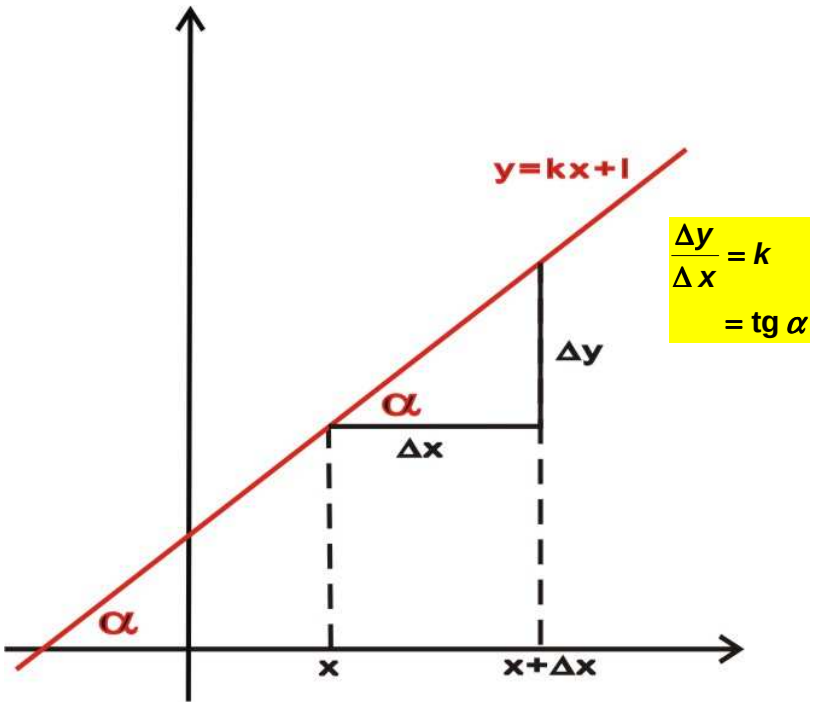
Sadržaj:

- **Diferencijalni račun**
  - **Tangenta na krivulju**
  - **Definicija derivacije**
  - **Derivacija i neprekinutost**
  - **Osnovna pravila deriviranja**

  - **Derivacija složene funkcije i inverzne funkcije**
  - **Derivacija elementarnih funkcija**
  - **Tablica derivacija elementarnih funkcija**
  - **Derivacije implicitno zadane funkcije**
  - **Derivacije parametarski zadane funkcije**

Tangenta na krivulju

Pojam nagiba ili smjera pravca u ravnini čini se sasvim jasan. Isto tako je jasno da pravac u svakoj svojoj točki zadržava isti smjer. Taj smjer je određen kutem koji pravac zatvara s pozitivnim dijelom osi x. Ako je α spomenuti kut, onda je koeficijen smjera pravca upravo jednak tg α.



Slika: Koeficijent smjera pravca

Očito je (i poznato) da je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, gdje je Δy prirast ordinate pravca nastao radi prirasta apscise za Δx. Ako je za isti Δx prirast Δy veći, onda je pravac strmiji, a ako je manji onda je pravac položeniji.

Prirodno je pojam smjera proširiti na krivulje. Očito je da smjer u ovom slučaju neće biti isti u svakoj točki. Kad govorimo o nagibu krivulje u nekoj točki, onda zapravo govorimo o kutu koji tangenta na tu krivulju zatvara s pozitivnim dijelom osi x.

Neka je dana funkcija $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ i neka je $x \in \mathcal{D}(f)$. Ako želimo dobiti pravac koji dira (tangira) krivulju u točki (x, f(x)), onda treba najprije promatrati pravac koji siječe krivulju u točkama (x, f(x)) i (x+Δx, f(x)+ Δf(x)). Taj pravac zovemo sekanta. Broj **Δx** zovemo **prirast varijable**, a **Δf(x) prirast funkcije**. Očito je prirast funkcije **Δf(x)** koji je nastao radi prirasta varijable za **Δx** jednak:

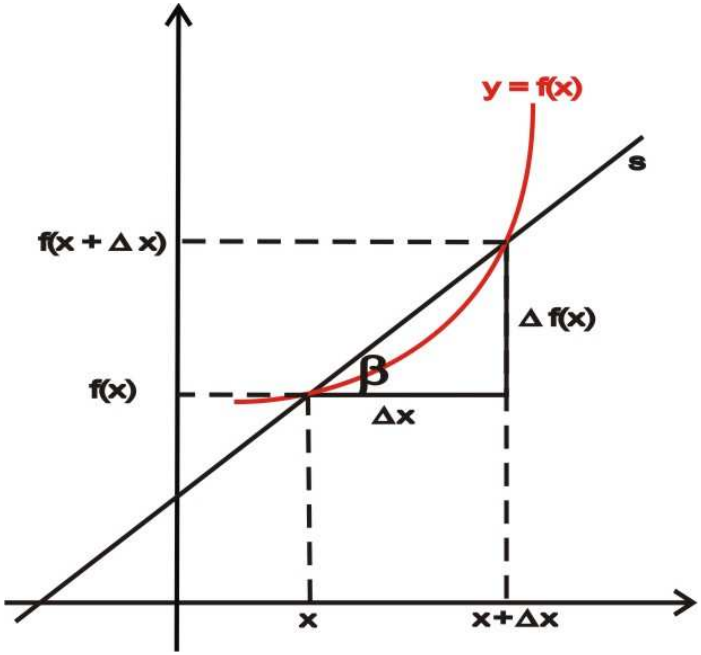
$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Broj $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ zovemo **kvocijent diferencija** u točki x uz prirast Δx ili **prosječni prirast funkcije** y=f(x) na intervalu [x, x+Δx].

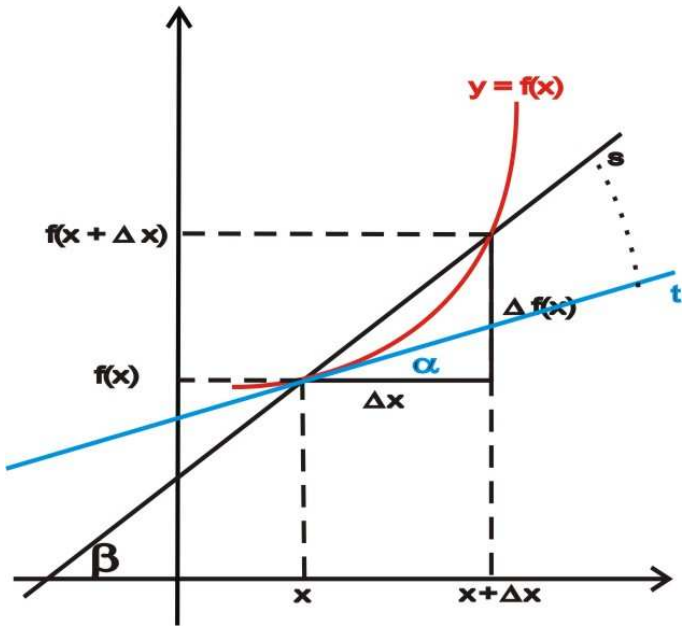
Koeficijent smjera sekante upravo je jednak kvocijentu diferencija:

$$k_s = tg\,\beta = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ako pustimo da točka (x+Δx, f(x)+ Δf(x)) klizi po krivulji prema točki (x, f(x)), tada sekanta prelazi u pravac koji se zove tangenta.



Slika: Prirast funkcije i prosječni prirast



Slika: Sekanta i tangenta na krivulju

Točka (x+Δx, f(x)+ Δf(x)) će kliziti po krivulji prema točki (x, f(x)) ako pustimo da $\Delta x \to 0$. Tada će koeficijent smjera sekante težiti koeficijentu smjera tangente, što znači da je:

$$k_t = tg\,\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ako limes ne postoji, onda ne postoji tangenta u točki (x,f(x)).

Primjer 1: Odredimo jednadžbu tangente na krivulju $y = x^2$ u točki $T_0(2,4)$.

Ako je T_1 točka na krivulji koja ima koordinate $T_1(2+h,(2+h)^2)$, onda je koeficijent smjera sekante:

$$k_s = tg\,\beta = \frac{(2+h)^2 - 4}{h},$$

a koeficijent smjera tangente dobijemo ako pustimo da se točka $T_1(2+h,(2+h)^2)$ približi točki $T_0(2,4)$:

$$k_t = tg\,\alpha = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = 4.$$

Slijedi jednadžba tangente: y-4 = 4(x-2).

Primjer 2: Gibanje materijalne točke dano je formulom s(t) = 3 t^2 - 2 t + 5, kojom se opisuje ovisnost puta s o vremenu t. Naći prosječnu (srednju) brzinu $\bar{v}(t)$ u točki t u vremenskom intervalu Δt i pravu brzinu v(t) u trenutku t.

