3. poglavlje (korigirano)

* F U N K C I J E *

U ovom poglavlju:

- Elementarne funkcije
- Inverzne funkcije elementarnih funkcija
- Domena složenih funkcija
- Inverz složenih funkcija
- Ispitivanje na rubu područja definicije

Kvalitativna svojstva funkcije $y = f(x)$ ($f : R \to R$), kao što su monotonost, konveksnost i konkavnost, injektivnost, parnost i neparnost i druga, lako možemo "očitati" s njenog grafa $G_f \subseteq O_{xy}$ u koordinatnom sustavu $O_{xy} = R^2 = \{(x, y) : x \in R, y \in R\}$.

Kvantitativna svojstva funkcije $y = f(x)$, kao što su nultočke, ekstremi, ponašanje na rubu domene, asimptote itd., dobivamo primjenom diferencijalnog računa, koji je izložen u sljedećim poglavljima.

Prema tome, najvažnije *elementarne* funkcije $y = f(x)$, $(f : R \to R)$, ćemo prikazati crtajući njihove grafove, a s njihovim svojstvima ćemo se *intuitivno* upoznati pomoću njihovog grafa.

Domena funkcije $y = f(x)$, u oznaci $D(f)$, je skup koji sadrži sve realne brojeve x u kojima je definirana-moguća vrijednost $f(x)$. Na primjer, funkcija $y = \sqrt{x}$ je moguća jedino ako je $x \geq 0$.

Slika funkcije $y = f(x)$, u oznaci $R(f)$, je skup svih vrijednosti $f(x)$, gdje su varijable x uzete iz domene $D(f)$. Na primjer, slika funkcije $y = x^2 - 1$ je interval $[-1, \infty)$.

Funkcija $y = f(x)$ je *rastuća* na intervalu $[a, b]$ ako vrijedi:

$$\boxed{x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2),\ \forall x \in [a, b].}$$

Funkcija $y = f(x)$ je *padajuća* na intervalu $[a, b]$ ako vrijedi:

$$\boxed{x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2),\ \forall x \in [a, b].}$$

Funkcija $y = f(x)$ je *monotona* na intervalu $[a,b]$ ako je ili rastuća ili padajuća na tom intervalu. Na primjer, funkcija $y = 3x^2$ nije monotona na intervalu $[-1,1]$, dok je monotona na intervalima $[-1,0]$ i $[0,1]$ (jer je padajuća na $[-1,0]$, a rastuća na $[0,1]$).

Funkcija $y = f(x)$ je *injektivna* ili *1-1 preslikavanje* ako vrijedi:

$$\boxed{x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2),\ \forall x \in D(f).}$$

Na primjer, funkcija $y = x^3$ je injektivna, dok funkcija $y = x^4$ nije injektivna.

Funkcija $y = f(x)$ je *parna* ako je

$$\boxed{f(-x) = f(x),\ \forall x \in D(f).}$$

Na primjer, $y = 3x^4 - x^2 + 1$.

Funkcija $y = f(x)$ je *neparna* ako je

$$\boxed{f(-x) = -f(x),\ \forall x \in D(f).}$$

Na primjer, funkcija $y = 2x^3 - x$.

Funkcija $y = f(x)$ je *periodička* ako postoji realan broj T, takozvani period, takav da vrijedi:

$$\boxed{f(x+T) = f(x),\ \forall x \in D(f).}$$

Na primjer, funkcija $y = 3\sin^2 x + 4\sin x$ je periodička funkcija sa periodom $T = 2\pi$.

Funkcija $y = f(x)$ je *konveksna* na intervalu $[a,b]$ ako vrijedi:

$$\boxed{f((1-t)a + t\cdot b) \leq (1-t)f(a) + t\cdot f(b),\ \forall t \in [0,1].}$$

Na primjer, funkcija $y = x^2 + x + 5$.

Funkcija $y = f(x)$ je *konkavna* na intervalu $[a,b]$ ako vrijedi:

$$\boxed{f((1-t)a + t\cdot b) \geq (1-t)f(a) + t\cdot f(b),\ \forall t \in [0,1].}$$

Na primjer, funkcija $y = -x^2 + 3x + 2$.

Inverzna funkcija funkcije $y = f(x)$, u oznaci $y = f^{-1}(x)$, je funkcija koja zadovoljava:

$$\boxed{\begin{aligned} &f^{-1}(f(x)) = x,\quad \forall x \in D(f) = R(f^{-1}),\\ &f(f^{-1}(y)) = y,\quad \forall y \in D(f^{-1}) = R(f). \end{aligned}}$$

Nultočka funkcije $y = f(x)$ je ona točka x za koju vrijedi: $f(x) = 0$. Na primjer, nultočke funkcije $y = x^3 - x$ su $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$.

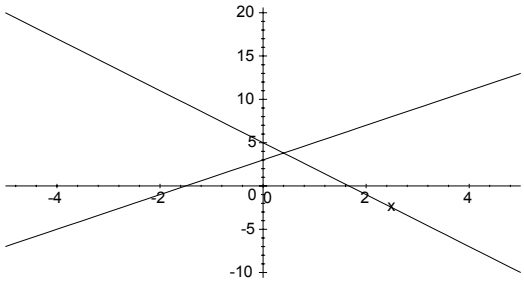
Neka od prethodnih svojstava se lako mogu provjeriti na grafu G_f funkcije $y = f(x)$:

- graf *parne* funkcije je *simetričan u odnosu na koordinatnu os* O_y;
- graf *neparne* funkcije je *simetričan u odnosu na koordinatni početak* $O(0,0)$;
- graf *injektivne* funkcije *siječe svaki pravac paralelan sa osi* O_x *točno u jednoj točki.*

➢ 3.1 ELEMENTARNE FUNKCIJE

Sada dajemo kratki opis najvažnijih elementarnih funkcija.

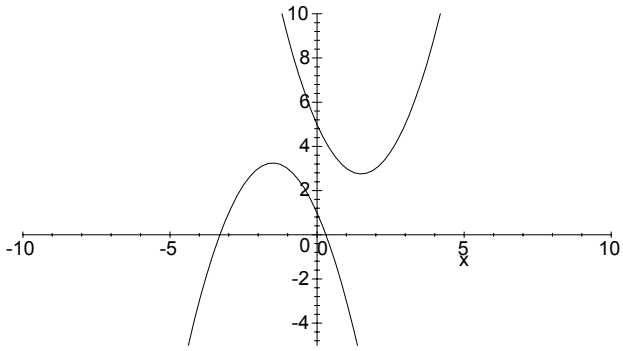
Graf *linearne* funkcije $y = a \cdot x + b$, $a \neq 0$, je pravac u ravnini, kao na slici (slučajevi kad je $a > 0$ i $a < 0$):



Svojstva *linearne* funkcije $y = a \cdot x + b$, $a \neq 0$, su sljedeća:

- $D(f) = (-\infty, \infty)$, $R(f) = (-\infty, \infty)$;
- rastuća ako je $a > 0$, padajuća ako je $a < 0$;
- neparna ako je $b = 0$, injektivna;
- ima inverznu funkciju $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}(x - b)$;
- nultočka $x = -\frac{b}{a}$.

