

# EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE, JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

Funkcija zadata formulom:

$$y = a^x . \quad a \in R, a > 0, a \neq 1$$

se naziva eksponencijalna funkcija.

- Funkcija  $y = a^x$  je svuda definisana  $\forall x \in R$
- Za  $x=0$  je  $y = a^0 = 1$  pa funkcija prolazi kroz tačku  $(0,1)$ , tj. tu seče y-osu.
- Ako je  $a > 0$  funkcija je rastuća
- Ako je  $0 < a < 1$  funkcija je opadajuća
- Finkcija  $y = a^x$  je uvek pozitivna, tj. grafik je iznad x-ose
- Važe osnovna svojstva stepena:

Za nju:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x b^x$$

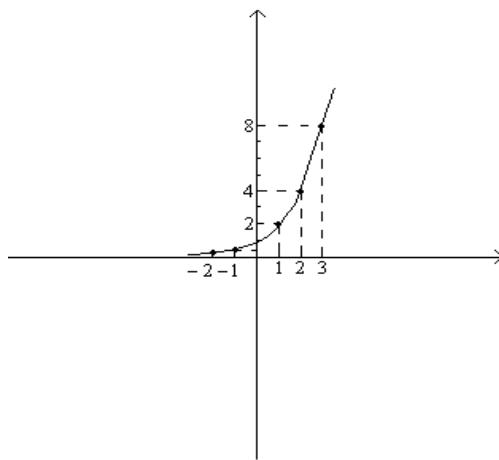
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

gde su  $a > 0, b > 0, x, y \in R$

**Primer 1.** Nacrtaj grafik funkcije  $y = 2^x$

**Rešenje:** Iskoristićemo tablicu vrednosti uzećemo proizvoljne x-seve i naći vrednost za y

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



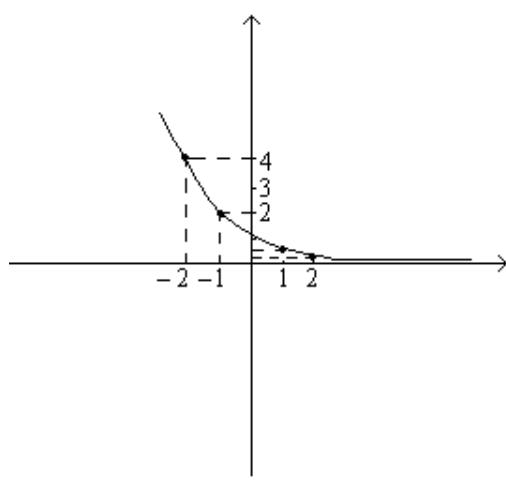
- Funkcija je definisana za  $\forall x \in R$
- Y-osu seče u  $(0,1)$
- Pošto je  $a = 2 > 0 \Rightarrow$  rastuća je
- Uvek je pozitivna, tj.  $y > 0$  za  $\forall x \in R$

**Primer 2:** Nacrtaj grafik funkcije

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ tj. } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad y = 2^{-x}$$

Rešenje:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



- Funkcija je definisana za  $\forall x \in R$
- Y-osu seče u  $(0,1)$
- Pošto je  $a = \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$  opadajuća je
- Uvek je pozitivna,  $y > 0$  za  $\forall x \in R$

**Primer 3:** Nacrtaj grafik funkcije

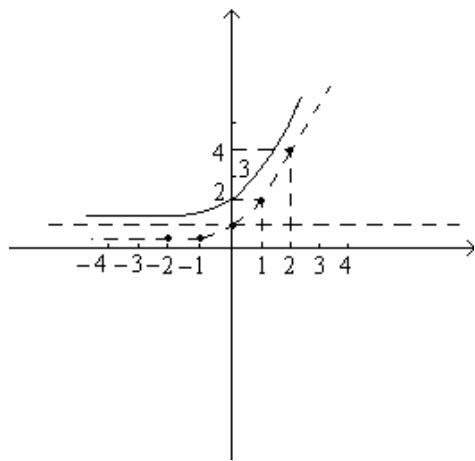
$$y = 2^x + 1$$

I ovde možemo napraviti tablicu vrednosti:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	5	9

Ali je lakše da razmišljamo ovako:

Nacrtamo grafik  $y = 2^x$  pa ga za 1 "podignemo" po y-osi (vidi kvadratnu funkciju, slična translacija je i tamo radjena)



**Eksponencijalne jednačine**

Pošto je eksponencijalna funkcija bijektivno preslikavanje ("1-1" i "na") možemo upotrebljavati:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Ovo znači da kada na obe strane napravimo iste osnove, osnove kao "skratimo" i uporedjujemo eksponente.

