Od dr ing. B. Apsena izašla su i ova izdanja u nakladi Tehničke knjige, Zagreb:

LOGARITAMSKO RAČUNALO

III izdanje 1952. godine
IV izdanje 1957. godine
V izdanje 1962. godine
VI izdanje 1967. godine
VII izdanje 1969. godine

REPETITORIJ
ELEMENTARNE MATEMATIKE

II izdanje 1950. godine
III izdanje 1954. godine
IV izdanje 1958. godine
V izdanje 1960. godine
VI izdanje 1963. godine
VII izdanje 1965. godine
VIII izdanje 1970. godine

RIJEŠENI ZADACI
VIŠE MATEMATGKE

I dio 1969. godine
II dio 1969. godine
III dio 1967. godine
III oko 1970. godine

REPETITORIJ
VIŠE MATEMATIKE, prvi dio

I izdanje 1950. godine
II izdanje 1963. godine
III izdanje 1964. godine
IV izdanje 1966. godine
V izdanje 1969. godine

REPETITORIJ
VIŠE MATEMATIKE, drugi dio

I izdanje 1952. godine
II izdanje 1958. godine
III izdanje 1964. godine
IV izdanje 1966. godine
V izdanje 1970. godine

REPETITORIJ
VIŠE MATEMATIKE, treći dio

I izdanje 1958. godine
II izdanje 1963. godine
III izdanje 1965. godine
IV izdanje 1968. godine

Dr ing. BORIS APSEN

RIJEŠENI ZADACI VIŠE MATEMATIKE

UZ TREĆI DIO REPETITORIJA

VEKTORSKA ALGEBRA • ANALITIČKA GEOMETRIJA U PROSTORU • FUNKCIJE DVIJU I VIŠE PROMJENLJIVIH • VIŠESTRUKI INTEGRALI I NJIHOVA PRIMJENA • NEPRAVI INTEGRALI • INTEGRALI OVISNI O PARAMETRU • EGZAKTNI DIFERENCIJALI I NJIHOVO INTEGRIRANJE • EGZAKTNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE • EULEROV MULTIPLIKATOR • KRIVULJE U PROSTORU • KRIVULJNI I PLOŠNI INTEGRALI • VEZA IZMEĐU INTEGRALA RAZLIČITIH TIPOVA • VEKTORSKA ANALIZA • ELEMENTI SKALARNOG I VEKTORSKOG POLJA • OPERATORSKI RAČUN • SUSTAVI LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

TEHNIČKA KNJIGA
ZAGREB.

Tisak: Izdavačko-štamparsko preduzeće »OBOD« — Cetinje

PREDGOVOR

Nastojeći da olakšam studij više matematike u prvom redu onim slušačima tehničkih i prirodoslovno-matematičkih fakulteta, koji nemaju mogućnosti pohađati sva predavanja i vježbe iz matematike, a također i onim mnogobrojnim tehničkim radnicima, koji bi u vrijeme slobodno od terenskih radova htjeli samoučno proširiti svoje matematičko znanje, sastavio sam ovu zbirku zadataka, u kojoj sam riješio i potanko rastumačio uz mnogobrojne slike preko 800 zadataka.

Dok se većina slušača relativno lako snalazi u gradivu, koje sam obradio u I i II dijelu Repetitorija, mnogo više teškoća čini razumjevanje i usvajanje gradiva III dijela, pa sam odlučio da kao prvi korak sastavim zbirku zadataka koji bi u stopu pratili gradivo tog trećeg dijela, odgodivši sastavljanje zbirke riješenih zadataka za prva dva dijela Repetitorija. Sada radim na toj zbirci.

Većina zadataka je uzeta iz poznatih izvrsnih zbirki ruskih autora Bermana, Davidovića, Gintera i dr., pri čemu je pretežni dio tih zadataka potanko obrađen i riješen, dok manji dio sadrži samo slične zadatke i rezultate za samostalno rješavanje tih zadataka.

Očito je da rješavanje zadataka navedenih u zbirci pretpostavlja znanje gradiva I i II dijela Repetitorija i to diferencijalnog i integralnog računa, pri čemu su osobito česti osvrti na tipove integrala navedenih u II dijelu.

Na početku svakog poglavlja navedene su formule prema kojima se rješavaju dotični zadaci. Formule su označene brojevima iz III dijela pa se dotično gradivo lako pronađe u Repetitoriju. Preporučam da se iza studija svakog pojedinog poglavlja III dijela odmah prouče i riješe pripadni zadaci iz zbirke.

Na kraju izrazujem iskrenu zahvalnost članovima kolektiva Tehničke knjige i Grafičkog zavoda Hrvatske a u prvom redu uredniku ove knjige Ivanu Uremoviću za susretljivost i saradnju i meteru Emanuelu Dragojeviću koji pri slaganju veoma složenog gradiva nije štedio trud i znanje da knjiga bude što preglednija.

Drage čitaoce molim da mi saopće svoje primjedbe i želje i upozore me na moguće pogreške koje je teško izbjeći kad sam svladavaš tako golem materijal. Moja adresa: Zagreb, Vončinina ul. 8.

Zagreb, listopada 1966. *B. Apsen*

SADRŽAJ

VIŠESTRUKI INTEGRALI

I. VEKTORSKA ALGEBRA I NJENA PRIMJENA

A. Vektori i operacije s vektorima

Formule

$$\vec{v} = v \cdot \vec{v}_0 \tag{1}$$

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}}{v} \tag{2}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \qquad r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x}{r} \\ \cos\beta &= \frac{y}{r} \\ \cos\gamma &= \frac{z}{r} \end{aligned}\right| \tag{4}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{5}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{T_1 T_2}\,[T_1(x_1, y_1, z_1);\ T_2(x_2, y_2, z_2)] = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}. \tag{8}$$

Skalarni produkt $\vec{a}\vec{b}$

$$\vec{a}\vec{b} = a\,b\cos\varphi \tag{11}$$

$$b_a = b\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{a} = \vec{a}_0\vec{b}; \qquad a_b = a\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{b} = \vec{b}_0\vec{a} \tag{12}$$

$$\vec{a}\vec{b} = 0, \quad \text{ako je } \vec{a} \perp \vec{b} \tag{12b}$$

$$\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{i}\vec{k} = 0 \tag{13}$$

$$\vec{a}\vec{a} = (\vec{a})^2 = a^2 \tag{15}$$

$$(\vec{i})^2 = (\vec{j})^2 = (\vec{k})^2 = 1 \tag{16}$$

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{d} + \vec{b}\vec{d} \tag{17}$$

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{18}$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{a\,b}. \tag{19}$$

Vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a\,b \sin\varphi = S \text{ paralelograma} \tag{20}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \text{ i } \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}; \qquad S_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| \tag{20'}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a\,b, \text{ ako je } \vec{a} \perp \vec{b} \tag{22}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \text{ ako su } \vec{a} \text{ i } \vec{b} \text{ kolinearni} \tag{23}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0 \tag{24}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0 \tag{25}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} \tag{26}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{d} \tag{26a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{27a}$$

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{a\,b}. \tag{28}$$

Višestruki produkti vektora

a) $(\vec{a}\vec{b})\vec{c} = (a\,b\cos\varphi)\vec{c} =$ vektor.

b) Trostruki skalarni produkt

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = a\,b \sin\varphi \cdot c \cos\psi = V \text{ paralelopipeda} \tag{30}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0 \text{ uvjet komplanarnosti vektora } \vec{a}, \vec{b} \text{ i } \vec{c} \tag{30}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{b} = 0 \tag{30a}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{31}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a})\vec{b} = (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} \tag{31a}$$

c) Trostruki vektorski produkt

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \tag{32}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c}). \tag{32a}$$

d) Četverostruki skalarni produkt

$$(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{b}\vec{c})(\vec{a}\vec{d}). \tag{33}$$

e) Četverostruki vektorski produkt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{c}(\vec{a}\vec{b}\vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}\vec{b}\vec{c}). \tag{34}$$

$$\vec{p} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \tag{39'}$$

vektor dodijeljen pravcu

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

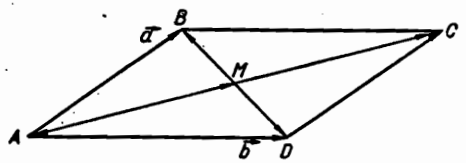
$$\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{i} + C\vec{k} \tag{47'}$$

vektor normale za ravninu $A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$.

Zadaci

1. Vektori $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ čine dvije stranice paralelograma $ABCD$. Izrazi pomoću $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektore $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ i $\overrightarrow{MD}$, gdje je M sjecište dijagonala paralelograma.

Prema slici 1:



Slika 1.

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{AM} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2},$$

pa je

$$\overrightarrow{MA} = -\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \quad \overrightarrow{MB} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}, \quad \overrightarrow{MC} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \quad \overrightarrow{MD} = -\frac{\vec{a} - \vec{b}}{2} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}.$$

2. Tri vektora $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ čine stranice $\triangle ABC$. Izrazi pomoću $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ i posebno pomoću $\vec{a}$ i $\vec{b}$ težišnice trokuta: $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ i $\overrightarrow{CP}$.

Kako je prema slici 2.

$$\overrightarrow{BM} = \frac{\vec{a}}{2}$$

iz $\triangle AMB$ slijedi

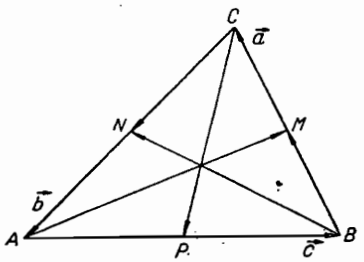
$$\overrightarrow{AM} = \underline{\vec{c} + \frac{\vec{a}}{2}}$$

ili iz $\triangle AMC$:

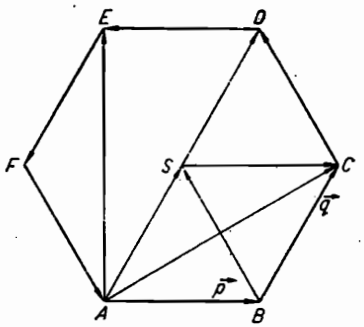
$$\overrightarrow{AM} = \underline{-\left(\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2}\right)}.$$

Iz $\triangle BCN$ slijedi:

$$\overrightarrow{BN} = \underline{\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}}.$$



Slika 2.



Slika 3.

Kako je prema slici

$$\vec{b} = -(\vec{c} + \vec{a}),$$

odnosno

$$\frac{\vec{b}}{2} = -\frac{\vec{c}}{2} - \frac{\vec{a}}{2}$$

dobijemo

$$\overrightarrow{BN} = \vec{a} - \frac{\vec{c}}{2} - \frac{\vec{a}}{2} = \underline{\frac{\vec{a} - \vec{c}}{2}}.$$

Prema slici:

$$\overrightarrow{CP} = \underline{\vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}}$$

ili kako je

$$\vec{c} = -(\vec{a} + \vec{b}),$$

odnosno

$$\frac{\vec{c}}{2} = -\frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{2},$$

dobijemo

$$\overrightarrow{CP} = \vec{b} - \frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{2} = \underline{\frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}}.$$

3. U pravilnom šesterokutu $ABCDEF$ poznati su $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{q}$, Izrazi pomoću $\vec{p}$ i $\vec{q}$ vektore:

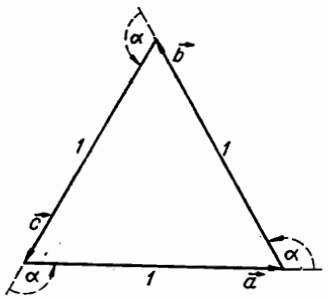
$$\overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{DE},\ \overrightarrow{EF},\ \overrightarrow{FA},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD} \text{ i } \overrightarrow{AE}.$$

Prema slici 3:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS} = \underline{-\vec{p} + \vec{q}}$$

$$\overrightarrow{DE} = \underline{-\vec{p}};\quad \overrightarrow{EF} = \underline{-\vec{q}};\quad \overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{CD} = \underline{\vec{p} - \vec{q}}$$

$$\overrightarrow{AC} = \underline{\vec{p} + \vec{q}};\quad \overrightarrow{AD} = \underline{2\vec{q}};\quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \underline{2\vec{q} - \vec{p}}.$$



Slika 4.

4. Izračunaj zbroj $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$, ako su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ tri orta koji zadovoljavaju uvjet $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$.

Iz uvjeta slijedi da zadani orti zatvaraju istostrani trokut stranica 1 (vidi sl. 4), pa međusobno zatvaraju kutove $\alpha = 120^0$. Prema (11) dobijemo:

$$\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a} = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^0 = -3 \sin 30^0 = \underline{-\frac{3}{2}}.$$

5. Uz uvjet da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ zatvaraju trokut pa je $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ izračunaj duljinu stranice c uz pretpostavku da su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ poznati.

$$[\,|c| = c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})}\,].$$

6. Pokaži da su vektori $\vec{p} = \vec{a}(\vec{b}\,\vec{c}) - \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c})$ i $\vec{c}$ međusobno okomiti.

Vektor $\vec{p}$ množimo skalarno s $\vec{c}$. Dobijemo:

$$\vec{p}\,\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\,\vec{c})\,\vec{c} - \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c})\,\vec{c} = (\vec{a}\,\vec{b})(\vec{c})^2 - (\vec{b}\,\vec{a})(\vec{c})^2 =$$

$$= \text{prema (15)} = (\vec{a}\,\vec{b})\,c^2 - (\vec{b}\,\vec{a})\,c^2 = (\vec{a}\,\vec{b})\,c^2 - (\vec{a}\,\vec{b})\,c^2 = \underline{0}$$

pa su prema (12 b) vektori $\vec{p}$ i $\vec{c}$ međusobno okomiti.

7. Zadani su vektori $\vec{p} = \alpha\,\vec{a} + 17\,\vec{b}$ i $\vec{q} = 3\,\vec{a} - \vec{b}$, gdje je $a = 2$, $b = 5$ i $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$. Odredi koeficijent α uz uvjet da su vektori međusobno okomiti.

Računamo $\vec{p}\,\vec{q}$ prema (17) i (15):

$$\vec{p}\,\vec{q} = 3\,\alpha\,a^2 + 51\,(\vec{a}\,\vec{b}) - \alpha\,(\vec{a}\,\vec{b}) - 17\,b^2 = 3\,\alpha \cdot 4 + (51 - \alpha)\,(\vec{a}\,\vec{b}) - 17 \cdot 25 =$$

$$= \text{prema (11)} = 12\alpha + (51 - \alpha) \cdot 2 \cdot 5 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} - 425 = 12\alpha + (51 - \alpha) \cdot 10 \cos 120^0 - 425 =$$

$$= 12\,\alpha - (51 - \alpha) \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} - 425 = 17\,\alpha - 680.$$

Prema (12 b):

$$17\,\alpha - 680 = 0$$

$$\underline{\alpha = 40.}$$

8. Zadani su vektori: $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 2\,\vec{k}$ i $\vec{c} = 3\,\vec{i} - \vec{k}$.

Računamo:

a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (1 + 1 + 3)\,\vec{i} + (-1 + 1)\,\vec{j} + (1 + 2 - 1)\,\vec{k} = \underline{5\,\vec{i} + 2\,\vec{k}.}$

b) $2\,\vec{a} - \vec{b} = (2\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}) - (\vec{i} + \vec{j} + 2\,\vec{k}) = \underline{\vec{i} - 3\,\vec{j}.}$

c) $\vec{a}\,\vec{b} =$ prema (18) $= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 1 - 1 + 2 = \underline{2.}$

d) $\vec{a}\,\vec{c} = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 3 - 1 = \underline{2.}$

e) $\cos \sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) =$ prema (19) i (3) $= \frac{\vec{b}\,\vec{c}}{b\,c} = \frac{3 - 2}{\sqrt{1 + 1 + 4} \cdot \sqrt{9 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{60}} = \underline{\frac{\sqrt{15}}{30}}.$

f) $\vec{a}\,\vec{i} =$ prema (18) $= 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = \underline{1}$, analogno $\vec{a}\,\vec{j} = -\underline{1}$ i $\vec{a}\,\vec{k} = \underline{1}$.

g) Skalarna komponenta vektora $\vec{a}$ u smjeru vektora $\vec{b} = a_b =$ prema (12) $= \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{b} =$

$$= \frac{1 - 1 + 2}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \underline{\frac{\sqrt{6}}{3}}.$$

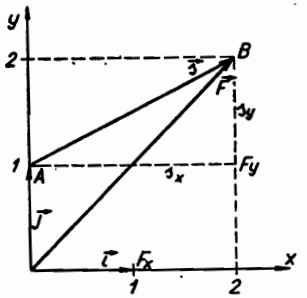
h) Vektorska komponenta vektora $\vec{b}$ u smjeru vektora $\vec{c} = b_c = b_c \cdot \vec{c}_0 =$ prema (12) i (2) $=$

$$= \frac{\vec{b}\,\vec{c}}{c} \cdot \frac{\vec{c}}{c} = \frac{(3 - 2)\,(3\,i - k)}{c^2} = \frac{3\,\vec{i} - \vec{k}}{9 + 1} = \underline{\frac{3}{10}\,\vec{i} - \frac{1}{10}\,\vec{k}.}$$

i) $(\vec{a}\,\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a}\,\vec{b})\,\vec{c} =$ prema (18) $= (3 - 1)\,(\vec{i} + \vec{j} + 2\,\vec{k}) - (1 - 1 + 2)\,(3\,\vec{i} - \vec{k}) =$

$$= 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 4\,\vec{k} - 6\,\vec{i} + 2\,\vec{k} = \underline{-4\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 6\,\vec{k}.}$$

9. Odredi radnju što je vrši sila $\vec{F}$ kojoj su komponente $F_x = F_y = 2$ kp na putu s od $A\,(0,1)$ do $B\,(2,2)$.



Slika 5.

Prema slici 5:

$$\vec{F} = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} \quad \text{i} \quad \vec{s} = 2\,\vec{i} + \vec{j}.$$

Radnja $R = \vec{F}\,\vec{s} =$ prema (18) $= 4 + 2 = \underline{6 \text{ kpm}}.$

10. Odredi skalarnu i vektorsku komponentu (projekciju) vektora $\vec{a} = 2\,\vec{i} + \vec{j} + 2\,\vec{k}$ u smjeru $OP\,[O\,(0, 0, 0), P\,(1, -2, 3)]$.