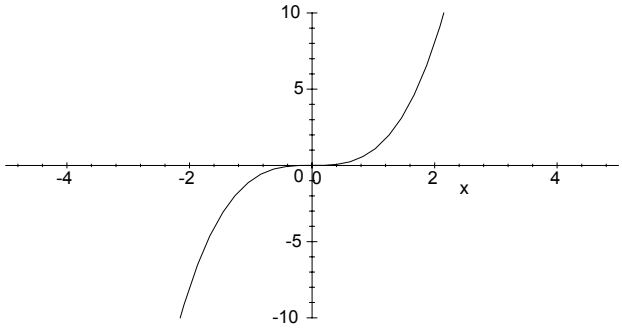
Graf *kvadratne* funkcije $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, $a \neq 0$, je parabola u ravnini, kao na slici (slučajevi kad je $a > 0$ i $a < 0$):



Svojstva *kvadratne* funkcije $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, $a \neq 0$, su sljedeća:

- $D(f)=(-\infty,\infty)$, $R(f)=[c-\frac{b^2}{4a},\infty)$ ako je $a>0$, $R(f)=(-\infty,c-\frac{b^2}{4a}]$ ako je $a<0$;
- konveksna ako je $a>0$, okrenuta ka gore;
- konkavna ako je $a<0$, okrenuta ka dolje;
- parna ako je $b=0$, niti parna niti neparna za $b\neq 0$;
- nije injektivna, pa nema inverznu funkciju;
- nultočka $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

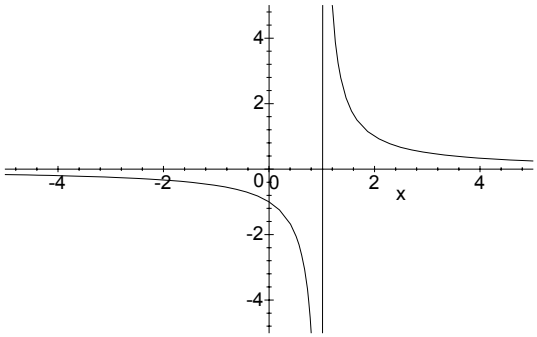
Graf *kubne* funkcije $y=x^3$ je krivulja u ravnini, kao na slici:



Svojstva *kubne* funkcije $y=x^3$ su sljedeća:

- $D(f)=(-\infty,\infty)$, $R(f)=(-\infty,\infty)$;
- rastuća;
- konkavna na $(-\infty,0]$ i konveksna na $[0,\infty)$;
- neparna, injektivna;
- ima inverznu funkciju $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$;
- nultočke $x=0$.

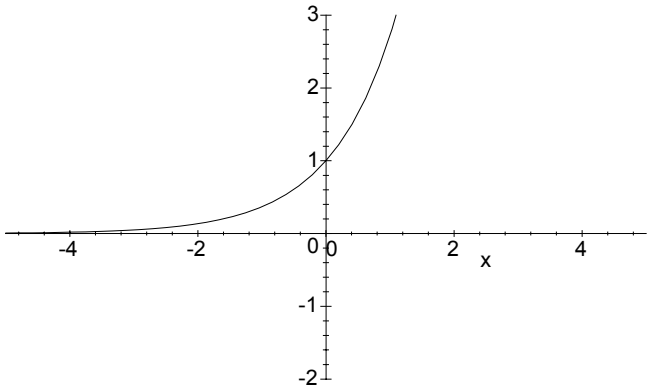
Graf *racionalne* funkcije $y=\frac{1}{x-b}$ je krivulja u ravnini, kao na slici:



Svojstva *racionalne* funkcije $y=\frac{1}{x-b}$ su sljedeća:

- $D(f)=(-\infty,b)\cup(b,\infty)$, $R(f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$;
- padajuća na intervalu $(-\infty,b)$, padajuća na intervalu (b,∞);
- konkavna na intervalu $(-\infty,b)$, konveksna na intervalu (b,∞);
- niti parna niti neparna, injektivna;
- ima inverznu funkciju $f^{-1}(x)=\dfrac{b\cdot x+1}{x}$;
- nema nultočaka;
- vertikalna asimptota $x=b$, horizontalna asimptota $y=0$.

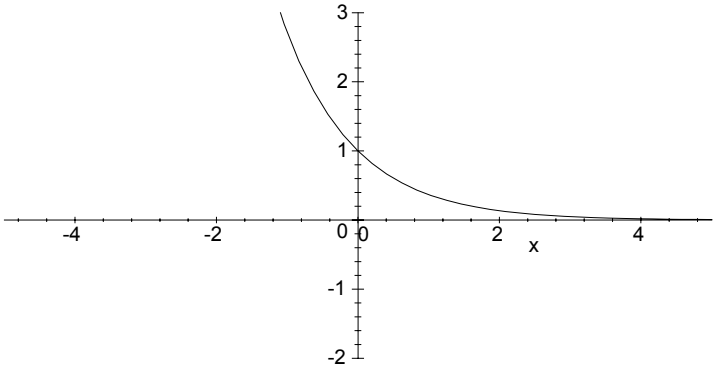
Graf *eksponencijalne* funkcije $y=e^x$ je krivulja u ravnini, kao na slici:



Svojstva *eksponencijalne* funkcije $y=e^x$ su sljedeća:

- $D(f)=(-\infty,\infty)$, $R(f)=(0,\infty)$;
- rastuća, konveksna;
- injektivna;
- ima inverznu funkciju $f^{-1}(x)=\ln x$;
- nema nultočaka;
- lijeva horizontalna asimptota $y=0$;
- $e^{x_1+x_2}=e^{x_1}\cdot e^{x_2}$, $\forall x_1,x_2\in R$.

