Diferencijalni račun

EF Zagreb

October 28, 2008

Realna funkcija jedne realne varijable

Neka je X neprazan podskup realnih brojeva. Ako svakom elementu $x \in X$ po postupku f pridružimo jedan element $y \in \mathbb{R}$, onda kažemo da je definirana ili zadana **funkcija** f sa skupa X u $\mathbb{R}$. Funkcije označavamo slovima $f, g, h, F, G, \ldots$ i pišemo

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

da bi označili da postupkom f skup X preslikavamo u skup $\mathbb{R}$. Još pišemo

$$y = f(x) \text{ ili } x \longmapsto y = f(x)$$

Skup X zovemo **područje definicije ili domena** funkcije f i označavamo ga još s $\mathcal{D}(f)$.
Kažemo da je $y = f(x)$ **slika** od x pri preslikavanju f a x je **original** od $y = f(x)$.
Element $x \in X$ zovemo **nezavisna varijabla** ili **argument**, a y **zavisna varijabla**. Skup

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

svih slika elemenata x zove se slika skupa X pri preslikavanju f i označava se još $\mathcal{R}(f)$. Vrijedi

$$\mathcal{R}(f) \subseteq \mathbb{R}.$$

Funkcije mogu biti dane formulom, tabelarno i grafički.

Funkcije zadane formulom

Promatramo funkcije zadane analitički- formulom ili postupkom računanja. Ovdje područje definicije odredit ćemo na slijedeći način: $X = \mathcal{D}(f)$ su svi realni brojevi za koje se nakon naznačenih operacija dobiva realan broj. Takvo područje definicije zovemo **prirodno područje definicije**.

Primjer: Odredite područje definicije

1. $f(x) = x^2 - 7x + 4$
2. $g(x) = \frac{1}{x-8}$
3. $h(x) = \sqrt{1-x}$.

Odgovori

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$
2. $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R} \setminus \{8\}$
3. $\mathcal{D}(h) = (-\infty, 1]$

Funkcija može biti zadana s više formula, na primjer

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Graf funkcije

Graf funkcije je skup

$$G = \{(x, y) : y = f(x), x \in \mathcal{D}(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Graf realne funkcije jedne varijable je **krivulja u ravnini**. No, nije svaka krivulja u ravnini graf funkcije.
Graf funkcije $y = ax + b$ za parametre $a, b \in \mathbb{R}$ je pravac u ravnini.
Graf funkcije $y = ax^2 + bx + c$ za parametre $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ je parabola u ravnini.
Graf funkcije $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ za parametre $a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0$ i $a \neq 0$ ili $b \neq 0$ je hiperbola u ravnini.
Funkcija f je **parna**, ako je

$x \in \mathcal{D}(f) \Longrightarrow -x \in \mathcal{D}(f)$ i $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathcal{D}(f)$.

Funkcija f je **neparna**, ako je

$x \in \mathcal{D}(f) \Longrightarrow -x \in \mathcal{D}(f)$ i $f(x) = -f(-x), \forall x \in \mathcal{D}(f)$.

Monotone funkcije

Funkcija je monotona na X ako raste ili pada na X.
Funkcija f raste na X ako

$$(x_1, x_2 \in X, x_1 > x_2) \Longrightarrow (f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Funkcija f pada na X ako

$$(x_1, x_2 \in X, x_1 > x_2) \Longrightarrow (f(x_1) \leq f(x_2)).$$

Funkcija potražnje

Funkcija potražnje q za nekom robom ovisi o cijeni te robe p_1, o cijenama nekih drugih roba (konkurentnih ili komplementarnih) $p_2, ..., p_n$, o dohotku potrošača k i trenutku t razmatranja.
Funkcija potražnje u **užem smislu** ovisi samo o cijeni te robe, tj $q = q(p)$. Područje definicije je

$$\mathcal{D}(q) = \{p : p \geq 0, q(p) \geq 0\}.$$

Primjeri funkcije potražnje, za $a, b > 0$.

1. $q = \frac{a-p}{b}$
2. $q = \frac{1}{ap+b}$
3. $q = \frac{a-p^2}{b}$
4. $q = \sqrt{\frac{a-p}{b}}$
5. $q = \frac{a}{p^2} + c$
6. $q = ae^{-bp}$

Granična vrijednost funkcije ili limes funkcije

Neka je funkcija f definirana na otvorenom intervalu (a, b) osim eventualno u $x_0 \in (a, b)$. Postavlja se pitanje koja bi bila prirodna vrijednost funkcije f u x_0. Pogledajmo primjer slijedeće funkcije,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Ova funkcija je definirana za sve realne brojeve, osim za $x_0 = 1$,pa je možemo zapisati

$$f(x) = x + 1, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Graf ove funkcije su sve točke pravca osim točke $(1, 2)$,

$$G = \{(x, x + 1) : x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\}.$$

Vidimo da je

$$x \approx 1 \Longrightarrow f(x) = x + 1 \approx 2$$

te što je x bliži vrijednosti 1, $f(x)$ je bliži vrijednosti 2, tj.

$$x \to 1, f(x) \to 2.$$

Kažemo da je 2 granična vrijednost ili limes funkcije kada se x približava (teži) 1 i pišemo

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Definicija: **Neka je funkcija f definirana na otvorenom intervalu (a, b) osim eventualno u $x_0 \in (a, b)$. Granična vrijednost ili limes funkcije f u x_0 je L i pišemo**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

ako za $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ takav da

$$x \in (a, b) \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

A.L.Cauchy (1821), B.Bolzano(1817)

Primjetimo da $\delta = \delta(\varepsilon)$ i

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon \Longrightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

U našem primjeru to znači

$$|f(x) - L| = |x + 1 - 2| = |x - 1| < \varepsilon$$

pa je $\delta = \varepsilon$. Ako uzmemo $\varepsilon = 0.01$ onda imamo

$$x \in (1 - 0.01, 1 + 0.01) \Longrightarrow f(x) = x + 1 \in (2 - 0.01, 2 + 0.01)$$

Za vježbu: Ako je

$$f(x) = \frac{2x^2 - x}{x}$$

odredite limes funkcije kada $x \to 0$ po definiciji.

