Sadržaj:

- **Diferencijalni račun (nastavak)**
  - **Derivacije višeg reda**
  - **Približno računanje pomoću diferencijala funkcije**

  - **Osnovni teoremi diferencijalnog računa**
  - **L'Hospitalovo pravilo**

Derivacije višeg reda

Derivacija funkcije *f* je opet funkcija, i može biti derivabilna. U tom slučaju derivacija funkcije *f'* se označava kao *f''* i zove druga derivacija funkcije *f*. Derivacija funkcije *f''*se zove treća derivacija funkcije *f*, itd. Ove derivacije: druga, treća, ... se zovu derivacije višeg reda. Obično se označavaju s *f'', f'''*, f'^{V}, ali i ovako: $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, $f^{(6)}$,… Dakle, općenito, k-ta derivacija $f^{(k)}$ je prva derivacija od $f^{(k-1)}$.

Primjer: Dokazati da za funkciju $y = A\cos x + B\sin x$, gdje su *A* i *B* bilo koje konstante, vrijedi $y'' = -y$.

Rješenje: $y' = -A\sin x + B\cos x, \quad y'' = -A\cos x - B\cos x = -y.$

Primjer: Naći $f^{(5)}$, ako je $f(x) = 1 - x^2 - x^4$.

Rješenje: $f'(x) = -2x - 4x^3, f''(x) = -2 - 12x^2, f'''(x) = -24x, f^{(4)} = -24,$
$f^{(5)} = 0.$

Primjer: Naći brzinu i akceleraciju materijalne točke koja se giba po pravcu prema zakonu gibanja $s(t) = 10\left(1 - e^{-3t}\right)$.

Rješenje: Brzina *v(t)* je derivacija puta po vremenu, a akceleracija *a(t)* je derivacija brzine po vremenu. Dakle,

$$v(t) = s'(t) = \left(10\left(1 - e^{-3t}\right)\right)' = 10\left(-e^{-3t}\right)(-3) = 30e^{-3t},$$

$$a(t) = v'(t) = \left(30e^{-3t}\right)' = 30\left(e^{-3t}\right)(-3) = -90e^{-3t}.$$

Diferencijal funkcije

Pojam diferencijala je izrazito važan u diferencijalnom računu funkcija više varijabli, dok kod funkcija jedne varijable ima nešto manju važnost. Pojam derivacije funkcije vezan je za pojam promjene funkcije. U dokazu teorema o deriviranju složene funkcije primjenili smo formulu:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\cdot\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x\text{, gdje je } \lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0,$$

koja slijedi odmah iz definicije derivacije: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Neka je točka x učvršćena, a vrijednost Δx varijabilna. Prirast funkcije može se predočiti kao zbroj dvaju članova, $f'(x)\cdot\Delta x$ **i** $\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x$**, pri čemu je drugi član mali u odnosu na prvi član za mali prirast argumenta Δx (jer** $\varepsilon(\Delta x)\to 0$**). Prvi član** $f'(x)\cdot\Delta x$ **zove se diferencijal funkcije *f* u točki *x* i označava se s *df*(x)(Δx). Prema tome, diferencijal u čvrstoj točki x je linearna funkcija u varijabli Δ*x*, definirana s**

$$\boxed{df(x)(\Delta x)=f'(x)\cdot\Delta x}$$

što često pišemo skračeno $\boxed{df(x) = f'(x) \cdot \Delta x}$

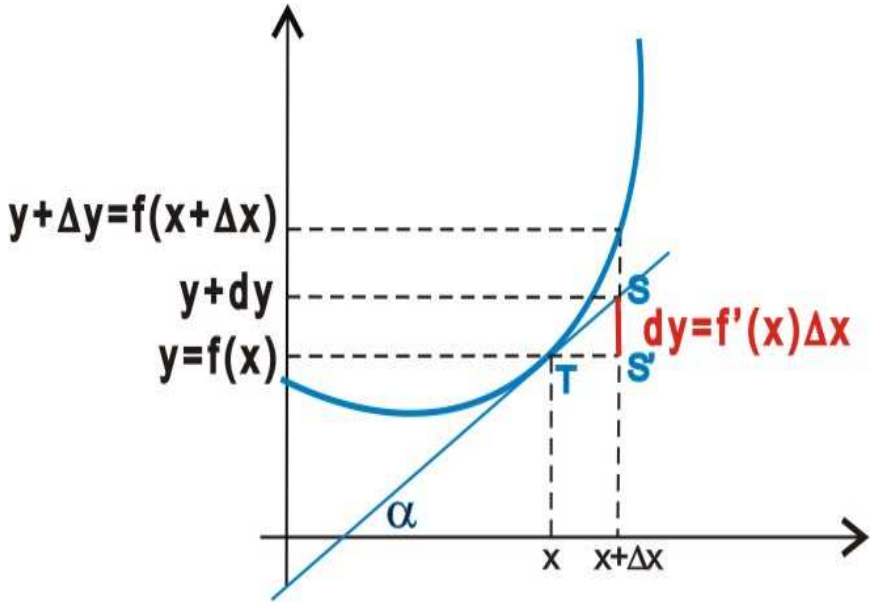
odnosno, ako to uskladimo s oznakom $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$**,**