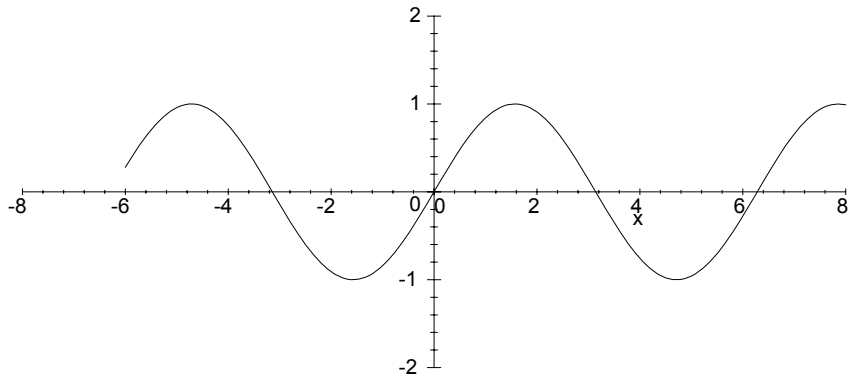
Graf *eksponencijalne* funkcije $y=e^{-x}$ je krivulja u ravnini, kao na slici:



Svojstva *eksponencijalne* funkcije $y = e^{-x}$ su sljedeća:

- $D(f) = (-\infty, \infty)$, $R(f) = (0, \infty)$;
- padajuća, konveksna;
- injektivna;
- ima inverznu funkciju $f^{-1}(x) = \ln \frac{1}{x}$;
- nema nultočaka;
- desna horizontalna asimptota $y = 0$.

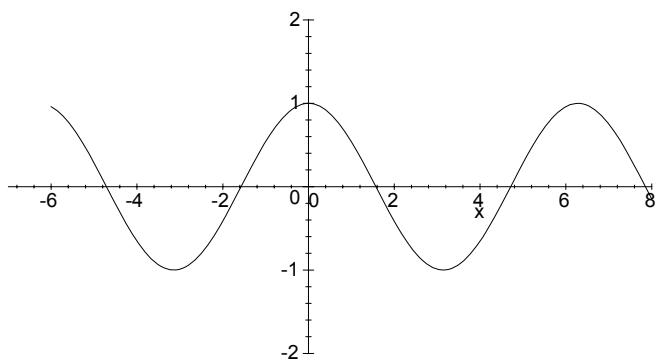
Graf *trigonometrijske* funkcije $y = \sin x$ je *sinusoida* u ravnini, kao na slici:



Svojstva *trigonometrijske* funkcije $y = \sin x$ su sljedeća:

- $D(f) = (-\infty, \infty)$, $R(f) = [-1, 1]$;
- rastuća na $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, padajuća na $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$;
- konkavna na $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, konveksna na $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$;
- neparna, nije injektivna, periodička sa periodom $T = 2\pi$;
- nema inverznu funkciju;
- nultočke $x_k = k\pi$.

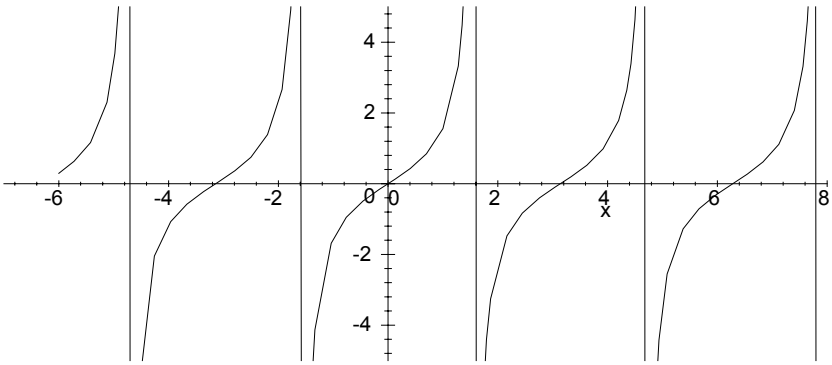
Graf *trigonometrijske* funkcije $y = \cos x$ je *sinusoida* u ravnini, kao na slici:



Svojstva *trigonometrijske* funkcije $y = \cos x$ su sljedeća:

- $D(f)=(-\infty,\infty)$, $R(f)=[-1,1]$;
- rastuća na $[-\pi+2k\pi,2k\pi]$, padajuća na $[2k\pi,\pi+2k\pi]$;
- konkavna na $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]$, konveksna na $[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi]$;
- parna, nije injektivna, periodička s periodom $T=2\pi$;
- nema inverznu funkciju;
- nultočke $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

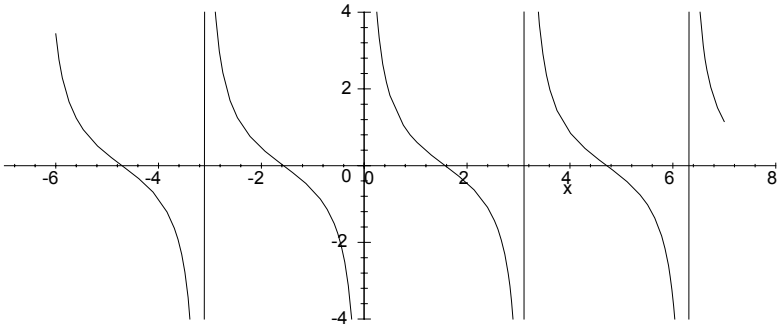
Graf *trigonometrijske* funkcije $y=\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ je krivulja u ravnini, kao na slici:



Svojstva *trigonometrijske* funkcije $y=\operatorname{tg} x$ su sljedeća:

- $D(f)=(-\infty,\infty)/\bigcup_k\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$, $R(f)=(-\infty,\infty)$;
- rastuća na $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$;
- konkavna na $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,k\pi]$, konveksna na $[k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$;
- neparna, nije injektivna, periodička s periodom $T=\pi$;
- nema inverznu funkciju;
- nultočke $x_k=k\pi$;
- vertikalne asimptote $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

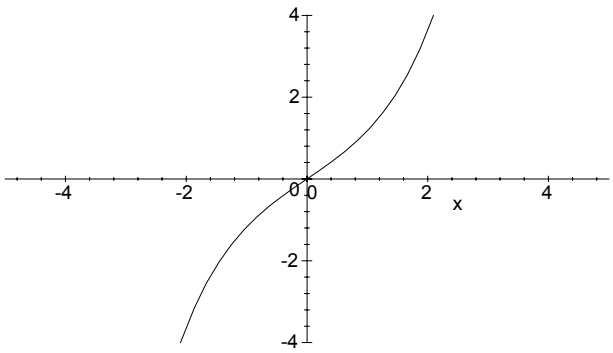
Graf *trigonometrijske* funkcije $y=\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ je krivulja u ravnini, kao na slici:



Svojstva *trigonometrijske* funkcije $y = \operatorname{ctg} x$ su sljedeća:

- $D(f) = (-\infty, \infty) / \bigcup_k \{k\pi\}$, $R(f) = (-\infty, \infty)$;
- padajuća na $(k\pi, \pi + k\pi)$;
- konveksna na $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$, konkavna na $[\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi)$;
- neparna, nije injektivna, periodička s periodom $T = \pi$;
- nema inverznu funkciju;
- nultočke $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$;
- vertikalne asimptote $x_k = k\pi$.