Prema (3):

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}.$$

Prema (12), (18) i (3):

$$a_r = \frac{\vec{a}\,\vec{r}}{|r|} = \frac{2 - 2 + 6}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{6}{\sqrt{14}} = \underline{\frac{3\sqrt{14}}{7}}.$$

Prema (1) i (2):

$$\vec{a}_r = a_r \cdot \vec{r}_0 = \frac{6}{\sqrt{14}} \cdot \frac{\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}}{\sqrt{14}} = \underline{\frac{3}{7}\,i - \frac{6}{7}\,\vec{j} + \frac{9}{7}\,\vec{k} = \frac{3}{7}\,\vec{r}.}$$

11. Izračunaj vektorsku komponentu (projekciju) vektora $\vec{b} = \vec{i} + 3\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$ u smjeru vektora $\vec{a} = 10\,\vec{i} + 11\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$.

$$\left[\frac{7}{45}\,\vec{a}\right].$$

12. Izračunaj nutarnje kutove $\triangle ABC$ $[A(-1, 0, 2),\ B(2, 1, -1),\ C(1, -2, 2)]$.

Prema (8) i slici 6:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{c} = (2+1)\vec{i} + (1-0)\vec{j} + (-1-2)\vec{k} = 3\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{b} = (1+1)\vec{i} + (-2-0)\vec{j} + (2-2)\vec{k} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\overrightarrow{CB} = \vec{a} = \vec{c} - \vec{b} = (3-2)\vec{i} + (1+2)\vec{j} + (-3-0)\vec{k} = \vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Prema (3):

$$c = \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19}, \quad a = \sqrt{1+9+9} = \sqrt{19}, \text{ pa je } \gamma = \alpha, \ b = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}.$$

Prema (19):

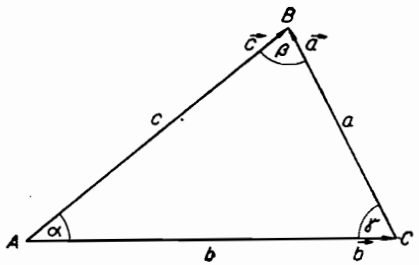
$$\cos\beta = \frac{\vec{c}\,\vec{a}}{c\,a} = \frac{3+3+9}{\sqrt{19}\cdot\sqrt{19}} = \frac{15}{19}.$$

Pomoću logaritamskog računala dobijemo:

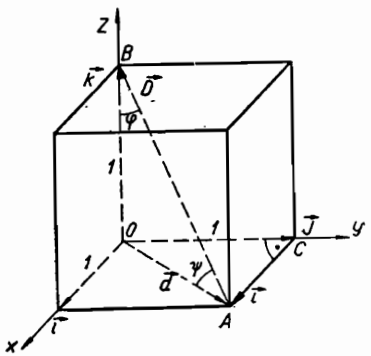
$$\beta \doteq \underline{38^\circ}, \quad \alpha \doteq \frac{180^\circ - 38^\circ}{2} = \underline{71^\circ}, \quad \gamma \doteq \underline{71^\circ}.$$

Proba:

$$\alpha = \frac{\vec{c}\,\vec{b}}{c\,b} = \frac{6-2}{\sqrt{19}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{38}} = \frac{\sqrt{38}}{19}; \quad \underline{\alpha \doteq 71^\circ}.$$



Slika 6.



Slika 7.

13. U kocki brida $a = 1$ izračunaj prema slici 7 kutove φ i ψ.

Prema slici:

$$\triangle OCA:\ \vec{d} = \vec{j} + \vec{i}; \quad \triangle AOB:\ \vec{k} = \vec{d} + \vec{D}, \text{ pa je } \vec{D} = \vec{k} - \vec{d} = \underline{\vec{k} - \vec{j} - \vec{i}}$$

$$\cos\varphi = \cos\sphericalangle(\vec{k}, \vec{D}) = \text{prema (19)} = \frac{\vec{k}\,\vec{D}}{k\,D} = \frac{\vec{k}(\vec{k} - \vec{j} - \vec{i})}{1\cdot\sqrt{1+1+1}} = \frac{1-0-0}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\underline{\varphi \doteq 54{,}7^\circ}.$$

$$\cos\psi = \cos(\vec{d}, \vec{D}) = \frac{\vec{d}\,\vec{D}}{d\,D} = \frac{(\vec{j} + \vec{i})(\vec{k} - \vec{j} - \vec{i})}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{-1-1}{\sqrt{6}} = \frac{-2\sqrt{6}}{6} = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Budući da je ψ šiljati kut uzimamo $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$ pa je

$$\underline{\psi \doteq 35{,}3^\circ}.$$

Proba:

$$\varphi + \psi = \underline{90^\circ}.$$

14. Odredi kut što ga zatvaraju vektori $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = 2\vec{i} + 10\vec{j} - 11\vec{k}$.

$$\left[\cos\varphi = \frac{13}{45};\ \varphi \doteq 73{,}2^\circ\right].$$

15. Odredi vektor $\vec{c}$ koji je okomit na vektorima $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ i $\vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

Prema (27a):

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(3-2) - \vec{j}(9+8) + \vec{k}(-3-4) = \vec{i} - 17\vec{j} - 7\vec{k}.$$

Proba prema (18):

$$\vec{a}\,\vec{c} = 3 - 17 + 14 = \underline{0}; \qquad \vec{b}\,\vec{c} = 4 + 17 - 21 = \underline{0}.$$

16. Odredi koeficijent α uz uvjet da su vektori $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ i $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ kolinearni, dok vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ to nisu.

Računamo prema (23):

$$\vec{p} \times \vec{q} = (\alpha\vec{a} + 5\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b}) = \text{po zakonu distribucije} =$$

$$= 3\alpha(\vec{a} \times \vec{a}) + 15(\vec{b} \times \vec{a}) - \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) - 5(\vec{b} \times \vec{b}) =$$

$$= \text{prema (24) i (26)} = 3\alpha\cdot 0 - 15(\vec{a} \times \vec{b}) - \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) - 5\cdot 0 = 0$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})(-15 - \alpha) = 0.$$

Kako je $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$, jer $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni, mora biti:

$$-15 - \alpha = 0$$

$$\underline{\alpha = -15}.$$

17. Izračunaj skalar $\alpha = (\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a}\,\vec{b})^2$, uzevši u obzir (15), (20) i (11).

$$[\alpha = a^2 b^2].$$

18. Izračunaj ploštinu paralelograma konstruiranog na vektorima $\overrightarrow{AB} = \vec{m} + 2\vec{n}$ i $\overrightarrow{AD} = \vec{m} - 3\vec{n}$, gdje je $m = 5$, $n = 3$ i $\sphericalangle(\vec{m}, \vec{n}) = \varphi = \frac{\pi}{6}$.

Računamo prema (20):

$$P = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = AB \cdot AD \cdot \sin\psi.$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (\vec{m} + 2\vec{n}) \times (\vec{m} - 3\vec{n}) = (\vec{m} \times \vec{m}) + 2(\vec{n} \times \vec{m}) - 3(\vec{m} \times \vec{n}) - 6(\vec{n} \times \vec{n}) =$$

$$= 0 + 2(\vec{n} \times \vec{m}) + 3(\vec{n} \times \vec{m}) - 0 = 5(\vec{n} \times \vec{m}).$$

$$P = 5\,|\vec{n} \times \vec{m}| = 5 \cdot n \cdot m \cdot \sin\varphi = 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ = \frac{75}{2}$$

$$\underline{P = 37{,}5 \text{ kv. jedinica.}}$$

19. $\triangle ABC$ određen je vektorima $\overrightarrow{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{p} + 5\vec{q}$. Izračunaj u tom trokutu visinu v bačenu iz vrha C na stranicu AB uz uvjet da su $\vec{p}$ i $\vec{q}$ međusobno okomiti orti.

Prema (20)', (26a) i (26):

$$P_\Delta = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2}[3(\vec{p} \times \vec{p}) - 4(\vec{q} \times \vec{p}) + 15(\vec{p} \times \vec{q}) - 20(\vec{q} \times \vec{q})] =$$

$$= \frac{1}{2}[4(\vec{p} \times \vec{q}) + 15(\vec{p} \times \vec{q}) = \frac{19}{2}|\vec{p} \times \vec{q}| = \frac{19}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = \frac{19}{2}.$$

U drugu ruku:

$$P = \frac{1}{2}AB \cdot v, \quad \text{pa je} \quad v = \frac{2P}{AB}$$

$$v = \frac{19}{\sqrt{9+16}} = \frac{19}{5} = \underline{3{,}8.}$$

20. Izračunaj duljinu vektora $\vec{a} = (3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}) \times (\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k})$.

[21].

21. Izračunaj sinus kuta što ga zatvaraju dijagonale paralelograma konstruiranog na vektorima $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

Prva dijagonala: $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$.

Druga dijagonala: $\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Prema (28)

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2|}{|\vec{d}_1|\,|\vec{d}_2|}$$

$$\vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(4-0) - \vec{j}(-6-0) + \vec{k}(12+2) = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 14\vec{k}$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{16+36+196}}{\sqrt{9+4} \cdot \sqrt{1+16+4}} = \underline{\sqrt{\frac{248}{273}}}.$$

Na drugi način prema (19):

$$\cos\varphi = \frac{\vec{d}_1 \vec{d}_2}{d_1 d_2} = \frac{3-8}{\sqrt{273}} = -\frac{5}{\sqrt{273}}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{25}{273}} = \underline{\sqrt{\frac{248}{273}}}.$$

22. Izračunaj skalarnu projekciju vektora $\vec{a} = 3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$ na os koja ima smjer vektora $\vec{b} = (\vec{i} - 2\vec{k}) \times (\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k})$.

$$\left[\frac{16}{7}\right].$$

23. Izračunaj volumene V paralelopipeda konstruiranih na vektorima:

a) $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

$\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

$\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Prema (31):

$$V = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(1+6) + 3(2+3) + 1(4-1) = 7 + 15 + 3 =$$

$$= \underline{25 \text{ kubnih jedinica.}}$$

b) $\vec{a} = 3\vec{m} + 5\vec{n}$

$\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$ $\qquad m = \frac{1}{2}; \quad n = 3; \quad \sphericalangle(\vec{m}\vec{n}) = 135^\circ.$

$\vec{c} = 2\vec{m} + 7\vec{n}$

Kako je $\vec{b} + \vec{c} = 3\vec{m} + 5\vec{n} = \vec{a}$ sva su tri zadana vektora komplanarna, paralelopiped ne postoji pa je $\underline{V = 0.}$

24. Izračunaj visinu paralelopipeda konstruiranog na vektorima $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, ako je za osnovicu uzet paralelogram konstruiran na $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Prema (31) $V = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$, dok je u drugu ruku V = baza puta visina = prema (20) = $= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \vec{v}$.

Odatle slijedi:

$$v = \frac{(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

Prema (31):

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 11 - 2 \cdot (-3) - 5(-2) = 49$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 17\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{9 + 289 + 25} = \sqrt{323}$$

$$v = \frac{49}{\sqrt{323}}.$$

25. Odredi vektor $\vec{v}$ koji je okomit na ravnini određenoj tačkama $A(1, 0, -1)$, $B(2, -1, 1)$ i $C(-1, 1, 2)$.

Vektori $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = (2-1)\vec{i} + (-1-0)\vec{j} + (1+1)\vec{k} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

i $\overrightarrow{AC} = \vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ [vidi (8)]

leže u zadanoj ravnini pa je prema (27a)

$$\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 7\vec{j} - \vec{k}.$$

26. Zadana su tri vektora $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Odredi jedinični vektor $\vec{v}_0$ koji leži u ravnini što je čine vektori $\vec{b}$ i $\vec{c}$, a okomit je na vektoru $\vec{a}$.

Traženi vektor $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ leži u ravnini vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$, ta su tri vektora dakle komplanarna, pa je prema (30)'

$$(\vec{b} \times \vec{c})\vec{v} = 0.$$

Odatle prema (31):

$$\begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3v_x + v_y - v_z = 0 \qquad \text{(a)}$$

$\vec{v} \perp \vec{a}$, dakle prema (12b):

$$\vec{v}\vec{a} = 2\vec{v}_x - \vec{v}_y + \vec{v}_z = 0 \qquad \text{(b)}$$

(a) + (b) daje:

$$v_x = 0,$$

pa iz (a) i (b) slijedi

$$v_y = v_z. \qquad \text{(c)}$$

Kako je $v_0 = 1$, prema (3) imamo:

$$\sqrt{v_y^2 + v_z^2} = 1,$$

odnosno s obzirom na (c)

$$\sqrt{2v_y^2} = 1,$$

a odatle je

$$v_y = v_z = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

i $V_0 = \frac{V}{|V|} =$

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} + \vec{k}).$$

27. Zadana su tri vektora

$$\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}; \quad \vec{b} = 3\vec{i} + \vec{k}; \quad \vec{c} = \vec{j} - \vec{k}.$$

Izračunaj:

a) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$, $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$ i $(\vec{c} \times \vec{b})\vec{a}$.

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \text{prema (31)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) + 2(-3) + 1(3) = -4$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \text{prema (31a)} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = -4$$

$$(\vec{c} \times \vec{b})\vec{a} = \text{prema (31a)} = -\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = +4.$$

b) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c}$.

Označivši i izračunavši

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{b} + \vec{c} = 3\vec{i} + \vec{j}$$

dobijemo trostruki skalarni produkt, koji računamo prema (31):

$$\vec{u}(\vec{v} \times \vec{c}) = \vec{u}(\vec{v} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Isti primjer na drugi način:

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c} = \text{po zakonu distribucije} = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{c}) =$$

$$= \text{prema (24)} = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b}(\vec{b} \times \vec{c}) = \text{prema (30a)} =$$

$$= \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) + 0 = \text{prema a)} = -4.$$

c) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})(\vec{a} + \vec{c}) =$ [prema (31) uzevši u obzir da je $\vec{a} + \vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$,

$\vec{b} + \vec{c} = 3\vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{a} + \vec{c} = \vec{i} - j$] $= \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2(-3-1) = \underline{-8}.$

28. Pokaži da je $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = 0.$

Računamo prema (32a):

$$\left.\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c}) \\ (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} &= \vec{c}(\vec{b}\vec{a}) - \vec{b}(\vec{c}\vec{a}) \\ (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} &= \vec{a}(\vec{c}\vec{b}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \\ \hline &= \underline{0} \end{aligned}\right| +$$

jer je $\vec{c}\vec{a} = \vec{a}\vec{c}$, $\vec{c}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}$ i $\vec{b}\vec{a} = \vec{a}\vec{b}$.

29. Pokaži da je $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$, ako je $\vec{a} \perp \vec{b}$ i $\vec{a} \perp \vec{c}$.

Prema (32):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) = \underline{0} \text{ prema (12 b).}$$

30. Zadana su tri vektora

$$\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}; \quad \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}; \quad \vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}.$$

Izračunaj:

a) $(\vec{a}\vec{b})\vec{c}$ i $\vec{a}(\vec{b}\vec{c})$.

Prema (18):

$$(\vec{a}\vec{b})\vec{c} = (2 - 1 + 2)\vec{c} = \underline{3\vec{c} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}}$$

$$\vec{a}(\vec{b}\vec{c}) = \vec{a}(2 + 2 - 1) = \underline{3\vec{a} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}}.$$

Vidimo da je

$$(\vec{a}\vec{b})\vec{c} \neq \vec{a}(\vec{b}\vec{c})$$

jer je na lijevoj strani vektor kolinearan s $\vec{c}$, a na desnoj strani vektor kolinearan s $\vec{a}$.

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ i $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

Prema (32 a):

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c}) = -3\vec{b} - 3\vec{a} = -3(\vec{b} + \vec{a}) = -3(3\vec{i} + 3\vec{k}) =$$

$$= \underline{-9(\vec{i} + \vec{k}) = -9\vec{i} - 9\vec{k}}.$$

Prema (32):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) = -3\vec{b} - 3\vec{c} = -3(\vec{b} + \vec{c}) = -3(3\vec{i} + 3\vec{j}) =$$

$$= \underline{-9(\vec{i} + \vec{j}) = -9\vec{i} - 9\vec{j}}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}).$$

31. Dokaži identitete:

a) $(\vec{a} + \vec{b})[(\vec{a} + \vec{c}) \times (\vec{a} + \vec{b})] = 0.$

Uvedemo li oznake $\vec{a} + \vec{b} = \vec{u}$ i $\vec{a} + \vec{c} = \vec{v}$, dobijemo $\vec{u}(\vec{v} \times \vec{u}) = \underline{0}$ prema (30 a).

Ili: $\vec{u}(\vec{v} \times \vec{u}) = \vec{v}(\vec{u} \times \vec{u}) =$ prema (24) $= \vec{v} \cdot 0 = \underline{0}.$

b) $\vec{a} \times [\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})] = a^2(\vec{b} \times \vec{a}).$

Stavimo li $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ dobijemo $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{c}) =$ prema (32) $= \vec{a}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{a}) =$
$= \vec{a}[\vec{a}(\vec{a} \times \vec{b})] - (\vec{a} \times \vec{b})(\vec{a}\vec{a}) =$ prema (30 a) i (15) $= -a^2(\vec{a} \times \vec{b}) = \underline{a^2(\vec{b} \times \vec{a})}.$

c) $\vec{a} \times [\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})]\vec{c} = -a^2\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}).$

$\vec{a} \times [\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})]\vec{c} =$ prema (32) $= \vec{a} \times [\vec{a}(\vec{a}\vec{b}) - \vec{b}(\vec{a}\vec{a})]\vec{c} =$ prema (26 a) i (15) $=$
$= [(\vec{a}\vec{b})(\vec{a} \times \vec{a}) - a^2(\vec{a} \times \vec{b})]\vec{c} =$ prema (24) i (31 a) $= -a^2(\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = \underline{-a^2\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})}.$

d) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = 0$ ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, i $\vec{d}$ komplanarni.