Postupak za limes razlomljene racionalne funkcije

Ako je f razlomljena racionalna funkcija

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

gdje je P_n polinom stupnja n, Q_m polinom stupnja m i x_0 nultočka oba polinoma dobivamo neodredjeni izraz

$$f(x_0) = \frac{0}{0}.$$

Računamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{P_n(x) : (x - x_0)}{Q_m(x) : (x - x_0)}$$

i dobivamo ponovo polinome u brojniku i nazivniku sa stupnjem za jedan manjem nego što su bili.

Primjer:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-3)=-1.$$

Jednostrani limes

Možemo promatrati limes funkcije ako x pada prema x_0, približava se vrijednosti x_0 s desna, tj.

$$\lim_{x \to x_0+} = L.$$

Pretpostavljamo da je funkcija f definirana na otvorenom intervalu (x_0, b). Limes funkcije f s **desna** u x_0 je L ako za $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ takav da iz

$$x > x_0, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Limes funkcije ako x raste prema x_0, približava se vrijednosti x_0 s lijeva, tj.

$$\lim_{x \to x_0 -} = G.$$

Ako je $L = G$ onda je

$$\lim_{x \to x_0} = L.$$

Primjer:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Račun s limesima

Ako je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \lim_{x \to x_0} g(x) = K$$

onda vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = L + K.$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = LK.$$

Ako je $K \neq 0$, $g(x) \neq 0$ za x blizu x_0 onda vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L}{K}.$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^m = (\lim_{x \to x_0} f(x))^m = L^m$$

$$\lim_{x \to x_0} (\log_b f(x)) = \log_b \lim_{x \to x_0} f(x) = \log_b L$$

Limes funkcije ako x neograničeno raste

Definicija : Neka je funkcija f definirana na otvorenom intervalu (a, ∞). Limes funkcije f ako x neograničeno raste je L i pišemo

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

ako za $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$ takav da iz

$$x > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Primjer:

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$$

Važniji limesi

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Neprekidna funkcija

Funkcija

$$f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

je neprekidna u $x_0 \in (a, b)$ ako je

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Derivacija

Uvod i motivacija

Neka je $(a, b) \subset \mathbb{R}$ otvoreni interval i f i g realne funkcije definirane na otvorenom intervalu (a, b), tj.

$$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}.$$

Definiramo funkciju

$$h = f - g$$

s

$$h(x) = f(x) - g(x), \forall x \in (a, b)$$

i zovemo je *razlika* ili *diferencija* funkcija f i g.
U diferencijalnom računu izučavamo može li se funkcija f aproksimirati polinomom $n-$tog stupnja oko točke $x = x_0 \in (a, b)$.
Polinom

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

biramo tako da je

$$f(x_0) = g(x_0) \tag{1}$$

$$f(x) \approx g(x) \text{za svako } x \text{ dovoljno blizu} x_0 \tag{2}$$

ili

$$h(x) = f(x) - g(x) \approx 0 \text{ "malo" za svako } x \text{ dovoljno blizu } x_0. \tag{3}$$

Ako su ispunjeni uvjeti (1) i (2) kažemo da je funkcija f **lokalno aproksimirana** oko x_0 funkcijom g.

Prvo ćemo promatrati aproksimaciju funkcije f oko x_0 polinomom prvog stupnja, $g(x) = a_1 x + a_0 = kx + l$, odnosno **lokalnu linearnu aproksimaciju**.

Matematički pojam koji to omogučuje naziva se **derivacija** funkcije a postupak traženja derivacije zove se **diferenciranje.**

Dakle, potrebno je odrediti funkciju $g(x) = kx + l$ za koju vrijedi

$$f(x_0) = g(x_0) = kx_0 + l$$

i

$$f(x) \approx g(x) = kx + l \,\mathrm{za}\, x \approx x_0.$$

Vidimo iz

$$f(x) - f(x_0) \approx g(x) - g(x_0) = k(x - x_0),\ x \approx x_0$$

proizlazi

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx k,\ x \approx x_0.$$

Izraz

$$K = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

naziva se **kvocjent diferencija.** Pogledajmo sada sliku 1.

Primjetimo da je kvocjent diferencija

$$K = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

koeficijent smjera **sekante** krivulje $\{(x, f(x)) : x \in (a, b)\}$. Sekanta je pravac koji prolazi točkama $P(x_0, f(x_0))$ i $T(x, f(x))$. Kada se točka T približava točki P, odnosno kada

$$x \longrightarrow x_0$$

promatramo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ako ova granična vrijednost postoji i jednaka je realnom broju k, onda kažemo da funkcija f u točki x_0 ima derivaciju ili da je f diferencijabilna u x_0.
Broj

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{4}$$

je koeficijent smjera pravca.
Pravac prolazi kroz točku $P(x_0, f(x_0))$ i s poznatim koeficijentom smjera k danim s (4) jednoznačno je odredjen.
Nazivamo ga **tangenta** krivulje $\{(x, f(x)) : x \in (a, b)\}$. Broj k označavamo

$$f'(x_0) \text{ ili } Df(x_0) \text{ ili } \frac{df(x_0)}{dx} \text{ ili } \frac{d}{dx} f(x_0)$$

i nazivamo ga **derivacija funkcije f u točki x_0.**

Primjer: Neka je $f(x) = x^2$ i $x_0 = 1$. Odredimo tangentu parabole $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ u točki $P(1, f(1)) = (1, 1)$. Koeficijent smjera dane parabole u točki $(1, 1)$ je

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

Tangenta parabole $f(x) = x^2$ u točki $P(1, 1)$ je pravac zadan jednadžbom $y = 2x - 1$, odnosno $g(x) = 2x - 1$ je polinom prvog stupnja za koji vrijedi

$$x^2 \approx 2x - 1 \,\mathrm{za}\, x \approx 1.$$

Provjerimo za neke vrijednosti varijable x u okolini $x = 1$

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
x^2	0.81	0.9801	0.998	1.002	1.02	1.21
$2x - 1$	0.8	0.98	0.998	1.002	1.02	1.2

Ako funkcija f u x_0 ima derivaciju $f'(x_0)$, onda za polinom

$$\boxed{g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

prvog stupnja kažemo da je tangencijalan funkciji f u točki x_0, a pravac

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

je tangenta na krivulju $G = \{(x, f(x)) : x \in I\}$ u točki $(x_0, f(x_0))$.

