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-1} < 3$

Zadaci

Zadatak

Riješite sljedeće jednadžbe i nejednadžbe:

(a) $\ln(|x|-1)=0$, $\ln(|x|-1)>0$, $\ln(|x|-1)<0$

(b) $\log_{\frac{1}{2}}(1-x)=0$, $\log_{\frac{1}{2}}(1-x)>0$, $\log_{\frac{1}{2}}(1-x)<0$

Zadatak

Grafički riješite sljedeće jednadžbe i nejednadžbe:

(a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}=x$

(b) $\ln(x+2)=-x-1$

(c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}<x$

(d) $\ln(x+2)\geq -x-1$

Zadaci

Zadatak

Zadanu funkciju f prikažite kao kompoziciju osnovnih elementarnih funkcija, a zatim odredite domenu i ponašanje u rubnim točkama domene, ako je:

(a) $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$

(b) $f(x) = e^{\sqrt{2x-1}}$

(c) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{2^x-1}{2^x+1}}$

(d) $f(x) = \ln(x^2+2x)$

Zadatak

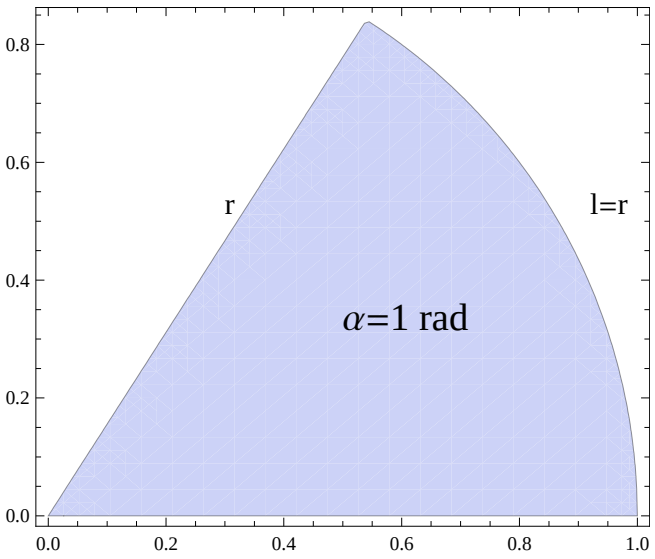
Zadana je funkcija (a) $\ln(x-1)$ (b) $\sqrt{\frac{1-2^x}{1+2^x}}$.

Odredite domenu funkcije, f^{-1} te njezinu domenu.

Trigonometrijske i arkus funkcije

Određivanje mjere kuta

Mjeru kuta izražavamo u stupnjevima ili radijanima.



Definicija radijana:

1 radijan je veličina kuta kojem je duljina pridruženog luka, l, jednaka duljini polumjera kružnice, r.

Veza stupnjeva i radijana

Pretvorba stupnjeva u radijane:

$$\alpha(rad) = \frac{\alpha^\circ}{180} \cdot \pi$$

Pretvorba radijana u stupnjeve:

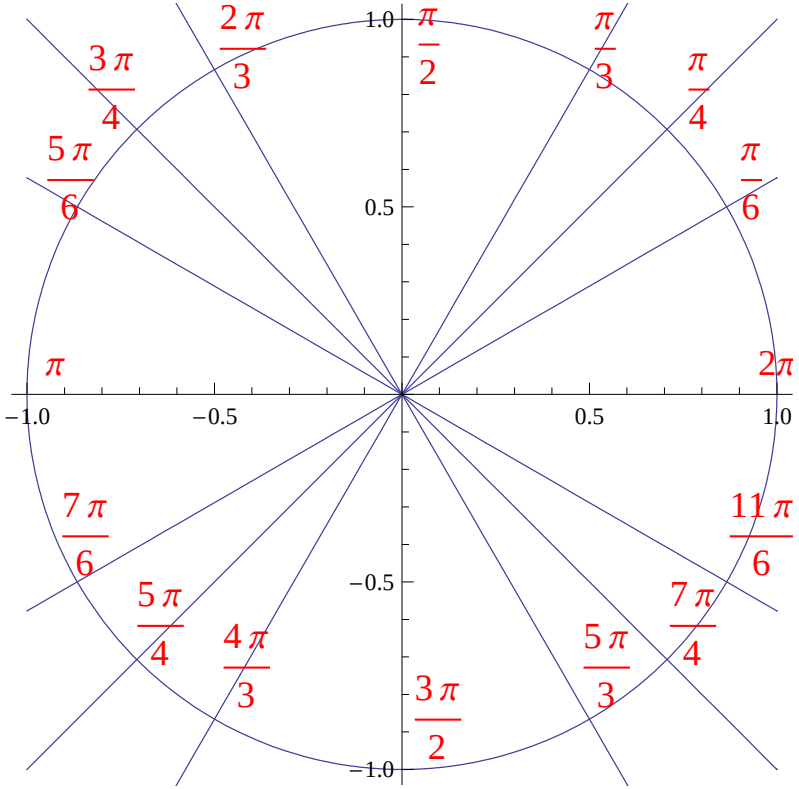
$$\alpha^\circ = \frac{\alpha(rad)}{\pi} \cdot 180^\circ$$

Stupnjevi	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
Radijani	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Uočimo: $1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 45''$.