Označivši $\vec{c} \times \vec{d} = \vec{f}$ dobijemo

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{f} = \text{prema (32 a)} = \vec{b}(\vec{f}\vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{f}) =$$

$$= \vec{b}[(\vec{c} \times \vec{d})\vec{a}] - \vec{a}[\vec{b}(\vec{c} \times \vec{d})] = \underline{0}.$$

Oba su trostruka skalarna produkta jednaka nuli, jer su vektori $\vec{c}, \vec{d}$ i $\vec{a}$, a također $\vec{b}, \vec{c}$ i $\vec{d}$ komplanarni. [Vidi (30').]

Na drugi način:

Uz $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e}$ i $\vec{c} \times \vec{d} = \vec{f}$ dobijemo:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{e} \times \vec{f} = \underline{0},$$

jer su vektori $\vec{e}$ i $\vec{f}$ kolinearni kao vektori okomiti na istu ravninu u kojoj su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ i $\vec{d}$. [Vidi 23).]

e) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0.$

Uputa: Izračunaj prema (32) vrijednosti zadanih trostrukih vektorskih produkata.

f) $[\vec{a}(\vec{b} \times \vec{i})]\vec{i} + [\vec{a}(\vec{b} \times \vec{j})]\vec{j} + [\vec{a}(\vec{b} \times \vec{k})]\vec{k} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Uputa: Izračunaj prema (31) trostruke skalarne produkte navedene u uglatim zagradama.

g) Dokaži da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni, ako je $(\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{a}) = 0$.

Uputa. Zadanu jednakost pomnoži skalarno s $\vec{c}$ pa uzmi u obzir formule (30)′ i (30 a).

32. Zadani su vektori:

$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}; \quad \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}; \quad \vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}; \quad \vec{d} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}.$$

Izračunaj: $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$; $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$; $\vec{a}[\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})]$ i $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$.

$$[1; \; -10\vec{i} - 2\vec{j} - 12\vec{k}; \; 2; \; 2\vec{i} + 4\vec{j} - 8\vec{k}].$$

33. Zadan je tetraedar svojim vrhovima $A\,(1, 1, 1)$, $B\,(0, 0, 2)$, $C\,(0, 3, 0)$, $D\,(4, 0, 0)$. Odredi volumen tetraedra i kut što ga čine bridovi AB i AC.

$$\left[\frac{1}{3}; \; \cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{3}\right].$$

34. Izračunaj površinu P trokuta $ABC\,[A\,(1, -1, 0)$, $B\,(2, 1, -1)$, $C\,(-1, 1, 2)]$.

Uputa $P = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

$$[3\sqrt{2}].$$

35. Odredi jedinični vektor (ort) koji je okomit na vektorima

$$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}.$$

$$\left[\pm\frac{\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{35}}\right].$$

B. Vektorske funkcije skalarnog argumenta. Derivacije vektora po parametru. Primjene u kinematici.

Formule

Za

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$$

$$\vec{b}(t) = b_x(t)\vec{i} + b_y(t)\vec{j} + b_z(t)\vec{k}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \pm \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \pm \frac{d\vec{b}}{dt} \tag{35}$$

$$\frac{d}{dt}(c \cdot \vec{a}) = c \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}$$

(c = skalarna konstanta)

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\,\vec{b}) = \vec{a}\frac{d\vec{b}}{dt} + \vec{b}\frac{d\vec{a}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a})^2 = 2\,\vec{a}\frac{d\vec{a}}{dt} = \text{ili prema (15)} = \frac{d}{dt}a^2 = 2\,a\frac{da}{dt} \tag{35}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} - \vec{b} \times \frac{d\vec{a}}{dt}$$

pri čemu je

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + \frac{da_z}{dt}\vec{k}, \quad \text{slično} \quad \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{c}\,\vec{a}) = \vec{c}\frac{d\vec{a}}{dt}$$

ako je $\vec{c}$ konstantan vektor. (35)′

$$\frac{d\vec{c}}{dt} \perp c$$

ako je $\vec{c}$ vektor konstantne duljine.

U kinematici predočuje

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

jednadžbu gibanja tačke, tj. gibanje tačke u prostoru (ili u ravnini) zadaje se tako da se toj pomičnoj tački dodijeli radijvektor $\vec{r}$, dok je t vrijeme, pa je

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

vektor brzine, dok je (35′)

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$$

vektor akceleracije krajnje tačke vektora $\vec{r}$.

Zadaci

36. Zadana su dva vektora koji su funkcije skalarnog argumenta (parametra) t:

$$\vec{a}(t) = 5t\vec{i} - \vec{j} + t^2\vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{b}(t) = \sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{k}.$$

Izračunaj prema (35):

a) $\frac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b}) = 5\vec{i} + 2t\vec{k} + \cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{k} = \underline{(5 + \cos t)\vec{i} + (2t - \sin t)\vec{k}}.$

b) $\frac{d}{dt}(\vec{a}\,\vec{b}) = (5t\vec{i} - \vec{j} + t^2\vec{k})(\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{k}) + (\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{k})(5\vec{i} + 2t\vec{k}) =$

$= 5t\cos t - t^2\sin t + 5\sin t + 2t\cos t = \underline{7t\cos t + (5 - t^2)\sin t}.$

c) $\frac{d}{dt}(\vec{a}\,\vec{a}) =$ prema (15) $= \frac{d}{dt}a^2 =$ prema (17) $= \frac{d}{dt}(25t^2 + 1 + t^4) = \underline{50t + 4t^3}.$

d) $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = (5t\vec{i} - \vec{j} + t^2\vec{k}) \times (\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{k}) - (\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{k}) \times (5\vec{i} + 2t\vec{k}) =$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5t & -1 & t^2 \\ \cos t & 0 & -\sin t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sin t & 0 & \cos t \\ 5 & 0 & 2t \end{vmatrix} = \vec{i}\sin t - \vec{j}(-5t\sin t - t^2\cos t) +$$

$$+ \vec{k}\cos t + \vec{j}(2t\sin t - 5\cos t) = \underline{\sin t\,\vec{i} + (7\sin t + t^2\cos t - 5\cos t)\vec{j} + \cos t\,\vec{k}}.$$

37. Izračunaj za $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Računamo prema (35):

a) $\frac{d}{dt}(\vec{r})^2 = 2\vec{r}\frac{d\vec{r}}{dt} =$ ili prema (15) $= \frac{d}{dt}r^2 = \underline{2r\frac{dr}{dt}}.$

Izračunaj $\frac{d}{dt}(\vec{r})^2$ prema prvom i drugom rezultatu!

b) $\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \vec{r}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \underline{\vec{r}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2}.$

c) $\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} =$ s obzriom na (24) $= \underline{\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}.$

38. Zadan je vektor $\vec{r} = \vec{a}\cos\omega t + \vec{b}\sin\omega t$, gdje su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ konstantni vektori dok je ω skalarna konstanta.

Dokaži:

a) $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega(\vec{a} \times \vec{b})$

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = (\vec{a}\cos\omega t + \vec{b}\sin\omega t) \times (-\vec{a}\omega\sin\omega t + \vec{b}\omega\cos\omega t) =$$

$$= -(\vec{a} \times \vec{a})\omega\cos\omega t \cdot \sin\omega t - (\vec{b} \times \vec{a})\omega\sin^2\omega t + (\vec{a} \times \vec{b})\omega\cos^2\omega t +$$

$$+ (\vec{b} \times \vec{b})\omega\sin\omega t \cdot \cos\omega t = \text{s obzirom na (24)} = \omega(\vec{a} \times \vec{b})(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) =$$

$$= \underline{\omega(\vec{a} \times \vec{b})}.$$

b) $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega^2\vec{r} = 0$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega\vec{r} = \text{s obzirom na zadatak a)} = -\vec{a}\omega^2\cos\omega t - \vec{b}\omega^2\sin\omega t + \vec{a}\omega^2\cos\omega t +$$

$$+ \vec{b}\omega^2\sin\omega t = \underline{0}.$$

39. Dokaži da za $\vec{r} = \vec{a}e^{\omega t} + \vec{b}e^{-\omega t}$, gdje su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ konstantni vektori, vrijedi jednakost

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \omega^2\vec{r} = 0$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}\omega e^{\omega t} - \vec{b}\omega e^{-\omega t}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}\omega^2 e^{\omega t} + \vec{b}\omega^2 e^{-\omega t}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \omega^2\vec{r} = \vec{a}\omega^2 e^{\omega t} + \vec{b}\omega^2 e^{-\omega t} - \vec{a}\omega^2 e^{\omega t} - \vec{b}\omega^2 e^{-\omega t} = \underline{0}.$$

40. Odredi derivaciju po parametru t volumena paralelopipeda kojemu su bridovi vektori

$$\vec{a} = \vec{i} + t\vec{j} + t^2\vec{k}; \quad \vec{b} = 2t\vec{i} - \vec{j} + t^3\vec{k}; \quad \vec{c} = -t^2\vec{i} + t^3\vec{j} + \vec{k}.$$

$$\left[V = t^4 + 2t^3 + 1; \ \frac{dV}{dt} = 4t(t^2 + 1)\right].$$

41. Položaj tačke koja se giblje u prostoru određen je radijvektorom $\vec{r} = e^t\vec{i} + e^t\sin t\,\vec{j} + e^t\cos t\,\vec{k}$. Odredi brzinu $\vec{v}$, ubrzanje $\vec{a}$ i kut φ između $\vec{v}$ i $\vec{a}$ u momentu $t = 0$.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = e^t\vec{i} + e^t(\cos t + \sin t)\vec{j} + e^t(-\sin t + \cos t)\vec{k}, \quad \text{a za} \quad t = 0$$

$$\underline{\vec{v}(0) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = e^t\vec{i} + e^t(-\sin t + \cos t + \cos t + \sin t)\vec{j} + e^t(-\cos t - \sin t -$$

$$- \sin t + \cos t)\vec{k} = e^t\vec{i} + 2e^t\cos t\,\vec{j} - 2e^t\sin t\,\vec{k}$$

$$\underline{\vec{a}(0) = \vec{i} + 2\vec{j}.}$$

Prema (19):

$$\cos\varphi = \frac{\vec{v}(0)\cdot\vec{a}(0)}{v(0)\cdot a(0)} = \frac{1 + 2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

$$\underline{\varphi \doteq 39{,}2^\circ.}$$

42. Izračunaj za $t = 0$ brzinu $\vec{v}$, akceleraciju $\vec{a}$ i $\sphericalangle\,\varphi(\vec{v}, \vec{a})$, ako je gibanje tačke određeno radijvektorom $\vec{r} = \ln(t^2 + 1)\vec{i} + \operatorname{arc\,tg} t\,\vec{j} + \sqrt{t^2 + 1}\,\vec{k}$.

$$[\varphi = 90^\circ].$$

43. Gibanje tačke u ravnini zadano je jednadžbom $\vec{r} = 3\vec{i}\cos t + 4\vec{j}\sin t$. Odredi trajektoriju, brzinu $\vec{v}$ i ubrzanje $\vec{a}$ gibanja, napose $\vec{v}$ i $\vec{a}$ za $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{4}$ i $t_3 = \frac{\pi}{2}$.

Iz usporedenja zadane jednadžbe gibanja $\vec{r} = 3i\cos t + 4\vec{j}\sin t$ s općim oblikom radijvektora $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ slijedi:

$$x = 3\cos t \quad | : 3$$
$$y = 4\sin t \quad | : 4$$
$$\frac{x}{3} = \cos t$$
$$\frac{y}{4} = \sin t.$$

Kvadriranje i zbrajanje tih jednadžbi daje

$$\underline{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.}$$

<u>Staza gibanja je elipsa s poluosima 3 i 4.</u>

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underline{-3\vec{i}\sin t + 4\vec{j}\cos t}; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underline{-3\vec{i}\cos t - 4\vec{j}\sin t}$$

Za $t_1 = 0$: $\underline{\vec{v}_1 = 4\vec{j};}$ $\quad \underline{\vec{a}_1 = -3\vec{i}}$

Za $t_2 = \frac{\pi}{4}$: $\underline{\vec{v}_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{i} + 2\sqrt{2}\vec{j}}$; $\quad \underline{\vec{a}_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{i} - 2\sqrt{2}\vec{j}}$

Za $t_3 = \frac{\pi}{2}$: $\underline{\vec{v}_3 = -3\vec{i};}$ $\quad \underline{\vec{a}_3 = -4\vec{j}.}$

44. Odredi stazu, brzinu $\vec{v}$, akceleraciju $\vec{a}$, a također veličine brzine i akceleracije za moment t, $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{3}$ i $t_3 = \frac{\pi}{2}$ i to za gibanje tačke koje je zadano jednadžbom

$$\vec{r} = 2\vec{i}\cos t + 2\vec{j}\sin t + 3\vec{k}t.$$

Uspoređenje s $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ daje stazu gibanja u parametarskom obliku:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\cos t \\ y &= 2\sin t \\ z &= 3t \end{aligned}\right|$$

a to je cilindrička spirala [vidi formulu (155) u dijelu III Repetitorija

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underline{-2\vec{i}\sin t + 2\vec{j}\cos t + 3\vec{k}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underline{-2\vec{i}\cos t - 2\vec{j}\sin t}$$

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 9} = \underline{\sqrt{13}} \\ a &= \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t} = \underline{2} \end{aligned}\right\}$$

v i a imaju konstantne vrijednosti za sve t.

Za $t_1 = 0$: $\underline{\vec{v}_1 = 2\vec{j} + 3\vec{k};}$ $\quad \underline{\vec{a}_1 = -2\vec{i}}$

Za $t_2 = \frac{\pi}{3}$: $\underline{\vec{v}_2 = -\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}}$; $\quad \underline{\vec{a}_2 = -\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}}$

Za $t_3 = \frac{\pi}{2}$: $\underline{\vec{v}_3 = -2\vec{i} + 3\vec{k};}$ $\quad \underline{\vec{a}_3 = -2\vec{j}.}$

45. Zadana je jednadžba gibanja $\vec{r} = \vec{i}\cos\alpha\cos\omega t + \vec{j}\sin\alpha\cos\omega t + \vec{k}\sin\omega t$, gdje su α i ω skalarne konstante. Odredi trajektoriju, veličinu i smjer brzine i akceleracije.

Uspoređenje zadane jednadžbe gibanja s općim oblikom radijvektora $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ daje jednadžbu tražene staze:

$$x = \cos\alpha\cos\omega$$
$$y = \sin\alpha\cos\omega t$$
$$z = \sin\omega t.$$

Usporedimo li dobivenu jednadžbu staze s parametarskom jednadžbom kugline plohe [vidi dio III formulu (95) i sl. 75], vidjet ćemo prema navedenoj slici da je trajektorija kružnica polumjera 1 kojoj ravnina zatvara s ravninom XZ zadani konstantni kut α.

$$\underline{\vec{v} = -\vec{i}\omega\cos\alpha\sin\omega t - \vec{j}\omega\sin\alpha\sin\omega t + \vec{k}\omega\cos\omega t}$$

$$\underline{\vec{a} = -\vec{i}\omega^2\cos\alpha\cos\omega t - \vec{j}\omega^2\sin\alpha\cos\omega t - \vec{k}\omega^2\sin\omega t}$$

$$v = \sqrt{\omega^2\cos^2\alpha\sin^2\omega t + \omega^2\sin^2\alpha\sin^2\omega t + \omega^2\cos^2\omega t} = \underline{\omega.}$$

Na isti način dobijemo

$$\underline{a = \omega^2.}$$

46. Zadan je radijvektor pomične tačke $\vec{r}\{a\sin t, -a\cos t, bt^2\}$. Odredi hodografe brzine i akceleracije (a i b su skalarne konstante).

Općenito se pod hodografom radijvektora $\vec{r} = \vec{r}(t)$ pomične tačke razumije krivulja što je opisuje krajnja tačka tog radijvektora. U navedenom zadatku se traže hodografi za radijvektore brzine $\vec{v}$ i akceleracije $\vec{a}$ gibanja određenog zadanim radijvektorom.

Prema zadatku:

$$\vec{r} = \vec{i}a\sin t - \vec{j}a\cos t + \vec{k}bt^2.$$

Odatle:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}a\cos t + \vec{j}a\sin t + 2\vec{k}bt$$

pa je hodograf brzine

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= a\sin t \\ z &= 2bt \end{aligned}\right\}$$

cilindrička spirala [vidi formulu (155)]

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{i}a\sin t + \vec{j}a\cos t + 2\vec{k}b$$

$$\text{hodograf akceleracije} \quad \begin{cases} x = -a \sin t \\ y = a \cos t \\ z = 2b \end{cases}$$

ili

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= a^2 \sin^2 t \\ y^2 &= a^2 \cos^2 t \end{aligned}\right| \; +$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2 \\ z &= 2b \end{aligned}\right\}$$ kružnica polumjera a koja je paralelna s ravninom XY a udaljena od nje za $2b$.

47. Odredi trajektoriju gibanja određenog radijvektorom $\vec{r}$, ako taj radijvektor zadovoljava uvjet

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a} \times \vec{r}$$

gdje je $\vec{a}$ konstantan vektor.

Zadani uvjet pomnožimo skalarno s $\vec{a}$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\,\vec{a} = (\vec{a} \times \vec{r})\,\vec{a}$$

a zatim s $\vec{r}$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\,\vec{r} = (\vec{a} \times \vec{r})\,\vec{r}.$$

Prema (30a) oba su trostruka skalarna produkta jednaka nuli, pa je

$$d\vec{r} \cdot \vec{a} = 0$$

$$d\vec{r} \cdot \vec{r} = 0.$$

Integriranje daje:

$$\vec{r}\,\vec{a} = \text{const.}$$

$$(\vec{r})^2 = \text{const.}$$

Prva jednadžba predočuje ravninu kojoj je vektor $\vec{a}$ normala [vidi dio III formulu (45)], dok druga jednadžba predočuje kuglinu plohu polumjera r. Navedena ravnina siječe sferu u *kružnici*, koja je tražena trajektorija pomične tačke.