Ako je $f'(x_0) \neq 0$, normala na krivulju $G = \{(x, f(x)) : x \in I\}$ u točki $(x_0, f(x_0))$ je pravac

$$\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju $G = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, ako je $f(x) = x^3$ i $x = 1$

Prvo ćemo odrediti koeficijent smjera k tangente

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 3.$$

Kako je $P(1, 1)$ i $k = 3$, tangenta je pravac zadan jednadžbom

$$y = 3x - 2.$$

Normala je

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Primjer: Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju $G = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}_+\}$ ako je $f(x) = \sqrt{x}$ i $x = 1$.
Prvo ćemo odrediti koeficijent smjera k tangente

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} == \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2}.$$

Jednadžba tangente je

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2},$$

a normale

$$y = -2x + 3.$$

Neke funkcije nemaju derivaciju u svim točkama u kojima su definirane, pa i ako su u njima neprekidne. Sada ćemo promotriti jednu takvu funkciju, na primjer neka je

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

u $x = 0$. Pogledajmo graničnu vrijednost s desna

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0_+} \frac{x}{x} = 1.$$

S druge strane granična vrijednost s lijeva je

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0_-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Kako je $1 \neq -1$, granična vrijednost funkcije

$$F(x) = \frac{|x|}{x}$$

kada $x \to 0$ ne postoji, pa funkcija $f(x) = |x|$ nema derivaciju za $x = 0$.

Teorem: Ako je funkcija

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}$$

diferencijabilna u točki $x_0 \in (a, b)$ onda je ona neprekidna u x_0.
Dokaz: Kako je

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) \frac{x - x_0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) =$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Posljedica ovog teorema je:
Ako funkcija ima derivaciju u svakoj točki $x \in (a, b) = I$ onda je x neprekidna na tom intervalu.

Derivacija elementarnih funkcija

Ako funkcija f, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, ima derivaciju za svako $x_0 \in (a, b)$ definiramo novu funkciju

$$x \mapsto f'(x)$$

i f' zovemo derivacija funkcije f na (a, b).
Ako funkcija f' ima derivaciju u točki $x_0 \in (a, b)$, označavamo je $f''(x_0)$ i kažemo da je $f''(x_0)$ druga derivacija funkcije f u x_0.
Analogno uvodimo f''' treću, f^{IV} četvrtu, ...,$f^{(n)}$ n-tu derivaciju funkcije f.

Sada ćemo odrediti funkciju f' za neke jednostavne funkcije i stoga uvodimo novi zapis derivacije funkcije f u točki x,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Označimo li promjenu funkcije f s $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ imamo

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Derivacija potencije

Ako je $f(x) = x$, onda

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

Dakle,

$$\boxed{(x)' = 1.}$$

Ako je $f(x) = x^2$, onda

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x+\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Dakle,

$$\boxed{(x^2)' = 2x.}$$

Ako je $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, onda

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x - x)((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1})}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1})}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} ((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \cdots + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}) = nx^{n-1}.$$

Dakle,

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}.}$$

Ako je $f(x) = \sqrt{x}$, onda

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}.$$

Dakle,

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}.}$$

Može se pokazati da općenito vrijedi

$$\boxed{(x^p)' = p x^{p-1}.}$$

Derivacija zbroja funkcija

Ako je

$$f = u + v$$

tj.

$$f(x) = u(x) + v(x), \forall x \in (a, b)$$

i u, v funkcije koje na intervalu I imaju poznatu derivaciju u' i v', onda je

$$f'(x) = (u(x) + v(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) - v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} =$$

$$= u'(x) + v'(x).$$

Dakle

$$\boxed{(u+v)' = u' + v'.}$$

Derivacija produkta funkcije i konstante

Ako je $f = Cu$ tj.

$$f(x) = Cu(x), \forall x \in (a, b),$$

onda je

$$\boxed{(Cu)' = Cu'.}$$

Naime

$$f'(x) = (Cu(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Cu(x + \Delta x) - Cu(x)}{\Delta x} =$$

$$= C \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = Cu'(x).$$

Derivacija polinoma

Ako je

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

onda je

$$P_n'(x) = n a_n x^{n-1} + \cdots + a_1$$

tj.

$$\boxed{P_n'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}.}$$

Takodjer vrijedi

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P_n^{(i)}}{i!}(0) x^i = P_n(0) + P_n'(0)x + \cdots + \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

što je razvoj polinoma oko nule. Naime, lako vidimo da je

$$\begin{aligned} a_0 &= P_n(0) \\ a_1 &= P_n'(0) \\ &\vdots \\ i!a_i &= P_n^{(i)}(0) \\ &\vdots \\ n!a_n &= P_n^{(n)}(0) \end{aligned}$$

Možemo razviti polinom oko x_0 (što ćemo pokazati kasnije) pa imamo

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P_n^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i.$$

Derivacija produkta

Pretpostavimo da je funkcija f produkt dviju funkcija u i v, $f = uv$ tj.

$$f(x) = u(x)v(x), \forall x \in (a, b)$$

kojima su poznate derivacije u' i v' pa je

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'.}$$

Naime

$$\Delta f = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) =$$

$$= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) =$$

$$= (u(x + \Delta x) - u(x))v(x + \Delta x) + u(x)(v(x + \Delta x) - v(x))$$

Prelazimo sada na slijedeće

$$f'(x) = (u(x)v(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) +$$

$$+ u(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} =$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Derivacija kvocijenta funkcija

Ako je

$$f = \frac{u}{v}$$

tj.

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}, \ \forall x \in (a, b),$$

onda je

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Derivacija logaritamske funkcije

Ako je $f(x) = \log_b x$, onda

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_b(x+\Delta x) - \log_b x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_b \frac{x+\Delta x}{x} =$$

$$\log_b \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \log_b e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log_b e.$$

Dakle,

$$(\log_b x)' = \log_b e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log_b e.$$

Specijalno, ako je $b = e$, onda

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Derivacija složene funkcije

Neka je funkcija f složena funkcija, $f(x) = v(u(x))$, te funkcije u i v funkcije kojima su poznate derivacije u' i v'.
Dakle

$$f(x) = v(u(x)) = v(u),\ u = u(x).$$

Ako se varijabla x promijeni za Δx, onda će se funkcija $u = u(x)$ promijeniti za

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x).$$

Promjena Δu izaziva promjenu funkcije $v = v(u)$

$$\Delta v = v(u + \Delta u) - v(u).$$

Izračunajmo sada derivaciju f'.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(u(x+\Delta x)) - v(u(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(u(x)+\Delta u)) - v(u(x))}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(u+\Delta u) - v(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Kako je u neprekidna funkcija, kada $\Delta x \to 0$ takodjer $\Delta u \to 0$.