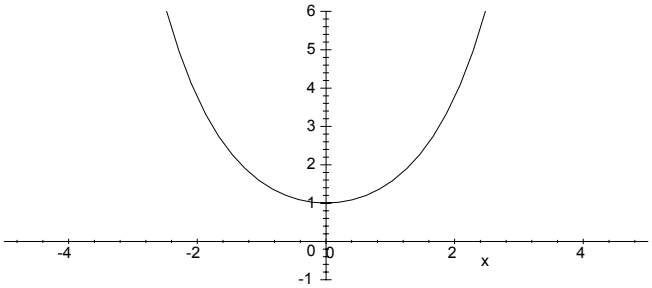
Graf *hiperbolne* funkcije $y = \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ je krivulja u ravnini, kao na slici:



Svojstva *hiperbolne* funkcije $y = \operatorname{sh} x$ su sljedeća:

- $D(f) = (-\infty, \infty)$, $R(f) = (-\infty, \infty)$;
- rastuća, konkavna na $(-\infty, 0]$, a konveksna na $[0, \infty)$;
- neparna, injektivna;
- ima inverznu funkciju $f^{-1}(x) = \operatorname{Arsh} x$;
- nultočke $x = 0$.

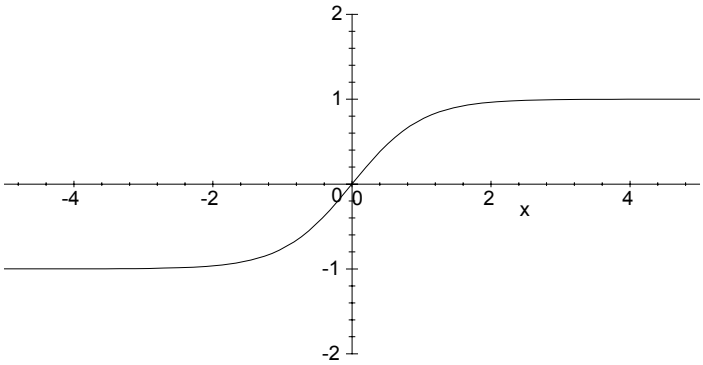
Graf *hiperbolne* funkcije $y = \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ je *lančanica* u ravnini, kao na slici:



Svojstva *hiperbolne* funkcije $y = \text{ch}\, x$ su sljedeća:

- $D(f) = (-\infty, \infty)$, $R(f) = [1, \infty)$;
- padajuća na $(-\infty, 0]$, a rastuća na $[0, \infty)$;
- konveksna, parna, nije injektivna;
- nema inverznu funkciju;
- nema nultočaka.

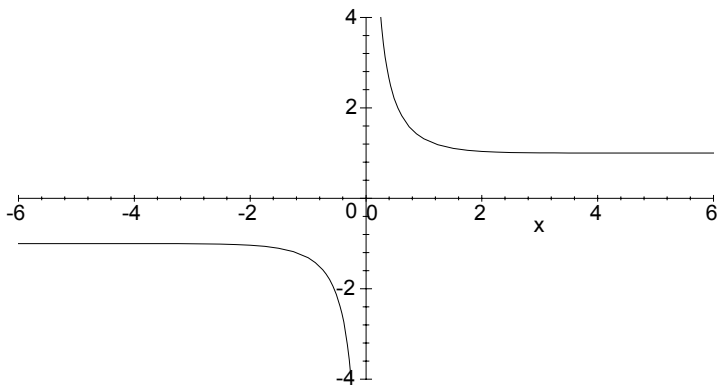
Graf *hiperbolne* funkcije $y = \text{th}\, x = \dfrac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x}$ je krivulja u ravnini, kao na slici:



Svojstva *hiperbolne* funkcije $y = \text{th}\, x$ su sljedeća:

- $D(f) = (-\infty, \infty)$, $R(f) = (-1, 1)$;
- rastuća, konveksna na $(-\infty, 0]$, a konkavna na $[0, \infty)$;
- neparna, injektivna;
- ima inverznu funkciju $f^{-1}(x) = \text{Arth}\, x$;
- nultočke $x = 0$;
- lijeva horizontalna asimptota $y = -1$, desna horizontalna asimptota $y = 1$.

Graf *hiperbolne* funkcije $y = \text{cth}\, x = \dfrac{\text{ch}\, x}{\text{sh}\, x}$ je krivulja u ravnini, kao na slici:



Svojstva *hiperbolne* funkcije $y = \text{cth}\, x$ su sljedeća:

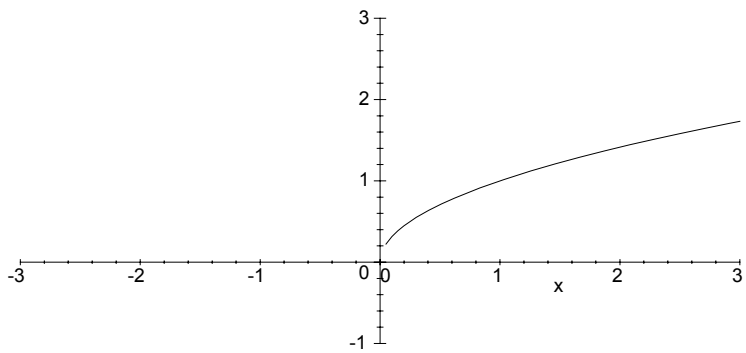
- $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $R(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$;
- padajuća i konkavna na $(-\infty, 0)$, padajuća i konveksna na $(0, \infty)$;
- neparna, injektivna;
- ima inverznu funkciju $f^{-1}(x) = \text{Arcth}\, x$;
- nema nultočaka;
- vertikalna asimptota $x = 0$,
- lijeva horizontalna asimptota $y = -1$, desna horizontalna asimptota $y = 1$.

➢ 3.2 INVERZNE FUNKCIJE ELEMENTARNIH FUNKCIJA

Sada dajemo kratki opis inverznih funkcija nekih elementarnih funkcija.

Napomenimo da je graf *inverzne* funkcije $y = f^{-1}(x)$ zrcalno simetričan grafu originalne funkcije $y = f(x)$ u odnosu na pravac $y = x$.

