



KATEDRA ZA MEHANIKE

Predmet: **Dinamika**

Pismeni ispit

Univerzitet u Zenici
Mašinski fakultet

Školska godina 2006/2007

Profesor: *doc. dr. Elma Ekinović*

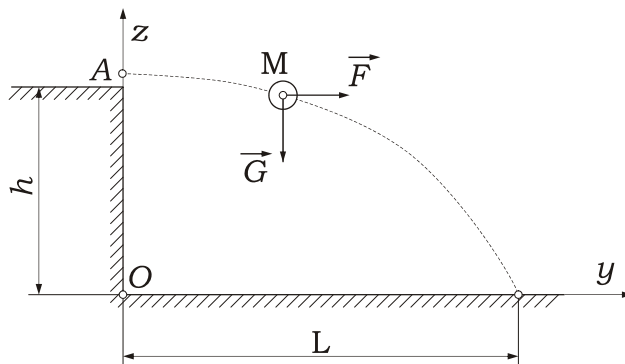
Asistent: *Josip Kačmarčik*

Datum: 9.7.2007. godine

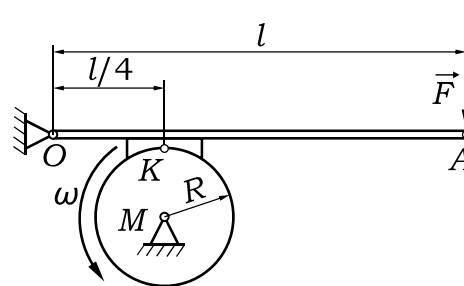
Zadaci:

1. Na materijalnu tačku M mase $m = 3 \text{ kg}$ u vertikalnoj ravni djeluje horizontalna sila proporcionalna kvadratu vremenu, sa faktorom proporcionalnosti $k = 35 \frac{\text{N}}{\text{s}^3}$

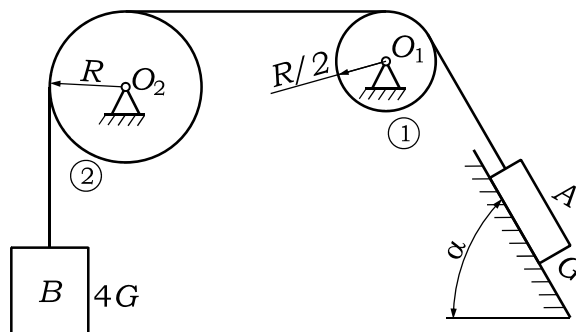
($F = k \cdot t^3$). Tačka počinje kretanje s visine $h = 4 \text{ m}$ bez početne brzine. Odrediti jednačine kretanja tačke po z i y osi, te udaljenost L koju će tačka preletjeti prije pada na zemlju. Otpor zraka zanemariti.



2. Doboš M obrće se konstantom ugaonom brzinom ω_0 i koči se pomoću ručne kočnice. Kolikom silom F treba djelovati na ručicu da bi se kotur zaustavio poslije T sekundi. Koeficijent trenja između doboša i kočnice je μ , dužina ručice $\overline{OA} = l$, $\overline{OK} = \frac{l}{4}$, moment inercije kotura I_0 , a njegov poluprečnik R . Doboš smatrati homogenim diskom, a zadatak riješiti pomoću zakona o promjeni kinetičkog momenta. Također, smatrati da tačke, O , A i K leže na istom pravcu.



3. Po glatkoj strmoj ravni, s uglom nagiba $\alpha = 60^\circ$, diže se teret A težine G . Preko nepokretnih koturova 1 i 2 težina $\frac{G}{2}$ i $\frac{G}{4}$, te poluprečnika $\frac{R}{2}$ i R prebačeno je lako nerastegljivo uže, čiji je jedan kraj vezan za teret A , a drugi za kraj za teret B težine $4G$, koji se spušta vertikalno naniže. Odrediti ubrzanja tereta ako su koturovi 1 i 2 oblika diskova. Sva trenja zanemariti.