$$\boxed{df(x) = f'(x) \cdot dx}$$

Obično kažemo da je diferencijal linearni dio promjene funkcije, što je jasno iz

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$$

ali ćemo to objasniti i geometrijski. U trokutu $\Delta TS'S$ **je** $\dfrac{|SS'|}{|TS'|} = tg\,\alpha = f'(x)$**. Dakle,** $|SS'| = f'(x) \cdot \Delta x$**, tj. diferencijal računa promjenu vrijednosti ordinate po tangentina krivulju u točki** x_0**.**



Primjer: Naći diferencijal funkcije $f(x) = \ln \sin \sqrt{x}$.

Rješenje: $f'(x) = \left(\ln \sin \sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{\sin \sqrt{x}} \cos \sqrt{x} \, \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \sin \sqrt{x}}$.

Prema tome: $df(x) = \dfrac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \sin \sqrt{x}} dx$.

Budući da je u formuli za diferencijal bitan dio derivacija, svojstva diferencijala su analogna svojstvima derivacija. Tako imamo:

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$,
2. $d(u\,v) = v\,du + u\,dv$,
3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$,
4. $d(u(v)) = (u(v))'\,dv$.

Približno računanje pomoću diferencijala

Diferencijal možemo koristiti za približno računanje. Ako je dx mali, onda se prirast po tangenti malo razlikuje od prirasta funkcije (vidi sliku). Tako imamo:

$$\Delta f(x) \approx f'(x_0)\,\Delta x, \quad \text{tj.} \quad f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x.$$

Odavde slijedi formula

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x,$$

kojase zove formula konačnog prirasta.

Primjer: **Neka je $f(x) = 5x^3 - 2x + 3$. Izračunaj približno f(2.01).**

Rješenje: **Stavimo x_0 =2, Δx = 0.01. Imamo:**

$$f(2.01) = f(2+0.01) = f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(2) + f'(2)\cdot 0.01;$$

$$f(2) = 5\cdot 2^3 - 2\cdot 2 + 3 = 39, \quad f'(2) = \left(5x^3 - 2x + 3\right)'_{x=2} = \left(15x^2 - 2\right)_{x=2} = 58.$$

Dakle, $f(2.01) \approx 39 + 58\cdot 0.01 = 39.58.$

Pogledajmo koliko smo pogriješili ovim približnim računom. Stvarna vrijednost

funkcije iznosi 39.583, pa je pogreška 0.003.

Računanje potencije: Ako je $f(x) = x^n$, onda imamo:

$$(x_0 + \Delta x)^n \approx x_0{}^n + n x_0{}^{n-1} \Delta x.$$

Primjer: Izračunaj približno 1.01^2.

Rješenje: Stavimo $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.01$. Imamo $f'(x) = 2x$, pa je:

$1.01^2 = (1 + 0.01)^2 \approx 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \Delta x = 1 + 2 \cdot 0.01 = 1.02$. Stvarna vrijednost je 1.0201, pa je pogreška 0.0001.

Računanje korijena: Ako je $f(x) = \sqrt[n]{x}$, onda imamo:

$$\sqrt[n]{(x_0 + \Delta x)} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x_0{}^{n-1}}}.$$

Primjer: Izračunaj približno $\sqrt{26}$.

Rješenje: Stavimo f(x) = $\sqrt{x}$, x_0 =25, Δx = 1. Imamo $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, pa je:

$\sqrt{26} = \sqrt{25+1} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot \Delta x = 5 + \frac{1}{10} \cdot 1 = 5.1.$ Stvarna vrijednost je približno 5.0990195, pa je pogreška 0.001.

Osnovni teoremi diferencijalnog računa

U prethodnom poglavlju smo naučili derivirati. Sada nas zanima primjena diferencijalnog računa za funkcije jedne varijable. Jedna od primjena je ispitivanje toka zadane funkcije. Da bismo mogli nacrtati graf funkcije potrebne su nam neke tvrdnje koje vežu pojam derivacije zadane funkcije i ponašanje njezinog grafa. Upravo su osnovni teoremi diferencijalnog računa ta poveznica iz koje iščitavamo, izravno ili neizravno, kako se ponaša zadana funkcija.