Prosječna brzina je:

$$\bar{v}(t) = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{3(t+\Delta t)^2 - 2(t+\Delta t) + 5 - 3t^2 + 2t - 5}{\Delta t} = 6t - 2 + 3\Delta t,$$

a prava brzina:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (6t - 2 + 3\Delta t) = 6t - 2.$$

Ova dva primjera pokazuju da je važno postoji li limes $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Definicija derivacije

Derivacija funkcije u točki:

Neka je zadana realna funkcija f na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $x_0 \in I$. Ako postoji broj $f'(x_0)$,

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},}$$

tada taj broj zovemo derivacijom funkcije f u točki x_0.

Uočimo da je derivacija funkcije limes kvocijenta diferencija (tj. kvocijenta promjene funkcije i promjene varijable). Osim gornje oznake, za derivaciju se koriste i neke druge oznake, primjerice: $\frac{df(x_0)}{dx}$. PAŽNJA - to nije razlomak, nego samo oznaka za derivaciju. Pokazat će se da je ta oznaka vrlo praktična za korištenje u nekim složenim računima. Ova oznaka $\frac{df(x_0)}{dx}$ proizlazi iz

formule: $f'(x_0) = \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0}$.

Za funkciju kažemo da je derivabilna ili diferencijabilna u nekoj točki, ako gornji limes postoji u toj točki. Slično, **za funkciju kažemo da je derivabilna ili diferencijabilna na nekom otvorenom intervalu**, ako ima derivaciju u svakoj točki tog intervala.

Moguće je definirati i pojam lijeve i desne derivacije funkcije u nekoj točki, pri čemu limes funkcije u definiciji derivacije zamijenimo s limesom slijeva , odnosno limesom sdesna.

Pogledajmo na nekoliko primjera kako izračunati derivaciju funkcije koristeći definiciju.

Primjer 3: **Odredimo derivacije sljedećih funkcija:**

1. $f(x) = x^2,$
2. $f(x) = c, \qquad c \in R$
3. $f(x) = x^n, \qquad n \in N$
4. $f(x) = \sqrt{x},$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x},$
6. $f(x) = \sin x.$

1. **Računamo limes**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = 2x.$$

2. **Pomoću limesa iz definicije dobivamo**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Dakle, derivacija konstantne funkcije je nula:

$$\boxed{c' = 0.}$$

3. Koristeći binomnu formulu

$$(x+h)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x\, h^{n-1} + h^n$$

dobivamo

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x\, h^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[n\, x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \cdots + \binom{n}{n-1} x\, h^{n-2} + h^{n-1} \right]$$

$$= n\, x^{n-1}.$$

Dakle, derivacija funkcije $f(x) = x^n, n \in N$ **je**

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}.}$$

4. Pomoću limesa iz definicije dobivamo

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Primjetimo da ako u formulu dobivenu u zadatku 3. stavimo $n = \frac{1}{2}$ **dobit ćemo upravo izvedenu formulu. kasnije ćemo dokazati da formula** $(x^n)' = nx^{n-1}$ **vrijedi ne samo za prirodne brojeve** n**, već za sve realne brojeve** n**.**

5. Prema upravo rečenom vrijedi $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$**. Uvjerimo se u to direktnim računom:**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}.$$