C. Analitička geometrija u prostoru uz primjenu vektorske metode

Formule

Pravac

Parametarski oblik:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + a t \\ y &= y_1 + b t \\ z &= z_1 + c t \end{aligned} \tag{37}$$

Kanonski oblik:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \tag{38}$$

Kosinusi smjera pravca

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \cos\beta &= \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned} \tag{39}$$

Vektor smjera pravca (38):

$$\vec{p} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \tag{39'}$$

Ravnina

Opći oblik:

$$A x + B y + C z + D = 0 \tag{46}$$

Kosinusi smjera normale ravnine

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos\beta &= \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned} \tag{47}$$

Vektor normale ravnine (46):

$$\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \tag{47'}$$

Ravnina (46) u normalnom obliku:

$$\frac{A x + B y + C z + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \tag{47a}$$

Udaljenost tačke $T_1(x_1, y_1, z_1)$ od ravnine:

$$d = \frac{A x_1 + B y_1 + C z_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{48a}$$

Ravnina kroz tačku $T_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \tag{50}$$

Ravnina kroz tri tačke $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$ i $T_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{51a}$$

48. Napiši jednadžbu ravnine E koja prolazi tačkom $A(2, 3, 0)$, a okomita je na pravcu $p \equiv BC\,[B(1, 1, -1);\ C(0, 0, 3)]$. Sl. 8.

Označivši s $P(x, y, z)$ bilo koju tačku tražene ravnine E pišemo prema (8)

$$\overrightarrow{AP} = \vec{a} = (x-2)\vec{i} + (y-3)\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{CB} = \vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$$

Kako je $\vec{a} \perp \vec{b}$, prema (12 b) i (18) imamo

$$\vec{a}\vec{b} = (x-2)\cdot 1 + (y-3)\cdot 1 + z\cdot(-4) = 0$$

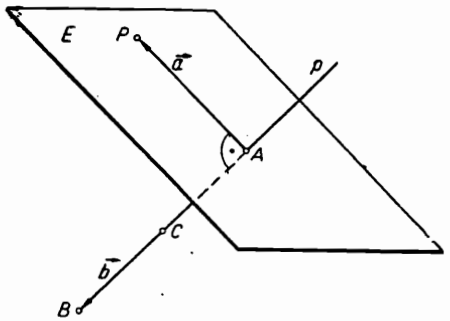
ili

$$\underline{x + y - 4z - 5 = 0}$$

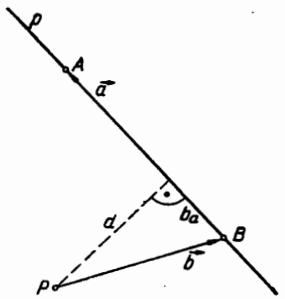
a to je prema (46) jednadžba tražene ravnine E.

49. Riješi isti zadatak, ako je $A(2, 1, 2)$, a $p \equiv AO\,[A(2, 1, 2);\ O(0, 0, 0)]$.

$$[2x + y + 2z - 9 = 0].$$



Slika 8.



Slika 9.

50. Odredi udaljenost d tačke $P(1, 2, 2)$ od pravca $p \equiv AB\,[A(2, 2, 3);\ B(2, -1, 0)]$. Sl. 9.

Prema (8):

$$\overrightarrow{BA} \equiv \vec{a} = 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{PB} \equiv \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

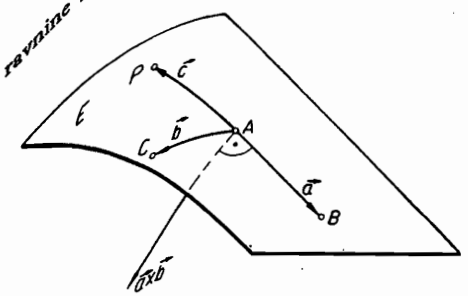
Prema (12):

$$b_a = \frac{\vec{a}\vec{b}}{a} = \text{prema (18) i (3)} = \frac{-9-6}{\sqrt{18}} = -\frac{15}{\sqrt{18}}.$$

Prema slici 9: $d^2 = b^2 - b_a^2 = (1 + 9 + 4) - \frac{225}{18} = \frac{3}{2}$

$$\underline{d = \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

51. Napiši jednadžbu ravnine E koja prolazi tačkama $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ i $C(x_3, y_3, z_3)$. Sl. 10.



Slika 10.

Neka je $P(x, y, z)$ bilo koja tačka tražene ravnine E. Znamo da je $a \times b \perp E$, a dakle i na $\vec{c}$ pa prema (30) bit će

$$\vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}) = 0.$$

Kako je prema slici 10 i (8):

$$\overrightarrow{AB} \equiv \vec{a} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} \equiv \vec{b} = (x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j} + (z_3 - z_1)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AP} \equiv \vec{c} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}$$

imamo prema (31):

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

a to je prema (51a) jednadžba tražene ravnine E.

52. Zadane su četiri tačke $A(1, 2, 2)$; $B(3, 1, 2)$; $C(-1, 5, 2)$ i $D(2, -1, 0)$.

Odredi jednadžbu pravca p koji prolazi tačkom $O(0, 0, 0)$ a okomit je na pravcima AB i CD.

Dodijelimo pravcima AB i CD vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Prema (8):

$$\overrightarrow{AB} \equiv \vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$$

$$\overrightarrow{CD} \equiv \vec{b} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k}$$

a traženom pravcu p radijvektor $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Vektor $\vec{c}$ koji je okomit na vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ glasi:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 9\vec{k}.$$

Kako je prema zadatku $\vec{r}$ okomit na $\vec{a}$ i $\vec{b}$, bit će $\vec{r} \parallel \vec{c}$, pa je prema (23)

$$r \times c = 0 \quad \text{ili} \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 2 & 4 & -9 \end{vmatrix} = 0.$$

Odatle

$$\vec{i}(-9y - 4z) + \vec{j}(2z + 9x) + \vec{k}(4x - 2y) = 0.$$

Slijedi:

$$-9y - 4z = 0$$
$$2z + 9x = 0$$
$$4x - 2y = 0$$

Odatle

$$x = -\frac{2}{9}z = -\frac{z}{\frac{9}{2}} \quad \text{i} \quad x = \frac{y}{2}, \text{ pa je } x = \frac{y}{2} = -\frac{z}{\frac{9}{2}}$$

ili

$$\underline{\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{-9}}$$

a to je prema (38) tražena jednadžba pravca p.

53. Odredi udaljenost d tačke $P(4, 0, 3)$ od ravnine određene tačkama

$$A(-1, 6, 3); \quad B(3, -2, -5) \quad \text{i} \quad C(0, 1, 0).$$

Kako se vidi iz sl. 11, spojnice zadanih tačaka čine bridove tetraedra kojemu je visina tražena udaljenost d. Volumen tetraedra $V = \frac{1}{3} B \cdot d$, gdje je B površina baze, odatle je

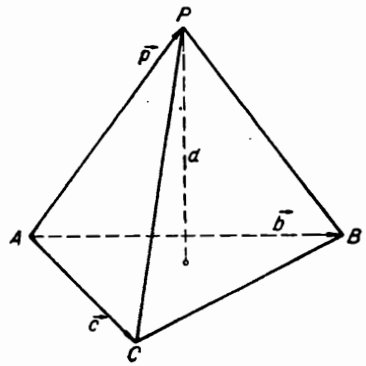
$$d = \frac{3V}{B}. \qquad \text{(a)}$$

Prema slici i (8):

$$\overrightarrow{AB} \equiv \vec{b} = 4\vec{i} - 8\vec{j} - 8\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} \equiv \vec{c} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AP} \equiv \vec{p} = 5\vec{i} - 6\vec{j}.$$



Slika 11.

Kako je prema (30)

$$V = \frac{1}{6}(b \times c)\, p \qquad \text{(a)}$$

dobijemo s obzirom na (a) i (20)':

$$d = \frac{3 \cdot \frac{1}{6}[(\vec{b} \times \vec{c})\vec{p}]}{\frac{1}{2}|\vec{b} \times \vec{c}|} = \frac{(\vec{b} \times \vec{c})\vec{p}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}.$$

Prema (31) i (27a):

$$(\vec{b} \times \vec{c})\vec{p} = \begin{vmatrix} 4 & -8 & -8 \\ 1 & -5 & -3 \\ 5 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -104 \text{ ili po apsolutnoj vrijednosti } 104.$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -8 & -8 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -16\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}$$

$$|b \times c| = \sqrt{256 + 16 + 144} = \sqrt{416}$$

$$d = \frac{104}{\sqrt{416}} = \frac{52}{2\sqrt{26}} = \underline{\sqrt{26}}.$$

Riješimo isti zadatak na drugi jednostvniji način i to tako da odredimo duljinu projekcije vektora $\vec{p}$ (ili $\overrightarrow{CP}$ ili $\overrightarrow{BP}$) na vektor $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} = -16\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}$ koji je okomit na ravnini ABC.

Prema (12):

$$d = p_n = \frac{|\vec{p}\,\vec{n}|}{n} = \frac{|-80 - 24|}{\sqrt{416}} = \frac{104}{\sqrt{416}} = \underline{\sqrt{26}}.$$

54. Odredi udaljenost tačke $O(0, 0, 0)$ od ravnine određene tačkama $A(1, -1, 2)$; $B(2, 0, -1)$ i $C(0, 2, 1)$.

$$\left[\frac{\sqrt{6}}{2}\right].$$

55. Izračunaj visinu piramide kojoj je vrh $S(0, 6, 4)$ dok je baza $\triangle ABC\,[A(3, 5, 3);\ B(-2, 1, -5);\ C(1, -1, 4)]$.

[3].

56. Zadana su dva pravca

$$p_1 \equiv AB\,[A(1, 0, -1);\ B(-1, 1, 0)]$$
$$p_2 \equiv CD\,[C(3, 1, -1);\ D(4, 5, -2)].$$

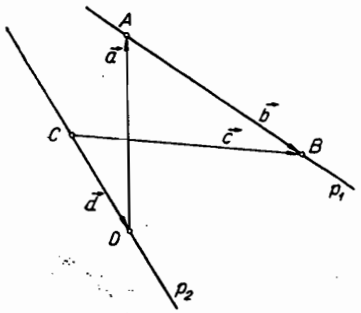
Dokaži da su ti pravci mimosmjerni i odredi najkraću međusobnu udaljenost tih pravaca. Sl. 12.

Prema (8) dodijelimo zadanim pravcima vektore

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{CD} = \vec{d} = \vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}.$$

Prema (23) zadani pravci nisu paralelni, jer je

$$\vec{b} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$



Slika 12.

Pokažimo da se ti pravci i ne sijeku, pa su mimosmjerni. Uvedimo vektor $\overrightarrow{CB} \equiv \vec{c} = -4\vec{i} + \vec{k}$ pa računamo prema (31):

$$(\vec{b} \times \vec{d})\vec{c} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0.$$

Prema (30)′ vektori $\vec{b}$, $\vec{d}$ i $\vec{c}$ nisu komplanarni pa se pravci p_1 i p_2 ne mogu siječi.

Odredimo vektor $\vec{f} = \vec{b} \times \vec{d}$ koji je okomit na p_1 i p_2. Projekcija bilo koje spojnice pravaca, npr. $\vec{c}$, na $\vec{f}$ daje traženu najkraću udaljenost d, pa je

$$d = c_f = \text{prema (12)} = \frac{\vec{f}\,\vec{c}}{f} = \frac{(\vec{b} \times \vec{d})\vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{d}|}.$$

Računamo:

$$\vec{f} = \vec{b} \times \vec{d} = -5\vec{i} - \vec{j} - 9\vec{k}$$
$$f = \sqrt{25 + 1 + 81} = \sqrt{107}.$$

Imali smo $(\vec{b} \times \vec{d})\vec{c} = 11$ pa je

$$d = \frac{11}{\sqrt{107}} = \underline{\frac{11\sqrt{107}}{107}}.$$

P r o b a. Projicirat ćemo $\overrightarrow{DA} = \vec{a} = -3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ na $\vec{f}$. Prema (12):

$$d = \frac{(\vec{b} \times \vec{d})\vec{a}}{f}$$

$$(\vec{b} \times \vec{d})\vec{a} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

$$\underline{d = \frac{11}{\sqrt{107}}}.$$

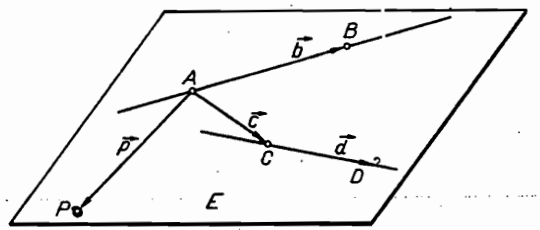
57. Zadan je tetraedar svojim vrhovima $A(1, 2, 2)$; $B(-1, 0, 0)$; $C(1, 0, 1)$ i $D(-2, 3, 0)$. Odredi a) volumen; b) površinu $\triangle ABD$; c) visinu h tetrardra uzevši BCD za bazu; d) najkraću udaljenost između brodova AB i CD.

$$\left[\text{a) } \frac{2}{3};\ \text{b) } \frac{1}{2}\sqrt{70};\ \text{c) } \frac{4}{\sqrt{46}};\ \text{d) } \frac{1}{\sqrt{14}}\right].$$

58. Dokaži da se zadni pravci $AB\,[A(7, -2, 3);\ B(9, -2, 4)]$ i $CD\,[C(5, -1, 1);\ D(5, 0, 0)]$ sijeku i odredi jednadžbu ravnine koju određuju. Sl. 13.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} = \text{prema (8)} = 2\vec{i} + \vec{k}; \quad \overrightarrow{CD} = \vec{d} = \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{b} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$



Slika 13.

pa prema (23) pravci nisu paralelni.

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}.$$

Prema (31):

$$(\vec{b} \times \vec{d})\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2+2 & 1+0 & -2+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Prema (30)′ pravci AB i CD su komplanarni pa se sijeku.

Neka je $P(x, y, z)$ bilo koja tačka ravnine što je određuju pravci AB i CD. Prema (8):

$$\overrightarrow{AP} = \vec{p} = (x-7)\vec{i} + (y+2)\vec{j} + (z-3)\vec{k}$$

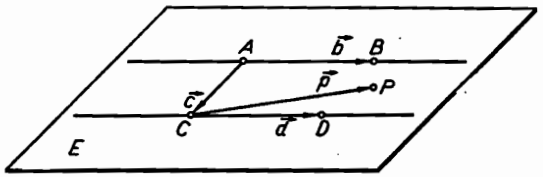
Prema (30)':

$$\vec{p}(\vec{b} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} x-7 & y+2 & z-3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Odatle

$$\underline{E \equiv x - 2y - 2z - 5 = 0}$$

59. Odredi jednadžbu ravnine, koja prolazi pravcima AB [$A(1, 2, 2)$; $B(2, 1, 1)$] i CD [$C(3, 0, 3)$; $D(4, -1, 2)$]. Sl. 14.



Slika 14.

$\overrightarrow{AB} \equiv \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$; $\overrightarrow{CD} \equiv \vec{d} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{c} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$; $P(x, y, z)$ je bilo koja tačka ravnine:

$$\overrightarrow{CP} = \vec{p} = (x-3)\vec{i} + y\vec{j} + (z-3)\vec{k}.$$

Prema (30)' i (31):

$$\vec{p}(\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} x-3 & y & z-3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underline{E \equiv x + y - 3 = 0.}$$

60. Odredi udaljenost d tačke $P(2, -3, 4)$ od ravnine $x + 2y + 2z - 13 = 0$. Sl. 15.

Usporedimo li izraze za kosinuse smjera vektora $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (4), pravca $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$ (39) i normale ravnine $Ax + By + Cz + D = 0$ (47), opazit ćemo da su ti izrazi posve identični:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{i} \quad \cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \text{itd.}$$

Zaključujemo da je

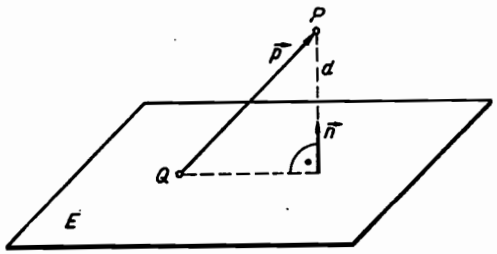
$$\vec{p} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \qquad (39)'$$

vektor kolinearni s pravcem, $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$, dok je

$$\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \qquad (47)'$$

vektor normale za ravninu $Ax + By + Cz + D = 0$.

Za naš slučaj $E \equiv x + 2y + 2z - 13 = 0$ prema (47)' imamo $\vec{n} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.



Slika 15.

Da odredimo bilo koju tačku Q zadane ravnine E uzmimo probodište osi $X(x_1, 0, 0)$ s ravninom. Uvrštenje daje $x_1 - 13 = 0$ pa je $Q(13, 0, 0)$, dok je vektor

$$\overrightarrow{QP} \equiv \vec{p} = -11\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Projekcija $\vec{p}$ na $\vec{n}$ daje traženu udaljenost d.

$$d = p_n = \text{prema (12)} = \frac{|\vec{p}\vec{n}|}{n} = \frac{|-11 - 6 + 8|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{9}{3} = \underline{3.}$$

61. Odredi udaljenost

a) tačke $P\left(2, 0, -\frac{1}{2}\right)$ od ravnine $4x - 4y + 2z + 17 = 0$

b) tačke $Q(2, 2, 3)$ od ravnine $2x + 3y + 5z = 0$.

$$\left[\text{a) } \underline{4}; \text{ b) } \frac{25}{\sqrt{38}}\right].$$

62. Odredi jednadžbu ravnine koja prolazi tačkama $A(1, 0, -1)$ i $B(-1, 2, 1)$ a paralelna je s presječnicom ravnina $E_1 = 3x + y - 2z - 6 = 0$ i $E_2 \equiv 4x - y + 3z = 0$.

Dodijelimo li prema (47)' normalama zadanih ravnina vektore

$$\vec{n}_1 = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{n}_2 = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

bit će vektor $\vec{s}$ koji je okomit na $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$, tj.

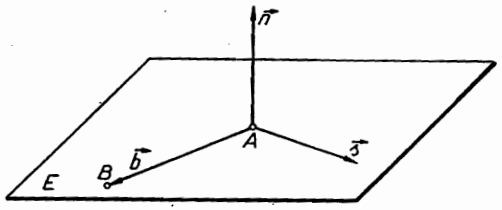
$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} - 17\vec{j} - 7\vec{k}$$

kolinearan s presječnicom tih ravnina.