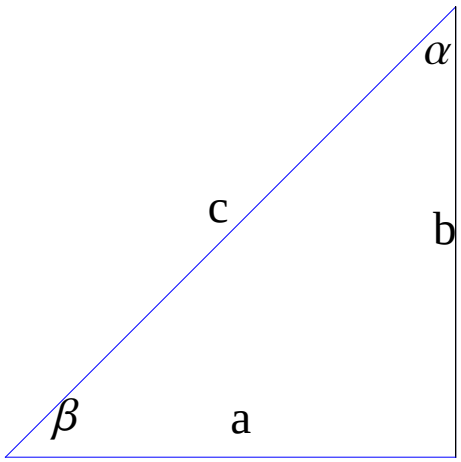
Brojevna kružnica

Brojevna kružnica je kružnica čije je središte u ishodištu, a polumjer je jednak 1.
Svakoj točki T brojevne kružnice odgovara točno jedan α iz intervala $[0, 2\pi)$ na brojevnom pravcu.



Trigonometrijske funkcije

Trigonometrijske funkcije šiljastog kuta definiramo kao omjer stranica pravokutnog trokuta.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{hipotenuza}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{priležeća kateta}}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{nasuprotna kateta}}$$

Trigonometrijske funkcije

Vrijednost tih funkcija možemo definirati za bilo koji realni broj.

Sinus i kosinus po volji odabranog kuta:

kosinus je apscisa, a sinus ordinata točke na trigonometrijskoj kružnici.

Temeljni identitet:

Za svaki realni broj t vrijedi

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Vrijedi:

$$tg\ t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad ctg\ t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{1}{tgt}$$

Svojstva trigonometrijskih funkcija

Funkcije sinus i kosinus imaju svojstva:

1. $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, odnosno $D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$ (funkcije su omeđene)
2. $\sin(-x) = -\sin x$ (neparna funkcija)
   $\cos(-x) = \cos x$ (parna funkcija)
3. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $k \in \mathbb{Z}$
   funkcije su periodične sa temeljnim periodom 2π
4. nultočke
   $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \quad \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
5. Adicione formule

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Svojstva trigonometrijskih funkcija

Trigonometrijske funkcije dvostrukog kuta:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Zadatak

Dokažite da za svaki realan broj vrijedi (formule redukcije za sinus i kosinus):

$$\sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - x) = \cos x \qquad \sin(\tfrac{\pi}{2} + x) = \cos x$$

$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - x) = \sin x \qquad \cos(\tfrac{\pi}{2} + x) = -\sin x$$

Svojstva trigonometrijskih funkcija

Funkcije tangens i kotangens imaju svojstva:

1. $\mathrm{tg} : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$,
   $\mathrm{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, odnosno
   $D(\mathrm{tg}) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$,
   $D(\mathrm{ctg}) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
2. pravci $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ su vertikalne asimptote funkcije tg, a pravci $x = k\pi$ funkcije ctg
3. $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x$ (neparne funkcije)
4. $\mathrm{tg}(x + k\pi) = \mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}(x + k\pi) = \mathrm{ctg}\, x$, $k \in \mathbb{Z}$
   funkcije su periodične sa temeljnim periodom π
5. nultočke funkcije tg su nultočke sinusa, a nultočke funkcije ctg su nultočke kosinusa
   $\mathrm{tg}\, x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$,
   $\mathrm{ctg}\, x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Primjeri

Primjer

Vrijednosti trigonometrijskih funkcija za $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$:

α	$\frac{\pi}{6}$ ili 30°	$\frac{\pi}{4}$ ili 45°	$\frac{\pi}{3}$ ili 60°	$\frac{\pi}{2}$ ili 90°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Oprez:

Pri korištenju kalkulatora treba paziti na natpis na zaslonu. Ako piše DEG, onda upisujemo vrijednost kuta u stupnjevima, a ako piše RAD, onda upisujemo vrijednost kuta u radijanima.

Primjeri

Primjer

Vrijednost trigonometrijskih funkcija za kut $\alpha = 123^\circ$:

$$\alpha = 123^\circ \qquad \alpha = 123^\circ = \frac{41\pi}{60}$$

$$\sin 123^\circ = 0.8386 \qquad \sin \frac{41\pi}{60} = 0.8386$$

$$\cos 123^\circ = -0.5446 \qquad \cos \frac{41\pi}{60} = -0.5446$$

$$\operatorname{tg} 123^\circ = -1.5398 \qquad \operatorname{tg} \frac{41\pi}{60} = -1.5398$$

$$\operatorname{ctg} 123^\circ = -0.6494 \qquad \operatorname{ctg} \frac{41\pi}{60} = -0.5446$$

Vrijednost trigonometrijskih funkcija za kut $x = 3.48$: (na zaslonu: RAD ili R)
$\cos 3.48 = 0.999$, $\sin 3.48 = -0.331$, $\operatorname{tg} 3.48 = 0.352$.
Kut $x = 3.48$ izražen u stupnjevima iznosi $199^\circ 22' 21''$ (na zaslonu DEG ili D), a funkcijske vrijednosti su iste.