Zato

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(u+\Delta u) - v(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{v(u+\Delta u) - v(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = v'(u(x)) \cdot u'(x).$$

Dakle,

$$((v(u(x))' = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = v'(u) \cdot u'(x).$$

Ako je $f(x) = (u(x))^n = u^n$, onda je

$$f'(x) = v'(u)u'(x) = nu^{n-1}u'(x).$$

Primjer: Ako je $f(x) = (x^2 + 1)^4$, onda je

$$f'(x) = (v(u))' = (u^4)' = 4u^3 \cdot u'(x) = 4(x^2+1)^3 \cdot 2x = 8x(x^2+1)^3.$$

Primjer: Ako je $f(x) = 2(x^2 - x + 1)^{-2}$, onda je

$$f'(x) = (v(u))' = (u^{-2})' = -4u^{-3} \cdot u'(x) =$$

$$= -4(x^2 - x + 1)^{-3} \cdot (2x - 1) = -4\frac{2x - 1}{(x^2 - x + 1)^3}.$$

Sada možemo razviti polinom oko x_0. Naime, ako je

$$P_n(x) = b_n(x - x_0)^n + \cdots + b_1(x - x_0) + b_0$$

onda

$$\begin{aligned} b_0 &= P_n(x_0) \\ b_1 &= P_n'(x_0) \\ &\vdots \\ i!\,b_i &= P_n^{(i)}(x_0) \\ &\vdots \\ n!\,b_n &= P_n^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

pa je

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P_n^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i.$$

Derivacija inverzne funkcije

Funkcija g je inverzna funkciji f ako je

$$g(f(x)) = x, \forall x \in \mathcal{D}(f).$$

Sada je

$$g'(f(x))f'(x) = 1$$

ili

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

odnosno

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \; g'(y) = \frac{dx}{dy}.$$

Derivacija eksponencijalne funkcije

Ako je $f(x) = b^x$, onda je njoj inverzna funkcija $g(x) = \log_b x$, pa imamo

$$f'(x) = \frac{d}{dx} b^x = \frac{1}{\frac{d}{dy} \log_b y} = \frac{1}{\frac{1}{y} \log_b e} = \frac{y}{\log_b e} =$$

$$= \frac{b^x}{\log_b e} = b^x \ln b.$$

Dakle,

$$(b^x)' = \frac{b^x}{\log_b e} = b^x \ln b.$$

Specijalno, ako je $b = e$, onda je

$$(e^x)' = e^x.$$

Derivacija trigonometrijskih funkcija

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x.$$

Dakle

$$(\sin x)' = \cos x.$$

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2 \sin \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= - \lim_{\Delta x \to 0} \sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = - \sin x.$$

Dakle

$$(\cos x)' = - \sin x.$$

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' =$$

$$= \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2}.$$

$$(ctgx)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' =$$

$$= \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2}.$$

Derivacija ciklometrijskih funkcija

Za funkciju $y = \arcsin x$, $x \in < -1, 1 >$ inverzna je funkcija $x = \sin y$, $y \in < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$ čiju derivaciju znamo. Stoga je

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\frac{d}{dy} \sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Za funkciju $y = \arccos x$, $x \in < -1, 1 >$ inverzna je funkcija $x = \cos y$, $y \in < 0, \pi >$ čiju derivaciju znamo. Stoga je

$$\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{1}{\frac{d}{dy} \cos y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Za funkciju $y = arctgx$, $x \in < -\infty, \infty >$ inverzna je funkcija $x = tgy$, $y \in < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$ čiju derivaciju znamo. Stoga je

$$\frac{d}{dx} arctgx = \frac{1}{\frac{d}{dy} tgy} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y =$$

$$= \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Diferencijal

Nagib tangente u točki $P = (x_0, f(x_0))$ krivulje $G = \{(x, f(x)) : x \in (a, b)\}$ funkcije $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je

$$k = f'(x_0)$$

i jednadžba tangenteje

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Tangenta u točki P aproksimira krivulju u okolini točke P, to bolje što je točka $T = (x, f(x))$ bliže točki P, odnosno linearna funkcija $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ aproksimira funkciju f u okolini od x_0, dakle

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)$$

gdje je $r(x)$ greška aproksimacije i

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0.$$

Stavimo li uobičajene oznake

$$\Delta y = f(x) - f(x_0),\ \Delta x = x - x_0$$

imamo

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + r(x).$$

Staviti ćemo

$$\Delta x = dx$$

i izraz

$$dy = f'(x_0)dx$$

zovemo **diferencijal** funkcije f u x_0. Ekvivalentno, dy je prirast tangente (tangenta je kroz $P = (x_0, f(x_0))$ grafa G) u točki $T = (x, f(x))$.

Primjer: Koristeći se aproksimacijom oko $x_0 = 9$, izračunajte $\sqrt{10}$ i $\sqrt{8}$.

Funkciju $f(x) = \sqrt{x}$ aproksimiramo linearnom funkcijom oko $x_0 = 9$ i dobivamo

$$f(x) = f(9) + f'(9)(x - 9) + r(x)$$

ili

$$f(x) = 3 + \frac{1}{6}(x - 9) + r(x)$$

odnosno

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6}(10 - 9) + r(10) = 3,16666\ldots + r(x)$$

Kako je

$$\sqrt{10} = 3,16227766...$$

možemo izračunati i grešku aproksimacije.
Analogno

$$\sqrt{8} = 3 + \frac{1}{6}(8-9) + r(8) = 2,83333\ldots + r(x)$$

i zbog

$$\sqrt{8} = 2,828427125...$$

vidimo kolika je točnost dobivenog računa.