Tražena ravnina E određena je sad zadanim tačkama A i B, odnosno vektorom $\overrightarrow{AB} \equiv \vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ i vektorom $\vec{s}$, dok je vektor

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -17 & -7 \end{vmatrix} = 20\vec{i} - 12\vec{j} + 32\vec{k}$$

okomit na ravnini E (vidi sl. 16).



Slika 16.

Prema (47)′ 20, − 12 i 32 su koeficijenti A, B i C tražene ravnine. Usmeno li još u obzir da ravnina prolazi tačkom $A(1, 0, -1)$ dobijemo prema (50)

$$20(x-1) - 12(y-0) + 32(z+1) = 0$$

ili

$$\underline{5x - 3y + 8z + 3 = 0}$$

jednadžbu ravnine E.

Proba. Ravnina E prolazi i tačkom $B(-1, 2, 1)$. Uvrštenje daje

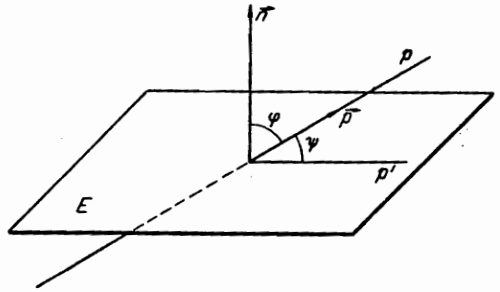
$$-5 - 6 + 8 + 3 = \underline{0.}$$

63. Odredi kosinuse smjera pravca

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - z - 5 &= 0 \\ x - 3y + 2z - 2 &= 0 \end{aligned}\right|.$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{75}};\ \frac{5}{\sqrt{75}};\ \frac{7}{\sqrt{75}}\right].$$

64. Odredi kut pravca $p \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{6}$ i ravnine $E \equiv 10x + 2y - 11z - 3 = 0$. Sl. 17.



Slika 17.

Dodijelimo prema (39)′ i (47)′ pravcu $\vec{p}$ vektor $\vec{p} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$, a ravnini E vektor $\vec{n} = 10\vec{i} + 2\vec{j} - 11\vec{k}$.

Prema (19):

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{p}\vec{n}|}{pn} = \frac{|20 + 6 - 66|}{\sqrt{49}\cdot\sqrt{225}} = \frac{8}{21} = 0{,}381$$

$$\underline{\varphi = 67{,}6^\circ};\quad \psi = 90^\circ - \varphi = \underline{22{,}4^\circ}.$$

65. Odredi jednadžbu ravnine koja prolazi tačkom $P(1, -1, 3)$ a paralelna je s ravninom

$$E_1 \equiv 3x + y + z - 7 = 0.$$

Kako je tražena ravnina E paralelna sa zadanom ravninom E_1, obje ravnine imaju prema (47)′ identične vektore normala $\vec{n} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ a dakle i iste koeficijente članova jednadžbi: 3, 1 i 1.

Tražena ravnina prolazi tačkom $P(1, -1, 3)$ pa prema (50):

$$3(x-1) + (y+1) + 1(z-3) = 0$$

ili

$$\underline{E \equiv 3x + y + z - 5 = 0.}$$

66. Da li je pravac $p \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$ paralelan s ravninom

$$E \equiv x - 2y + z - 5 = 0\ ?$$

Ako je $p \parallel E$, vektor normale ravnine E, tj. prema (47)′ $\vec{n} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ mora biti okomit na vektoru $\vec{p} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, koji smo prema (39)′ dodjelili pravcu p.

Pravac p i ravnina E su međusobni paralelni, jer je prema (12 b):

$$\vec{n}\vec{p} = 1\cdot 2 - 2\cdot 3 + 1\cdot 4 = \underline{0.}$$

67. Odredi jednadžbu ravnine koja prolazi tačkom $A(1, -2, 1)$ a okomita je na radijvektoru $\vec{r} \equiv \overrightarrow{OA}$.

Kako je $\vec{r} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, a prema zadatku $\vec{n} \equiv \vec{r}$, obzirom na (47)′ i (50) dobijemo:

$$E \equiv 1(x-1) - 2(y+2) + 1(z-1) = 0$$

ili

$$\underline{x - 2y + z - 6 = 0.}$$

68. Odredi jednadžbu ravnine koja prolazi tačkom $A(2, 1, -1)$ a okomita je na presječnici s ravnina

$$E_1 \equiv 2x + y - z = 0 \quad \text{i} \quad E_2 \equiv x + 2y + z - 2 = 0.$$

Vektor $\vec{s}$ koji je okomit na vektorima $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ normala zadanih ravnina $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_2$, tj. na

$$\vec{n}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{n}_2 = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

paralelan je s presječnicom s tih ravnina, pa je

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Kako je presječnica s ravnina okomita na traženu ravninu E, $\vec{s} \equiv \vec{n} =$ vektor normale ravnine E.

Prema (47)′ i (50):

$$E \equiv 3(x-2) - 3(y-1) + 3(z+1) = 0$$

ili

$$\underline{x - y + z = 0.}$$

69. Odredi jednadžbu ravnine E koja prolazi tačkama $A(1, 2, 3)$ i $B(3, 2, 1)$ a okomita je na ravnini

$$E_1 \equiv 4x - y + 2z - 7 = 0.$$

Prema slici 18, u kojoj je $P(x, y, z)$ bilo koja tačka tražene ravnine E, a s obzirom na (47)′ i (8) dobijemo:

$$\vec{n} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \equiv \vec{b} = 2i - 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AP} \equiv \vec{p} = (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z-3)\vec{k}.$$

Prema (30)′:

$$\vec{p}(\vec{n} \times \vec{b}) = 0 \quad \text{pa je} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underline{E \equiv x + 6y + z - 16 - 0.}$$

70. Odredi udaljenost d tačke $B(1, 2, -3)$ od pravca $p \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+5}{-6}$. Sl. 19.

Prema (39)′:

$$\vec{p} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}.$$

Prema (8) uzevši u obzir da pravac p prolazi tačkom $A(2, 0, -5)$:

$$\overrightarrow{BA} \equiv \vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Prema (12):

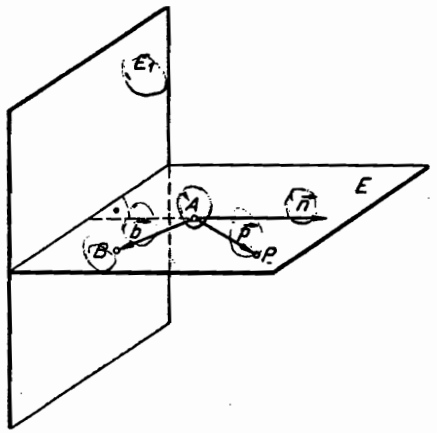
$$AB' = a_p = \frac{\vec{a}\vec{p}}{p} = \frac{2 - 6 + 12}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{8}{7}.$$

Prema (3):

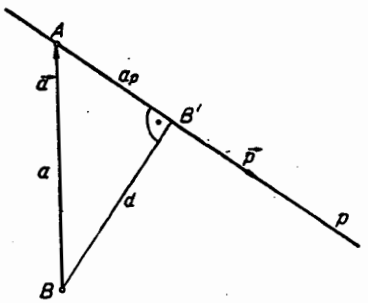
$$a = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3.$$

Iz $\triangle BB'A$ slijedi:

$$d = \sqrt{9 - \frac{64}{49}} = \underline{\frac{\sqrt{377}}{7}}.$$



Slika 18.



Slika 19.

71. Leže li tačke $A(1, 2, -3)$, $B(3, 1, 0)$ i $C(-3, 4, -9)$ na istom pravcu?

Prema (8):

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} = 2i - \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}.$$

Kako je

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -4+2\cdot 3 & 2-1\cdot 3 & -6+3\cdot 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

prema (23) vektori $\vec{b}$ i $\vec{c}$ a dakle i tačke A, B i C leže na istom pravcu.

72. Da li je presječnica ravnina

$$E_1 \equiv x + 2y - 2z - 5 = 0 \quad \text{i} \quad E_2 \equiv 5x - 2y - z = 0$$

paralelna s pravcem $p \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}$?

Znamo da je presječnica ravnina paralelna s vektorom $\vec{s}$ koji je okomit na vektorima normala zadanih ravnina $\vec{n}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ i $\vec{n}_2 = 5\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, pa je $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Presječnica je paralelna s pravcem p, jer je vektorski produkt vektora $s = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ i vektora pravca $\vec{p} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, tj.

$$(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) \times \vec{p} = \text{prema (32 a)} = \vec{n}_2(\vec{n}_1\vec{p}) - \vec{n}_1(\vec{n}_2\vec{p}) =$$

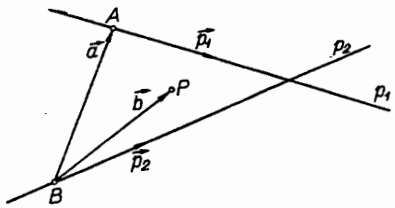
$$= (5\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k})(2 + 6 - 8) - (\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k})(10 - 6 - 4) = \underline{0}.$$

73. Zadana su dva pravca:

$$p_1 \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1} \quad \text{i} \quad p_2 \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$$

a) Da li se ti pravci sijeku?

b) Kako glasi jednadžba ravnine E koja je određena tim pravcima? Sl. 20.



Slika 20.

a) Pravcima p_1 i p_2, koji prolaze tačkama $A(2, 2, 3)$, odnosno $B(2, 3, 4)$ dodijelimo prema (39)′ vektore

$$\vec{p}_1 = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}; \quad \vec{p}_2 = \vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k},$$

dok je prema (8)

$$\overrightarrow{BA} \equiv \vec{a} = -\vec{j} - \vec{k}.$$

Računamo prema (31):

$$(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2)\vec{a} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Prema (30)′ vektori $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ i $\vec{a}$ su komplanarni, pa se pravci p_1 i p_2 sijeku, jer nisu ni paralelni.

b) Prema slici 20:

$$\overrightarrow{BP} = \vec{b} = (x-2)\vec{i} + (y-3)\vec{j} + (z-4)\vec{k},$$

gdje je $P(x, y, z)$ bilo koja tačka tražene ravnine E.

Opet računamo prema (31) pa imamo:

$$(\vec{b} \times \vec{a})\vec{p}_2 = \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

te je

$$\underline{E \equiv 2x - y + z - 5 = 0.}$$

74. Zadana su četiri vektora

$$\vec{a} = 4\vec{i} - 8\vec{j} + \vec{k}; \quad \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}; \quad \vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{d} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}.$$

a) Odredi vektor koji je paralelan s presječnicom ravnina određenih vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, odnosno $\vec{c}$ i $\vec{d}$.

$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{n}_1 \\ \vec{c} \times \vec{d} = \vec{n}_2 \end{array}\right\}$ su vektori koji su okomiti na ravnini $(\vec{a}, \vec{b})$, odnosno $(\vec{c}, \vec{d})$ te određuju ravninu $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ koja je okomita na tim ravninama pa je okomita i na presječnici tih ravnina. Očito je da $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$ predočuje traženi vektor, koji je okomit na ravnini $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ pa je paralelan s presječnicom zadanih ravnina $(\vec{a}, \vec{b})$ i $(\vec{c}, \vec{d})$. Prikaži sve to grafički!

Računamo prema (34):

$$\vec{n} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{c}(\vec{a}\vec{b}\vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) =$$

$$= (3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}) \begin{vmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} - (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \begin{vmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{-170\vec{i} + 145\vec{j} + 55\vec{k}.}$$

b) Iz geometrijskog značenja trostrukog skalarnog produkta kao volumena paralelepipeda slijedi:

$$(\vec{a}+\vec{d})(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{d}(\vec{b}+\vec{c}).$$

Prikaži grafički lijevu i desnu stranu te jednakosti i izračunaj posebno njihove vrijednosti.

[268].

75. Odredi pravac ravnine određene tačkama $O(0, 0, 0)$, $A(2, 2, 0)$ i $B(0, 1, -2)$ koji prolaz tačkom O a okomit je na pravcu

$$q \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{\frac{1}{2}}.$$

Zadana je ravnina određena radijvektorima

$$\overrightarrow{OA} \equiv \vec{r}_1 = 2\vec{i} + 2\vec{j} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{OB} \equiv \vec{r}_2 = \vec{j} - 2\vec{k}.$$

Traženom pravcu

$$p \equiv \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{1} \tag{a}$$

dodijelimo vektor

$$\vec{p} = a\vec{i} + b\vec{j} + \vec{k},$$

a pravcu q vektor

$$\vec{q} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \frac{1}{2}k.$$

Pravac p leži u zadanoj ravnini pa su vektori $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ i $\vec{p}$ komplanarni, pa prema (30)′ imamo jednadžbu

$$\vec{p}(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4a + 4b + 2 = 0$$

ili

$$2a - 2b - 1 = 0. \tag{b}$$

Prema (12 b):

$$\vec{p}\vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b} + \frac{1}{2} = 0. \tag{c}$$

Riješimo li sustav jednadžbi (b) i (c) dobijemo

$$a = \frac{1}{10} \quad \text{i} \quad b = -\frac{4}{10}$$

Uvrštenje u (a) daje

$$\underline{p \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{10}.}$$

76. Zadana su tri vrha $A(1, 2, -1)$, $B(3, -1, 4)$ i $C(2, 6, 2)$ paralelograma $ABCD$.

a) Odredi koordinate vrha D.

Kako je prema sl. 21 stranica BC paralelograma, kojoj odgovara vektor

$$\vec{c} = -\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k},$$

paralelna sa stranicom AD, kojoj odgovara

$$\vec{d} = (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z+1)\vec{k},$$

gdje su x, y i z koordinate vrha D, bit će

$$x - 1 = -1; \quad y - 2 = 7 \quad \text{i} \quad z + 1 = -2$$

pa je

$$\underline{D(0, 9, -3).}$$

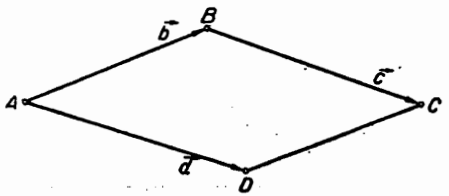
b) Odredi površinu S paralelograma.

$$\overrightarrow{AB} \equiv \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}; \qquad \overrightarrow{AD} = \vec{d} = -\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}$$

Prema (27a):

$$\vec{b} \times \vec{d} = -29\vec{i} - \vec{j} + 11\vec{k}$$

$$S = |\vec{b} \times \vec{d}| = \sqrt{963} \doteq 31{,}03 \text{ kv. jedinica.}$$



Slika 21.

c) Odredi projekcije površine S paralelograma na ravninu $E \equiv 2x - 2y + z - 5 = 0$ a zatim na koordinatne ravnine XY, YZ i XZ.

Projiciranje površine paralelograma $S = |\vec{b} \times \vec{d}| = b\,d \sin\varphi$ na ravninu E svodimo na projiciranje vektora normale paralelograma, tj. $\vec{b} \times \vec{d}$, na normalu $\vec{n}_0$ ravnine E, pa prema (12) dobijemo:

$$S_E = \frac{(\vec{b} \times \vec{d})\,n_0}{1}.$$

Kako je za ravninu E

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{n} = \frac{2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}{3},$$

račun prema (31) daje:

$$S_E = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 7 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -15$$

ili po apsolutnoj vrjednosti

$$\underline{S_E = 15.}$$

Na isti način računamo projekcije površine S na koordinatne ravnine.

Jedinični vektori za koordinatne ravnine XY, YZ i YZ jesu: $\vec{k}, \vec{i}$ i $\vec{j}$, pa je

$$S_{xy} = (\vec{b} \times \vec{d})\vec{k} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{11}$$

$$S_{yz} = (\vec{b} \times \vec{d})\vec{i} = \underline{29} \quad \text{i} \quad S_{xz} = (\vec{b} \times \vec{d})\vec{j} = \underline{1}.$$

Proba:

$$S = \sqrt{11^2 + 29^2 + 1} = \sqrt{963} \doteq \underline{31{,}03}.$$

Očito je da u

$$\vec{S} = \vec{b} \times \vec{d} = S_x\vec{i} + S_y\vec{j} + S_z\vec{k}$$

S_x, S_y i S_z predočuju projekcije površine paralelograma na koordinatne ravnine YZ, XZ i XY.

77. Odredi kosinus kuta što ga zatvaraju pravac

$$p \equiv \frac{x-1}{-4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-5} \quad \text{i vektor } \vec{a} = \vec{i} + \vec{j}.$$

$$\left[-\frac{1}{10}\right]$$

78. Odredi vektor $\vec{b}$ koji je paralelan s ravninom $E \equiv 2x - y - z - 4 = 0$ a okomit je na vektoru $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

$$[-\vec{j} + \vec{k}]$$

79. Odredi kosinus kuta što ga presječnica ravnina $2x + y - z = 0$ i $x + y + 2z = 0$ zatvara s osi X.

$$\left[\frac{3}{\sqrt{35}}\right]$$

80. Odredi vektor $\vec{a}$ duljine 2 koji je paralelan s presječnicom ravnina $E_1 \equiv x + 2y + z - 1 = 0$ i $E_2 \equiv x - y + 2z + 7 = 0$.

Traženi vektor $\vec{a}$, koji je paralelan s presječnicom zadanih ravnina, paralelan je i s vektorom $\vec{p}$, koji je okomit na vektorima $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ zadanih ravnina, tj. na

$$\vec{n}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{n}_2 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}.$$

Kako je $\vec{p} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 5\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$, dok je $\vec{a}$ paralelan s $\vec{p}$ i ima duljinu 2, dobijemo

$$\vec{a} = 2\vec{p}_0 = 2\frac{5\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{25 + 1 + 9}} = \underline{\frac{10\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}}{\sqrt{35}}}.$$

Odredi jednadžbu pravca p koji prolazi tačkom $P(1, 2, 3)$ i zatvara kutove s osi X 30°, a s osi Y 60°.