$$1. \sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{G} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Projekcija na y osu:

$$m\ddot{y} = kt^3$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{k}{m}t^3$$

$$\int d\dot{y} = \frac{k}{m} \int t^3 dt$$

$$\dot{y} = \frac{k}{4m}t^4 + C_1$$

Početni uslovi:

$$t = 0, \dot{y} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\dot{y} = \frac{k}{4m}t^4$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{4m}t^4$$

$$\int dy = \frac{k}{4m} \int t^4 dt$$

$$y = \frac{k}{20m}t^5 + C_2$$

Početni uslovi:

$$t = 0, y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y = \frac{k}{20m}t^5$$

Dometa leta L ćemo odrediti ako u jednačinu kretanja po y osi za t uvrstimo vrijeme leta t_L :

$$L = y_L = \frac{k}{20m}t_L^5 = \frac{35}{20 \cdot 3} \cdot 0,903^5$$

$$L = 0,35 \text{ m}$$

Projekcija na z osu:

$$m\ddot{z} = -G = -mg$$

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = -g$$

$$\int d\dot{z} = -g \int dt$$

$$\dot{z} = -gt + D_1$$

Početni uslovi:

$$t = 0, \dot{z} = 0 \Rightarrow D_1 = 0$$

$$\dot{z} = -gt$$

$$\frac{dz}{dt} = -gt$$

$$dz = -g \int t dt$$

$$z = -\frac{g}{2}t^2 + D_2$$

Početni uslovi:

$$t = 0, z = h \Rightarrow D_2 = h$$

$$z = h - \frac{g}{2}t^2$$

Vrijeme leta ćemo dobiti ako u jednačinu kretanja po z osi uvrstimo vrijednost 0 za z , tj. položaj u kome je kretanje završeno jer je materijalna tačka došla do tla:

$$0 = h - \frac{g}{2}t_L^2$$

$$t_L = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4}{9,81}} = 0,903 \text{ s}$$

2. Zakon o promjeni momenta količine kretanja:

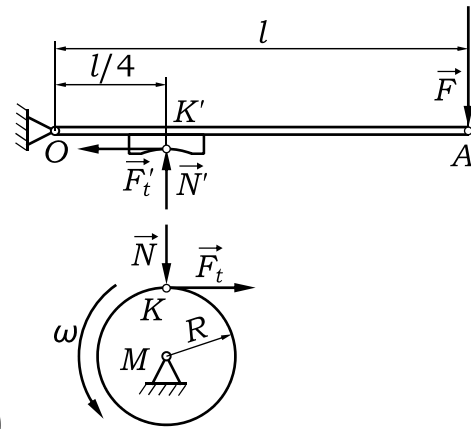
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}$$

Za obrtanje oko nepokretne ose dobijamo:

$$L = I_O \cdot \omega$$

$$\frac{d}{dt}(I_O \omega) = M$$

$$M = I_O \cdot \frac{d\omega}{dt} = I_O \cdot \varepsilon \dots\dots\dots (a)$$



Doboš će kočiti moment uslijed sile trenja:

$$M = F_T \cdot R = N \cdot \mu \cdot R \dots\dots\dots (b)$$

Za ravnomjerno ugaono usporenje vrijedi:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{T} \dots\dots\dots (c)$$

Uvrštavanjem (c) i (b) u (a) dobijamo:

$$N \cdot \mu \cdot R = I_O \cdot \frac{\omega_0}{T}$$

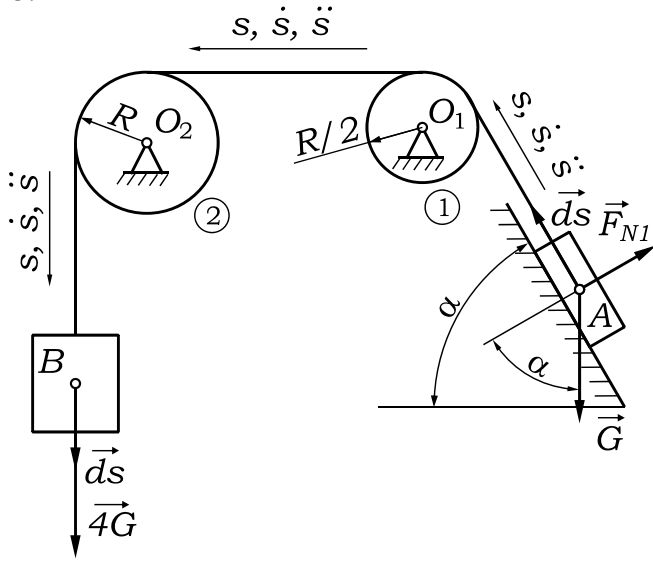
$$N = \frac{I_O \cdot \omega_0}{\mu \cdot R \cdot T} \dots\dots\dots (d)$$

Silu F ćemo dobiti iz momentne jednačine za polugu OA (pretpostavljajući da su tačke O, A i K kolinearne):

$$N \cdot \frac{l}{4} - F \cdot l = 0$$

$$F = \frac{N}{4} = \frac{I_O \cdot \omega_0}{4 \cdot \mu \cdot R \cdot T}$$

3.



Za rješavanje zadatak koristit ćemo se zakonom o promjeni kinetičke energije sistema u obliku:

$$\frac{dE_K}{dt} = \frac{dA}{dt} \dots \dots \dots (A)$$

Kinetičku energiju sistema čine energije koturova i tereta:

$$E_K = E_{K1} + E_{K2} + E_{KA} + E_{KB}$$

Koturovi vrše rotaciju, a tereti translaciju pa je kinetička energija sistema:

$$E_K = \frac{I_1 \cdot \omega_1^2}{2} + \frac{I_2 \cdot \omega_2^2}{2} + \frac{m_A \cdot v_A^2}{2} + \frac{m_B \cdot v_B^2}{2}$$

Ako uvrstimo kinematske karakteristike kretanja za sva tijela u sistemu, te momente inercije koturova koje smatramo diskovima, dobijamo:

$$E_K = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2}{2} \cdot \left(\frac{\dot{s}}{\left(\frac{R}{2}\right)}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2 \cdot R^2}{2} \cdot \left(\frac{\dot{s}}{R}\right)^2 + \frac{m_A \cdot \dot{s}^2}{2} + \frac{m_B \cdot \dot{s}^2}{2}$$

$$E_K = \frac{1}{4} \cdot m_1 \cdot \dot{s}^2 + \frac{1}{4} \cdot m_2 \cdot \dot{s}^2 + \frac{m_A \cdot \dot{s}^2}{2} + \frac{m_B \cdot \dot{s}^2}{2}$$

Konačni izraz dobijamo uvrštavanjem zadanih težina tijela:

$$E_K = \frac{G}{8g} \cdot \dot{s}^2 + \frac{G}{16g} \cdot \dot{s}^2 + \frac{G \cdot \dot{s}^2}{2g} + 2 \frac{G}{g} \cdot \dot{s}^2$$

$$E_K = \frac{2+1+8+32}{16} \frac{G}{g} \cdot \dot{s}^2 = \frac{43}{16} \frac{G}{g} \cdot \dot{s}^2 \dots \dots \dots (B)$$

Elementarni rad dobijamo uzimanjem u obzir težine tereta A i B koje vrše rad pri elementarnom pomjeranju \overline{ds} :

$$dA = \overline{4G} \cdot \overline{ds} - \overline{G} \cdot \overline{ds} = 4 \cdot G \cdot ds - G \cdot \sin \alpha \cdot ds$$

$$dA = 4 \cdot G \cdot ds - G \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot ds = \frac{8 - \sqrt{3}}{2} G \cdot ds \dots \dots \dots (C)$$

(C) i (B) u (A):

$$\frac{43}{8 \cdot g} \cdot G \cdot \dot{s} \cdot \ddot{s} = \frac{8 - \sqrt{3}}{2} \cdot G \cdot \dot{s}$$

$$\ddot{s} = \frac{32 - 4\sqrt{3}}{43} g = 0,583 g = 5,72 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$