



KATEDRA ZA MEHANIKE

Predmet: **Dinamika**

Pismeni ispit

Univerzitet u Zenici
Mašinski fakultet

Školska godina 2006/2007

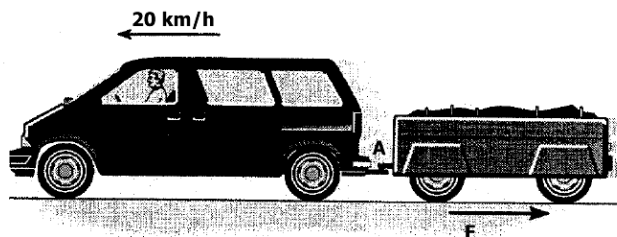
Nastavnik: *doc. dr. Elma Ekinović*

Asistent: *Josip Kačmarčik*

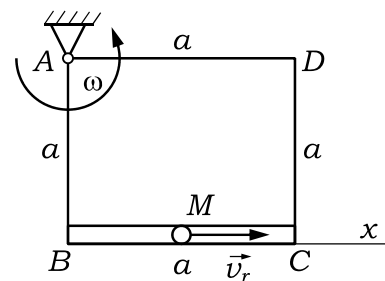
Datum: 8.6.2007. godine

Zadaci:

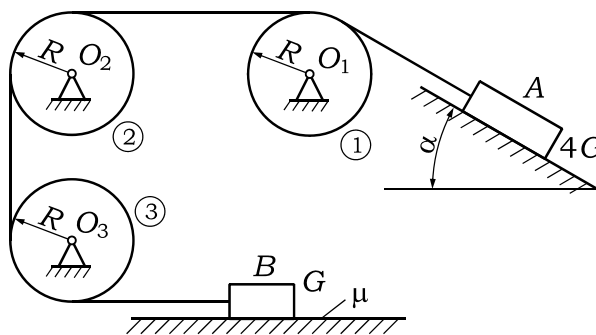
1. Automobil s prikolicom putuje brzinom od 20 km/h u trenutku kada se spojnica na prikolici otkaci. Ukoliko prikolica ima masu od 250 kg i pređe 45 m prije nego što se zaustavi, odrediti konstantnu horizontalnu silu F koja nastaje uslijed trenja kotrljanja i zaustavlja prikolicu.



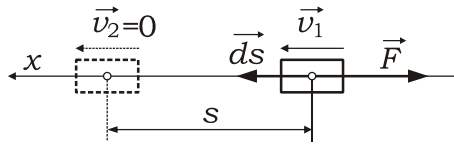
2. Kvadratna pločica $ABCD$, stranice a , obrće se oko vertikalne ose kroz tačku A konstantnom ugaonom brzinom ω . Duž stranice BC kreće se tačka M , mase m . U početnom trenutku tačka M je bila u položaju B i imala je relativnu brzinu v_0 . Odrediti veličinu ugaone brzine ω da bi relativna brzina tačke M u položaju C bila $2v_0$.



3. Po glatkoj strmoj ravni, s uglom nagiba $\alpha = 30^\circ$, spušta se teret A težine $4G$. Preko nepokretnih koturova 1, 2 i 3 jednakih težina $\frac{G}{3}$ i jednakih poluprečnika R prebačeno je lako nerastegljivo uže, čiji je jedan kraj vezan za teret B , težina G , koji klizi po horizontalnoj hrapavoj ravni, koeficijenta trenja $\mu = \frac{1}{3}$. Odrediti ubrzanja tereta ako su koturovi 1, 2 i 3 oblika diskova.



1.



Zadatak rješavamo pomoću zakona o promjeni kinetičke energije:

$$\Delta E_k = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} = \int_s \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

Podaci:

$$v_1 = 20 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \cdot \frac{1000}{3600} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = 0, \quad s = 45 \text{ m}$$

Projekcija zakona o promjeni kinetičke energije na x osu (pravac kretanja):

$$-\frac{m \cdot v_1^2}{2} = \int_0^s -F \cdot dx = -F \cdot \int_0^s dx = -F \cdot s$$

$$F = \frac{m \cdot v_1^2}{2 \cdot s} = \frac{250 \cdot 5,5^2}{2 \cdot 45} = 85,734 \text{ N}$$

2.

$$m \cdot \vec{a}_r = \vec{F}_R + \vec{F}_P^{in} + \vec{F}_{COR}^{in}$$

$$m \cdot \vec{a}_r = \vec{F}_N + \vec{G} + \vec{F}_P^{in} + \vec{F}_{COR}^{in}$$