Napišimo jednadžbu orta $\vec{p}_0$ koji zatvara s koordinatnim osima zadane kutove pa je paralelan s traženim pravcem p.

$$\cos\alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos\beta = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = 0,$$

pa je

$$\vec{p}_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}.$$

Vektor $\vec{p}_0$ a dakle i pravac p paralelan je s ravninom XY i leži u ravnini $z = 3$, jer prolazi tačkom $P(1, 2, 3)$

Prema (38):

$$p \equiv \frac{x-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{y-2}{\frac{1}{2}} = \frac{z-3}{0}$$

ili

$$\underline{p \equiv \frac{x-1}{\sqrt{3}} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{0}}.$$

Pravac p možemo prikazati i kao presjek ravnina

$$\left.\begin{aligned} x - \sqrt{3}y - 1 + 2\sqrt{3} &= 0 \\ z &= 3 \end{aligned}\right|$$

2. Pravac $p \left| \begin{aligned} x - 2z - 3 &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned} \right.$ probada ravninu $E \equiv x + 3y - z + 4 = 0$.

a) Odredi probodište P tog pravca i ravnine.

Vektor $\vec{p}$ koji je okomit na vektorima normala onih ravnina kojima je pravac p određen, tj. na $\vec{n}_1 = \vec{i} - 2\vec{k}$ i $\vec{n}_2 = \vec{j} - 2\vec{k}$, paralelan je s pravcem p:

$$p \parallel \vec{p} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Uvrštenje $z = 0$ u jednadžbe ravnina koje određuju pravac p daje $x = 3$ i $y = 0$, pa je prema (38):

$$p \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}.$$

Prelazimo na parametarski oblik jednadžbe p prema (37):

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = t.$$

Odatle:

$$x = 2t + 3; \quad y = 2t \quad \text{i} \quad z = t$$

Uvrštenja u $E \equiv x + 3y - z + 4 = 0$ daje $t = -1$ pa je probodište

$$\underline{P(1, -2, -1).}$$

b) Odredi pravac q koji prelazi probodištem $P(1, -2, -1)$, leži u ravnini E, a okomit je na pravcu p.

Traženi pravac q leži u ravnini E, pa je okomit na $\vec{n} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ te ravnine, a okomit je i na pravcu p, odnosno vektoru $\vec{p}$.

Dodijelivši pravcu q vektor $\vec{q} = q_x \vec{i} + q_y \vec{j} + \vec{k}$ dobijemo prema (12b):

$$\left.\begin{aligned} \vec{q}\,\vec{n} &= q_x + 3q_y - 1 = 0 \\ \text{i} \quad \vec{q}\,\vec{p} &= 2q_x + 2q_y + 1 = 0 \end{aligned}\right|$$

Odatle slijedi

$$q_x = -\frac{5}{4} \quad \text{i} \quad q_y = \frac{3}{4}$$

pa je

$$\vec{q} = -\frac{5}{4}\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j} + \vec{k},$$

dok je

$$q \equiv \frac{x-1}{-\frac{5}{4}} = \frac{y+2}{\frac{3}{4}} = \frac{z+1}{1}$$

ili

$$\underline{\frac{x-1}{-5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{4}.}$$

83. Odredi jednadžbu pravca p koji prolazi tačkom $P(3, 2, 1)$, a okomit je na ravnini $2x - y + 2z + 2 = 0$, a također probodište Q tog pravca p sa zadanom ravninom.

$$\left[\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}; \quad Q\left(\frac{11}{9}, \frac{26}{9}, -\frac{7}{9}\right)\right]$$

84. Odredi jednadžbu ravnine E koja je paralelna s ravninom $2x - y + 2z + 4 = 0$, ako su obje ravnine tražena i zadana jednako udaljene od tačke $P(3, 2, -1)$.

Kako je tražena ravnina E paralelna sa zadanom, obje ravnine imaju identične vektore njihovih normala

$$\vec{n} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

pa prema (47)′ jednadžba tražene ravnine glasi

$$2x - y + 2z + D = 0 \qquad \text{(a)}$$

$D = ?$ Da odredimo uvaljenost d tačke $P(3, 2, -1)$ od zadane, a dakle i od tražene ravnine, odredimo neku tačku Q zadane ravnine. Za $x = 0$ i $z = 0$ dobijemo $y = 4$ pa je $Q(0, 4, 0)$, a vektor $\overrightarrow{QP} \equiv \vec{p}$ glasi prema (8):

$$\vec{p} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

Prema (12)

$$d = p_n = \frac{\vec{p}\,\vec{n}}{n} = \frac{6 + 2 - 2}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 2$$

Prema (47 a) napišemo jednadžbu (a) tražene ravnine u normalnom obliku

$$\frac{2x - y + 2z + D}{-\sqrt{4 + 1 + 4}} = 0$$

a prema (48 a) odredimo udaljenost $d = 2$ te ravnine od tačke $P(3, 2, -1)$:

$$2 = \frac{2 \cdot 3 - 2 - 2 + D}{-3}$$

a odatle je $D = -8$ pa je

$$\underline{E \equiv 2x - y + 2z - 8 = 0}$$

85. Zadane su četiri tačke

$$A(-2, 0, -3), \quad B(1, -2, 1), \quad C\left(-2, -\frac{13}{5}, \frac{26}{5}\right) \text{ i } D\left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}, 0\right).$$

a) Napiši jednadžbu ravnine E koja prolazi pravcem AB a paralelna je s pravcem CD.

Kako je

$$\overrightarrow{AB} \equiv \vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\overrightarrow{CD} \equiv \vec{d} = \frac{26}{5}\vec{i} - \frac{26}{5}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AP} = \vec{p} = (x + 2)\vec{i} + y\vec{j} + (z + 3)\vec{k},$$

gdje je $P(x, y, z)$ bilo koja tačka ravnine E, dobijemo prema (30)′:

$$\vec{p}(\vec{b} \times \vec{d}) = 0$$

ili

$$\begin{vmatrix} x+2 & y & z+3 \\ 3 & -2 & 4 \\ \frac{26}{5} & 0 & -\frac{26}{5} \end{vmatrix} = 0.$$

Odatle

$$\underline{E \equiv 2x + 7y + 2z + 10 = 0.}$$

b) Odredi najkraću udaljenost pravaca AB i CD.

Tu udaljenost d odredimo tako da izračunamo duljinu projekcije spojnice bilo koje tačke ravnine E i tačke na pravcu CD, npr. spojnice AC, u smjeru vektora $\vec{n}$ normale ravnine E.

Kako je

$$\overrightarrow{AC} \equiv \vec{c} = -\frac{13}{5}\vec{j} + \frac{41}{5}\vec{k}$$

a

$$\vec{n} = 2\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k}$$

dobijemo prema (12):

$$d = c_n = \frac{\vec{c}\,\vec{n}}{n} = \frac{-\frac{91}{5} + \frac{82}{5}}{\sqrt{4 + 49 + 4}} = -\frac{9}{5\sqrt{57}}.$$

$$\underline{d = \frac{9}{5\sqrt{57}}}$$

86. Odredi najkraću udaljenost d zadanih pravaca

a) $p_1 \equiv \frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-3}{2}$

$p_2 \equiv \frac{x-4}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+7}{3}.$

Pravac p_1 prolazi tačkom $A(-3, 6, 3)$ a p_2 tačkom $B(4, -1, -7)$.

Vektor $\overrightarrow{AB} = \vec{b} = 7\vec{i} - 7\vec{j} - 10\vec{k}$ projicirajmo na normalu $\vec{n}$ ravnine što je određuju zadani pravci, odnosno vektori

$$\vec{p}_1 = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{p}_2 = 8\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{n} = \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}.$$

Prema (12):

$$d = b_n = \frac{\vec{b}\,\vec{n}}{n} = \underline{13}.$$

b) $p_1 \equiv \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}$

$p_2 \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$

[7].

87. Izvedi uvjet da se sijeku zadani pravci

$$p_1 \equiv \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$$

$$p_2 \equiv \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}.$$

Uz pretpostavku da su zadani pravci mimosmjerni odredimo na način prikazan u zadacima 85 i 86 najkraću udaljenost d tih pravaca. Sl. 22.

$$\vec{p}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$$

$$\vec{p}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{BA} \equiv \vec{q} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k}$$

$$\vec{n} = \vec{p}_1 \times \vec{p}_2.$$

d dobijemo tako da $\vec{q}$ projiciramo na $\vec{n}$.

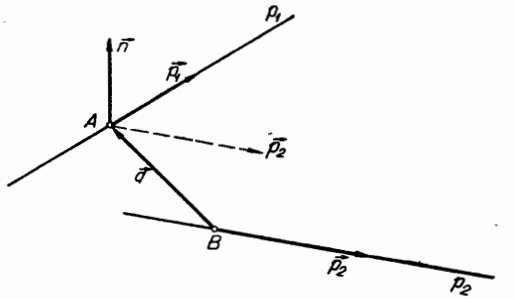
Prema (12)

$$d = q_n = \frac{\vec{q}\,\vec{n}}{n} = \frac{\vec{q}(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2)}{n}$$

ili prema (31) i (27a):

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\|}.$$

To je formula za najkraću udaljenost mimosmjernih pravaca p_1 i p_2.



Siika 22.

Ako se pravci sijeku, ta je udaljenost $d = 0$ pa je

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

traženi uvjet da se pravci p_1 i p_2 sijeku.

*88. Odredi jednadžbu ravnine koja prolazi krajnjim tačkama radijvektora

$$\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

Označivši s $P(x, y, z)$ bilo koju tačku tražene ravnine E i uzevši u obzir da su krajnje tačke zadanih radijvektora $A(3, -1, 1)$, $B(1, 2, -1)$ i $C(1, 1, 1)$ dobijemo

$$\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}, \quad \overrightarrow{AC} = -2\vec{i} + 2\vec{j} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{AP} = (x-3)\vec{i} + (y+1)\vec{j} + (z-1)\vec{k}.$$

Prema (30)':

$$E \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

odatle je

$$\underline{E \equiv 2x + 2y + z - 5 = 0.}$$

89. Odredi kut zadanih ravnina

$$E_1 \equiv 4x - 5y + 3z - 1 = 0 \quad \text{i} \quad E_2 \equiv x - 4y - z + 9 = 0.$$

Kut dviju ravnina je kut vektora njihovih normala:

$$\vec{n}_1 = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}; \qquad \vec{n}_2 = \vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}.$$

Prema (19):

$$\cos\varphi = \frac{4 + 20 - 3}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{18}} = \frac{21}{30} = 0{,}7$$

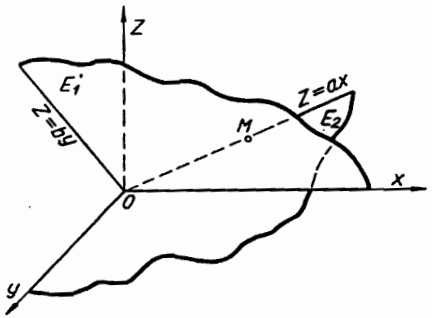
$$\underline{\varphi \doteq 45^0\, 30'.}$$

90. Dokaži da su zadane ravnine međusobno okomite

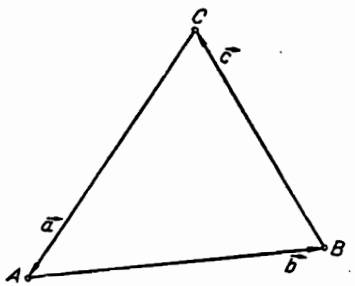
$$E_1 \equiv 3x - y + 2z + 15 = 0 \quad \text{i} \quad E_2 \equiv 5x + 9y - 3z - 1 = 0$$

$$\underline{[\vec{n}_1 \vec{n}_2 = 0]}.$$

91. Tačkom $M(5, 16, 12)$ prolaze dvije ravnine: jedna od njih sadrži os X, a druga os Y. Izračunaj kosinus kuta tih ravnina. Sl. 23.



Slika 23.



Slika 24.

Ravnina E_1 koja sadrži os X okomita je na ravnini YZ, pa njena jednadžba glasi $z = by$, dok ravnina E_2 koja sadrži os Y, pa je okomita na ravnini XZ, ima jednadžbu $z = ax$.

Obje ravnine prolaze tačkom M, pa je

$$12 = 16b \quad \text{i} \quad 12 = 5a.$$

Slijedi:

$$b = \frac{3}{4} \quad \text{i} \quad a = \frac{12}{5}.$$

Odatle je

$$E_1 \equiv 3y - 4z = 0 \quad \text{i} \quad E_2 \equiv 12x - 5z = 0.$$

Vektori normala tih ravnina glase:

$$\vec{n}_1 = 3\vec{j} - 4\vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{n}_2 = 12\vec{i} - 5\vec{k}.$$

Prema (19):

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2}{n_1 n_2} = \frac{20}{5 \cdot 13} = \underline{\frac{4}{13}}.$$

92. Zadan je vrh $A(2, -5, 3)$ trokuta ABC i vektori njegovih strana

$$\overrightarrow{AB} \equiv \vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{BC} \equiv \vec{c} \equiv 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Odredi vrhove B i C i vektor $\vec{a}$ strane AC.

Prema zadatku i slici 24:

$$\overrightarrow{AB} = (x - 2)\vec{i} + (y + 5)\vec{j} + (z - 3)\vec{k} \equiv 4\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

gdje su x, y i z koordinate tačke B.

Odatle

$$x - 2 = 4$$
$$y + 5 = 1 \qquad \underline{B(6 - 4{,}5).}$$
$$z - 3 = 2$$

Na isti način dobijemo

$$\underline{C(9, -6, 10)}$$

$$\overrightarrow{CA} \equiv \vec{a} = (2 - 9)\vec{i} + (-5 + 6)\vec{j} + (3 - 10)\vec{k}$$

$$\underline{\vec{a} = -7\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}.}$$

Proba:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \underline{0.}$$

93. Odredi kosinus kuta zadanih pravaca

$$p_1 \equiv \begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \qquad p_2 \equiv \begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0 \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

Pravci su zadani kao presječnice zadanih ravnina. Odredimo $\vec{p}_1$ i $\vec{p}_2$.

Za pravac p_1 vektori normala zadanih ravnina jesu

$$\vec{n}_1 = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$$
$$\vec{n}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$
$$\vec{p}_1 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 10\vec{i} + 2\vec{j} + 11\vec{k}.$$

Na isti način dobijemo za pravac p_2

$$\vec{p}_2 = 3\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Prema (19):

$$\cos\varphi = \frac{\vec{p}_1 \vec{p}_2}{p_1 p_2} = \underline{\frac{98}{195}}.$$

94. Odredi jednadžbu ravnine koja prolazi ishodištem koordinatnog sustava a okomita je na ravninama

$$E_1 \equiv 2x - y + 5z + 3 = 0 \quad \text{i} \quad E_2 \equiv x + 3y - z - 7 = 0.$$

Tražena ravnina E okomita je na presječnici s zadanih ravnina E_1 i E_2 pa je $\vec{s}$ vektor normale tražene ravnine E.

Prema (47)′:

$$\vec{n}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{n}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = -14\vec{i} + 7\vec{j} + 7\vec{k}.$$

Kako tražena ravnina E prolazi ishodištem, neposredno dobijemo

$$E \equiv -14x + 7y + 7z = 0$$

ili

$$\underline{2x - y - z = 0.}$$

95. Je li moguće položiti ravninu tačkama $A(1, -1, 1)$, $B(0, 2, 4)$, $C(1, 3, 3)$ i $D(4, 0, -3)$?

Ravninu možemo položiti kroz 4 tačke, ako su te tačke, odnosno vektori

$$\overrightarrow{AB} \equiv \vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} \equiv \vec{c} = 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AD} \equiv \vec{d} = 3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$$

komplanarni.

Prema (30)′:

$$(\vec{b} \times \vec{c})\vec{d} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 18 + 18 - 36 = 0$$

vektori su komplanarni pa možemo odrediti jednadžbu ravnine koja prolazi zadanim tačkama.

Vektor normale tražene ravnine E glasi:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} = -6\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Ravnina E prolazi tačkom $A(1, -1, 1)$ pa prema (50) i (47)′

$$E \equiv -6(x - 1) + 2(y + 1) - 4(z - 1) = 0$$

ili

$$\underline{3x - y + 2z - 6 = 0.}$$

96. Presječnicom ravnina

$$E_1 \equiv 4x - y + 3z - 1 = 0$$

i

$$E_2 \equiv x + 5y - z + 2 = 0$$

položi

a) Ravninu E_3 koja prolazi tačkom $O(0, 0, 0)$.

Za zadane ravnine E_1 i E_2 vektori normala glase

$$\vec{n}_1 = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{n}_2 = \vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$$

pa je vektor presječnice s tih ravnina

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}.$$

Vektorom $\vec{s}$ i tačkom O ravnina E_3 još nije određe· pa moramo na presječnice s odrediti jednu bilo koju tačku A.

Uvrštenje $z = 0$ u jednadžbe ravnina E_1 i E_2 daje

$$4x - y - 1 = 0$$

$$x + 5y + 2 = 0$$

a odatle je $x = \frac{1}{7}$ i $y = -\frac{3}{7}$ pa je $A\left(\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}, 0\right)$ tačka presječnice s (probodište s ravninom XY).

Tražena ravnina E_3 određena je sada vektorima

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \frac{1}{7}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j}, \quad \vec{s} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{OP} = \vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

gdje je $P(x, y, z)$ bilo koja tačka ravnine E_3.

Prema (30)′:

$$(\vec{p} \times \vec{a})\vec{s} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underline{E_3 \equiv 9x + 3y + 5z = 0.}$$

b) Ravninu E_4 koja prolazi tačkom $T(1, 1, 1)$.

Na isti način dobijemo

$$\underline{E_4 \equiv 23x - 32y + 26z - 17 = 0.}$$

c) Ravninu E_5 koja je paralelna s osi Y.

Tražena ravnina E_5 okomita je na ravnini XZ pa sadrži vektor $\vec{j}$, dok je

$$\overrightarrow{AP} \equiv \vec{p}_1 = \left(x - \frac{1}{7}\right)\vec{i} + \left(y + \frac{3}{7}\right)\vec{j} + z\vec{k}.$$

Prema (30)′:

$$(\vec{p}_1 \times \vec{j})\vec{s} = \begin{vmatrix} x - \frac{1}{7} & y + \frac{3}{7} & z \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underline{E_5 \equiv 21x + 14z - 3 = 0.}$$

d) E_6 koja je okomita na ravnini $2x - y + 5z - 3 = 0$.