Najprije ćemo definirati pojam lokalnog ekstrema.

Ekstremi funkcije

Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija definirana na bilo kojem zadanom nepraznom skupu $S \subseteq \mathbb{R}$. Za točku $a \in S$ kažemo da je *a* točka maksimuma od f ako za sve $x \in S$ vrijedi

$$f(x) \leq f(a).$$

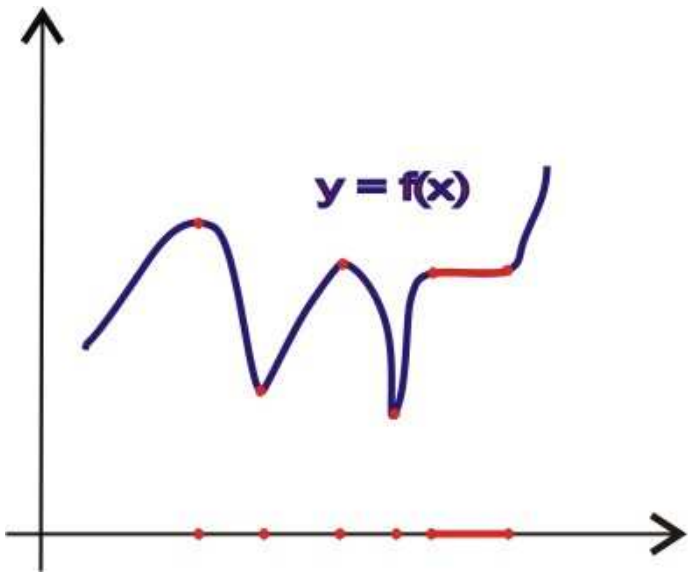
Ako za sve $x \in S$ vrijedi $f(x) \geq f(a)$, onda kažemo da je *a* točka minimuma od f.

U prvom slučju pišemo da je $f(a) = \max\{f(x) : x \in S\}$, ili kraće $f(a) = \max\limits_{x \in S} f(x)$.

Taj broj je maksimum funkcije na skupu S. U drugom slučaju pišemo $f(a) = \min\limits_{x \in S} f(x)$. Taj broj je minimum funkcije na skupu S.

Sve točke maksimuma i minimuma funkcije f zovemo ekstremima funkcije f.

Ako u gornjoj funkciji vrijedi stroga nejednakost uz dodatni uvjet x≠a, onda govorimo o točki strogog maksimuma ili minimuma, ili o strogom ekstremu.

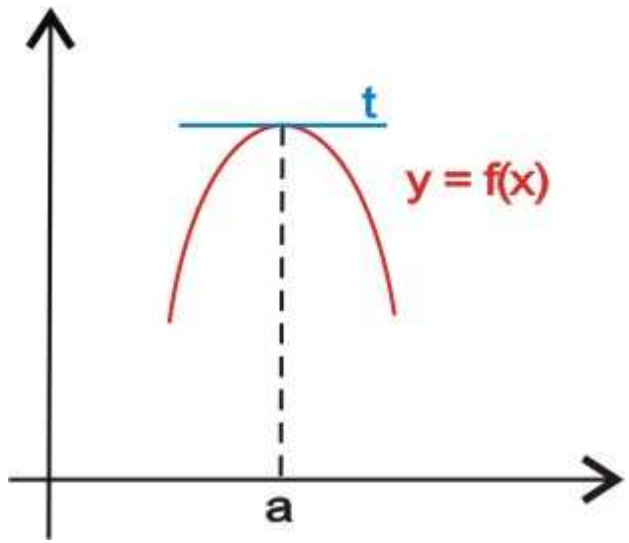


Lokalni ekstremi

Neka je *I* otvoreni interval u $\mathbb{R}$ i f : *I* $\to \mathbb{R}$ bilo koja funkcija. Za točku *a*$\in$ *I* kažemo da je točka lokalnog maksimuma od f ako postoji otvoreni interval *O(a)* koji sadrži *a*, takav da restrikcija $f|_{O(a)}$ ima maksimum u točki *a*. Slično se definira i točka lokalnog minimuma od f.

Točke lokalnog maksimuma i minimuma funkcije f : *I* $\to \mathbb{R}$ zovemo točkama lokalnih ekstremima funkcije f. Odgovarajuće točke na grafu funkcije zovemo također lokalnim ekstremima.

Sljedeći teorem kaže da je u svakoj točki lokalnog ekstrema funkcije tangenta na njen graf vodoravna, tj. paralelna s x-osi. Ta je tvrdnja geometrijski skoro očevidna.