Diferencijal funkcije $y = f(x)$ u x je

$$dy = f'(x)dx$$

ili

$$dy = y'dx$$

te vrijedi

$$\Delta y \approx dy.$$

Taylorova formula

Teorem o srednjoj vrijednosti: Neka je f neprekidna funkcija na $[a, b]$ i derivabilna na otvorenom intervalu (a, b).
Tada postoji barem jedan $c \in (a, b)$ takav da vrijedi

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Lagrange (1736-1813) je pokazao da postoji točka $(c, f(c))$, $c \in (a, b)$ krivulje $G = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}(f)\}$ u kojoj je tangenta paralelna sekanti kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ ili ekvivalentno, postoji $0 < \vartheta < 1$ takav da je

$$f(b) - f(a) = f'(a + \vartheta(b - a))(b - a)$$

Pišemo li $a = x_0$ i $b = x$, dobivamo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \vartheta(x - x_0))(x - x_0).$$

Posljedice teorema o srednjoj vrijednosti;

1. Neka je $f'(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$. Onda je

$$f(x) = const.$$

2. Neka je $f_1'(x) = f_2'(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Onda je

$$f_2(x) = f_1(x) + const.$$

3. **Cauchyjeva formula**

Neka su f_1, f_2 neprekidne funkcije na intervalu $[a, b]$ i postoje derivacije f_1', f_2' na otvorenom intervalu $< a, b >$, te $f_1'(x) \neq 0$ za svako
$x \in < a, b >$. Onda postoji $c \in < a, b >$ takav da vrijedi

$$\frac{f_2(b) - f_2(a)}{f_1(b) - f_1(a)} = \frac{f_2'(c)}{f_1'(c)}.$$

4. **L'Hospitalovo pravilo**

Neka su f_1, f_2 neprekidne funkcije na intervalu $[a, b]$, $f_1(x_0) = 0$, $f_2(x_0) = 0$ za neko $x_0 \in (a, b)$, postoje derivacije $f_1'(x), f_2'(x) \neq 0$ za svako $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Onda je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}.$$

Primjer: Izračunat ćemo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4+x^3+x^2+x-4}{x^4+3x^3+2x^2+x-7}.$$

Kako je

$$\frac{f_1(1)}{f_2(1)} = \frac{0}{0}$$

imamo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4+x^3+x^2+x-4}{x^4+3x^3+2x^2+x-7} = \lim_{x\to 1} \frac{4x^3+3x^2+2x+1}{4x^3+9x^2+4x+1} =$$

$$= \frac{10}{18}$$

L'Hospital-ovo pravilo vrijedi i ako je

$$\frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Izračunajmo

$$\lim_{x \to 0} x \ln x$$

Proširenje teorema o srednjoj vrijednosti je:

Teorem: Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i postoji derivacija f' funkcije f za svako $x \in [a, b]$ i druga derivacija f'' funkcije f za svako $x \in < a, b >$, onda postoji $\vartheta \in < 0, 1 >$ takav da vrijedi

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + f''(a + \vartheta(b - a))\frac{(b - a)^2}{2}.$$

Dokaz: Konstruiramo pomoćnu funkciju

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} \cdot C$$

za koju je $\varphi(b) = 0$. konstantu C ćemo odrediti iz pretpostavke da je $\varphi(a) = 0$ i dobivamo

$$C = 2\frac{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)}{(b-a)^2}.$$

No kako je $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ po Rollovom teoremu ili po teoremu o srednjoj vrijednosti postoji $c \in < a, b >$ takav da je $\varphi'(c) = 0$. No sada je

$$C = f''(c)$$

i time je teorem dokazan.

Pišemo li $a = x_0$ i $b = x$, dobivamo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0 + \vartheta(x - x_0))\frac{(x - x_0)^2}{2}.$$

Primjetimo da smo ovim dobili kako se aproksimira derivabilna funkcija polinomom prvog reda i kako izgleda greška ako funkcija ima drugu derivaciju. Stoga ćemo označiti grešku aproksimacije s

$$R_2(x - x_0) = f''(x_0 + \vartheta(x - x_0))\frac{(x - x_0)^2}{2}.$$

Ako funkcija ima dovoljan broj derivacija u okolini točke x_0, onda ćemo funkciju f aproksimirati polinomom P_n n-tog stupnja koji ima svojstvo

$$\begin{aligned} f(x_0) &= P_n(x_0) \\ f'(x_0) &= P_n'(x_0) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x_0) &= P_n^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

i

$$f(x) \approx P_n(x)$$

za x blizu x_0. Kako je

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

imamo Taylorovu formulu

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!} + R_{n+1}(x-x_0)$$

gdje je

$$R_{n+1}(x-x_0) = f^{(n+1)}(x_0+\vartheta(x-x_0))\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Lagrangeov oblik ostatka.

Ako funkcija f ima derivaciju $f^{(n)}$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i

$$\lim_{n \to \infty} |R_{n+1}| = 0$$

imamo Taylorov red ili razvoj funkcije f oko x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!}.$$

Primjer: Ako je $f(x) = e^x$, onda je $f^{(n)}(x) = e^x$ za svako $n \in \mathbb{R}$. Ako ovu funkciju razvijamo oko $x_0 = 0$ imamo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(0)$$

odnosno

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(0) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

i

$$R_{n+1}(0) = f^{(n+1)}(\vartheta x)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^{(\vartheta x)}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty} |R_{n+1}| = \lim_{n\to\infty} |e^{(\vartheta x)} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}| = e^{(\vartheta x)} \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Imamo Taylorov razvoj funkcije e^x oko nule.
Pogledajmo sada kako ćemo izračunati $e^{0.1}$.
Imamo

$$e^{0.1} \approx 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{240000} + \frac{1}{12000000} + \frac{1}{720000000}$$

Za $n = 0$ imamo $e^{0.1} \approx 1$ i $R_1 = 0.1e^{0.1\vartheta}$.
Za $n = 1$ imamo $e^{0.1} \approx 1.1$ i $R_2 = \frac{0.1^2}{2} e^{0.1\vartheta}$.
Za $n = 2$ imamo $e^{0.1} \approx 1.105$ i $R_3 = \frac{0.1^3}{6} e^{0.1\vartheta}$.