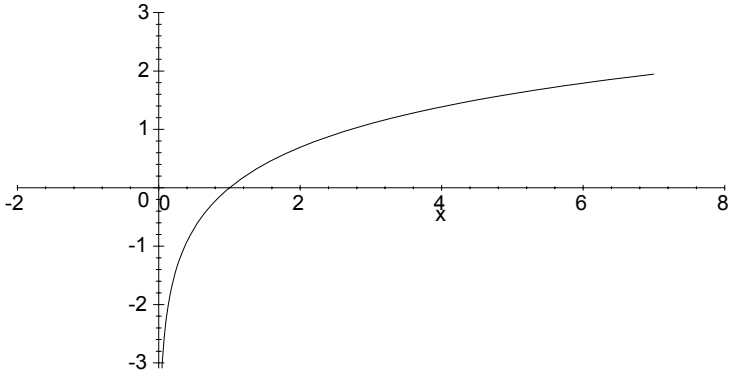
Inverzna funkcija funkcije $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, je *korijen* funkcija $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Njen graf je krivulja, kao na slici:



Svojstva *korijen* funkcije $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ su sljedeća:

- $D(f) = [0, \infty)$, $R(f) = [0, \infty)$;
- rastuća, konkavna;
- injektivna;
- nultočka $x = 0$.

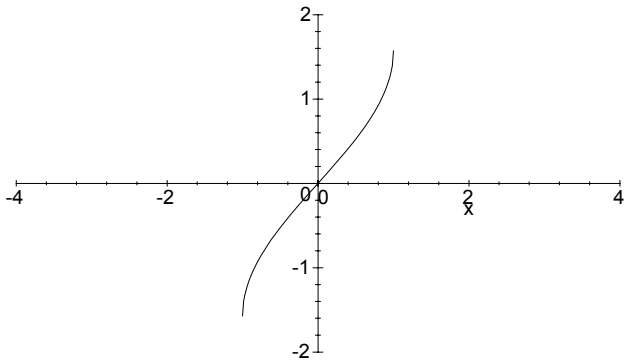
Inverzna funkcija funkcije $f(x) = e^x$ je *logaritamska* funkcija $f^{-1}(x) = \ln x$. Njen graf je krivulja, kao na slici:



Svojstva *logaritamske* funkcije $f^{-1}(x) = \ln x$ su sljedeća:

- $D(f) = (0,\infty)$, $R(f) = (-\infty,\infty)$;
- rastuća, konkavna;
- injektivna;
- nultočka $x = 1$.

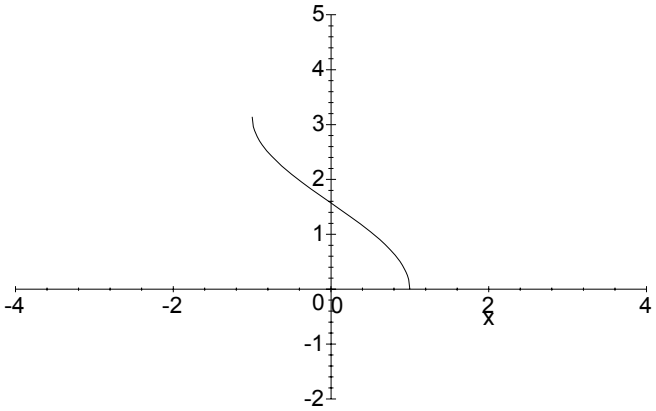
Inverzna funkcija funkcije $f(x) = \sin x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, je ciklonometrijska *arkus-sinus* funkcija $f^{-1}(x) = \arcsin x$. Njen graf je krivulja, kao na slici:



Svojstva *arkus-sinus* funkcije $f^{-1}(x) = \arcsin x$ su sljedeća:

- $D(f) = [-1,1]$, $R(f) = [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$;
- rastuća, konkavna na $[-1,0]$, a konveksna na $[0,1]$;
- injektivna;
- nultočka $x = 0$.

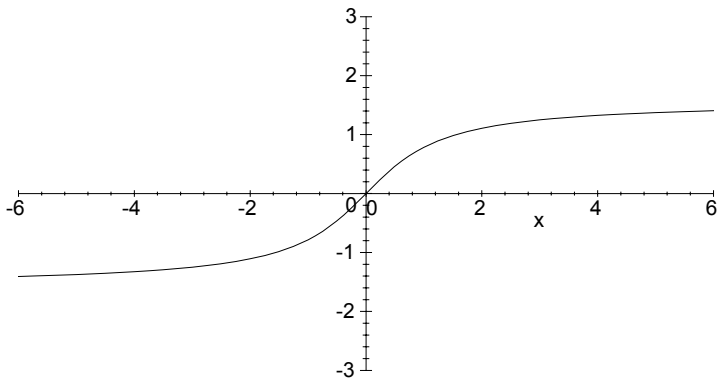
Inverzna funkcija funkcije $f(x)=\cos x,\ 0\le x\le\pi,$ je ciklonometrijska *arkus-kosinus* funkcija $f^{-1}(x)=\arccos x$. Njen graf je krivulja, kao na slici:



Svojstva *arkus-kosinus* funkcije $f^{-1}(x)=\arccos x$ su sljedeća:

- $D(f)=[-1,1]$, $R(f)=[0,\pi]$;
- padajuća, konveksna na $[-1,0]$, a konkavna na $[0,1]$;
- injektivna;
- nultočka $x=1$.

Inverzna funkcija funkcije $f(x)=\operatorname{tg} x,\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},$ je ciklonometrijska *arkus-tangens* funkcija $f^{-1}(x)=\operatorname{arctg} x$. Njen graf je krivulja, kao na slici:

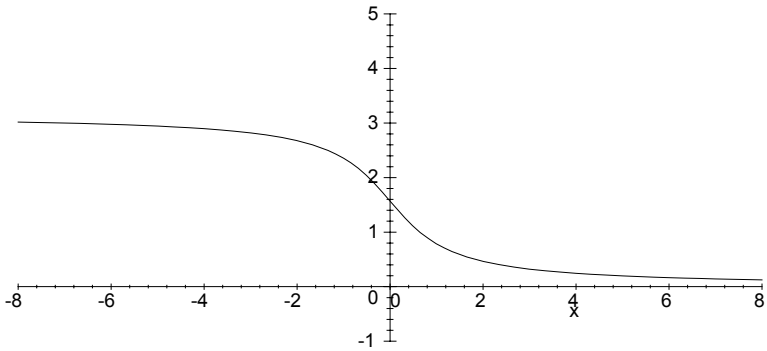


Svojstva *arkus-tangens* funkcije $f^{-1}(x)=\operatorname{arctg} x$ su sljedeća:

- $D(f)=(-\infty,\infty)$, $R(f)=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$;
- rastuća, konveksna na $(-\infty,0]$, a konkavna na $[0,\infty)$;
- injektivna;
- nultočka $x=0$;

- lijeva horizontalna asimptota je $y = -\frac{\pi}{2}$, a desna horizontalna asimptota je $y = \frac{\pi}{2}$.