Primjeri

Primjer

Izračunajte
$\sin 15^\circ$, $\sin 15$, $\cos 23^\circ$, $\cos 23$, $\operatorname{tg} 15^\circ$, $\operatorname{tg} 15$, $\operatorname{ctg} 72^\circ$, $\operatorname{ctg} 72$.

$$\sin 15^\circ = 0.2588 \qquad \sin 15 = 0.6502$$

$$\cos 23^\circ = 0.9205 \qquad \cos 23 = -0.5326$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = 0.2697 \qquad \operatorname{tg} 15 = -0.8559$$

$$\operatorname{ctg} 72^\circ = 0.3249 \qquad \operatorname{ctg} 72 = -3.8107$$

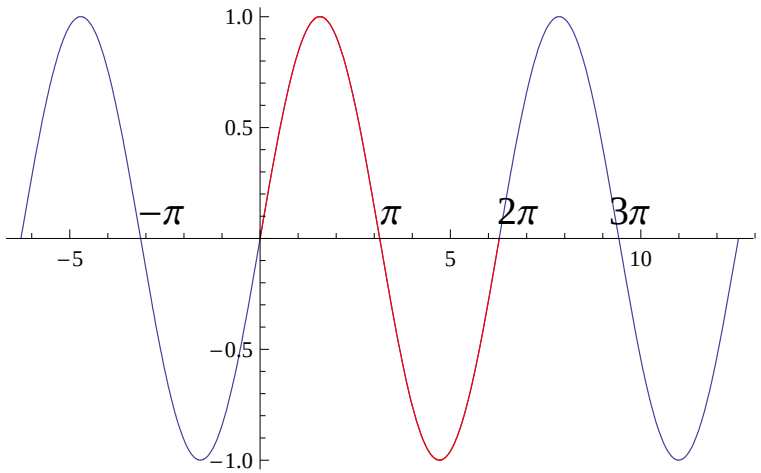
Zadatak

Izračunajte:

$$\frac{\cos^2(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{\operatorname{tg}^2(\alpha-2\pi)} + \frac{\cos^2(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}^2(\alpha-\frac{3\pi}{2})}$$

Grafovi trigonometrijskih funkcija

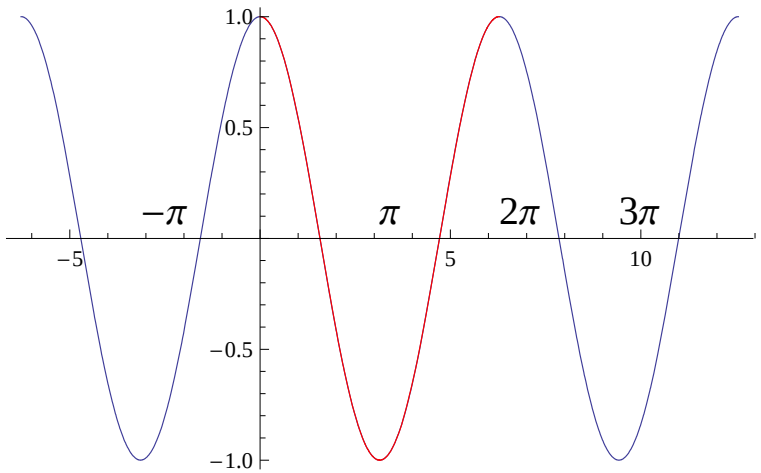
Graf funkcije $\sin x$



1. temeljni perod je 2π
2. nultočke su $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
3. maksimum je 1, postiže se u $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
4. minimum je -1, postiže se u $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
5. centralno je simetrična s obzirom na ishodište

Grafovi trigonometrijskih funkcija

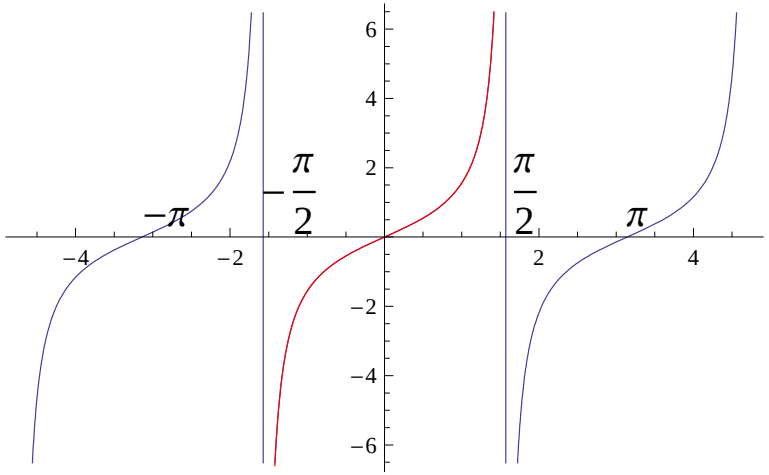
Graf funkcije $\cos x$



1. temeljni perod je 2π
2. nultočke su $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
3. maksimum je 1, postiže se u $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
4. minimum je -1, postiže se u $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
5. centralno je simetrična s obzirom na $y-$os