Teorem 1. (Fermatov teorem) Neka je I otvoreni interval u $\mathbb{R}$ i neka je $f : I \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija. Ako je $a \in I$ točka lokalnog ekstrema od f, onda je

$$f'(a) = 0.$$

Dokaz: *Neka* je $a \in I$ točka lokalnog ekstrema, npr. točka lokalnog maksimuma. Onda je $f(x) \leq f(a)$ za sve $x \in O(a)$. Dakle, za sve $x \in O(a)$ takve da je $x<a$ vrijedi

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0,$$

jer su brojnik i nazivnik negativni (brojnik može biti i 0). Za $x \in O(a)$ takve da je $x>a$ vrijedi

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0,$$

jer je nazivnik pozitivan. Zbog diferencijabilnosti od f u točki a, u obje gornje nejednakosti možemo računati limes kada $x \to a$ (s lijeva u prvoj nejednakosti, s desna u drugoj). Dobivamo $f'(a) \geq 0$ i $f'(a) \leq 0$, dakle $f'(a) = 0$. Q.E.D.

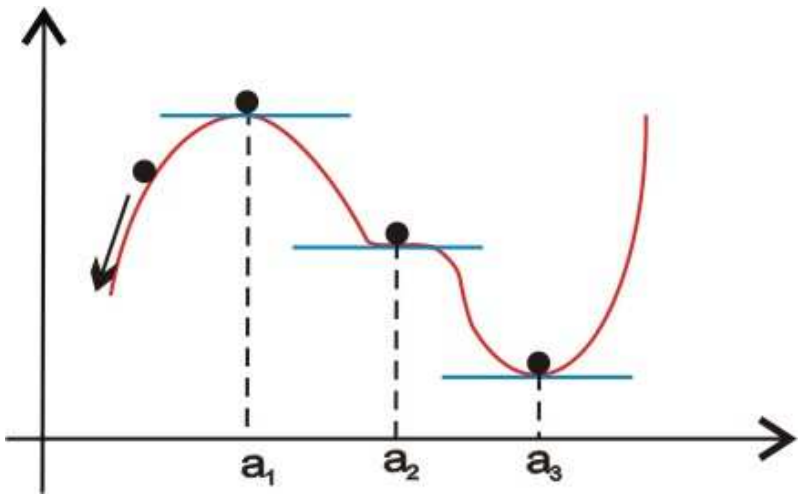
Stacionarne točke

Za diferencijabilnu funkciju *f : I* $\to \mathbb{R}$ točke koje su rješenja jednadžbe

$$f'(x) = 0$$

zovu se stacionarne točke od f.

Naziv "stacionarna (tj. nepokretna) točka" je vrlo zoran: ako zamislimo graf funkcije kao čvrstu podlogu, onda će mala kuglica položena na graf mirovati jedino u onim točkama gdje je tangenta vodoravna, tj. u točkama na grafu koje odgovaraju stacionarnim točkama. U svim ostalim točkama kuglica će se otkotrljati.



Drugim riječima, Fermatov teorem kaže da su sve točke lokalnih ekstrema stacionarne točke. Ovaj jednostavan, ali vrlo važan teorem, povezuje geometriju grafa funkcije s algebrom (nalaženje nul-točaka derivacije).