6. U računanju derivacije sinusne funkcije korisit ćemo formulu za razliku sinusa

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

i poznati limes $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Sada imamo

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos x$$

Dakle,

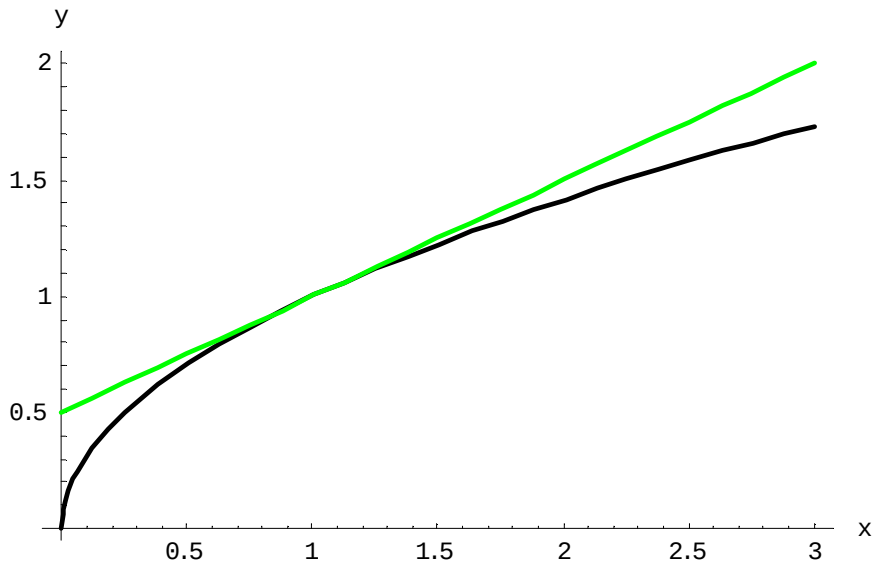
$$\boxed{\sin' x = \cos x.}$$

Primjer 4: Odredimo jednadžbu tangente na graf funkcije

1. $f(x)=\sqrt{x}$ u točki T(1,1),
2. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ u točki T(0,0),
3. $f(x)=|x|$ u točki T(1,1).

1. Prema prethodnom primjeru znamo da je $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, pa je derivacija u T(1,1) jednaka $f'(1)=\dfrac{1}{2}$. Sada je jednadžba tražene tangente

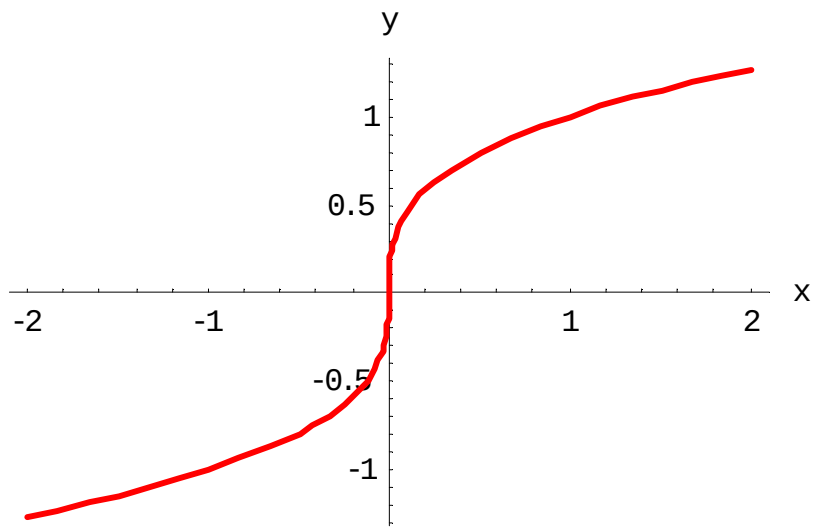
$$y-1=\frac{1}{2}(x-1),\quad \text{tj.}\quad y=\frac{1}{2}(x+1).$$



2. Derivacija funkcije $f(x)=\sqrt[3]{x}$ je

$f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, pa je derivacija u T(0,0) beskonačna. To znači da je tangens kuta koji tangenta zatvara s osi x beskonačan, pa je to pravi kut. Znači da je tangenta u T(0,0) upravo os y. Dakle, jednadžba tražene tangente je

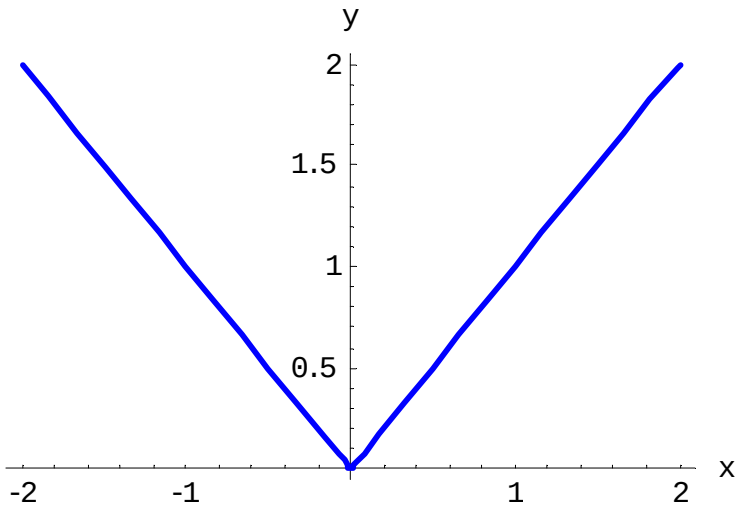
x=0.



3. Promatrajući limes iz definicije derivacije, uočavamo da je

$$f'(0\pm)=\lim_{h\to 0\pm}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0\pm}\frac{|h|}{h}=\pm 1,$$

jer je |h|=h za h>0 i |h|= - h za h<0. Prema tome ova funkcija nema derivaciju u točki T(0,0), pa ne postoji niti tangenta u toj točki.



Za funkciju koja u nekoj točki ima derivaciju (tj. ima tangentu), kažemo da je glatka u toj točki.