Inverzna funkcija funkcije $f(x) = \operatorname{ctg} x,\ 0 < x < \pi,$ je ciklonometrijska *arkus-kotangens* funkcija $f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,ctg} x$. Njen graf je krivulja, kao na slici:



Svojstva *arkus-kotangens* funkcije $f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,ctg} x$ su sljedeća:

- $D(f) = (-\infty, \infty)$, $R(f) = (0, \pi)$;
- padajuća, konkavna na $(-\infty, 0]$, a konveksna na $[0, \infty)$;
- injektivna;
- nema nultočke;
- lijeva horizontalna asimptota je $y = \pi$, a desna horizontalna asimptota je $y = 0$.

➢ 3.3 DOMENA SLOŽENIH FUNKCIJA

Ako je funkcija $y = f(x)$ kompozicija nekoliko elementarnih funkcija, tada treba voditi računa da na svim mjestima gdje se pojavljuje varijabla x, dana funkcija bude definirana. Kao što smo vidjeli u prethodne dvije točke, "zahtjevi" na domenu dolaze od inverznih funkcija nekih elementarnih funkcija. To znači da u složenoj funkciji $y = f(x)$ treba osigurati uvjete na sva ona mjesta gdje se pojavljuju "zahtjevne" funkcije u smislu domene, a to su:

- $\sqrt{G(x)}$ je definiran za one x, za koje vrijedi uvjet $G(x) \geq 0$;
- $\ln(G(x))$ je definiran za one x, za koje vrijedi uvjet $G(x) > 0$;
- $\frac{1}{G(x)}$ je definiran za one x, za koje vrijedi uvjet $G(x) \neq 0$;
- $\arcsin(G(x))$ je definiran za one x, za koje vrijedi uvjet $-1 \leq G(x) \leq 1$;
- $\arccos(G(x))$ je definiran za one x, za koje vrijedi uvjet $-1 \leq G(x) \leq 1$;
- $\operatorname{cth}(G(x))$ je definiran za one x, za koje vrijedi uvjet $G(x) \neq 0$.

➢ RIJEŠENI PRIMJERI

U sljedećim zadacima naći domenu danih funkcija.

187. $f(x)=\sqrt{x^2-4}$;

- $x^2-4\geq 0 \quad \Rightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

Rješenje: $D(f)=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

188. $f(x)=\ln(2x-x^2)+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$;

- $2x-x^2>0 \quad \Rightarrow x\in(0,2)$;
- $x-1\geq 0 \quad \Rightarrow x\in[1,+\infty)$;
- $x-1\neq 0 \quad \Rightarrow x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$;

Rješenje: $D(f)=(1,2)$.

189. $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-3}}}{x+1}$;

- $x-3\neq 0 \quad \Rightarrow x\in(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$;
- $x+1\neq 0 \quad \Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$;

Rješenje: $D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,3)\cup(3,+\infty)$.

190. $f(x)=\sin(x+x^2)+\dfrac{\ln(2x-5)}{\sqrt{9-x^2}}$;

- $2x-5>0 \quad \Rightarrow x\in(\frac{5}{2},+\infty)$;
- $9-x^2\geq 0 \quad \Rightarrow x\in[-3,3]$;
- $9-x^2\neq 0 \quad \Rightarrow x\in(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$;

Rješenje: $D(f)=(\frac{5}{2},3)$.

191. $f(x) = \arcsin\,(2x-5) + e^{\frac{1}{x}}$;

- $-1 \le 2x-5 \le 1 \;\Rightarrow 4 \le 2x \le 6 \;\Rightarrow x \in [2,3]$;
- $x \ne 0 \;\Rightarrow x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$;

Rješenje: $D(f) = [2,3]$.

192. $f(x) = \ln\,(\frac{2x-1}{x+4}) + e^{x^2}$;

- $\frac{2x-1}{x+4} > 0 \;\Leftrightarrow\; ((2x-1>0 \text{ i } x+4>0) \text{ ili } (2x-1<0 \text{ i } x+4<0))$;
- $(2x-1>0 \text{ i } x+4>0) \;\Rightarrow x \in (\frac{1}{2},+\infty)$;
- $(2x-1<0 \text{ i } x+4<0) \;\Rightarrow x \in (-\infty,-4)$;

Rješenje: $D(f) = (-\infty,-4) \cup (\frac{1}{2},+\infty)$.

193. $f(x) = \sqrt{\ln\,(\frac{4x-3}{2x+5})} + \sin(2x-1)$;

- $\ln\,(\frac{4x-3}{2x+5}) \ge 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{4x-3}{2x+5} \ge 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{4x-3}{2x+5} - 1 \ge 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x-8}{2x+5} \ge 0$;
- $\frac{2x-8}{2x+5} \ge 0 \Leftrightarrow\; ((2x-8 \ge 0 \text{ i } 2x+5>0) \text{ ili } (2x-8 \le 0 \text{ i } 2x+5<0))$;
- $(2x-8 \ge 0 \text{ i } 2x+5>0) \;\Rightarrow x \in [4,+\infty)$;
- $(2x-8 \le 0 \text{ i } 2x+5<0) \;\Rightarrow x \in (-\infty,-\frac{5}{2})$;

Rješenje: $D(f) = (-\infty,-\frac{5}{2}) \cup [4,+\infty)$.

➢ ZADACI ZA VJEŽBU

Naći domene danih funkcija.

194. $f(x) = \sqrt{3x-x^2} + \sin(2x+1)$.

195. $f(x)=\operatorname{arctg}(x+2)+\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x}$.

196. $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-4)}{\operatorname{sh}(x^2-x)}+\dfrac{2}{x}$.

197. $f(x)=\dfrac{\sqrt{30-x-x^2}}{x-1}+e^x\cdot\ln(x^2-1)$.

198. $f(x)=\dfrac{\arcsin(x^2-3)}{x+1}+e^{\frac{1}{x-1}}$.

199. $f(x)=e^{\frac{1}{x^2-1}}\sqrt{\arccos\dfrac{x-1}{x+2}}$.

➢ RJEŠENJA

194. $D(f)=[0,3]$. 195. $D(f)=(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$. 196. $D(f)=(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$.
197. $D(f)=[-6,-1)\cup(1,5]$. 198. $D(f)=[-2,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},2]$.
199. $D(f)=[-\dfrac{1}{2},1)\cup(1,\infty)$.