Evo nekoliko primera:

1) Reši jednačine

a)  $4^x = 2^{\frac{x+1}{x}}$

b)  $8^{x+1} = 16 \cdot 2^{x-2}$

v)  $16^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{x}{2}}$

g)  $16 \cdot 2^{5x+2} = 2^{x^2}$

d)  $9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}$

dj)  $(x^2 + 1)^{2x-3} = 1$

e)  $9^{x^2-3x+5} = 3^6$

Rešenja:

a)  $4^x = 2^{\frac{x+1}{x}}$

$(2^2)^x = 2^{\frac{x+1}{x}}$

$2^{2x} = 2^{\frac{x+1}{x}}$        $\Leftrightarrow$        $2x = \frac{x+1}{x}$

Kad napravimo iste  
osnove njih ''skratimo''!

$2x^2 = x + 1$   
 $2x^2 - x - 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4}$

$x_1 = 1$

$x_2 = -\frac{1}{2}$

Rešenja su  $x_1 = 1$  i  $x_2 = -\frac{1}{2}$

b)  $8^{x+1} = 16 \cdot 2^{x-2}$

$(2^3)^{x+1} = 2^4 \cdot 2^{x-2}$

$2^{3x+3} = 2^{4+x-2}$

$2^{3x+3} = 2^{x+2}$

$3x + 3 = x + 2$

$3x - x = 2 - 3$

$2x = -1$

$x = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v)} \quad & 16^x = 4^{\frac{x}{2}} \quad \frac{4}{x} = x \\
 & (2^4)^{\frac{1}{x}} = (2^2)^{\frac{x}{2}} \quad x^2 = 4 \\
 & 2^{4 \cdot \frac{1}{x}} = 2^{2 \cdot \frac{x}{2}} \quad x_1 = 2 \\
 & 2^{\frac{4}{x}} = 2^x \quad x_2 = -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g)} \quad & 16 \cdot 2^{5x+2} = 2^{x^2} \quad x^2 = 5x + 6 \\
 & 2^4 \cdot 2^{5x+2} = 2^{x^2} \quad x^2 - 5x - 6 = 0 \\
 & 2^{4+5x+2} = 2^{x^2} \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{2} \\
 & 2^{5x+6} = 2^{x^2} \quad x_1 = 6 \\
 & \quad x_2 = -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d)} \quad & 9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3} \quad \text{Pazi: } \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3} \\
 & (3^2)^{-3x} = (3^{-3})^{x+3} \quad -6x = -3x - 9 \\
 & 3^{-6x} = 3^{-3x-9} \quad -6x + 3x = -9 \\
 & \quad -3x = -9 \\
 & \quad x = 3
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{d)} \quad (x^2 + 1)^{2x-3} = 1$$

Pošto znamo da je  $a^0 = 1$ , jedno rešenje će nam dati

$$2x - 3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Drugo rešenje će biti ako je

$$x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

jer važi  $a^{f(x)} = b^{f(x)} \Leftrightarrow a = b$

$$\text{tj. } (x^2 + 1)^{2x-3} = 1^{2x-3}$$

$$\text{pa je } x^2 + 1 = 1$$

$$\mathbf{e)} \quad 9^{x^2-3x+5} = 3^6$$

$$(3^2)^{x^2-3x+5} = 3^6$$

$$3^{2x^2-6x+10} = 3^6$$

$$2x^2 - 6x + 10 = 6$$

$$2x^2 - 6x + 4 = 0 / : 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1$$

2) Rešiti jednačine:

a)  $2^{x+3} - 7 \cdot 2^x - 16 = 0$

b)  $3^{x-1} - 4 \cdot 3^x + 33 = 0$

v)  $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$

g)  $2^{3x-2} - 2^{3x-3} - 2^{3x-4} = 16$

d)  $2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-2} - 3^{x-3}$

**Rešenja:**

Ovde ćemo koristiti pravila za stepene:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