Grafovi trigonometrijskih funkcija

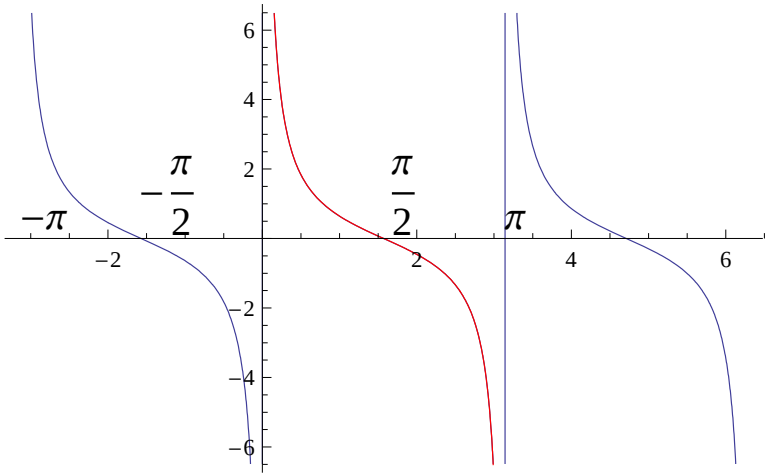
Graf funkcije tg



1. temeljni perod je π
2. nultočke su $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
3. maksimum i minimum ne postoje, funkcija nije omeđena
4. centralno je simetrična s obzirom na ishodište
5. asimptote su pravci $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