➢ 3.4 INVERZ SLOŽENIH FUNKCIJA

Neka je funkcija $y=f(x)$ kompozicija nekoliko elementarnih funkcija. Traženje inverza takve složene funkcije svodi se na uzastopno traženje inverza onih elementarnih funkcija koje je sačinjavaju. Stoga treba dobro znati inverze elementarnih funkcija koje smo radili u točki 5.2. Radi dobrog pregleda, u sljedećoj tablici navodimo neke najčešće inverzne funkcije elementarnih funkcija, koje ćemo susretati u konkretnim problemima:

- $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ je inverzna funkcija od $f(x)=x^2,\ \ x\ge 0,$
- $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ je inverzna funkcija od $f(x)=x^3$
- $f^{-1}(x)=\ln x$ je inverzna funkcija od $f(x)=e^x$
- $f^{-1}(x)=\arcsin x$ je inverzna funkcija od $f(x)=\sin x,\ \ -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2},$
- $f^{-1}(x)=\arccos x$ je inverzna funkcija od $f(x)=\cos x,\ \ 0\le x\le\pi.$

➢ RIJEŠENI PRIMJERI

U sljedećim zadacima naći inverzne funkcije danih složenih funkcija.

200. $f(x) = 2x + 5;$

- $y = 2x + 5, \ x \leftrightarrow y \ \Rightarrow x = 2y + 5;$
- $x = 2y + 5 \ \Rightarrow \ 2y = x - 5 \ \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2};$

Rješenje: $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}.$

201. $f(x) = 3x^2 - 4;$

- $y = 3x^2 - 4, \ x \leftrightarrow y \ \Rightarrow x = 3y^2 - 4;$
- $x = 3y^2 - 4 \ \Rightarrow \ 3y^2 = x + 4 \ \Rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}};$

Rješenje: $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}}.$

202. $f(x) = e^{x^2} - 3;$

- $y = e^{x^2} - 3, \ x \leftrightarrow y \ \Rightarrow x = e^{y^2} - 3;$
- $x = e^{y^2} - 3 \ \Rightarrow \ e^{y^2} = x + 3 \ \Rightarrow y^2 = \ln(x+3) \ \Rightarrow y = \sqrt{\ln(x+3)};$

Rješenje: $f^{-1}(x) = \sqrt{\ln(x+3)}.$

203. $f(x) = \frac{2x+3}{3x+1};$

- $y = \frac{2x+3}{3x+1}, \ x \leftrightarrow y \ \Rightarrow x = \frac{2y+3}{3y+1};$
- $x = \frac{2y+3}{3y+1} \ \Rightarrow \ 3yx + x = 2y + 3 \ \Rightarrow y(3x-2) = 3 - x \ \Rightarrow y = \frac{3-x}{3x-2};$

Rješenje: $f^{-1}(x) = \frac{3-x}{3x-2}.$

204. $f(x)=\dfrac{-2\sin x+1}{\sin x-3}$;

- $y=\dfrac{-2\sin x+1}{\sin x-3}$, $x\leftrightarrow y$ $\Rightarrow x=\dfrac{-2\sin y+1}{\sin y-3}$;
- $x=\dfrac{-2\sin y+1}{\sin y-3}$ $\Rightarrow$ $x\sin y-3x=-2\sin y+1$ $\Rightarrow (x+2)\sin y=1+3x$ $\Rightarrow$ $\sin y=\dfrac{1+3x}{x+2}$;

Rješenje: $f^{-1}(x)=\arcsin\dfrac{1+3x}{x+2}$.

205. $f(x)=\sqrt{\ln\dfrac{x^2-1}{x^2-5}}$;

- $y=\sqrt{\ln\dfrac{x^2-1}{x^2-5}}$, $x\leftrightarrow y$ $\Rightarrow x=\sqrt{\ln\dfrac{y^2-1}{y^2-5}}$;
- $x=\sqrt{\ln\dfrac{y^2-1}{y^2-5}}$ $\Rightarrow$ $x^2=\ln\dfrac{y^2-1}{y^2-5}$ $\Rightarrow$ $e^{x^2}=\dfrac{y^2-1}{y^2-5}$ $\Rightarrow$ $e^{x^2}y^2-5e^{x^2}=y^2-1$

  $\Rightarrow y^2(e^{x^2}-1)=5e^{x^2}-1$ $\Rightarrow y^2=\dfrac{5e^{x^2}-1}{e^{x^2}-1}$;

Rješenje: $f^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{5e^{x^2}-1}{e^{x^2}-1}}$.

206. $f(x)=\arcsin(\ln(\cos(e^x)))$;

- $y=\arcsin(\ln(\cos(e^x)))$, $x\leftrightarrow y$ $\Rightarrow x=\arcsin(\ln(\cos(e^y)))$;
- $x=\arcsin(\ln(\cos(e^y)))$ $\Rightarrow$ $\sin(x)=\ln(\cos(e^y))$ $\Rightarrow e^{\sin(x)}=\cos(e^y)$

  $\Rightarrow \arccos(e^{\sin(x)})=e^y \Rightarrow \ln(\arccos(e^{\sin(x)}))=y$;

Rješenje: $f^{-1}(x)=\ln(\arccos(e^{\sin(x)}))$.

➢ ZADACI ZA VJEŽBU

Naći inverzne funkcije danih funkcija.

207. $f(x)=\ln(\sin(2x-4))$.

208. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}+1}$.

209. $f(x)=e^{\frac{x^2+1}{x^2+3}}$.

210. $f(x)=\ln\dfrac{2\cos x+1}{\cos x-2}$.

211. $f(x)=\arcsin e^{\frac{x^3+4}{x^3-1}}$.

➢ RJEŠENJA

207. $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}\arcsin e^x+2$. 208. $f^{-1}(x)=\left(\dfrac{x-3}{2x-1}\right)^2$.

209. $f^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{1-3\ln x}{\ln x-1}}$. 210. $f^{-1}(x)=\arccos\dfrac{2e^x+1}{e^x-2}$.

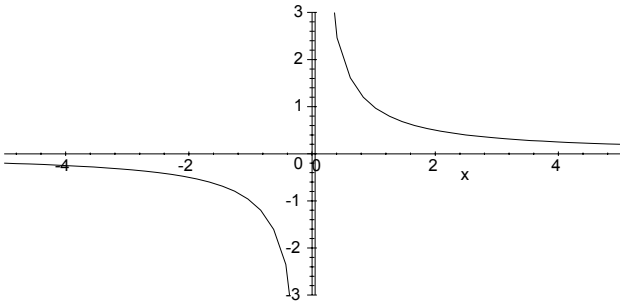
211. $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{\ln(\sin x)+4}{\ln(\sin x)-1}}$.