a)  $2^{x+3} - 7 \cdot 2^x - 16 = 0$

$$2^x \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^x - 16 = 0 \rightarrow \text{Najbolje da uzmem smenu } 2^x = t$$

$$t \cdot 8 - 7 \cdot t - 16 = 0$$

$$8t - 7t = 16$$

$$t = 16 \rightarrow \text{Vratimo se u smenu}$$

$$2^x = 16$$

$$2^x = 2^4$$

$$x = 4$$

b)  $3^{x-1} - 4 \cdot 3^x + 33 = 0$

$$\frac{3^x}{3} - 4 \cdot 3^x + 33 = 0 \rightarrow \text{Smena } 3^x = t$$

$$\frac{t}{3} - 4t + 33 = 0 \rightarrow \text{Pomnožimo sve sa } 3$$

$$t - 12t + 99 = 0$$

$$-11t = -99$$

$$t = 9$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

$$x = 2$$

$$\mathbf{v)} 2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$$

$$2 \cdot 3^x \cdot 3^1 - 4 \frac{3^x}{3^2} = 450 \rightarrow \text{Smena } 3^x = t$$

$$6 \cdot t - 4 \frac{t}{9} = 450$$

$$6t - \frac{4t}{9} = 450 \rightarrow \text{Pomnožimo sve sa } 9$$

$$54t - 4t = 4050$$

$$50t = 4050$$

$$t = \frac{4050}{50}$$

$$t = 81$$

$$3^x = 81 \rightarrow \text{pazi } 81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$$

$$3^x = 3^4$$

$$x = 4$$

$$\mathbf{g)} 2^{3x-2} - 2^{3x-3} - 2^{3x-4} = 16$$

$$\frac{2^{3x}}{2^2} - \frac{2^{3x}}{2^3} - \frac{2^{3x}}{2^4} = 16 \rightarrow \text{smena } 2^{3x} = t$$

$$\frac{t}{4} - \frac{t}{8} - \frac{t}{16} = 16 \rightarrow \text{sve pomnožimo sa } 16$$

$$4t - 2t - t = 256$$

$$t = 256$$

$$2^{3x} = 2^8$$

$$3x = 8$$

$$x = \frac{8}{3}$$

$$\mathbf{d)} 2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-2} - 3^{x-3}$$

$$\frac{2^x}{2} - \frac{2^x}{2^3} = \frac{3^x}{3^2} - \frac{3^x}{3^3}$$

$$\frac{2^x}{2} - \frac{2^x}{8} = \frac{3^x}{9} - \frac{3^x}{27} \rightarrow \text{zajednički za levu stranu je } 8 \text{ a za desnu } 27$$

$$\frac{4 \cdot 2^x - 2^x}{8} = \frac{3 \cdot 3^x - 3^x}{27}$$

$$\frac{3 \cdot 2^x}{8} = \frac{2 \cdot 3^x}{27} \rightarrow \text{Pomnožimo unakrsno}$$

$$3 \cdot 2^x \cdot 27 = 2 \cdot 3^x \cdot 8$$

$$2^x \cdot 81 = 3^x \cdot 16 / \text{podelimo sa } 3^x \text{ i sa } 81$$

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{16}{81}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$x = 4$$

A mogli smo da razmišljamo i ovako:

$$2^x \cdot 81 = 3^x \cdot 16$$

$$2^x \cdot 3^4 = 3^x \cdot 2^4$$

Očigledno je  $x = 4$

### **3) Reši jednačine:**

a)  $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \rightarrow \text{Pošto je } 4^x = (2^2)^x = 2^{2x} \text{ uzećemo smenu } 2^x = t \text{ pa će onda biti}$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \qquad \qquad \qquad 4^x = t^2$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$t_1 = 4$$

$$t_2 = 1$$

Vratimo se sad u smenu:

$$2^x = 4$$

$$2^x = 2^2 \quad \text{ili} \quad 2^x = 1$$

$$x = 2 \qquad \qquad \qquad x = 0$$

b)  $16^x - 4^x - 2 = 0 \rightarrow$  smena je  $4^x = t$  pa je  $16^x = 4^{2x} = t^2$   
 $t^2 - t - 2 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$t_1 = 2$$

$$t_2 = -1$$

$$4^x = 2$$

$$2^{2x} = 2^1$$

$2x = 1$  ili  $4^x = -1$  ovde nema rešenja jer je  $y = a^x$  uvek pozitivna!!!