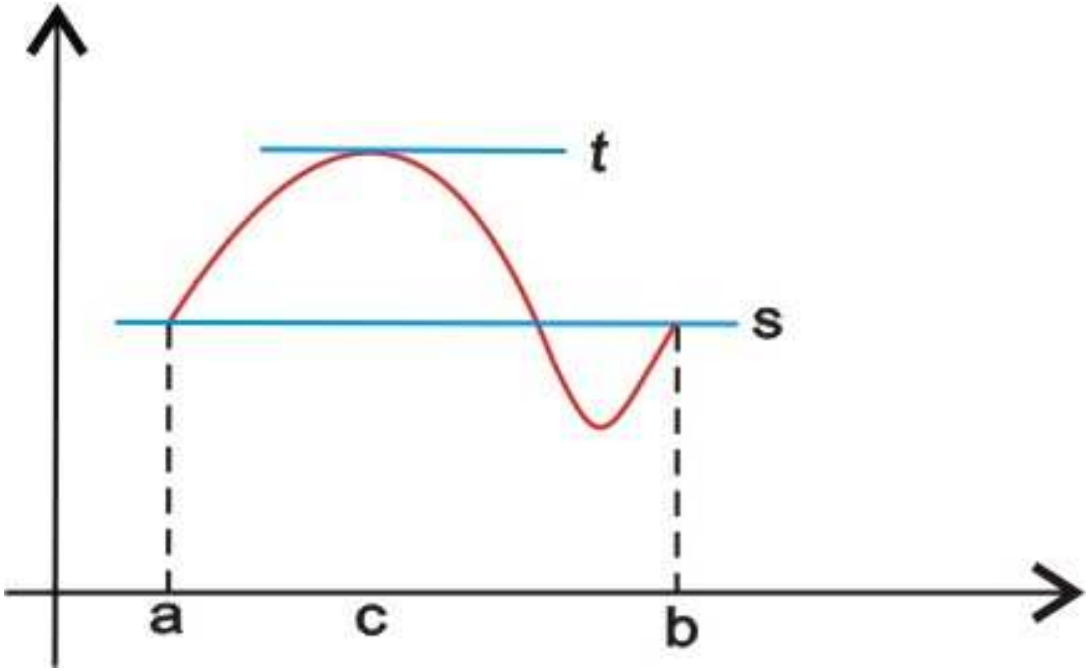
Kritične točke

Nešto širi pojam od stacionarne točke (to su točke u kojima je derivacija jednaka nuli, tj. tangenta na graf je vodoravna) je pojam kritične točke funkcije. To su one točke u kojima je derivacija jednaka nuli ili ne postoji. Za diferencijabilne funkcije su kritične točke isto što i stacionarne.

Teorem 2. (Rolleov teorem)

Neka je $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ neprekinuta funkcija, diferencijabilna na (a,b). Ako je f(a) = f(b), onda postoji točka $c \in (a,b)$ takva da je

$$f'(c) = 0.$$

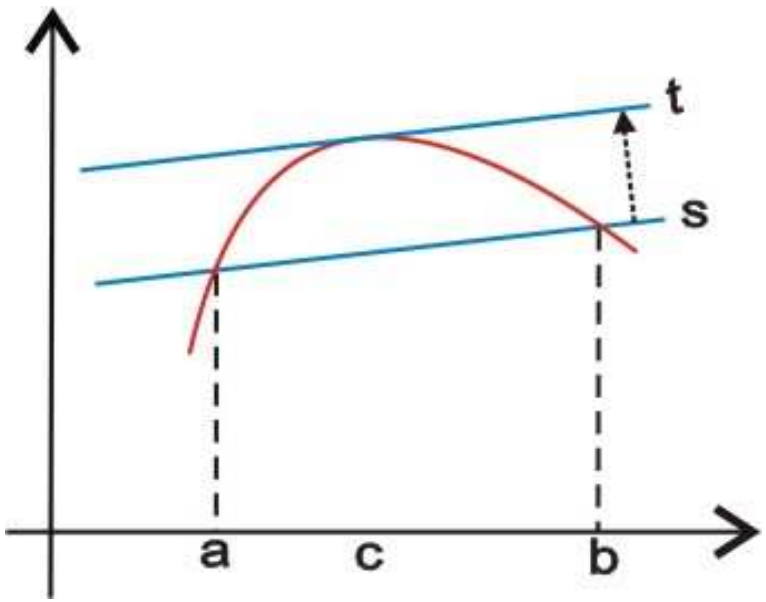


Dokaz: **Ako je *f* konstantna funkcija, onda je f'(x)=0 za sve x $\in$ (a,b), pa tvrdnja vrijedi.**

Ako *f* nije konstantna funkcija, onda u barem jednoj točki c $\in$ (a,b) funkcija ima lokalni ekstrem (minimum ili maksimum) različit od f(a) (u suprotnom bi *f* bila konstantna). Kako je *f* diferencijabilna, prema Fermatovom teoremu dobivamo f'(c)=0. **Q.E.D.**

Teorem 3. (Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti) **Neka je *f* :[a,b] $\rightarrow \mathbb{R}$ neprekinuta funkcija, diferencijabilna na *(a,b)*. Onda postoji točka *c* $\in$ *(a,b)* takva da je**

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$



Slika: Postoji tangenta koja je paralelna sa sekantom

Dokaz: **Definirajmo pomoćnu funkciju** $F(x) = f(x) - \lambda x$. **Odaberimo konstantu** λ **tako da bude** $F(a) = F(b)$. **Dakle:** $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$, **pa slijedi da je** $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. **Ovako definirana funkcija** $F(x)$ **ispunjava sve uvjete Rolleovog teorema, pa slijedi da postoji** $c \in (a,b)$ **takav da vrijedi** $F'(c)=0$. ***Kako je*** $F'(x) = f'(x) - \lambda$, **slijedi da je** $f'(c) - \lambda = 0$, **tj.** $f'(c) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. **Tvrdnja je dokazana.**

Q.E.D.

Teorem je geometrijski skoro očevidan. Naime, ako povučemo sekantu kroz točke na grafu funkcije f **koje odgovaraju x=a i x=b, onda postoji tangenta na** f **u nekoj točki** $c \in (a,b)$ **koja je paralelna sekanti, tj.**

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Korolar 1. Neka je *I* otvoreni interval u $\mathbb{R}$.