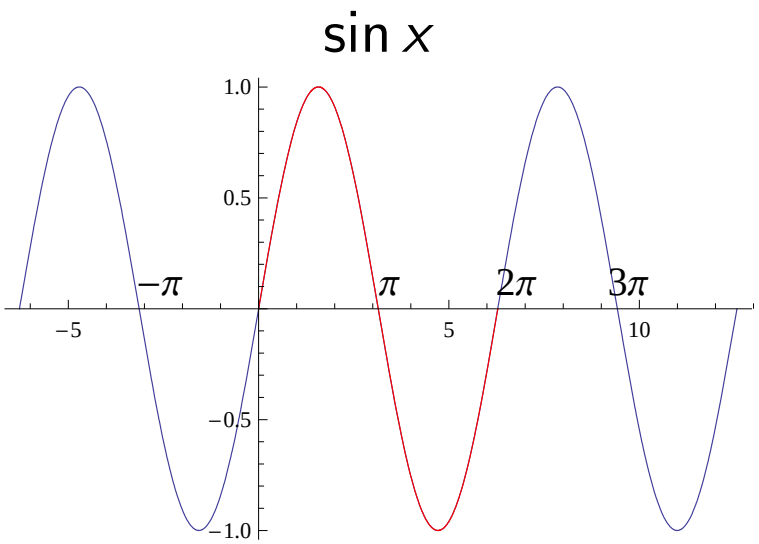
Grafovi trigonometrijskih funkcija

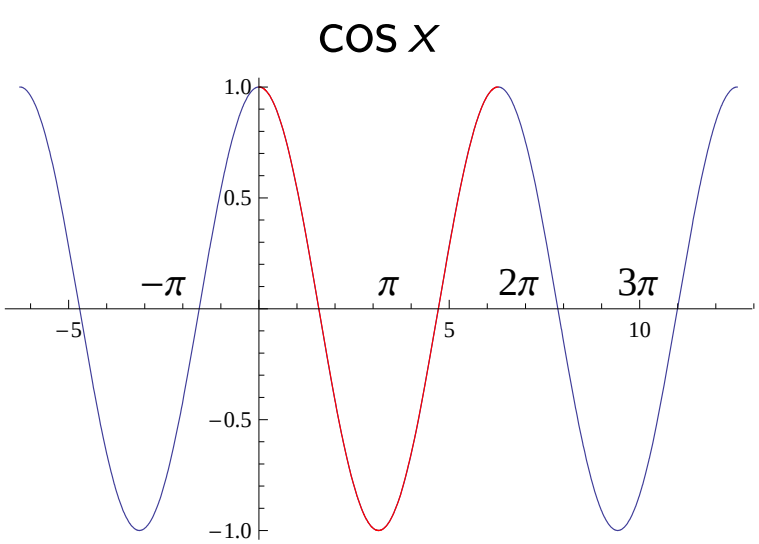
Graf funkcije ctg

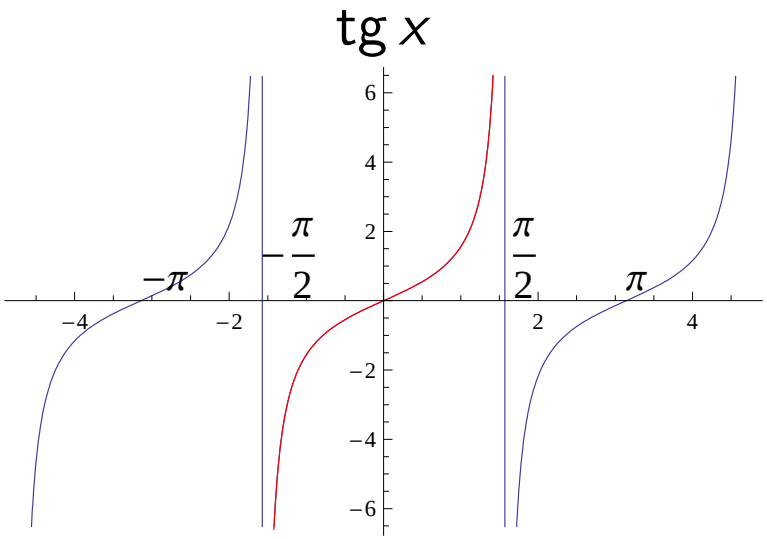


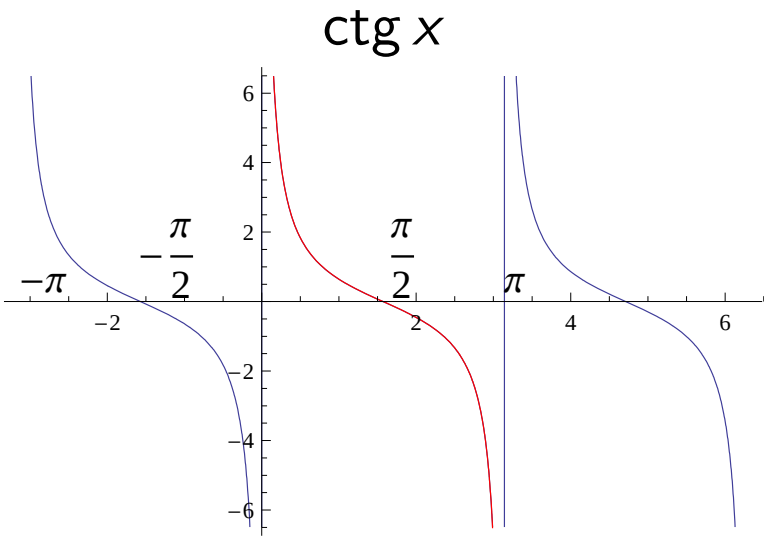
1. temeljni perod je π
2. nultočke su $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
3. maksimum i minimum ne postoje, funkcija nije omeđena
4. centralno je simetrična s obzirom na ishodište
5. asimptote su pravci $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Grafovi trigonometrijskih funkcija









Arkus (ciklometrijske) funkcije

Trigonometrijske funkcije nisu bijekcije (periodične su).
Inverzi su definirani za pogodno odabrane restrikcije koje jesu bijekcije.
Restrikcije se biraju na odgovarajući interval koji je najbliži nuli.

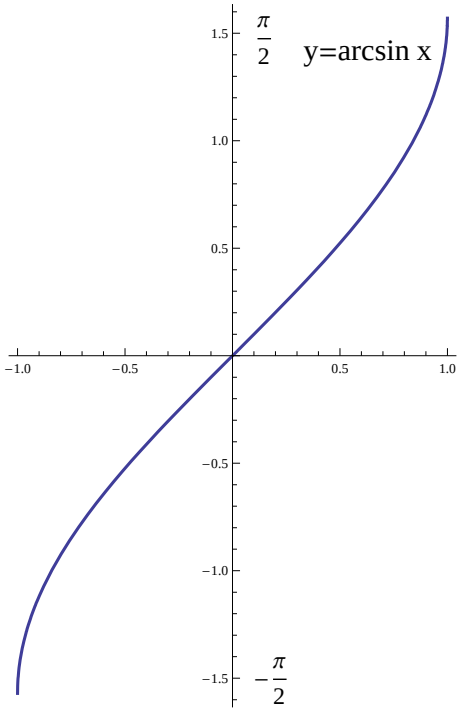
Arkus funkcije ili ciklometrijske funkcije su inverzne funkcije odgovarajućih restrikcija trigonometrijskih funkcija.

Restrikcije:

(a) sinus na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ je bijekcija
(b) kosinus na intervalu $[0, \pi]$ je bijekcija
(c) tangens na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je bijekcija
(d) kotangens na intervalu $(0, \pi)$ je bijekcija

Arkus (ciklometrijske) funkcije

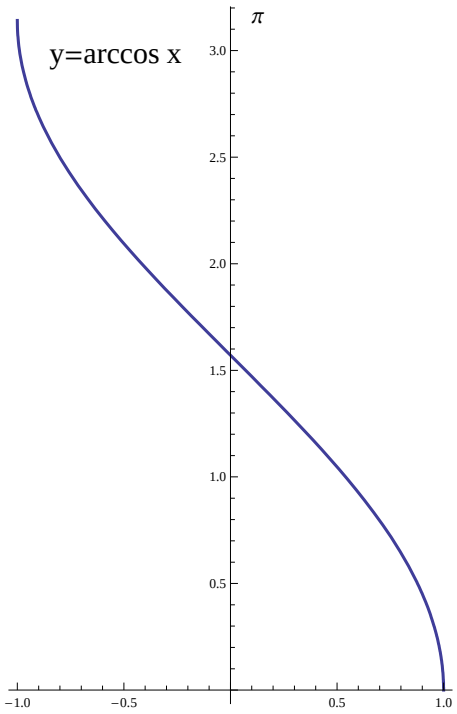
Arkus sinus je inverzna funkcija restrikcije sinusa na interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ pa vrijedi $\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



Funkcija arkus sinus je strogo rastuća, neparna, neprekidna i nema asimptota.