$$x = \frac{1}{2}$$

v)  $5^x - 5^{3-x} = 20$

$$5^x - \frac{5^3}{5^x} = 20 \rightarrow$$
 smena  $5^x = t$

$$t - \frac{125}{t} = 20 \rightarrow$$
 celu jednačinu pomnožimo sa t

$$t^2 - 125 = 20t$$

$$t^2 - 20t - 125 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{20 \pm 30}{2}$$

$$t_1 = 25$$

$$t_2 = -5$$

Pa je  $5^x = 25$  ili  $5^x = -5$  Nema rešenja

$$5^x = 5^2$$

$$x = 2$$

g)  $5^{2x-3} = 2 \cdot 5^{x-2} + 3$

$$\frac{5^{2x}}{5^3} = 2 \cdot \frac{5^x}{5^2} + 3 \rightarrow$$
 smena  $5^x = t$

$$\frac{t^2}{125} = \frac{2t}{25} + 3 \rightarrow$$
 sve pomnožimo sa 125

$$t^2 = 10t + 375$$

$$t^2 - 10t - 375 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 4 \cdot 375}}{2}$$

$$t_1 = 25$$

$$t_2 = -15$$

Vratimo se u smenu:

$$5^x = 25$$

$$5^x = 5^2 \quad \text{ili} \quad 5^x = -15 \quad \text{nema rešenja, jer je } 5^x > 0$$

$$x = 2$$

d)  $(11^x - 11)^2 = 11^x + 99 \rightarrow$  Ovde ćemo odmah uzeti smenu  $11^x = t$

$$(t - 11)^2 = t + 99$$

$$t^2 - 22t + 121 - t - 99 = 0$$

$$t^2 - 23t + 22 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{23^2 - 4 \cdot 22}}{2}$$

$$t_1 = 22$$

$$t_2 = 1$$

Vratimo se u smenu:

$$11^x = 22$$

$$x = \log_{11} 22$$

$$11^x = 1$$

$$x = 0$$

#### **4) Rešiti jednačine:**

a)  $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$

b)  $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$

v)  $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$

#### **Rešenja**

- a) Najpre odredimo oblast definisanosti, pošto je u zadatku data korena funkcija, to je  $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

Uzećemo smenu  $2^{\sqrt{x-2}} = t \Rightarrow 4^{\sqrt{x-2}} = t^2$

$$t^2 + 16 = 10t$$

$$t^2 - 10t + 16 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{10 \pm 6}{2}$$

$$t_1 = 8$$

$$t_2 = 2$$

Vratimo se u smenu

$$\begin{array}{lll} 2^{\sqrt{x-2}} = 8 & \text{ili} & 2^{\sqrt{x-2}} = 2 \\ 2^{\sqrt{x-2}} = 2^3 & & \sqrt{x-2} = 1 \\ \sqrt{x-2} = 3 \rightarrow \text{kvadriramo} & & x-2 = 1 \\ x-2 = 9 & & x = 3 \\ x = 11 & & \end{array}$$

Kako za oba rešenja važi  $x \geq 2$ , to su oba rešenja "dobra"

$$\text{b)} 4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$$

$$(2^2)^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1} = 6$$

$$2^{2(x+\sqrt{x^2-2})} - 5 \cdot \frac{2^{x+\sqrt{x^2-2}}}{2^1} = 6$$

$$\text{Smena } 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = t$$

$$t^2 - \frac{5t}{2} = 6 \text{ pomnožimo sa 2}$$

$$2t^2 - 5t - 12 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{5 \pm 11}{4}$$

$$t_1 = 4$$

$$t_2 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Vratimo se u smenu:

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 4$$

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 2^2$$

$$x + \sqrt{x^2 - 2} = 2$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 2} &= 2 - x \rightarrow \text{uslovi } 2 - x \geq 0 \text{ pa je } -x \geq -2 \text{ tj. } x \leq 2 \text{ i } x^2 - 2 \geq 0 \\ x^2 - 2 &= (2 - x)^2 \end{aligned}$$

$$x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2$$

$$4x = 4 + 2$$

$$4x = 6$$

$$x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$x = 1,5 \rightarrow$  Zadovoljava uslove

b)  $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$

pogledajmo prvo jednu stvar:

$$2 - \sqrt{3} = \frac{2 - \sqrt{3}}{1} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2^2 - \sqrt{3}^2}{2 + \sqrt{3}} = \frac{4 - 3}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