(a) Neka je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ diferencijabilna. Ako je f'(x) = 0 za sve $x \in I$, onda je funkcija *f* konstantna.

(b) Neka su *f* i $g : I \to \mathbb{R}$ dvije diferencijabilne funkcije. Ako je f'(x) = g'(x) za sve $x \in I$, onda se funkcije razlikuju za konstantu, tj. f(x) = g(x) + C.

Dokaz: (a) Neka su $a, b \in I$ proizvoljno odabrani. Prema Lagrangeovu teoremu postoji $c \in (a,b)$ tako da je

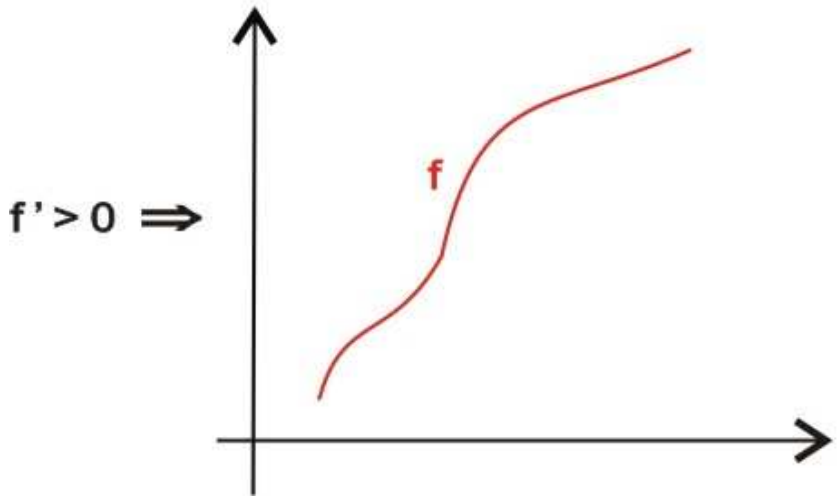
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) = 0 \cdot (b-a) = 0.$$

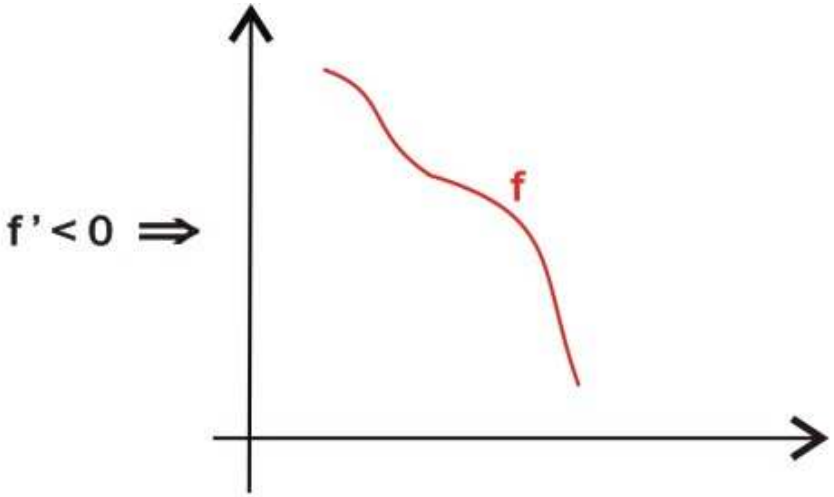
Dakle je $f(a) = f(b)$. Dakle, *f* je konstantna funkcija.

(b) Definirajmo pomoćnu funkciju $F(x) = f(x) - g(x)$. Imamo $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ za sve $x \in I$. Funkcija *F zadovoljava pretpostavke tvrdnje (a), pa slijedi da je* $F(x) = C$ za sve $x \in I$, tj. f(x) = g(x) + C. Q.E.D.

Derivacija i monotonost

Sljedeći korolar je važan za nalaženje intervala monotonosti zadane funkcije, tj. intervala u kojima je funkcija rastuća ili padajuća. Ako je derivacija u nekom intervalu pozitivna, onda je na njemu funkcija strogo rastuća. Ako je derivacija u nekom intervalu negativna, onda je na njemu funkcija strogo padajuća. Sa slike (geometrijski) je tvrdnja skoro očevidna.





Korolar 2. **Neka je *I* otvoreni interval u $\mathbb{R}$.**

(a) Ako je f'(x) > 0 na *I*, onda je funkcija strogo rastuća.

(b) Ako je f'(x) < 0 na *I*, onda je funkcija strogo padajuća.