Arkus (ciklometrijske) funkcije

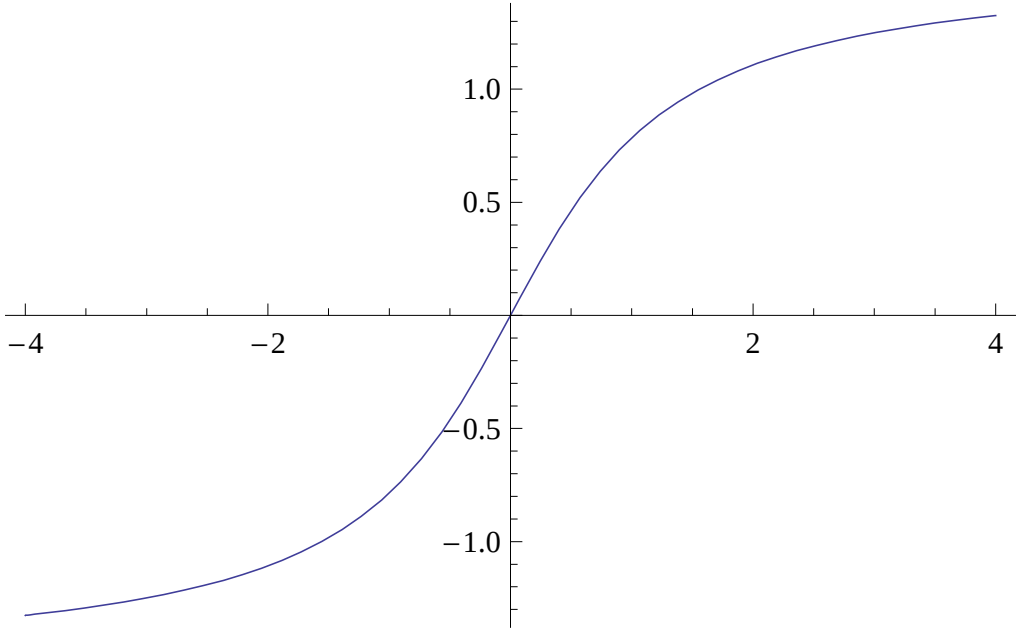
Arkus kosinus je inverzna funkcija restrikcije kosinusa na interval $[0, \pi]$ pa vrijedi $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.



Funkcija arkus kosinus je strogo padajuća, neprekidna i nema asimptota.

Arkus (ciklometrijske) funkcije

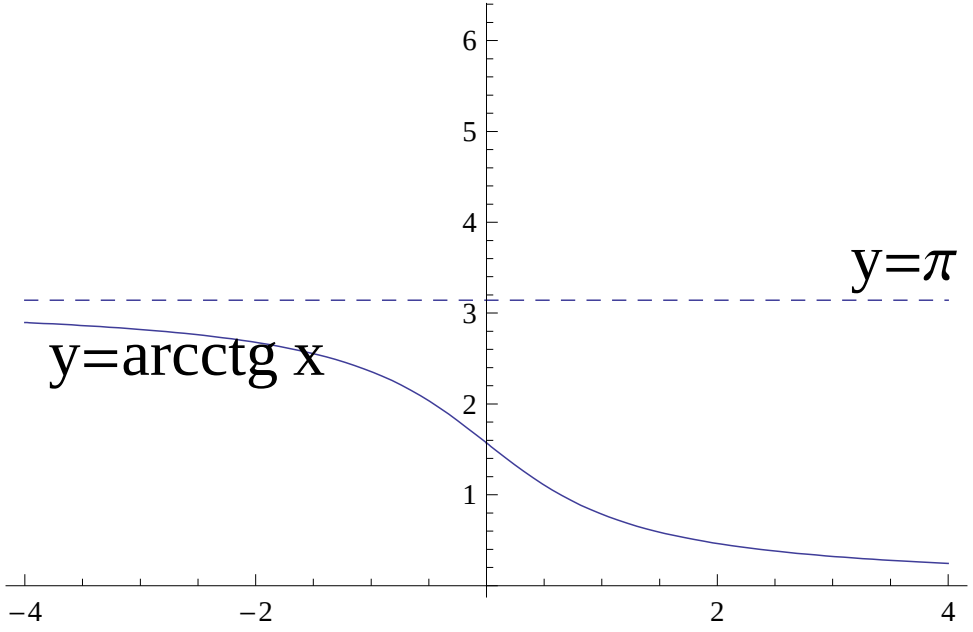
Arkus tangens je inverzna funkcija restrikcije funkcije tangens na interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ pa vrijedi $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



Funkcija arkus tangens je strogo rastuća, neparna i neprekidna. Pravac $y = \frac{\pi}{2}$ je horizontalna asimptota u desnom kraju, a pravac $y = -\frac{\pi}{2}$ je horizontalna asimptota u lijevom kraju.

Arkus (ciklometrijske) funkcije

Arkus kotangens je inverzna funkcija restrikcije funkcije kotangens na interval $(0, \pi)$ pa vrijedi $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$.



Funkcija arkus kotangens je strogo padajuća i neprekidna. Pravac $y = \pi$ je horizontalna asimptota u lijevom kraju, a pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota u desnom kraju.

Svojstva arkus funkcija

Domene arkus funkcija:

(a) $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(b) $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$

(c) $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(d) $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$

Vrijedi:

(a) $\sin(\arcsin x) = x \quad \text{za } x \in [-1,1]$

(b) $\cos(\arccos x) = x \quad \text{za } x \in [-1,1]$

(c) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad \text{za } x \in \mathbb{R}$

(d) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x \quad \text{za } x \in \mathbb{R}$

Zadaci

Zadatak

Odredite domenu i nultočke funkcije:

(a) $f(x) = \frac{x^2-4}{\sin x - \frac{1}{2}}$, (b) $f(x) = \frac{\cos 2x+1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$

Zadatak

Odredite domenu, ponašanje u rubnim točkama domene te izračunajte $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$ ako je:

(a) $f(x) = \frac{1}{\sin x - 1}$

(b) $f(x) = 2\cos\frac{1}{x^2-1}$

(c) $f(x) = \arccos\frac{1-x}{1+x}$

(d) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$

Linearne transformacije grafa funkcije

Linearne transformacije grafa funkcije

Zadana je dana funkcija $y = f(x)$ te nam je poznat njen graf $G_f = \{(x, y) : y = f(x),\ x \in D_f\}$.
Želimo konstruirati graf funkcije
$y = Af(ax + b) + B,\ A, a, b, B \in \mathbb{R},\ a, A \neq 0$ pomoću zadanog grafa funkcije $y = f(x)$.