Za $n = 3$ imamo $e^{0.1} \approx 1.1051666...$ i $R_4 = \frac{0.1^4}{24} e^{0.1\vartheta}$.
Za $n = 4$ imamo $e^{0.1} \approx 1.105170833...$
Za $n = 5$ imamo $e^{0.1} \approx 1.105170917...$
Za $n = 6$ imamo $e^{0.1} \approx 1.105170918...$
Možemo takodjer izračunati e razvojem oko nule pa je $x = 1$ i imamo

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + + \frac{1}{4!} + \cdots + + \frac{1}{10!} = 2.71828176.$$

Rast i pad funkcije

Funkcija f **raste** u točki x_0 ako postoji okolina $\mathcal{O}(\delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, točke x_0 takva da vrijedi

$$f(x) < f(x_0),\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

$$f(x_0) < f(x),\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Takodjer kažemo da funkcija f prolazi kroz točku x_0 rastući.
Funkcija f **pada** u točki x_0 ako postoji okolina $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ točke x_0 takva da vrijedi

$$f(x) > f(x_0),\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

$$f(x_0) > f(x),\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Teorem: Ako je $f'(x_0) > 0$, onda funkcija f raste u x_0. Ako je $f'(x_0) < 0$, onda funkcija f pada x_0.

Dokaz:

Ako je $f'(x_0) > 0$, onda za x dovoljno blizu x_0 vrijedi

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Ako je

$$x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0).$$

Ako je

$$x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0).$$

Primjer: Imamo funkciju

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

Kako prolazi ova funkcija kroz

$$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 4.$$

Kako je

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

i $f'(-1) = 9 > 0$ kroz $x_1 = -1$ prolazi rastući,
$f'(1) = -3 < 0$ kroz $x_2 = 1$ prolazi padajući
$f'(4) = 24 > 0$ kroz $x_3 = 4$ prolazi rastući.

Teorem: Ako je $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, onda funkcija f raste na (a, b). Ako je $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, onda funkcija f pada na (a, b).

Dokaz izvodimo pomoću teorema o srednjoj vrijednosti. Ako je $x_1, x_2 \in (a, b)$ postoji $x \in (x_1, x_2)$, takav da je

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_1 - x_2}.$$

Ako je $f'(x) > 0$ onda je za $x_2 > x_1$ $f(x_2) > f(x_1)$.
Ako je $f'(x) \geq 0$ i $f'(x) = 0$ na konačnom skupu točaka, onda funkcija f raste na intervalu (a, b).

Primjeri:

1.Za $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x > 0\,, \forall x > 0$.

Za $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x < 0$, $\forall x < 0$.

2. Za $f(x) = -x^2$, $f'(x) = -2x > 0$, $\forall x < 0$.

Za $f(x) = -x^2$, $f'(x) = -2x < 0$, $\forall x > 0$.

3. Za $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2 > 0$, $\forall x \neq 0$.

4. Za $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$, funkcija raste $\forall x \in (-\infty, 0), \forall x \in (0, \infty)$.

5. Za $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ekstremi funkcije jedne varijable

Neprekidna funkcija f dostiže svoju najveću i najmanju vrijednost na zatvorenom intervalu $[a, b]$, tj. postoji $x^*, \tilde{x} \in [a, b]$ takvi da je

$$f(x^*) \geq f(x), \forall x \in [a, b],$$

$$f(\tilde{x}) \leq f(x), \forall x \in [a, b].$$

Kažemo da je x^* **globalni maksimum** funkcije f na intervalu $[a, b]$, a $\tilde{x}$ **globalni minimum** funkcije f na intervalu $[a, b]$. Jedno ime za globalni maksimum i globalni minimum je **globalni ekstrem**.

Definicija: $x^* \in [a, b]$ je **lokalni maksimum** funkcije f ako postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(x^*) \geq f(x), \forall x \in (x^* - \delta, x^* + \delta) \cap [a, b].$$

$\tilde{x} \in [a, b]$ je **lokalni minimum** funkcije f ako postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(\tilde{x}) \leq f(x), \forall x \in (\tilde{x} - \delta, \tilde{x} + \delta) \cap [a, b].$$

Jedno ime za lokalni maksimum i lokalni minimum je **lokalni ekstrem**.

Teorem: Neka je $x^* \in (a, b)$ lokalni ekstrem funkcije f i postoji $f'(x^*)$. Onda je $f'(x^*) = 0$.

Dokaz: Ako je x^* lokalni maksimum, onda postoji okolina $(x^* - \delta, x^* + \delta)$ oko točke x^* takva da za svako $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta) = \mathcal{O}(\delta)$ vrijedi

$$f(x^*) \geq f(x).$$

Mi biramo $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$. Ako je $x < x^*$, tj. $x \in (x^* - \delta, x^*)$, onda je

$$\frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \geq 0$$

pa je

$$\lim_{x \to x^* -} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \geq 0.$$

Ako je $x > x^*$, onda je

$$\frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \leq 0$$

$$\lim_{x \to x^* +} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \leq 0.$$

Dakle imamo $f'(x^*) = 0$.

Teorem: Ako je funkcije f definirana na intervalu $[a, b]$ i $f \in C^2(a, b)$ postoje prva i druga derivacija za neko $x^*, \tilde{x} \in (a, b)$ takve da je

(i)

$$f'(x^*) = 0,\ f''(x^*) < 0,$$

onda je x^* lokalni maksimum

(ii)

$$f'(\tilde{x}) = 0,\ f''(\tilde{x}) > 0,$$

onda je $\tilde{x}$ lokalni minimum.

Dokaz:

Dokazati ćemo drugu tvrdnju teorema. Prva se dokazuje analogno. Ako je $f''(x_0) > 0$ zbog neprekidnosti funkcije f'' postoje i druge vrijednosti varijable iz neke dovoljno male okoline oko x_0 osim vrijednosti x_0 u kojima je druga derivacija pozitivna. Zato pri korištenju proširenog teorema o srednjoj vrijednosti

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0 + \vartheta(x - x_0))\frac{(x - x_0)^2}{2}.$$

biramo x takav da za dobiveni ϑ je $f''(x_0 + \vartheta(x - x_0)) \geq 0$. Ako je $\tilde{x} = x_0$ i $f'(\tilde{x}) = 0$ imamo $f(x) \geq f(\tilde{x})$ za svako x dovoljno blizu $\tilde{x}$ pa je u $\tilde{x}$ dostignut lokalni minimum.