Dakle, zadatak možemo zapisati i ovako:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x} = 4$$

smena  $\sqrt{2+\sqrt{3}}^x = t$

$$t + \frac{1}{t} = 4 \rightarrow \text{pomnožimo sve sa } t$$

$$t^2 + 1 = 4t$$

$$t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{2(2 \pm \sqrt{3})}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$t_1 = 2 + \sqrt{3}$$

$$t_2 = 2 - \sqrt{3}$$

Vratimo se u smenu:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}^x = t, \text{ dakle}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}^x = 2 + \sqrt{3} \quad \text{ili} \quad \sqrt{2+\sqrt{3}}^x = 2 - \sqrt{3}$$

Kako važi  $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$  tj.  $\sqrt[2]{a^x} = a^{\frac{x}{2}}$

$$\begin{aligned} (2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} &= (2+\sqrt{3})^1 & (2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} &= \frac{1}{2+\sqrt{3}} \\ \frac{x}{2} &= 1 & (2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} &= (2+\sqrt{3})^{-1} \\ x &= 2 & \frac{x}{2} &= -1 \\ & & x &= -2 \end{aligned}$$

**5)** Reši jednačine:

a)  $20^x - 6 \cdot 5^x + 10^x = 0$   
 b)  $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$

a)  $20^x - 6 \cdot 5^x + 10^x = 0 \rightarrow$  iskoristićemo da je  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$$(5 \cdot 4)^x - 6 \cdot 5^x + (5 \cdot 2)^x = 0$$

$5^x \cdot 4^x - 6 \cdot 5^x + 5^x \cdot 2^x = 0 \rightarrow$  izvucimo  $5^x$  kao zajednički!!!

$$5^x(4^x - 6 + 2^x) = 0$$

$$5^x = 0 \quad \vee \quad 4^x + 2^x - 6 = 0$$

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$t_1 = 2$$

$$t_2 = -3$$

pa je  $\boxed{2^x = 2} \quad \vee \quad \boxed{x = 1} \quad 2^x = -3$  nema rešenja

b)  $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$

$6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 3^x \cdot 2^x + 6 \cdot 2^{2x} = 0 \rightarrow$  celu jednačinu podelimo sa  $2^{2x}$

$$6 \cdot \frac{3^{2x}}{2^{2x}} - 13 \cdot \frac{3^x}{2^x} + 6 = 0$$

$$6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 6 = 0$$

Smena:  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$

$$6t^2 - 13t + 6 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{12}$$

$$t_1 = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

$$t_2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2} \quad \text{ili} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3}$$

$$x = 1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

$$x = -1$$

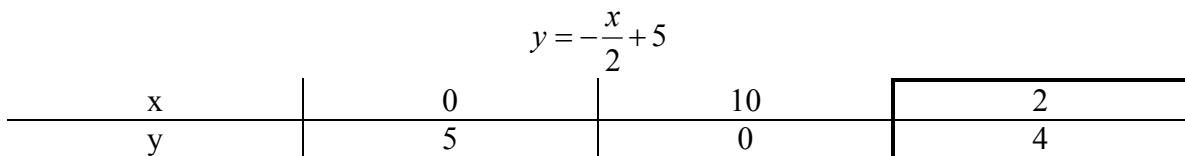
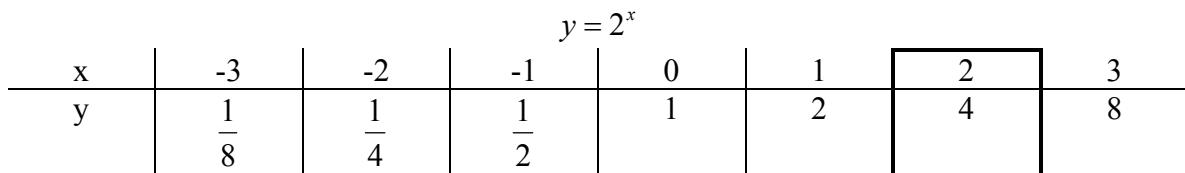
**6)** Grafički rešiti sledeće jednačine

$$\text{a) } 2^x - 5 + \frac{x}{2} = 0 \quad \text{b) } 3^x - \frac{x}{2} - 8 = 0$$