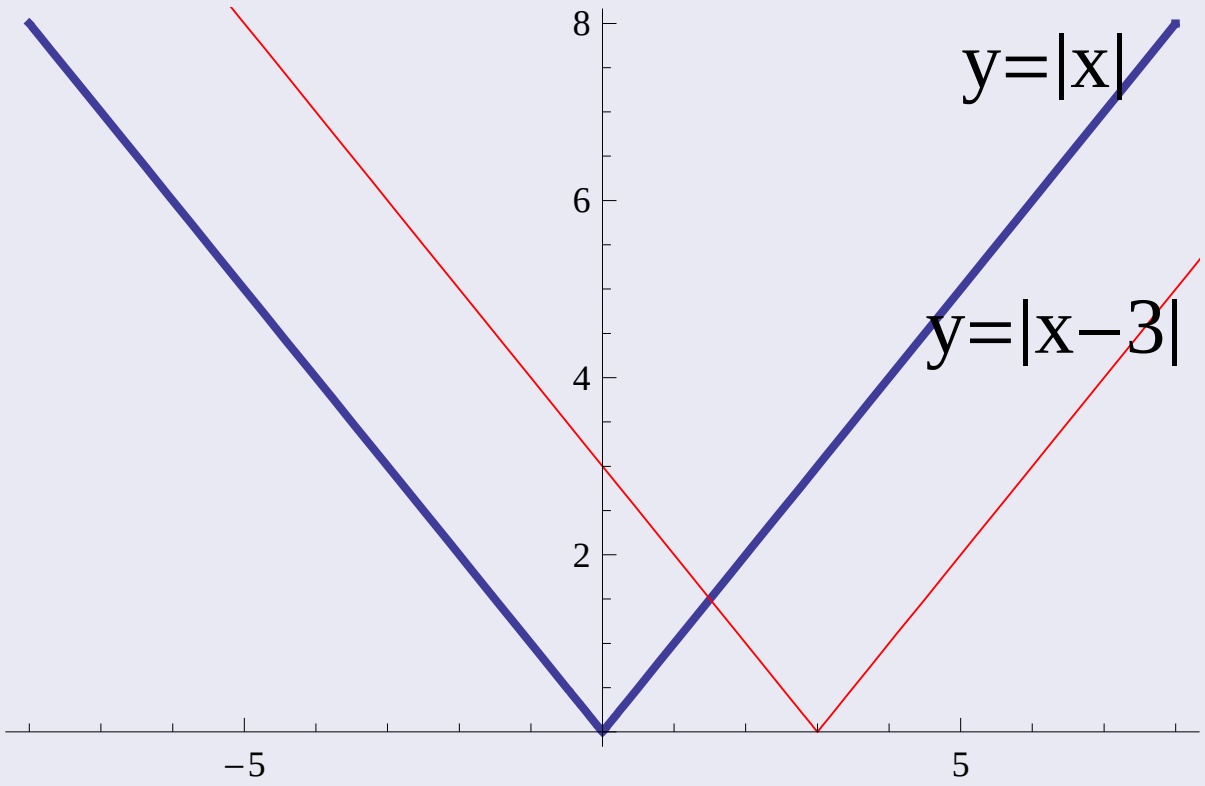
Pomak po $x-$ osi

1. Graf funkcije $y = f(x + b),\ b > 0$ dobiva se iz grafa funkcije $y = f(x)$ njegovom translacijom ulijevo po osi x, za vrijednost $|b|$.
2. Graf funkcije $y = f(x + b),\ b < 0$ dobiva se iz grafa funkcije $y = f(x)$ njegovom translacijom udesno po osi x, za vrijednost $|b|$.

Pomak po osi x

Primjer

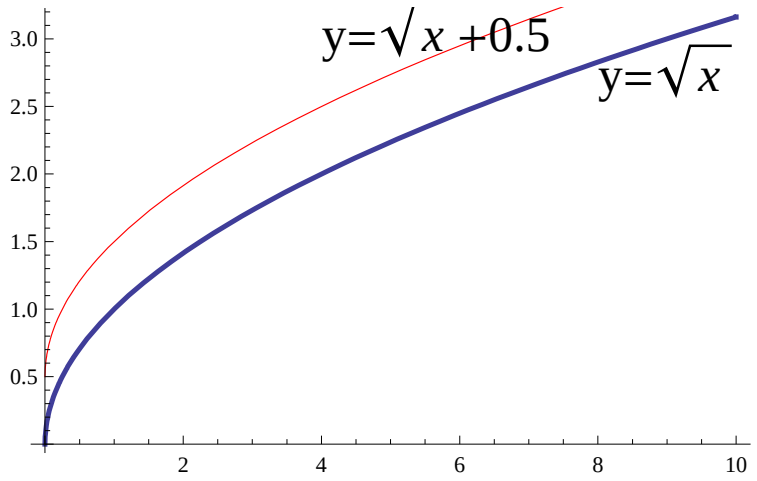
Primjer linearne translacije grafa po osi x.