Komentirajmo prvu tvrdnju teorema (i) Ako je $f''(x^*) < 0$, onda je

za svako x dovoljno blizu x_0

$$\frac{f'(x) - f'(x^*)}{x - x^*} = \frac{f'(x)}{x - x^*} < 0$$

zbog $f'(x^*) = 0$. Za

$$x < x_0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

pa funkcija f do točke x^* raste.
Za

$$x > x^* \Rightarrow f'(x) < 0$$

pa funkcija f od točke x^* pada. Dakle, x^* je lokalni maksimum.
Analogno komentiramo (ii).

Takodjer možemo lagano pokazati slijedeće: ako je $f'(\tilde{x}) = 0$ i $f''(\tilde{x}) > 0$ onda postoji okolina oko točke $\tilde{x}$ u kojoj je funkcija f konveksna.

Konveksna funkcija

Definicija: Funkcija

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

je konveksna ako za svako $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$ i $\alpha \in [0, 1]$ vrijedi

$$f((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2).$$

Teorem: Ako je funkcija konveksna na $[a, b]$ onda je neprekidna na (a, b).
Derivabilna funkcija je konveksna ako i samo ako tangenta u bilo kojoj točki grafa funkcije leži na grafu ili ispod njega.

Teorem: Ako funkcija f ima derivaciju na (a, b), ona je konveksna na intervalu (a, b) ako i samo ako

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x, x_0 \in < a, b > .$$

Dokaz: Neka je funkcija f konveksna na intervalu (a, b), tj. za svako $x_1, x_2 \in (a, b)$ i $\alpha \in (0, 1)$ vrijedi

$$f((1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq (1 - \alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2).$$

$(x_1, f(x_1)$ i Označimo s $x_0 = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2)$, gdje je $\alpha \in (0, 1)$. Možemo onda lako vidjeti da je

$$x_0 - x_1 = \alpha(x_2 - x_1).$$

Sada imamo

$$f(x_0) - f(x_1) \leq \alpha(f(x_2) - f(x_1)).$$

Uz $x_1 \neq x_2$ pretpostavimo da je $x_1 < x_2$ a zbog konstrukcije x_0 je

$$x_1 < x_0 < x_2.$$

To znači da je

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Ako sada pustimo da $x_1 \to x_0$ s lijeve strane dobivamo derivaciju funkcije f u x_0. S desne strane je neprekidna funkcija i dobivamo

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

odnosno

$$f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0).$$

i

$$f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0), \forall x_2, x_0 \in < a, b > .$$

Prvu nejednakost množimo s $(1 - \alpha)$, drugu s α, pa ih potom zbrojimo i dobivamo

$$(1-\alpha)f(x_1)+\alpha f(x_2) \geq f(x_0)+f'(x_0)((1-\alpha)(x_1-x_0)+\alpha(x_2-x_0)) =$$

,

$$= f(x_0).$$

Ako funkcija f ima prvu derivaciju na (a, b) i ona je neprekidna funkcija, te drugu derivaciju na (a, b) i ona je neprekidna na (a, b), kažemo da je ona klase C^2 na (a, b) i pišemo $f \in C^2(a, b)$.

Teorem: Neka je $f \in C^2(a, b)$. Onda je f konveksna ako i samo ako

$$f''(x) \geq 0, \forall x \in (a, b).$$

Takodjer funkcija $f \in C^2(a, b)$ je konkavna na (a, b) ako i samo ako je $f''(x) \leq 0$ za svako $x \in (a, b)$.

Točka infleksije

Kažemo da je x_0 točka infleksije funkcije f ako u njoj iz konveksnog prelazi u konkavni ili konkavnog u konveksni oblik. Ako je funkcija $f \in C^2(a, b)$ ona u točki x_0 ima točku infleksije ako druga derivacija u x_0 mijenja predznak. Na primjer ako je lijevo od x_0 konveksna, tj. $f''(x) > 0$ za $x < x_0$, a desno od x_0 konkavna, tj. tj. $f''(x) < 0$ za $x > x_0$, onda ona ima točku infleksije u x_0. No zbog neprekidnosti druge derivacije f'' funkcije f mora biti $f''(x_0) = 0$.

Teorem: Ako je $f \in C^2(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, $f''(x_0) = 0$ i postoji $f'''(x_0) \neq 0$, onda je u x_0 točka infleksije.

Dokaz: Ako je $f''(x_0) = 0$ i

$$f''(x) < 0, \ x < x_0$$

te

$$f''(x) > 0, \ x > x_0$$

onda je

$$\frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$$

pa i

$$f'''(x_0) > 0.$$

Teorem: Ako funkcija f ima sve derivacije u x_0 koje su nam potrebne tj. $f \in C^n(a, b)$ i ako je

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

i

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

onda je za
(i) n paran broj i $f^{(n)}(x_0) > 0$ u x_0 strogi lokalni minimum
(ii) n paran broj i $f^{(n)}(x_0) < 0$ u x_0 strogi lokalni maksimum
(iii) n neparan broj u x_0 točka infleksije.

Komentar: Funkciju aproksimiramo u okolini točke x_0 polinomom $n-1$ stupnja i kako su otpali mnogi člavovi dobivamo za x blizu x_0 i $\vartheta \in (0,1)$

$$f(x) = f(x_0) + f^{(n)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))\frac{(x - x_0)^n}{n!}.$$

Član $f^{(n)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))\frac{(x-x_0)^n}{n!}$ odredjuje ponašanje funkcije u okolini od x_0, njegov predznak i potencija n. Kako smo uzeli samo one vrijednosti varijable x blizu x_0 za koje je n-ta derivacija istog predznaka kao i $f^{(n)}(x_0)$ imamo slijedeće :
(i) $(x - x_0)^n > 0$ za svako $x \neq x_0$ pa je $f(x) > f(x_0)$
(ii) $-(x - x_0)^n < 0$ za svako $x \neq x_0$ pa je $f(x) < f(x_0)$
(iii)recimo da je $f^{(n)} > 0$ onda je $(x - x_0)^n > 0$ za svako $x > x_0$ pa

je $f(x) > f(x_0)$ desno od x_0 i tu je funkcija konveksna. Lijevo od x_0 funkcija je konkavna i za $x < x_0$ je $f(x) < f(x_0)$. Kroz točku x_0 funkcija prolazi rastući.

Analogno ako je n neparan broj i $f^{(n)}(x_0) < 0$ onda funkcija f kroz točku x_0 prolazi padajući i lijevo od te točke je konkavana a desno konveksna.