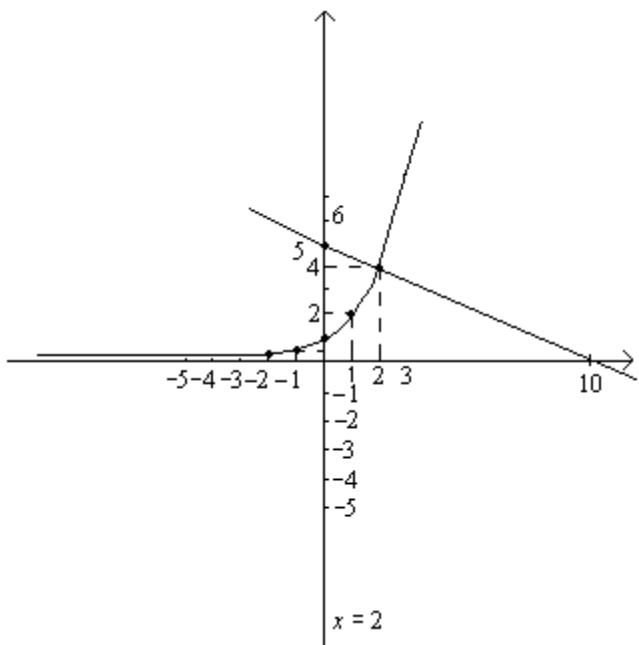
a) Najprećemo razdvojiti funkcije, eksponencijalnu na levu a ostalo na desnu stranu:

$$2^x = 5 - \frac{x}{2}$$

Nacrtaćemo funkcije  $y = 2^x$  i  $y = -\frac{x}{2} + 5$  i njihov presek će nam dati rešenje.



Na grafiku bi to izgledalo ovako:



Rešenje je  $x = 2$

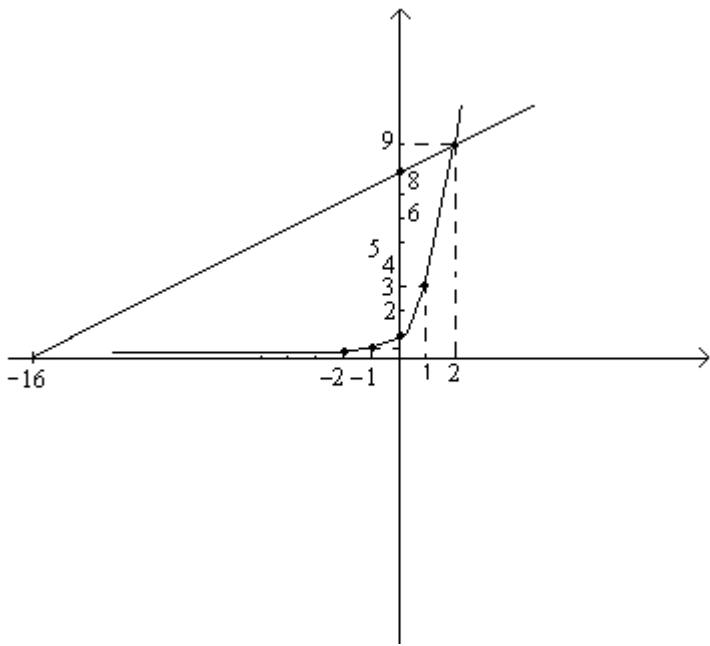
$$\text{b)} \quad 3^x - \frac{x}{2} - 8 = 0$$

$$3^x = \frac{x}{2} + 8$$

$y = 3^x$
-3
-2
-1
0
1
2
3
27

$y = \frac{x}{2} + 8$
0
8
-16
2
9

Na grafiku bi bilo:



Dakle, rešenje je  $x = 2$ . Da li ovde ima još jedno rešenje? DA, Ali njega teško možemo naći baš precizno....(naučićemo kasnije i to)

### **Eksponencijalne nejednačine**

Na osnovu monotonosti (rašćenje i opadanje) za eksponencijalne funkcije važi:

- 1) za  $a > 1$  je  $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- 2) za  $0 < a < 1$  je  $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Znači, kad je osnova veća od jedan znak nejednakosti prepisujemo, a ako je osnova izmedju 0 i 1 znak se okreće.