➢ 3.5 ISPITIVANJE NA RUBU PODRUČJA DEFINICIJE

Ispitivanje na rubu područja definicije podrazumijeva računanje lijevih i desnih limesa dane funkcije u rubovima njenog područja definicije. To znači da prvo treba naći domenu $D(f)$ dane funkcije $y=f(x)$, a potom u rubnim točkama $x=a$ od $D(f)$ izračunati lijevi limes $\lim\limits_{x\to a-}f(x)$ i desni limes $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$. Pri tome, računanje ovih limesa može se izvesti na jednostavan način, bez upotrebe složenog računa limesa i derivacija, kao što će biti izloženo u sljedećim poglavljima. Naime, dovoljno je u danu funkciju uvrstiti vrijednosti $x=a-$, što znači lijevo od točke $x=a$, te vrijednost $x=a+$, što znači desno od točke $x=a$, te koristiti formule za ponašanje funkcije $f(x)=1/x$ oko nule:

$$\boxed{\frac{1}{0-}=-\infty,\quad \frac{1}{0+}=+\infty,}$$

gdje «$0-$» označava lijevo, a «$0+$» desno od $x=0$. Ovo je lako zaključiti s grafa funkcije $f(x)=1/x$:



➢ RIJEŠENI PRIMJERI

U sljedećim zadacima izračunati lijeve i desne limese u rubovima domena.

212. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$;

- domena: $D(f)=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$,
- $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{(1-)-1}=\dfrac{1}{0-}=-\infty$,
- $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{(1+)-1}=\dfrac{1}{0+}=\infty$.

213. $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$;

- domena: $D(f)=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$,
- $\lim\limits_{x\to 2-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{((2-)-2)^2}=\dfrac{1}{(0-)^2}=\dfrac{1}{0+}=\infty$,
- $\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{((2+)-2)^2}=\dfrac{1}{0+}=\infty$.

214. $f(x)=e^{\frac{1}{x-3}}$;

- domena: $D(f)=(-\infty,3)\cup(3,\infty)$,
- $\lim\limits_{x\to 3-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3-} e^{\frac{1}{x-3}}=e^{\frac{1}{(3-)-3}}=e^{\frac{1}{0-}}=e^{-\infty}=\dfrac{1}{e^{\infty}}=\dfrac{1}{\infty}=0$,
- $\lim\limits_{x\to 3+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3+} e^{\frac{1}{x-3}}=e^{\frac{1}{(3+)-3}}=e^{\frac{1}{0+}}=e^{\infty}=\infty$.

215. $f(x) = arctg\dfrac{1}{x-4}$;

- domena: $D(f) = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$,
- $\lim\limits_{x\to 4-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4-} arctg\dfrac{1}{x-4} = arctg\dfrac{1}{(4-)-4} = arctg\dfrac{1}{0-} = arctg(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$,
- $\lim\limits_{x\to 4+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4+} arctg\dfrac{1}{x-4} = arctg\dfrac{1}{(4+)-4} = arctg\dfrac{1}{0+} = arctg(\infty) = \dfrac{\pi}{2}$.

216. $f(x) = th\dfrac{1}{x-3}$;

- domena: $D(f) = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$,
- $\lim\limits_{x\to 3-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3-} th\dfrac{1}{x-3} = th\dfrac{1}{(3-)-3} = th\dfrac{1}{0-} = th(-\infty) = -1$,
- $\lim\limits_{x\to 3+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3+} th\dfrac{1}{x-3} = th\dfrac{1}{(3+)-3} = th\dfrac{1}{0+} = th(\infty) = 1$.

217. $f(x) = cth\dfrac{x}{x^2-4}$;

- domena: $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$,
- $\lim\limits_{x\to(-2)-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-2)-} cth\dfrac{x}{(x-2)(x+2)} = cth\dfrac{-2}{((-2-)-2)((-2-)+2)} = cth\dfrac{-2}{(-4)(0-)} =$

  $= cth\dfrac{1}{0-} = cth(-\infty) = -1$,
- $\lim\limits_{x\to(-2)+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-2)+} cth\dfrac{x}{(x-2)(x+2)} = cth\dfrac{-2}{((-2+)-2)((-2+)+2)} = cth\dfrac{-2}{(-4)(0+)} =$

  $= cth\dfrac{1}{0+} = cth(\infty) = 1$,
- $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} cth\dfrac{x}{x^2-4} = cth\dfrac{0-}{-4} = cth(0+) = \infty$,
- $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} cth\dfrac{x}{x^2-4} = cth\dfrac{0+}{-4} = cth(0-) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-} cth\dfrac{x}{(x-2)(x+2)} = cth\dfrac{2}{((2-)-2)((2-)+2)} = cth\dfrac{2}{(0-)(4)} =$

  $= cth\dfrac{1}{0-} = cth(-\infty) = -1$,
- $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} cth\dfrac{x}{(x-2)(x+2)} = cth\dfrac{2}{((2+)-2)((2+)+2)} = cth\dfrac{2}{(0+)(4)} =$

  $= cth\dfrac{1}{0+} = cth(\infty) = 1$,

što se može skratiti ako uvažimo činjenicu da je dana funkcija neparna.

➢ ZADACI ZA VJEŽBU

U sljedećim zadacima naći domenu i ispitati ponašanje na rubu domene danih funkcija.

218. $f(x) = \operatorname{ch}\dfrac{1}{x+3}$.

219. $f(x) = e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}$.

220. $f(x) = \operatorname{th}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$.

221. $f(x) = \operatorname{arctg} e^{\frac{1}{x-4}} + \dfrac{\pi}{2}$.

222. $f(x) = e^{-\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x-2)}}$.

223. $f(x) = 3\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot \operatorname{th}\dfrac{1}{x+4}\right)$.

➢ RJEŠENJA

218. $D(f) = (-\infty,-3)\cup(-3,\infty)$,
- $\lim\limits_{x\to(-3)-} f(x) = +\infty$,
- $\lim\limits_{x\to(-3)+} f(x) = +\infty$.

219. $D(f) = (-\infty,1)\cup(1,\infty)$,
- $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 0$,
- $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 0$.

220. $D(f) = (-\infty,-2)\cup(2,\infty)$,
- $\lim\limits_{x\to(-2)-} f(x) = 1$,
- $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = 1$.

221. $D(f) = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$,

- $\lim\limits_{x \to 4-} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$,
- $\lim\limits_{x \to 4+} f(x) = \pi$.

222. $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$,

- $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = 0$,
- $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = 0$.

223. $D(f) = (-\infty, -4) \cup (-4, \infty)$,

- $\lim\limits_{x \to (-4)-} f(x) = -3$,
- $\lim\limits_{x \to (-4)+} f(x) = 3$.