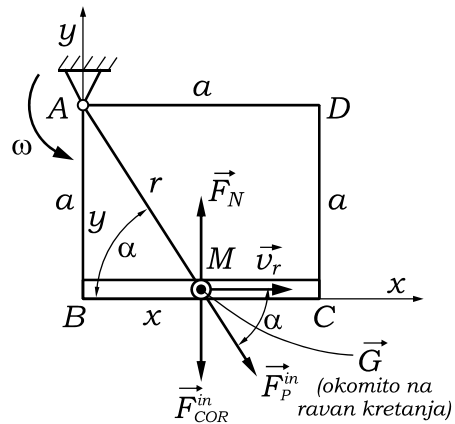
Projekcija na x osu (pravac kretanja):

$$m \cdot \ddot{x} = F_P^{in} \cdot \cos \alpha$$

$$F_P^{in} = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



$$m \cdot \frac{d\dot{x}}{dt} = m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos \alpha$$

$$m \cdot \frac{d\dot{x}}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = m \cdot \omega^2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$m \cdot \int \dot{x} \cdot d\dot{x} = m \cdot \omega^2 \cdot \int x \cdot dx$$

$$m \cdot \frac{\dot{x}^2}{2} = m \cdot \omega^2 \cdot \frac{x^2}{2} + C \Big| \cdot \frac{2}{m}$$

$$\dot{x}^2 = v_r^2 = \omega^2 \cdot x^2 + D$$

Početni uslovi, $x = 0$, $\dot{x}_0 = v_0$

$$v_0^2 = \omega^2 \cdot 0^2 + D \Rightarrow D = v_0^2$$

Jednačina promjene relativne brzine u zavisnosti od x je onda:

$$v_r^2 = \omega^2 \cdot x^2 + v_0^2$$

Pa traženu ugaonu brzinu dobijamo ako u jednačinu uvrstimo tražene uslove

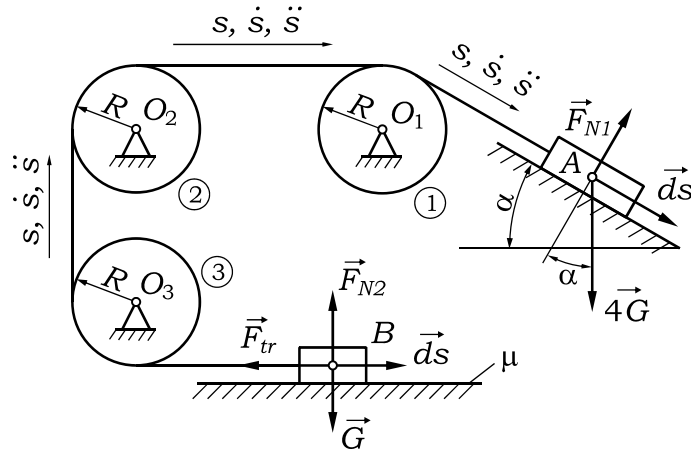
($x = a$, $v_r = 2 \cdot v_0$):

$$(2 \cdot v_0)^2 = \omega^2 \cdot a^2 + v_0^2$$

$$3 \cdot v_0^2 = \omega^2 \cdot a^2$$

$$\omega = \frac{\sqrt{3}v_0}{a}$$

3.



Za rješavanje zadatka koristit ćemo se zakonom o promjeni kinetičke energije sistema u obliku:

$$\frac{dE_K}{dt} = \frac{dA}{dt} \dots \dots \dots (A)$$

Kinetičku energiju sistema čine energije koturova i tereta:

$$E_K = E_{K1} + E_{K2} + E_{K3} + E_{KA} + E_{KB}$$

Pošto su koturovi identični i imaju isto kretanje vrijedi:

$$E_K = 3 \cdot E_{K1} + E_{KA} + E_{KB}$$

Koturovi vrše rotaciju, a tereti translaciju pa je kinetička energija sistema:

$$E_K = 3 \cdot \frac{I_1 \cdot \omega_1^2}{2} + \frac{m_A \cdot v_A^2}{2} + \frac{m_B \cdot v_B^2}{2}$$

Ako uvrstimo kinematske karakteristike kretanja za sva tijela u sistemu dobijamo:

$$E_K = 3 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot R^2}{2} \cdot \left(\frac{\dot{s}}{R} \right)^2 \right] + \frac{m_A \cdot \dot{s}^2}{2} + \frac{m_B \cdot \dot{s}^2}{2}$$

Konačni izraz dobijamo uvrštavanjem zadanih težina tijela:

$$E_K = \frac{G}{4g} \cdot \dot{s}^2 + \frac{2 \cdot G \cdot \dot{s}^2}{g} + \frac{G \cdot \dot{s}^2}{2g} = \frac{G + 8 \cdot G + 2 \cdot G}{4g} \cdot \dot{s}^2$$

$$E_K = \frac{11}{4 \cdot g} \cdot G \cdot \dot{s}^2 \dots \dots \dots (B)$$

Elementarni rad dobijamo uzimanjem u obzir težine tereta A i sile trenja koja djeluje na teret B koje vrše rad pri elementarnom pomjeranju \overline{ds} :

$$dA = 4\overline{G} \cdot \overline{ds} + \overline{F_{tr}} \cdot \overline{ds} = 4 \cdot G \cdot \sin \alpha \cdot ds - G \cdot \mu \cdot ds$$

$$dA = 4 \cdot G \cdot \frac{1}{2} \cdot ds - G \cdot \frac{1}{3} \cdot ds = \frac{5}{3} \cdot G \cdot ds \dots \dots \dots (C)$$

(C) i (B) u (A):

$$\frac{11}{2 \cdot g} \cdot G \cdot \dot{s} \cdot \ddot{s} = \frac{5}{3} \cdot G \cdot \dot{s}$$

$$\ddot{s} = \frac{10}{33} g$$