Derivacija i neprekinutost

U posljednjem primjeru vidjeli smo da neprekinuta funkcija ne mora imati derivaciju u nekoj točki.

Dakle, neprekinutost ne povlači diferencijabilnost.

Pitamo se vrijedi li obratno, tj. da li diferencijabilnost povlači neprekidnost?

Odgovor je potvrdan:

Teorem 1 (dovoljan uvjet neprekinutosti): ***Ako je funkcija f diferencijabilna u točki x, onda je f neprekinuta u točki x.***

Dokaz: **Prema pretpostavci teorema postoji** $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$**, pa**

zaključujemo da vrijedi $\lim\limits_{h\to 0}\left(f(x+h)-f(x)\right)=\lim\limits_{h\to 0} h\cdot\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0\cdot f'(x)=0,$

illi napisano na drugi način $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$**, što zapravo znači da je funkcija** ***f*** **neprekinuta u točki x.** **Q.E.D.**

Znači pokazali smo da je glatka (tj. diferencijabilna) funkcija neprekinuta. Pokazali smo primjer funkcije f(x)=|x| koja je neprekinuta na R i diferencijabilna svuda osim u točki x=0 (gdje ima šiljak).

Osnovna pravila deriviranja

Sljedeći važan teorem daje nam osnovna pravila deriviranja.

Teorem 2: ***Ako su f i g diferencijabilne funkcije u točki x, onda vrijedi***

1. $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x),$
2. $\left(f(x)-g(x)\right)' = f'(x)-g'(x),$
3. $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}, \qquad g(x) \neq 0.$

Dokaz:

1.

$$\begin{aligned}
\left(f(x)+g(x)\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= f'(x)+g'(x).
\end{aligned}$$

2. Dokazuje se na isti način kao 1.

3.

$$\begin{aligned}
\left(f(x)g(x)\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(f\,g)(x+h)-(f\,g)(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x)$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

U gornjem smo koristili neprekidnost funkcije *g* u točki x: $\lim_{h \to 0} g(x+h) = g(x)$.

4. Dokazuje se na isti način kao 3, dodajući i oduzimajući *f(x)g(x)*.

Napomena: **Koristeći formulu 3. za derivaciju umnoška funkcija iz Teorema 2. i da je *C′* = 0, lako dokazujemo da za bilo koju realnu konstantu C vrijedi:**

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x).$$

Primjer 5: Primjenom pravila deriviranja dobivamo derivacije sljedećih funkcija.

1. $f(x) = 5 + x + 2\sqrt{x} + x^4$, $\quad f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + 4x^3$,

2. $f(x) = \frac{1}{x} - 2\sin x + \frac{\sin x}{x^2}$, $\quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 2\cos x + \frac{\cos x}{x^2} - 2\frac{\sin x}{x^3}$,

3. $f(x) = \sqrt{2} + x\sin x + x\sqrt{x}$, $\quad f'(x) = \sin x + x\cos x + \frac{3}{2}\sqrt{x}$,

4. $f(x) = \frac{1}{x^4} + x^6 \sin x - \sin 2$, $\quad f'(x) = -\frac{4}{x^5} + 6x^5 \sin x + x^6 \cos x$.

Derivacija složene funkcije i inverzne funkcije

Kako derivirati složenu funkciju $f(x)=\left(x^2+1\right)^{100}$**? Moguće je primjenom binomne formule, ali to nebismo preporučili. U dosadašnjim primjerima nismo derivirali takve funkcije. Sljedeći važan teorem daje nam pravilo deriviranja složene funkcije.**

Teorem 3: **Neka je složena funkcija f∘g definirana u nekoj točki x. Neka je funkcija g diferencijabilna u točki x i neka je funkcija f diferencijabilna u točki g(x). Tada funkcija f∘g ima derivaciju u x i ona je dana formulom**

$$\boxed{(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)}$$

Dokaz: **Uvedimo oznaku *u=g(x)*. Po definiciji derivacije imamo**

$$f'(u)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta f(u)}{\Delta u}$$ **. Označimo**

$$\varepsilon(\Delta u)=\frac{\Delta f(u)}{\Delta u}-f'(u)\to 0\ (\Delta u\to 0)$$**. Vrijedi** $\Delta f(u)=f'(u)\cdot\Delta u+\varepsilon(\Delta u)\cdot\Delta u$**.**

Dijeljenjem gornje jednakosti s Δx i djelovanjem limesom imamo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(u)}{\Delta x} = f'(u) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta u) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot u'(x) + 0 \cdot u'(x),$$

gdje smo koristili činjenicu da iz neprekidnosti gunkcije g imamo implikaciju $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u = g(x + \Delta x) - g(x) \to 0$.