Tražena ravnina E_6 određena je opet vektorima $\overrightarrow{AP} \equiv \vec{p}_1$ i $\vec{s}$, a također vektorom normale $\vec{n} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ravnine na koju je okomita:

$$(\vec{p}_1 \times \vec{n})\vec{s} = \begin{vmatrix} x - \frac{1}{7} & y + \frac{3}{7} & z \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underline{E_6 \equiv 7x + 14y + 5 = 0.}$$

II. PLOHE

Formule

Pravac kroz dvije tačke

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{41}$$

Kut dvaju pravaca

$$\cos \varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \tag{42a}$$

Uvjet okomitosti dvaju pravaca

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0. \tag{43}$$

Ravnina kroz jednu tačku

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \tag{50}$$

Uvjet paralelnosti dviju ravnina

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{55}$$

Pravac i ravnina.

Uvjet paralelnosti

$$a A + b B + c C = 0. \tag{57}$$

Uvjet okomitosti

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}. \tag{58}$$

Kuglina ploha ili sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \tag{60}$$

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - q)^2 = r^2 \tag{61}$$

Elipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{63}$$

Hiperboloidi

dvokrilni

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{64}$$

jednokrilni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{65}$$

u parametarskom obliku kao pravčasta ploha

$$x = a\frac{tu + 1}{t + u}; \qquad y = b\frac{t - u}{t + u}; \qquad z = c\frac{tu - 1}{t + u} \tag{68}$$

pravocrtne izvodnice

I sustav
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = t\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{t}\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \tag{66}$$

II sustav
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = u\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{u}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \tag{67}$$

Paraboloidi

eliptični

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \tag{69}$$

hiperbolni

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \tag{70}$$

u parametarskom obliku kao pravčasta ploha

$$x = a(t + u); \qquad y = b(t - u); \qquad z = 2tu \tag{73}$$

pravocrtne izvodnice

I sustav
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2t \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{t} \end{cases} \tag{71}$$

II sustav
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{u} \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 2u \end{cases} \tag{72}$$

Eliptični stožac

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{70}$$

Tangentna ravnina na plohu u tački $T_1(x_1, y_1, z_1)$ plohe

$$F(x, y, z) = 0: \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 (x - x_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 (y - y_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1 (z - z_1) = 0 \qquad (76)$$

$$z = f(x, y): \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1 (x - x_1) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_1 (y - y_1) = z - z_1 \qquad (75)$$

elipsoida:

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} + \frac{z z_1}{c^2} = 1 \qquad (76)'$$

hiperboloida:

dvokrilnog

$$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} - \frac{z z_1}{c^2} = 1 \qquad (76)^{II}$$

jednokrilnog

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} - \frac{z z_1}{c^2} = 1 \qquad (76)^{III}$$

paraboloida:

eliptičnog

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = z + z_1 \qquad (76)^{IV}$$

hiperbolnog

$$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = z + z_1. \qquad (76)^{V}$$

Normala na plohu u tački $T_1(x_1, y_1, z_1)$ plohe

$$F(x, y, z) = 0: \quad \frac{x - x_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1} = \frac{y - y_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1} = \frac{z - z_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1} \qquad (78)$$

$$z = f(x, y): \quad \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{-1} \qquad (77a)$$

elipsoida:

$$\frac{x - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y - y_1}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{z - z_1}{\frac{z_1}{c^2}}. \qquad (78)'$$

A. Plohe drugog reda izražene kanonskim jednadžbama (Elipsoid. Hiperboloidi. Paraboloidi. Eliptični stožac.)

Zadaci

97. Odredi omjer osiju dvaju paralelnih presjeka elipsoida

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

i to s ravninom XZ i s ravninom koja je od nje udaljena za 2.

Uvrštenje $y = 0$ i $y = 2$ u jednadžbu elipsoida daje presjek s ravninom XZ

$$\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1,$$

a to je elipsa s poluosima

$$a = 5 \quad \text{i} \quad c = 2,$$

i s ravninom $y = 2$

$$\frac{x^2}{\frac{125}{9}} + \frac{z^2}{\frac{20}{9}} = 1,$$

opet je elipsa s poluosima

$$a' = \frac{5\sqrt{5}}{3} \quad \text{i} \quad c' = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

$$\underline{a : a' = c : c = 3 : \sqrt{5}.}$$

98. Odredi projekciju na ravninu XY presječnice elipsoida

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1 \quad \text{i ravnine} \quad x + 4z - 4 = 0,$$

a također središte te presječne krivulje.

Iz jednadžbe ravnine slijedi:

$$z = \frac{4 - x}{4},$$

a uvrštenje te vrijednosti za z u jednadžbu elipsoida daje nakon uređenja

$$x^2 - 4x + 2y^2 = 0$$

ili

$$(x - 2)^2 + 2y^2 = 4 \mid : 4$$

$$\underline{\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.}$$

Projekcija presječne krivulje je elipsa s poluosima

$$a = 2 \quad \text{i} \quad b = \sqrt{2} \quad \text{i s središtem} \quad \underline{S(2, 0).}$$

99. U tački $A\left(-2, 1, -\frac{1}{2}\right)$ povuci normalu na elipsoid

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1.$$

Prema (78)′ dobijemo

$$\frac{x + 2}{-\frac{2}{8}} = \frac{y - 1}{\frac{1}{4}} = \frac{z + \frac{1}{2}}{-\frac{\frac{1}{2}}{1}}$$

ili

$$\underline{\frac{x + 2}{1} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z + \frac{1}{2}}{2}}$$

tražena jednadžba normale.

100. Odredi tangentne ravnine elipsoida

$$\frac{x^2}{21}+\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{4}=1$$

koje su paralelne s ravninom

$$2x+2y-3z=0.$$

Prema (76)′ jednadžba jedne od traženih tangentnih ravnina glasi

$$E\equiv\frac{x x_1}{21}+\frac{y y_1}{6}+\frac{z z_1}{4}=1. \qquad \text{(a)}$$

Treba odrediti koordinate dirališta $D_1(x_1, y_1, z_1)$. Iz paralelnosti tražene i zadane ravnine slijedi prema (55)

$$\frac{\frac{x_1}{21}}{2}=\frac{\frac{y_1}{6}}{2}=\frac{\frac{z_1}{4}}{-3}$$

ili

$$\frac{x_1}{7}=\frac{y_1}{2}=\frac{z_1}{-2}. \qquad \text{(b)}$$

Tražena ravnina E prolazi diralištem D_1, dakle

$$\frac{x_1^2}{21}+\frac{y_1^2}{6}+\frac{z_1^2}{4}=1. \qquad \text{(c)}$$

Iz (b) slijedi:

$$x_1=-\frac{7}{2}z_1 \quad \text{i} \quad y_1=-z_1. \qquad \text{(d)}$$

Uvrštenje tih vrijednosti za x_1 i y_1 u (c) daje nakon uređenja

$$z^2=1$$

pa je

$$z_1=1 \quad \text{i} \quad z_2=-1$$

i prema (d) dobijemo

$$x_{1,2}=\mp\frac{7}{2}; \qquad y_{1,2}=\mp 1.$$

Odatle iz (a) slijede tražene jednadžbe tangentnih ravnina:

$$\underline{E_{1,2}\equiv 2x+2y-3z\pm 12=0.}$$

101. Odredi tangentne ravnine elipsoida

$$x^2+2y^2+z^2=1$$

koje su paralelne s ravninom

$$x-y+2z=0.$$

$$\left[x-y+2z\pm\sqrt{\frac{11}{2}}=0\right].$$

102. Odredi tangentnu ravninu na troosni elipsoid

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$$

koja odsjeca jednake odreske na koordinatnim osima.

Prema (76)′ jednadžba tražene ravnine glasi

$$E\equiv\frac{x x_1}{4}+\frac{y y_1}{9}+\frac{z z_1}{36}=1 \qquad \text{(a)}$$

gdje su x_1, y_1 i z_1 koordinate traženog dirališta D. U drugu ruku jednadžba iste ravnine E napisana u segmentnom obliku (49) glasi

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{m}+\frac{z}{m}=1.$$

ili

$$E\equiv x+y+z-m=0$$

gdje je m duljina odrezaka na koordinatnim osima.

Budući da oba izraza za E predočuju istu ravninu imamo prema (55)

$$\frac{x_1}{4}=\frac{y_1}{9}=\frac{z_1}{36}$$

a odatle je

$$x_1=\frac{4}{9}y_1 \quad \text{i} \quad z_1=4y_1.$$

Uvrštenje u jednadžbu elipsoida daje

$$y_1^2=\frac{81}{49}$$

pa je

$$y_1=\pm\frac{9}{7}$$

$$x_1=\pm\frac{4}{7}$$

$$z_1=\pm\frac{36}{7}$$

Iz (a) slijede konačno obje tražene jednadžbe tangentnih ravnina

$$\underline{E_{1,2}\equiv x+y+z\mp 7=0.}$$

103. Odredi probodište pravca i plohe:

a) elipsoida

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$$

i pravca

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+6}{-3}=\frac{z+2}{-2}$$

Prelazimo na parametarski oblik jednadžbe pravca:

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+6}{-3}=\frac{z+2}{-2}=t.$$

Odatle dobijemo:

$$x=2(t+2); \quad y=-3(t+2) \quad \text{i} \quad z=-2(t+1). \qquad \text{(a)}$$

Uvrštenje u jednadžbu elipsoida daje nakon uređenja

$$t^2 + 3t + 2 = 0$$

pa je

$$t_1 = -1 \quad \text{i} \quad t_2 = -2.$$

Iz (a) slijede sad tražena probodišta

$$\underline{P_1(2, -3, 0)} \quad \text{i} \quad \underline{P_2(0, 0, 2).}$$

b) dvokrilnog hiperboloida

$$-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{9} = 1$$

i pravca

$$x - 3 = y - 1 = \frac{z - 6}{3}.$$

Prijelaz na parametarsku jednadžbu pravca i uvrštenje u jednadžbu hiperboloida daje jednadžbu

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

pa je

$$t_{1,2} = 1$$

i

$$x_{1,2} = 4; \quad y_{1,2} = 2 \quad \text{i} \quad z_{1,2} = 9$$

$$\underline{P_{1,2}(4, 2, 9).}$$

Pravac dira plohu.

c) jednokrilnog hiperboloida

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$$

i pravca

$$\frac{x - 4}{4} = \frac{y + 3}{0} = \frac{z - 1}{1}.$$

Postupajući na isti način ne dobijemo jednadžbu u t, već identitetu $1 = 1$ koja kazuje da zadani pravac leži potpuno na plohi hiperboloida.

104. Odredi jednadžbu ravnine koja tangira dvokrilni hiperboloid

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} = -1$$

u tački $D_1(-6, 2, 6)$.

Prema $(76)^{II}$ dobijemo neposredno

$$\frac{-6x}{9} + \frac{2y}{1} - \frac{6z}{4} = -1$$

a odatle je

$$\underline{E \equiv 4x - 12y + 9z - 6 = 0.}$$

105. Na jednokrilni hiperboloid

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$$

položi tangentne ravnine koje prolaze pravcima

$$\text{a)} \quad \frac{x}{3} = \frac{y + 9}{3} = \frac{z}{1} \quad \text{i} \quad \text{b)} \quad \frac{x}{6} = \frac{y}{-3} = \frac{z + 2}{4}.$$

Ad a) Izvršimo li prijelaz na parametarski oblik jednadžbe zadanog pravca, dobijemo $t_1 = 4$ i $t_2 = 2$ nakon uvrštenja u jednadžbu hiperboloida, i dva probodišta $P_1(12, 3, 4)$ i $P_2(6, -3, 2)$ pravca i hiperboloida, a dakle zadanim pravcem prolaze dvije tangentne ravnine E_1 i E_2 (Vidi zadatak 103).

Prema $(76)^{III}$

$$E_1 \equiv \frac{x x_1}{36} + \frac{y y_1}{9} - \frac{z z_1}{4} = 1 \qquad \text{(a)}$$

$$D_1(x_1, y_1, z_1) = ?$$

Tražena ravnina E_1 prolazi probodištem $P_1(12, 3, 4)$ i tačkom $A(0, -9, 0)$ kojom prolazi zadani pravac. Uvrštenje koordinata tih tačaka u (a) daje:

$$\frac{x_1}{3} + \frac{y_1}{3} - z_1 = 1 \quad \text{i} \quad y_1 = -1.$$

Iz tih jednadžbi slijedi:

$$x_1 = 3z_1 + 4 \qquad \text{(b)}$$

dok uvrštenje $x_1 = 3z_1 + 4$ i $y_1 = -1$ u (a) daje

$$z_1 = \frac{2}{3}$$

a prema (b):

$$x_1 = 6, \quad \text{pa je} \quad D_1\left(6, -1, \frac{2}{3}\right)$$

$$\underline{E_1 \equiv 3x - 2y - 3z - 18 = 0.}$$

Na isti način uzevši mjesto P_1 probodište $P_2(6, -3, 2)$ dobijemo

$$\underline{E_2 \equiv x - 3z = 0.}$$

ad b) Odredivši na navedeni način probodište pravca i hiperboloida dobijemo dvostruku tačku $P_{1,2}(6, -3, 2)$, pa zadani pravac tangira hiperboloid u $P_{1,2}$. Postoji dakle samo jedna tangentna ravnina koja prolazi tim pravcem, a dira hiperboloid u tački $P_{1,2}(6, -3, 2)$. Prema (a) dobijemo

$$\underline{E \equiv x - 2y - 3z - 6 = 0.}$$

106. Pravcem $p \equiv y = 0;\ z = 1$ položi tangentne ravnine na dvokrilni hiperboloid

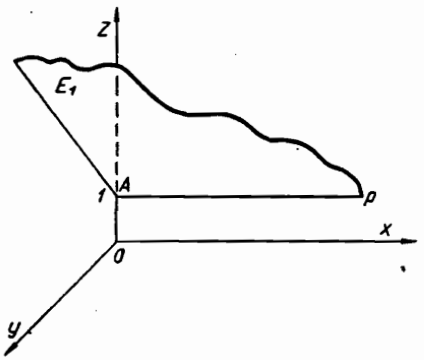
$$-\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

Iz slike 25 vidimo da su tražene tangentne ravnine okomite na ravnini YZ pa njihove jednadžbe imaju općenito oblik

$$By + Cz + 1 = 0.$$

U tom slučaju jednadžba tangentne ravnine prima oblik

$$-\frac{y y_1}{4} + \frac{z z_1}{16} = 1$$



Slika 25.

prema $(76)^{II}$. Pravac, a dakle i tangentne ravnine prolaze tačkom $A(0, 0, 1)$. Uvrštenje daje

$$\frac{z_1}{16} = 1 \quad \text{pa je} \quad z_1 = 16.$$

Uvrštenje $z_1 = 16$ u jednadžbu hiperboloida daje uz $x = 0$

$$\frac{y^2}{4} = 15 \quad \text{pa je} \quad y_{1,2} = \pm 2\sqrt{15}.$$

Dobijemo:

$$\mp \frac{2\sqrt{15}}{4} y + \frac{16 z}{16} = 1$$

pa je

$$\underline{E_1 \equiv -\sqrt{15}\, y + 2z - 2 = 0}$$

$$\underline{E_2 \equiv \sqrt{15}\, y + 2z - 2 = 0.}$$

107. Odredi tangentnu ravninu eliptičnog paraboloida

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 2z$$

koja je paralelna s ravninom

$$x - y - 2z = 0.$$

Prema $(76)^{IV}$ tražena ravnina ima jednadžbu

$$E \equiv \frac{x x_1}{6} + \frac{y y_1}{2} = z + z_1. \qquad \text{(a)}$$

Treba odrediti diralište $D(x_1, y_1, z_1)$.

Prema (55):

$$\frac{\frac{x_1}{6}}{1} = \frac{\frac{y_1}{2}}{-1} = \frac{-1}{-2}$$

pa je

$$x_1 = 3; \qquad y_1 = -1,$$

a uvrštenje tih vrijednosti u jednadžbu paraboloida daje $z_1 = 1$. Dakle je $D(3, -1, 1)$. Iz (a) dobijemo konačno

$$\underline{E \equiv x - y - 2z - 2 = 0.}$$

108. Zadan je hiperbolni paraboloid

$$2x^2 - \frac{y^2}{2} = 2z$$

i jedna od njegovih tangentnih ravnina

$$10x - 2y - z - 21 = 0.$$

Odredi jednadžbe pravaca u kojim se oni sijeku.

Zadatak se svodi na određivanje jednadžbi dviju pravocrtnih izvodnica paraboloida koje pripadaju dirališta zadane tangentne ravnine, jer znamo da je hiperbolni paraboloid pravčasta ploha kao i jednokrilni hiperboloid.

Da odredimo diralište D napišemo prema $(76)^{V}$ jednadžbu tangentne ravnine u obliku

$$2x x_1 - \frac{y y_1}{2} = z + z_1$$

pa prema (55) imamo:

$$\frac{2x_1}{10} = \frac{-\frac{y_1}{2}}{-2} = \frac{-1}{-1}.$$

Odatle $x_1 = 5$, $y_1 = 4$, a uvrštenje tih vrijednosti u jednadžbu paraboloida daje $z_1 = 21$

$$D(5, 4, 21).$$

Da odredimo prema (71) i (72) tražene jednadžbe izvodnica izračunajmo prema (73) vrijednosti parametara t i u paraboloida. Uzevši u obzir da je u našem slučaju $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dok je $b = \sqrt{2}$ dobijemo

$$\left.\begin{aligned} 5 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t + u) \\ 4 &= \sqrt{2}\,(t - u) \end{aligned}\right\} \quad \text{pa je} \quad t = \frac{7}{\sqrt{2}}; \quad u = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Proba: $z = 2tu = 21$.

Uvrštenje vrijednosti za t i u u (71) i (72) daje tražene jednadžbe izvodnica p_1 i p_2 kao presjeci dviju parova ravnina:

$$p_1 \equiv \begin{cases} 2x + y - 14 = 0 \\ 14x - 7y - 2z = 0 \end{cases} \qquad p_2 \equiv \begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ 6x + 3y - 2z = 0. \end{cases}$$

Prikažimo jednadžbu p_1 u kanonskom obliku.