Linearne transformacije grafa funkcije

Pomak po $y-$ osi

1. Graf funkcije $y = f(x) + B$, $B > 0$ dobiva se iz grafa funkcije $y = f(x)$ njegovom translacijom u pozitivnom smjeru po osi y, za vrijednost $|B|$.
2. Graf funkcije $y = f(x) + B$, $B < 0$ dobiva se iz grafa funkcije $y = f(x)$ njegovom translacijom u negativnom smjeru po osi y, za vrijednost $|B|$.



Za dobivanje grafa funkcije $y = Af(x)$, $A \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ imamo slijedeće mogućnosti:

1. $A = -1$ graf funkcije $y = -f(x)$ simetričan je grafu funkcije $y = f(x)$ s obzirom na os x
2. $A > 1$ rastezanje (proširenje) grafa G_f $|A|$ puta u smjeru osi y
3. $A < -1$ rastezanje (proširenje) grafa G_f $|A|$ puta u smjeru osi y i simetrija s obzirom na os x
4. $0 < A < 1$ skupljanje (suženje) grafa G_f $|A|$ puta u smjeru osi y
5. $-1 < A < 0$ skupljanje (suženje) grafa G_f $|A|$ puta u smjeru osi y i simetrija s obzirom na os x

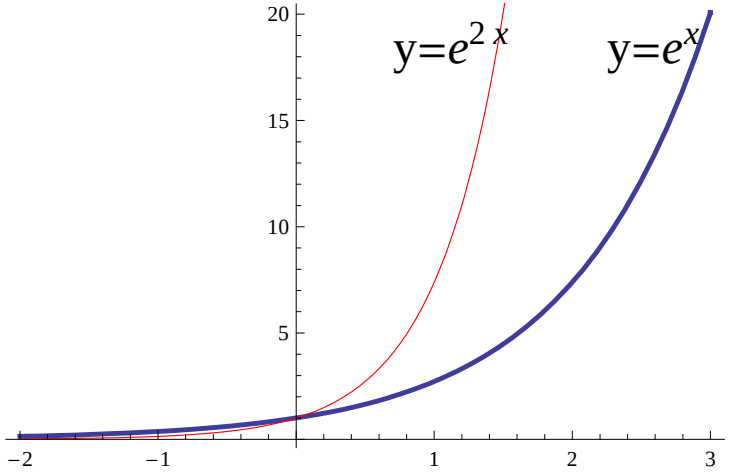
Točke grafa funkcije $y = f(ax)$, $a \neq 0$, dobivaju se zamjenom točke $(x_0, y_0) \in G_f$ točkom $(\frac{x_0}{a}, y_0)$.

Imamo slijedeće mogućnosti:

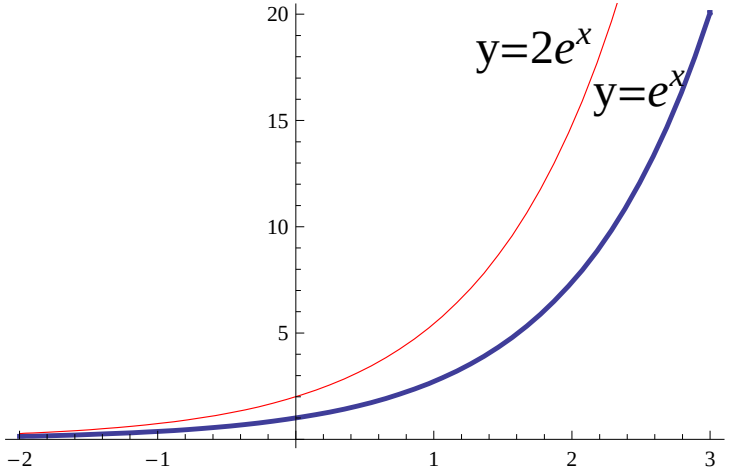
1. $a = -1$ graf funkcije $y = f(ax)$ je simetričan obzirom na os y
2. $a > 1$ skupljanje (suženje) grafa G_f $|a|$ puta u smjeru osi x
3. $a < -1$ skupljanje (suženje) grafa G_f $|a|$ puta u smjeru osi x i simetrija s obzirom na os y
4. $0 < a < 1$ rastezanje (proširenje) grafa G_f $|a|$ puta u smjeru osi x
5. $-1 < a < 0$ rastezanje (proširenje) grafa G_f $|a|$ puta u smjeru osi x i simetrija s obzirom na os y

Primjeri transformacije grafa eksponencijalne funkcije

suženje u smjeru osi x



proširenje u smjeru osi y



Napomena:

Do grafa funkcije $f(x) = Af(ax + b) + B$ dolazimo kombinacijom gornjih postupaka.

Zadaci

Zadatak

Polazeći od grafa funkcije f, pomoću linearnih transformacija grafa funkcije f, nacrtajte graf funkcije g ako je

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2f(x+1) - 1$

(c) $f(x) = \ln x$, $g(x) = -f(2x)$

(d) $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2f(x+1)$

(e) $f(x) = |x|$, $g(x) = \frac{1}{3}f(-x+1) - 2$

(f) $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = 2\arcsin(x - \frac{1}{2})$