Dokaz: **(a) Neka je f'(x) > 0 na *I*. Odaberimo bilo koje x_1 i $x_2 \in$ *I* tako da je $x_1 < x_2$. Prema Lagrangeovu teoremu postoji $c \in (x_1, x_2)$ tako da je**

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0,$$

Dakle je $f(x_1) < f(x_2)$.

Tvrdnja (b) se dokazuje na isti način. **Q.E.D.**

Obrat tvrdnji iz Korolara 2 ne vrijedi. Primjerice, funkcija $f(x) = x^3$ strogo raste na cijelom $\mathbb{R}$, ali nije $f'(x) > 0$. Naime $f'(0) = 0$.

Sljedeći teorem će nam omogućiti dokaz L'Hospitalova pravila, koje predstavlja važno sredstvo u računanju raznih limesa.

Teorem 4. (Cauchyjev teorem o srednjoj vrijednosti) Neka su zadane dvije funkcije $f,g:[a,b] \to \mathbb{R}$ koje su neprekinute na $a,b]$ i diferencijabilne na (a,b). Predpostavimo da je $g'(x) \neq 0$ za sve $x \in (a,b)$. Onda postoji $c \in (a,b)$ tako da vrijedi

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dokaz: Dokaz je vrlo sličan dokazu Lagrangeova teorema. Definirajmo pomoćnu funkciju $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$. Odaberimo konstantu λ tako da bude $F(a) = F(b)$. Dakle: $f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$, pa slijedi da je $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ (ne može biti $g(a) = g(b)$, jer bi inače po Rolleovom teoremu primijenjenom na funkciju g postojao $c \in (a,b)$ takav da je $g'(c)=0$, što je nemoguće). Ovako definirana funkcija $F(x)$ ispunjava sve uvjete Rolleovog teorema, pa slijedi da postoji $c \in (a,b)$ takav da vrijedi $F'(c)=0$. Kako je $F'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$, slijedi da je $f'(c) - \lambda g'(c) = 0$, tj. $\lambda = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. Tvrdnja je dokazana. Q.E.D.

L'Hospitalovo pravilo

L'Hospitalovo pravilo služi za računanje limesa kvocijenta dviju funkcija u slučaju kada kvocijent ima neodređeni oblik $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. Ostali neodređeni oblici ($\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞) izračunavaju se svođenjem na neki od ova dva oblika.

U teoremima ćemo koristiti oznaku $\overline{R} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Teorem 5. (L'Hospitalovo pravilo $\frac{0}{0}$) Neka su *f* i *g* diferencijabilne funkcije na $S = (a, x_0) \cup (x_0, b)$ i $g'(x) \neq 0$ na S. Ako vrijedi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

i postoji $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{R}$**, onda je**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokaz: **Dokaz ćemo prvo provesti za limes sdesna. Promatrajmo funkcije *f* i *g* na intervalu (x_0, x_0+h) za neki mali h>0. Ako definiramo $f(x_0) = g(x_0) = 0$, tada funkcije postaju neprekinute na [x_0, x_0+h]. Sada primijenimo Cauchyjev teorem na intervalu [x_0, x] za neki x $\in$ (x_0, x_0+h). Prema ovom teoremu postoji točka c $\in$ (x_0,x) takva da je $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. U ovoj jednakosti pustimo da $x \to x_0$, tada i $c \to x_0$. Iz pretpostavke teorema postoji limes desne strane, pa tada postoji i limes lijeve strane i oni su jednaki. Dakle, $\lim\limits_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.**

Analogno razmatranje možemo provesti za limes slijeva (na intervalu (x_0-h,x_0)).

Dakle, vrijedi i $\lim\limits_{x \to x_0-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Kako postoji $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ to su limes slijeva i sdesna jednaki, pa slijedi tvrdnja teorema. Q.E.D.

<u>Prethodnim teoremom nije obuhvaćen slučaj kada x $\to \infty$ ili x $\to -\infty$.</u>
<u>Pokazuje se da teorem vrijedi i u tom slučaju:</u>

Korolar 3. Neka su *f* i *g* diferencijabilne funkcije na intervalu $I = (a, \infty)$ i $g'(x) \neq 0$ na *I*. Ako vrijedi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ i postoji $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{R}$, onda je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokaz: Uvedimo supstituciju $x = \frac{1}{u}$ i vidimo da funkcije $f(\frac{1}{u})$ i $g(\frac{1}{u})$ zadovoljavaju pretpostavke Teorema 5 na nekom intervalu $0 < u < \frac{1}{c}$ u slučaju kada $u \to 0+$. Prema tome vrijedi:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u\to 0+} \frac{f(\frac{1}{u})}{g(\frac{1}{u})} = \lim_{u\to 0+} \frac{-\frac{1}{u^2}\cdot f'(\frac{1}{u})}{-\frac{1}{u^2}\cdot g'(\frac{1}{u})} = \lim_{u\to 0+} \frac{f'(\frac{1}{u})}{g'(\frac{1}{u})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Q.E.D.