#### Primeri:

1. Rešiti nejednačine:

- a)  $5^{-7x+3} > 5^{-3}$
- b)  $0,35^{x-1} < 0,35^{2x+2}$
- c)  $2^{x^2-3} > 2$
- d)  $2^x < 7^x$

a)  $5^{-7x+3} > 5^{-3} \rightarrow$  pošto je osnova  $5 > 1$  znak prepisujemo!!!

$$-7x + 3 > -3$$

$$-7x > -3 - 3$$

$$-7x > -6$$

$$x < \frac{6}{7}$$

b)  $0,35^{x-1} < 0,35^{2x+2} \rightarrow$  pazi osnova je  $0,35$  a  $0 < 0,35 < 1$ , pa okrećemo znak!!!

$$x - 1 > 2x + 2$$

$$x - 2x > 2 + 1$$

$$-x > 3$$

$$x < -3$$

v)  $2^{x^2-3} > 2$

$$2^{x^2-3} > 2^1$$

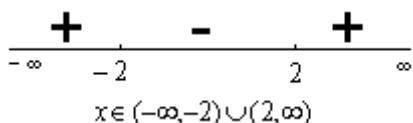
$$x^2 - 3 > 1$$

$$x^2 - 4 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-0 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$



g)  $2^x < 7^x$

$$\frac{2^x}{7^x} < 1$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^x < 1$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^x < \left(\frac{2}{7}\right)^0 \rightarrow$$
 pošto je osnova izmedju 0 i 1 znak se okreće

$$x > 0$$

**2)** Rešiti nejednačine:

a)  $5^{2x+1} > 5^x + 4$

b)  $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$

v)  $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$

$$a) 5^{2x+1} > 5^x + 4$$

$$5^{2x} \cdot 5^1 - 5^x - 4 > 0 \rightarrow \text{smena } 5^x = t$$

$$t^2 \cdot 5 - t - 4 > 0$$

$$5t^2 - t - 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{10}$$

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = -\frac{4}{5}$$

$$t \in (-\infty, -\frac{4}{5}) \cup (1, \infty)$$

vratimo se u smenu:

$$5^x = -\frac{4}{5} \quad \text{ili} \quad 5^x = 1$$

nema rešenja

sad se interval  $t \in (1, \infty)$  transformiše u  $x \in (0, \infty)$

$$b) 25^x < 6 \cdot 5^x - 5$$

$$5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 < 0 \rightarrow \text{smena } 5^x = t$$

$$t^2 - 6t + 5 < 0$$

$$t_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$t_1 = 5$$



$$t_2 = 1$$

Znači  $t \in (1, 5)$ , vratimo se u smenu

$$5^x = 1 \quad \text{ili} \quad 5^x = 5$$

$$x = 0 \quad x = 1$$

Tako da je sada konačno rešenje  $x \in (0, 1)$

$$\text{v) } \sqrt{9^x - 3^x \cdot 3^2} > 3^x - 9$$

$$\sqrt{3^{2x} - 3^x \cdot 9} > 3^x - 9 \rightarrow \text{smena } 3^x = t$$

$$\sqrt{t^2 - 9t} > t - 9 \text{ (vidi iracionalne nejednačine)}$$

$$[t^2 - 9t \geq 0 \wedge t - 9 < 0]$$

$$t_{1,2} = \frac{9 \pm 9}{2}$$

$$t_1 = 0 \quad t < 9$$

$$t_2 = 9$$



$$t \in (-\infty, 0] \cup [9, \infty)$$

Ova dva uslova daju

$$t \in (-\infty, 0]$$

ovaj interval "ne radi" jer je

$$3^x = t$$

$\vee$

$$[t^2 - 9t \geq (t-9)^2 \wedge t-9 \geq 0]$$

$$t^2 - 9t > t^2 - 18t + 81$$

$$-9t + 18t > 81$$

$$9t > 81 \quad t \geq 9$$

$$t > 9$$

Znači  $t > 9$

$$3^x > 9$$

$$3^x > 3^2$$

$$\boxed{x > 2}$$

Konačno rešenje