Koeficijent elastičnosti

Pretpostavimo da imamo dvije medjusobno zavisne ekonomske veličine, na primjer potražnju za nekom robom i cijenu te robe. Elastičnost je sposobnost ekonomske veličine da reagira, više ili manje intenzivno, na promjenu neke druge ekonomske veličine o kojoj zavisi. Recimo, ako je $q = q(p)$, p je cijena robe a q količina potražnje koja ovisi o cijeni.

Što je relativna promjena funkcije prema relativnoj promjeni varijable veća, to je funkcija elastičnija. Ovo je opisao Marshal 1885 godine u studiju potražnje.

Koeficijent elastičnosti je mjera elastičnosti ekonomske veličine y u odnosu na promjenu od x, ili preciznije koeficijent elastičnosti je

omjer relativne promjene od y i x i pišemo

$$E_{y,x} \approx \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

za Δx dovoljno malo. Ako je $\frac{\Delta x}{x} = 1\%$, onda je

$$E_{y,x} \approx \frac{\Delta y}{y} \cdot 100.$$

Definiramo koeficijent elastičnosti u točki x

$$E_{y,x} = \lim_{\Delta x \to x_0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}y'.$$

Takodjer

$$E_{q,p} = \frac{d(\log q)}{d(\log p)}.$$

Elastičnost zbroja

Ako je

$$y = u + v$$

tj.

$$y(x) = u(x) + v(x)$$

onda je

$$E_{y,x} = \frac{x}{u(x) + v(x)}(u'(x) + v'(x)).$$

Elastičnost produkta

Ako je

$$y = u \cdot v$$

tj.

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

onda je

$$E_{y,x} = \frac{x}{u(x)v(x)} \cdot (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) = E_{u,x} + E_{v,x}.$$

Elastičnost kvocijenta

Ako je

$$y = \frac{u}{v}$$

tj.

$$y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

onda je

$$E_{y,x} = \frac{xv(x)}{u(x)} \cdot \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = E_{u,x} - E_{v,x}.$$

Ako je $y(x) = ax^n$ onda je

$$E_{y,x} = n.$$

Ako je

$$|E_{y,x}| > 1$$

kažemo da je y **elastična** u x.
Ako je

$$|E_{y,x}| < 1$$

kažemo da je y **neelastična** u x.
Ako je

$$E_{y,x} = 0$$

kažemo da je y **savršeno neelastična** u x.
Ako je

$$E_{y,x} = \infty$$

kažemo da je y **perfektno elastična** u x.

Takodjer vrijedi

$$E_{y,x}E_{x,y} = 1.$$

Primjer: Poznata je funkcija potražnje q neke robe u ovisnosti o cijeni te robe p

$$q(p) = \sqrt{\frac{32 - p^2}{117,5}}.$$

Odredite koeficijent elastičnosti potražnje prema promjeni cijene na razini $p = 2NJ$ i interpretirajte rezultat. Odredite područje elastičnosti te funkcije. Kako je

$$E_{q,p} = -\frac{p^2}{32 - p^2}$$

to je

$$E_{q,2} = -\frac{1}{7}.$$

Ako cijena s vrijednosti $p = 2$ raste za 1% i dodje na vrijednost $p = 2,02$ količina potražnje će približno pasti za $\frac{1}{7}\% = 0,24\%$. Na danoj razini cijene potražnja je neelastična. Sada ćemo odrediti područje elastičnosti. Kao prvo ova funkcija je definirana za $p \geq 0$ i $q(p) \geq 0$ tj.

$$\mathcal{D}(q) = [0, \sqrt{32}].$$

No

$$|E_{q,p}| = \frac{p^2}{32 - p^2} > 1$$

za $p > 4$, pa je

$$P_{el} = \{p \in \mathcal{D}(q) : |E_{q,p}| > 1\} =< 4, \sqrt{32}].$$

Funkcija troškova proizvodnje

Ako je $Q \geq 0$ razina (količina) proizvodnje neke robe, njeni **troškovi proizvodnje** ovise o razini Q,

$$T = T(Q).$$

Funkcija troškova je rastuća funkcija, pa je $T' \geq 0$.
Funkcija graničnih (marginalnih) troškova je

$$T' = T'(Q) = t(Q).$$

Ako je razina prizvodnje $Q > 0$, onda je **funkcija prosječnih troškova**

$$A(Q) = \frac{T}{Q} = \frac{T}{Q}(Q).$$

Za razinu priozvodnje $Q = 0$, $T(0)$ su fiksni troškovi. Imamo

ukupni troškovi= varijabilni troškovi + fiksni troskovi

Primjer: Poznata je funkcija ukupnih troškova

$$T(Q) = Q^3 - 12Q^2 + 60Q.$$

Ova funkcija je rastuća, jer je $T' = 3Q^2 - 24Q + 60 > 0$ i ima točku infleksije za $Q = 4$, $T(4) = 112$.
Funkcija graničnih troškova je $T' = 3Q^2 - 24Q + 60$ i ova funkcija dostiže najmanju vrijednost za $Q = 4$, $T'(4) = 12$.
Funkcija prosječnih troškova je

$$\frac{T}{Q} = Q^2 - 12Q + 60$$

i ona dostiže najmanju vrijednost za $Q = 6$, $\frac{T}{Q}(6) = 24$.

Primjetimo da na razini proizvodnje $Q = 6$ funkcije prosječnih i graničnih troškova su jednake. Naime

$$(\frac{T}{Q})' = \frac{1}{Q}(T' - \frac{T}{Q}) \Longrightarrow T' = \frac{T}{Q}.$$

Koeficijent elastičnosti funkcije prosječnih troškova je

$$E_{\frac{T}{Q},Q} = E_{T,Q} - 1.$$

Interpretacija : Na razini proizvodnje $Q = 6$

$$E_{\frac{T}{Q},Q}(6) = 0 = E_{T,Q} - 1 \Longrightarrow T' = \frac{T}{Q}.$$

Ako na razini $Q = 6$ proizvodnja raste za 1% tj. naraste na $Q = 6.06$ prosječni troškovi približno se ne mijenjaju, a ukupni troškovi približno rastu za 1%. Takodjer

$$E_{T,Q} = \frac{T'}{A} = \frac{T'}{\frac{T}{Q}}$$

pa

$$E_{T,Q} = 1 \Longleftrightarrow T' = \frac{T}{Q}.$$