Primjeri:

1) Izračunajmo već poznati limes $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ pomoću L'Hospitalovog pravila:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$$

2) Izračunajmo limes $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{\sin x-x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{\sin x-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos x-1}$$

$$=-\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=-2.$$

3) Izračunajmo limes $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=1\cdot 0=0.$$

Limes smo izračunali koristeći $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$, te

$$x\cdot(-1)\le x\cos\frac{1}{x}\le x\cdot 1\Rightarrow\lim_{x\to 0}x\cdot(-1)\le\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}\le\lim_{x\to 0}x\cdot 1\Rightarrow\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0.$$

U ovom slučaju ne možemo koristiti L'Hospitalovo pravilo. Zaista, ako je $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$, $g(x)=\sin x$, onda je

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}}{\cos x},$$

a taj limes ne postoji jer ne postoji limes $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$. Prema tome za

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}$ **ne možemo koristiti L'Hospitalovo pravilo, jer nisu zadovoljeni uvjeti Teorema 5.**

L'Hospitalovo pravilo možemo primijeniti i nekoliko puta uzastopno računajući neki limes. Jedino je važno da kod svake primjene imamo zadovoljene uvjete pod kojima smijemo koristiti to pravilo.

Primjer: Izračunajmo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Teorem 6. (L'Hospitalovo pravilo $\frac{\infty}{\infty}$) Neka su *f* i *g* diferencijabilne funkcije na $S = (a, x_0) \cup (x_0, b)$ i $g'(x) \neq 0$ na S. Ako vrijedi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$

i postoji $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{R}$, onda je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokaz se opet provodi primijenom Cauchyjevog teorema. Izostavit ćemo ga.

Napomena: Teorem 6 vrijedi kada jedna ili obje funkcije teže u $-\infty$, atakođer vrijedi kada $x \to \infty$ ili $x \to -\infty$.

Primjeri:

1) Izračunajmo $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3}$ i $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^3}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=\infty,$$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^3}=\left(\frac{0}{-\infty}\right)$, pa ga računamo direktno $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}\cdot\lim_{x\to-\infty}e^x=0.$

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$

Neodređeni oblici $0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ mogu se izračunavati također koristiti L'Hospitalovo pravilo, ali se prije toga moraju svesti na oblik $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. Pokazat ćemo to na primjerima.

Neodređeni oblik $0\cdot\infty$

imamo u slučaju kada računamo limes umnoška funkcija, pri čemu jedna funkcija teži u beskonačno ($\pm\infty$), a druga u nulu. Tada jedan faktor umnoška zapišemo kao razlomak s nazivnikom recipročno.

Primjeri:

1) $$\lim_{x\to 0} x\ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0.$$

Uočimo da smo mogli $\lim_{x\to 0} x\ln x$ svesti na oblik $\frac{0}{0}$ pisati $x\ln x = \frac{x}{\frac{1}{\ln x}}$, ali bismo imali nešto kompliciraniji račun.

2) $$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Neodređeni oblik $\infty - \infty$

imamo u slučaju kada računamo limes razlike funkcija, pri čemu svaka funkcija teži u beskonačno. Tada razliku funkcija pišemo tako da u obliku

$f(x)-g(x)=\dfrac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\dfrac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\dfrac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$ kada limes svodimo na oblik $\frac{0}{0}$. Slično ga možemo svesti na oblik $\frac{\infty}{\infty}$ ili prvo na oblik $0\cdot\infty$, pa zatim na prethodna dva oblika.

Primjeri:

1) $$\lim_{x\to\infty}\left(x\,\mathrm{arctg}x-\frac{\pi}{2}x\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{arctg}x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=-\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=-1.$$

2) $$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0.$$

Neodređene oblike $0^0, \infty^0, 1^\infty$

svodimo na već spomenute oblike pišući

$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)}$ **kada** $x \to x_0$ **ili** $x \to \infty$ **ili** $x \to -\infty$.

Primjeri:

1) $$\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} = \left(\infty^0\right) = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^0 = 1.$$

2) Koristeći ranije određen limes $\lim\limits_{x \to \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ imamo

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1^\infty\right) = \lim_{x \to \infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e.$$

3) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x} = \left(0^0\right) = \lim\limits_{x\to 0} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \sin x \ln x} = e^0 = 1,$

jer imamo

$$\lim_{x\to 0} \sin x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x \cos x}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$