Dakle, $(f \circ g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(u)}{\Delta x} = f'(u) \cdot u'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. **Q.E.D.**

Ako imamo kompoziciju tri funkcije, uzastopnom primjenom Teorema 3 dobivamo formulu:

$$\boxed{(f \circ g \circ h)'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)}$$

Ovo pravilo zovemo *pravilom za deriviranje složene* funkcije ili kompozicije funkcija. Zovemo ga i *lančanim pravilom*, jer je intuitivno jasno da taj naziv dobro opisuje ono što stvarno radimo.

Pravilo se može napisati na vrlo zgodan način koristeći zapis $\frac{d(f(g(x)))}{dx}$. Uz oznaku *u* = *g(x)* pišemo:

$$\frac{df(u)}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}.$$

Izraz s desne strane izgleda kao razlomak proširen s *du*, pa ćemo u budućnosti govoriti da s d-ovima radimo kao s razlomcima.

Primjer 6: **Naći derivaciju funkcije $f(x) = \left(x^2 + 1\right)^{100}$. Ova funkcija je kompozicija funkcija $g(u) = u^{100}$ i $h(x) = x^2 + 1$. Dakle $f(x) = g(h(x))$, pa je $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$. Zbog $g'(u) = 100u^{99}$ i $h'(x) = 2x$ je**

$$f'(x) = 100\left(x^2 + 1\right)^{99} \cdot 2x = 200x\left(x^2 + 1\right)^{99}.$$

Primjer 7: **Funkciju $\frac{1}{g(x)}$ možemo shvatiti kao kompoziciju dviju funkcija**

$u \mapsto \frac{1}{u}$ (čija je derivacija $-\frac{1}{u^2}$) i g(x). Korištenjem pravila za derivaciju kompozicije funkcija imamo

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{1}{g(x)^2} \cdot g'(x).$$

Primjer 8: Pomoću prethodnog primjera možemo brzo dobiti formulu za derivaciju kvocijenta dviju funkcija. Možemo ju shvatiti kao derivaciju produkta: Funkciju $\left(\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{g}}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{\mathrm{g}}\right)'$. Koristeći pravilo za derivaciju umnoška i Primjer 7 dobivamo

$$\left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{1}{g(x)^2} \cdot g'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Primjer 9: Odredi derivacije sljedećih funkcija.

1. $f(x) = \sin\left(x^2 + 2x + 5\right)$, $\quad f'(x) = 2(x+1)\cos\left(x^2 + 2x + 5\right)$,
2. $f(x) = \sin^3 x$, $\quad f'(x) = 3\sin^2 x \cos x$,
3. $f(x) = \dfrac{1}{\cos\left(x^2\right)}$, $\quad f'(x) = \dfrac{2x}{\cos^2\left(x^2\right)}\sin\left(x^2\right)$,

Pravilo za deriviranje inverzne funkcije izvodi se iz pravila za deriviranje složene funkcije. Vrijedi

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y$$

za svaki y za koji je inverzna funkcija definirana. Korištenjem pravila za derivaciju kompozicije funkcija imamo:

$$f'\left(f^{-1}(y)\right) \cdot \left(f^{-1}(y)\right)' = 1,$$

iz čega uz standardnu oznaku $x = f^{-1}(y)$ odmah slijedi važna ***formula za derivaciju inverzne funkcije:***

$$\boxed{\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}}$$

Ovu formulu možemo zapisati i u obliku:

$$\boxed{x'(y) = \frac{1}{y'(x)}} \qquad \text{ili} \qquad \boxed{\frac{dx(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{dy(x)}{dx}}}$$

Iz posljednjeg oblika ponovno se vidi već spomenuto svojstvo računanja s d-ovima kao s razlomcima.

Primjer 10: Naći derivaciju inverzne funkcije od $y = \sin x$, tj. naći derivaciju funkcije $x = \arcsin y$.

Uvrštavanjem u formulu za derivaciju inverzne funkcije (svejedno u koji oblik formule), dobivamo

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Obično se varijabla zove x, pa formulu pamtimo u obliku

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Derivacije elementarnih funkcija

Koristeći sve gore izvedene formule možemo naći derivacije elementarnih bunkcija.

Derivacije algebarskih funkcija

Vidjeli smo da je derivacija konstante $C' = 0$, derivacija potencije

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1} \tag{1}$$

za bilo koji prirodni n. Koristeći formule za deriviranje zbroja i razlike funkcija možemo derivirati polinome. Nadalje, koristeći primjer 7 za derivaciju $\frac{1}{f(x)}$ dobivamo

$$\left(x^{-n}\right)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{\left(x^n\right)'}{\left(x^n\right)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Dakle, formula (1) vrijedi i za potencije s negativnim eksponentom.

Isto pravilo deriviranja vrijedi i za funkciju $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[m]{x^n}$, gdje su m i n cijeli brojevi.

Dovoljno je naći derivaciju funkcije $f(y) = \sqrt[m]{y}$. Ona je inverzna funkcija od $f(x)=x^m$, pa imamo:

$$\left(\sqrt[m]{y}\right)' = \frac{1}{\left(x^m\right)'} = \frac{1}{mx^{m-1}} = \frac{1}{m}x^{1-m} = \frac{1}{m}\left(y^{\frac{1}{m}}\right)^{1-m} = \frac{1}{m}y^{\frac{1}{m}-1}, \text{ tj. } \left(\sqrt[m]{x}\right)' = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}.$$

dakle, formula (1) vrijedi i za potenciju s racionalnim eksponentom.

Derivacije transcedentnih funkcija

Derivacije trigonometrijskih i ciklometrijskih funkcija

Derivaciju funkcije *sinus* izveli smo direktno iz definicije, a derivaciju njezine inverzne funkcije izveli smo u Primjeru 10.

Nađimo derivaciju funkcije kosinus. Koristeći poznatu vezu funkcije sinus i

kosinus i formulu za derivaciju složene funkcije, dobivamo:

$$\cos' x = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = -\sin x,$$

tj.

$$\boxed{\cos' x = -\sin x}$$

Nađimo derivaciju funkcije tangens.

$$tg' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

tj.

$$\boxed{tg' x = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Na isti način dokazuje se da je

$$\boxed{ctg' x = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$\boxed{\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{arc\ tg' x = \frac{1}{1+x^2}}$$

$$\boxed{arc\ ctg' x = -\frac{1}{1+x^2}}$$

Derivacije logaritamske i eksponencijalne funkcije

Derivaciju funkcije $f(x) = \ln x$ izvest ćemo izravno iz definicije:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \left| \begin{array}{c} y = \frac{h}{x} \\ h \to 0 \Leftrightarrow y \to 0 \end{array} \right| = \frac{1}{x}\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{y\to 0} \ln(1+y)^{\frac{1}{y}} = \frac{1}{x}\ln \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}.$$

Prema tome, $\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$

Inverzna funkcija logaritamske funkcije $f(x) = \ln x$ je $x = e^y$, tj. $f^{-1}(y) = e^y$.
Njena derivacija je:

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(\ln x)'} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = e^y,$$

što znači da je derivacija funkcije e^x jednaka njoj samoj:

$$\boxed{\left(e^x\right)' = e^x}$$

Nađimo derivaciju funkcije $\log_a x$:

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Prema tome,

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

Nađimo derivaciju funkcije $f(x)=a^x$ s bazom a>0, a≠0. Ako logaritmiramo ovu funkciju dobivamo $\ln f(x)=x\ln a$, pa primjenom formule za deriviranje složene funkcije dobivamo:

$$(\ln f(x))'=(x\ln a)' \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{f(x)}f'(x)=\ln a \quad\Rightarrow\quad f'(x)=f(x)\ln a,$$

tj.

$$\boxed{\left(a^x\right)'=a^x\ln a}$$

Derivacije hiperboličkih i area funkcija

Lako možemo direktno naći derivacije hiperboličkih i area funkcijaznajući njihove definicije: $\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x=\dfrac{sh\,x}{ch\,x}$,

$\operatorname{cth} x=\dfrac{ch\,x}{sh\,x}$,

$$arsh\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),\ arch\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$arth\, x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \text{ za } x \in (-1,1),\ \ arcth\, x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \text{ za } x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty).$$

Dobivamo:

f(x)	f′(x)	f(x)	f′(x)
$sh\, x$	$ch\, x$	$ar\, sh\, x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$ch\, x$	$sh\, x$	$ar\, ch\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$th\, x$	$\frac{1}{ch^2 x}$	$ar\, th\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$cth\, x$	$-\frac{1}{sh^2 x}$	$ar\, cth\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Derivacija opće potencije

Derivaciju opće potencije $f(x)=x^c$, gdje je c bilo koja realna konstanta, dobit ćemo koristeći derivaciju eksponencijalne funkcije. Ova metoda je poznata pod nazivom LOGARITAMSKA DERIVACIJA. Vrijedi:

$$\ln f(x)=\ln\left(x^c\right)=c\cdot\ln x \quad\Rightarrow\quad f(x)=e^{c\cdot\ln x} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=e^{c\cdot\ln x}\cdot\frac{c}{x}=x^c\cdot\frac{c}{x}=cx^{c-1}$$

Dakle,

$$\boxed{\left(x^c\right)'=c\,x^{c-1}}$$

Primjer 11: Naći derivaciju funkcije $\mathrm{f}(x)=x^x$.

1. način: $\mathrm{f}(x)=x^x \quad\Rightarrow\quad \ln\mathrm{f}(x)=x\ln x \quad\Rightarrow\quad (\ln\mathrm{f}(x))'=(x\ln x)' \quad\Rightarrow$

$$\frac{1}{\mathrm{f}(x)}\mathrm{f}'(x)=\ln x+x\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{f}'(x)=f(x)(\ln x+1) \quad tj. \quad \mathrm{f}'(x)=x^x(\ln x+1)$$

2. način: $\mathrm{f}(x)=x^x \quad\Rightarrow\quad \ln\mathrm{f}(x)=x\ln x \quad\Rightarrow\quad \mathrm{f}(x)=e^{x\ln x} \quad\Rightarrow$

$$\mathrm{f}'(x)=e^{x\ln x}(\ln x+1) \quad tj. \quad \mathrm{f}'(x)=x^x(\ln x+1).$$

Tablica derivacija elementarnih funkcija

f(x)	f′(x)	f(x)	f′(x)	f(x)	f′(x)
$\sin x$	$\cos x$	$arc\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	x^c	cx^{c-1}
$\cos x$	$-\sin x$	$arc\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	e^x	e^x
$tg\ x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$arc\,tg\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$	a^x	$a^x \ln a$
$ctg\ x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$arc\,ctg\ x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
				$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

f(x)	f′(x)	f(x)	f′(x)
$sh\ x$	$ch\ x$	$ar\ sh\ x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$ch\ x$	$sh\ x$	$ar\ ch\ x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$th\ x$	$\frac{1}{ch^2 x}$	$ar\ th\ x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$cth\ x$	$-\frac{1}{sh^2 x}$	$ar\ cth\ x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Derivacija implicitno zadane funkcije

Ponovimo:

Skup svih uređenih parova realnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu oblika F(x,y) =0 određuje neki podskup od $\mathbb{R}^2$ (npr. kružnica, elipsa,…), ali općenito ne mora biti graf neke funkcije.

Ako postoji funkcija y=f(x) takva da je F(x,f(x))=0, kažemo da je funkcija f zadana implicitno sa F(x,y) =0.

Derivaciju takve funkcije možemo odrediti bez da eksplicitno određujemo funkciju, tj.

$$\left.\begin{aligned} F(x,y)&=0\\ y&=f(x)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad f'(x)=-\frac{F_x'}{F_y'}, \quad \text{gdje je} \quad \begin{aligned} &F_x - F \text{ derivirano po } x,\\ &F_y - F \text{ derivirano po } y.\end{aligned}$$

Primjer: Naći derivaciju $\frac{dy}{dx}$ funkcije zadane implicitno: $x^2 + y^2 = 1$.

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y},$$

ili $x^2 + y^2 - 1 = 0 \; /'$, $\quad 2x + 2y\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}.$

Mogli smo računati i direktno:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_1(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad f_1'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{x}{y}, \\ f_2(x) = -\sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad f_2'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{x}{y}. \end{cases}$$

Derivacija parametarski zadane funkcije

Ponovimo:

Neka su zadane realne funkcije: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$.

Za svaku vrijednost varijable (parametra) $t \in I$ dobivamo uređen par brojeva $(\varphi(t), \psi(t))$ koji predstavlja točku u ravnini. Ako postoji φ^{-1}, onda je

$t = \varphi^{-1}(x)$ i $y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x))$.

Ako su $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, derivabilne funkcije na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $\frac{d\varphi}{dt} \neq 0$ na I. Sada nije teško odrediti derivaciju:

$y = y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ $/'$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' = \psi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)},$$

gdje smo koristili oznaku: $\varphi'(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t), \quad \psi'(t) = \frac{dy}{dt} = \dot{y}(t).$

Primjer: Naći derivaciju $\frac{dy}{dx}$ funkcije zadane parametrski:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y'(t) = \frac{-2\sin t}{2\cos t} = -ctg\, t \,.$$