Iz 1. jednadžbe slijedi:

$$y = \frac{x-7}{-\frac{1}{2}} \quad \text{i} \quad x = -\frac{y}{2} + 7.$$

Uvrštenje te vrijednosti za x u 2. jednadžbu daje

$$y = \frac{z-49}{-7}$$

pa je

$$\frac{x-7}{-\frac{1}{2}} = \frac{y}{1} = \frac{z-49}{-7}$$

ili

$$p_1 \equiv \frac{x-7}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-49}{14}.$$

Na isti način dobijemo:

$$p_2 \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-9}{6}.$$

109. Odredi pravce koji prolaze tačkom (6, 2, 8) a leže na plohi

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1.$$

Budući da je jednokrilni hiperboloid pravčasta površina, zadatak se svodi na određivanje pravocrtnih izvodnica u zadanoj tački hiperboloida. Na način prikazan u zadatku 108 primijeni formule (68), (66) i (67).

$$\left[\frac{x-6}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-8}{4}; \quad \frac{x-6}{9} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-8}{20}\right].$$

110. Zadan je eliptični stožac $z^2 = 2x^2 + 4y^2$. Odredi onu izvodnicu s stošca koja je paralelna s ravninom $12x + 14y + 11z - 25 = 0$ i onu tangentnu ravninu koja prolazi tom izvodnicom.

Napisavši jednadžbu stošca u obliku

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} = 0$$

vidimo da je zadna ploha stožac s vrhom u $O(0, 0, 0)$ kojemu je presjek s ravninom $z = 2$ elipsa

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$$

s poluosima $a = \sqrt{2}$ i $b = 1$ [vidi formulu (70)' i sl. 26]. Budući da svaka tangentna ravnina zadanog stošca prolazi kroz ishodište O i dira plohu po jednoj od izvodnica, biti će prema (55)

$$E \equiv 12x + 14y + 11z = 0 \qquad \text{(a)}$$

jednadžba tražene tangentne ravnine.

Kako je u jednom od dirališta $T_1(x_1, y_1, z_1)$ tangentne ravnine

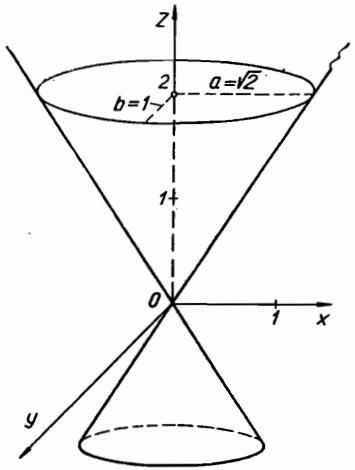
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 = x_1, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 = 2y_1 \qquad \text{i} \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1 = -\frac{1}{2}z_1$$

dobijemo prema (76) jednadžbu tangentne ravnine E u drugom obliku:

$$E \equiv x_1(x - x_1) + 2y_1(y - y_1) - \frac{1}{2}z_1(z - z_1) = 0. \qquad \text{(b)}$$

Iz (a) i (b) slijedi:

$$x_1 = 12, \quad 2y_1 = 14 \quad \text{i} \quad -\frac{1}{2}z_1 = 11 \quad \text{pa je} \quad T_1(12, 7, -22).$$



Slika 26.

Jednadžbu izvodnice s dobijemo kao pravac kroz tačke $O(0, 0, 0)$ i T_1 prema (41):

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{7} = \frac{z}{-22}.$$

B. Sfera (kuglina ploha)

Zadaci

111. Napiši jednadžbu sfere opisane oko tetraedra kojemu su vrhovi $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(0, 5, 0)$ i $C(0, 0, 3)$.

Prema (61) jednadžba sfere sa središtem u $S(m, n, q)$ glasi

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - q)^2 = r^2.$$

Uvrštenje koordinata vrhova tetraedra daje četiri jednadžbe za određivanje nepoznanica m, n, q, i r:

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 + q^2 &= r^2 \\ (2 - m)^2 + n^2 + q^2 &= r^2 \\ m^2 + (5 - n)^2 + q^2 &= r^2 \\ m^2 + n^2 + (3 - q)^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe slijedi:

$$n^2 + q^2 = r^2 - m^2; \quad m^2 + q^2 = r^2 - n^2 \quad \text{i} \quad m^2 + n^2 = r^2 - q^2$$

a uvrštenje tih jednakosti u ostale tri jednadžbe daje:

$$(2 - m)^2 - m^2 = 0$$

$$(5 - n)^2 - n^2 = 0$$

$$(3 - q)^2 - q^2 = 0.$$

Odatle dobijemo:

$$m = 1; \quad n = \frac{5}{2} \quad \text{i} \quad q = \frac{3}{2}$$

a uvrštenje tih vrijednosti u 1. jednadžbu daje

$$r^2 = \frac{38}{4}$$

$$\underline{(x - 1)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{38}{4}.}$$

112. Napiši jednadžbu sfere koja prolazi tačkom $A(0, -3, 1)$ a siječe ravninu XY u kružnici $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z = 0 \end{cases}$

Središte sfere leži na osi Z, jer na toj osi leži središte presječne kružnice $S_1(0, 0, 0)$ pa prema (61) jednadžba sfere glasi

$$x^2 + y^2 + (z - q)^2 = r^2 \tag{a}$$

$q = ?$ $r = ?$

Uvrštenje $z = 0$ u (a) daje drugi oblik presječne kružnice

$$x^2 + y^2 + q^2 = r^2$$

pa iz usporedbe tog oblika sa zadanim slijedi:

$$16 + q^2 = r^2. \tag{b}$$

Sfera prolazi tačkom $A(0, -3, 1)$ pa prema (a)

$$9 + (1 - q)^2 = r^2. \tag{c}$$

Iz (b) i (c) slijedi

$$16 + q^2 = 9 + 1 - 2q + q^2$$

pa je $q = -3$, dok je $r^2 = 25$. Prema (a):

$$\underline{x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25.}$$

113. U probodištima pravca

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z - 1}{2}$$

i sfere

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 6$$

položi tangentne ravnine na sferu.

Prelazimo na parametarski oblik jednadžbe zadanog pravca

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z - 1}{2} = t.$$

Odatle:

$$\begin{aligned} x &= t + 1 \\ y &= -t \\ z &= 2t + 1. \end{aligned} \tag{a}$$

Uvrštenje u jednadžbu sfere daje:

$$(t - 1)^2 + (-t + 1)^2 + (2t - 2)^2 = 6$$

ili

$$6t^2 - 12t = 0 \quad \text{pa je} \quad t_1 = 0 \quad \text{i} \quad t_2 = 2.$$

Uvrštenje $t_1 = 0$ i $t_2 = 2$ u (a) daje oba probodišta

$$P_1(1, 0, 1) \quad \text{i} \quad P_2(3, -2, 5). \tag{b}$$

Računamo prema (76):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - 2); \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y + 1); \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2(z - 3)$$

dok je u P_1: $(F_x)_1 = -2$; $(F_y)_1 = 2$ i $(F_z)_1 = -4$

a u P_2: $(F_x)_2 = 2$; $(F_y)_2 = -2$ i $(F_z)_2 = 4$. (c)

Uvrstivši (b) i (c) u (76) i uredivši dobijemo tražene jednadžbe tangentnih ravnina, koje su međusobno paralelne:

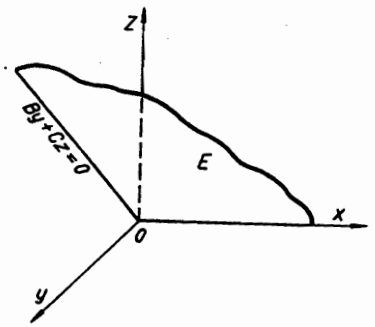
$$\text{I} \quad \underline{x - y + 2z - 3 = 0}$$

$$\text{II} \quad \underline{x - y + 2z - 15 = 0.}$$

114. Na sferu

$$(x + 5)^2 + (y - 8)^2 + (z + 1)^2 = 16$$

položi tangentne ravnine koje prolaze kroz os X.



Slika 26 a.

Kako se vidi iz slike 26 a jednadžbe traženih ravnina imaju općenito oblik

$$By + Cz = 0,$$

odnosno

$$\frac{B}{C}y + z = 0 \tag{a}$$

Da odredimo $\frac{B}{C}$ uočimo da je udaljenost ravnina od središta $S(-5, 8, -1)$ sfere jednaka polumjeru 4 te sfere, pa prema (48 a) imamo stavivši $\frac{B}{C} = u$

$$4 = \frac{u \cdot 8 - 1}{\sqrt{u^2 + 1}}.$$

Odatle dobijemo

$$u_1 = \left(\frac{B}{C}\right)_1 = \frac{3}{4} \quad \text{i} \quad u_2 = \left(\frac{B}{C}\right)_2 = -\frac{5}{12}.$$

Uvrštenje u (a) daje tražene jednadžbe tangentnih ravnina:

$$\text{I} \quad \underline{3y + 4z = 0}$$

$$\text{II} \quad \underline{5y - 12z = 0.}$$

115. Na sferu

$$(x - 4)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 225$$

položi tangentne ravnine koje su paralelne s ravninom

$$10x - 11y - 2z + 3 = 0.$$

Znamo prema (55) da su koeficijenti od x, y i z paralelnih ravnina proporcionalni ili jednaki, pa će jednadžbe traženih tangentnih ravnina glasiti:

$$10x - 11y - 2z + D = 0.$$

Kako je svaka tangentna ravnina na sferu udaljena od središta sfere za njen polumjer, odredimo D prema (48a) uzevši u obzir da je u našem slučaju $d = r = 15$ i $S(4, 0, 2)$:

$$15 = \frac{10 \cdot 4 - 11 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + D}{\pm\sqrt{100 + 121 + 4}}$$

ili

$$15 = \frac{36 + D}{\pm 15}.$$

Odatle je $D_1 = 189$ i $D_2 = -261$. Dobijemo:

$$\text{I} \quad \underline{10x - 11y - 2z + 189 = 0}$$

$$\text{II} \quad \underline{10x - 11y - 2z - 261 = 0.}$$

116. Napiši jednadžbu sfere koja tangira pravac

$$p_1 \equiv \frac{x - 1}{3} = \frac{y + 4}{6} = \frac{z - 6}{4}$$

u tački $A(1, -4, 6)$ i pravac

$$p_2 \equiv \frac{x - 4}{2} = \frac{y + 3}{1} = \frac{z - 2}{-6}$$

u tački $B(4, -3, 2)$. Sl. 27.

Središte $S(m, n, q)$ sfere odredimo kao sjecište ravnina E_1 i E_2 koje prolaze tačkama A i B a okomite su na pravcima p_1 i p_2 i ravnine E_3 koja prolazi sredinom C tetive AB okomito na tu tetivu.

Prema (50a)

$$E_1 \equiv A_1(x - 1) + B_1(y + 4) + (z - 6) = 0 \qquad \text{(a)}$$

a prema (58):

$$\frac{3}{A_1} = \frac{6}{B_1} = \frac{4}{1}$$

odatle

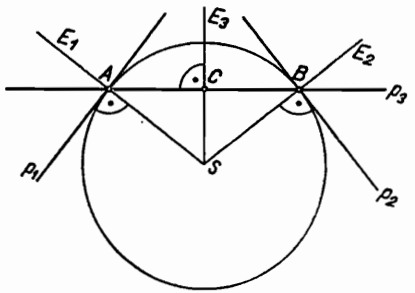
$$A_1 = \frac{3}{4} \quad \text{i} \quad B_1 = \frac{3}{2}$$

pa je prema (a):

$$E_1 \equiv 3x + 6y + 4z - 3 = 0.$$

Na isti način dobijemo:

$$E_2 \equiv 2x + y - 6z + 7 = 0.$$



Slika 27.

Koordinate tačke C:

$$x = \frac{1 + 4}{2} = \frac{5}{2}; \qquad y = \frac{-4 - 3}{2} = -\frac{7}{2}; \qquad z = \frac{6 + 2}{2} = 4$$

pa je

$$C\left(\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, 4\right).$$

Prema (41)

$$AB \equiv p_3 \equiv \frac{x - 1}{3} = \frac{y + 4}{1} = \frac{z - 6}{-4}.$$

Na isti način kao za E_1 i E_2 dobijemo

$$E_3 \equiv 3x + y - 4z + 12 = 0.$$

Riješimo li sustav što ga čine jednadžbe dobivene za E_1, E_2 i E_3, dobijemo središte $S(-5, 3, 0)$ sfere.

Polumjer sfere

$$AS = r = \sqrt{36 + 49 + 36} = 11.$$

Prema (61):

$$\underline{(x + 5)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 121.}$$

117. Odredi koordinate središta i polumjer sfere

$$36x^2 + 36y^2 + 36z^2 - 36x + 24y - 72z - 95 = 0$$

$$\left[S\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 1\right);\ r = 2\right].$$

118. Napiši jednadžbu sfere kojoj je središte u tački

a) $S(1, 4, -7)$ i koja tangira ravninu $6x + 6y - 7z + 42 = 0$

b) $S(6, -8, 3)$ i koja tangira os Z.

[a) $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+7)^2 = 121$;

b) $(x-6)^2 + (y+8)^2 + (z-3)^2 = 100$].

119. Dokaži da su sfere

$$x^2 + y^2 + z^2 = ax$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = by \qquad \text{(a)}$$

međusobno ortogonalne, tj. da se sijeku pod pravim kutom.

Prema (78) izračunajmo koeficijente smjera normala zadanih sfera:

$$a_1 = \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - a; \qquad b_1 = \frac{\partial F}{\partial y} = 2y; \qquad c_1 = \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

$$a_2 = 2x; \qquad b_2 = 2y - b; \qquad c_2 = 2z.$$

Kako je kut dviju ploha kut njihovih normala primijenimo uvjet (43) okomitosti dvaju pravaca, u našem slučaju normala:

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0.$$

Dobijemo:

$$(2x - a)\,2x + 2y(2y - b) + 2z \cdot 2z = 4(x^2 + y^2 + z^2) - 2(ax + by) = \text{prema (a)} =$$
$$= 2(ax + by) - 2(ax + by) = \underline{0}.$$

Zadane su sfere ortogonalne.

120. Na plohi

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z - 12 = 0$$

odredi tačke u kojim su tangentne ravnine paralelne s koordinatnim ravninama.

Prema (76) odredimo jednadžbu tangentne ravnine E na zadanu plohu u dirališta $D(x_1, y_1, z_1)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 6; \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z + 4$$

$$E \equiv 2x_1(x - x_1) + (2y_1 - 6)(y - y_1) + (2z_1 + 4)(z - z_1) = 0. \qquad \text{(a)}$$

Za ravnine koje su paralelne s ravninom XY kosinusi smjera normala imaju vrijednosti

$$\cos\alpha = \cos 90^0 = 0; \qquad \cos\beta = \cos 90^0 = 0 \qquad \text{i} \qquad \cos\gamma = \cos 0^0 = 1$$

pa jednadžba normale u tački D plohe glasi

$$\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{0} = \frac{z - z_1}{1}. \qquad \text{(b)}$$

Iz (a) i (b) slijedi obzirom na uvjet (58) okomitosti pravca i ravnine:

$$\frac{2x_1}{0} = \frac{2y_1 - 6}{0} = \frac{2z_1 + 4}{1}.$$

Odatle:

$$x_1 = 0, \quad 2y_1 - 6 = 0 \quad \text{pa je} \quad y_1 = 3.$$

Uvrštenje $x_1 = 0$ i $y_1 = 3$ u jednadžbu zadane plohe daje jednadžbu

$$z^2 + 4z - 21 = 0$$

a odatle je

$$z_1 = 3 \quad \text{i} \quad z_2 = -7.$$

Tražene su tačke na plohi u kojim su tangentne ravnine paralelne s ravninom XY.

$$\underline{A(0, 3, 3) \quad \text{i} \quad B(0, 3 - 7).}$$

Postupajući na isti način dobijemo tačke

$$\underline{C(0, -2, -2) \quad \text{i} \quad D(0, 8, -2)}$$

u kojem su tangentne ravnine paralelne s ravninom XZ i tačke

$$\underline{E(5, 3, -2) \quad \text{i} \quad F(-5, 3, -2)}$$

u kojem su tangentne ravnine paralelne s ravninom YZ.

Do istih rezultata mnogo lakše i brže dolazimo i to bez računa, ako napišemo jednadžbu zadane plohe u obliku

$$x^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 = 25$$

pa uočimo da je to sfera polumjera 5 sa središtem u $S(0, 3, -2)$ pa je grafički prikažemo.

121. Tačkom $M(3, 4, 12)$ sfere

$$x^2 + y^2 + z^2 = 169$$

položene su ravnine okomite na koordinatnim osima X i Y. Napiši jednadžbu ravnine koja prolazi tangentama položenim u tački M na presječnici sfere i ravnina okomitih na koordinatne osi.

Odredimo presječnice s_1 i s_2 sfere sa zadanim ravninama koje prolaze zajedničkom tačkom $M(3, 4, 12)$.

Ravnina okomita na os X:

$$x = 3 \quad \text{pa je} \quad s_1 \equiv y^2 + z^2 = 160.$$

Ravnina okomita na os Y:

$$y = 4, \quad \text{pa je} \quad s_2 \equiv x^2 + z^2 = 153.$$

Računamo prema (76) u $M(3, 4, 12)$:

Za s_1:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 = 2 \cdot 4 = 8; \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1 = 2 \cdot 12 = 24$$

Za s_2:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 = 2 \cdot 3 = 6; \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1 = 2 \cdot 12 = 24.$$

Jednadžbe tangenata glase:

$$t_1 \equiv 8(y-4) + 24(z-12) = 0$$

$$t_2 \equiv 6(x-3) + 24(z-12) = 0$$

ili

$$t_1 \equiv y + 3z - 40 = 0$$

$$t_2 \equiv x + 4z - 51 = 0.$$

Tražena ravnina

$$R = A(x-3) + B(y-4) + (z-12) = 0.$$

Prema uvjetu (55) paralelnosti dviju ravnina uzevši u obzir da jednadžbe tangenata t_1 i t_2 predočuju dvije ravnine od kojih je prva okomita na ravninu YZ a druga na ravninu XZ dobijemo:

$$\frac{B}{1} = \frac{1}{3} \quad \text{i} \quad \frac{A}{1} = \frac{1}{4} \quad \text{pa je} \quad A = \frac{1}{4} \quad \text{i} \quad B = \frac{1}{3}$$

i

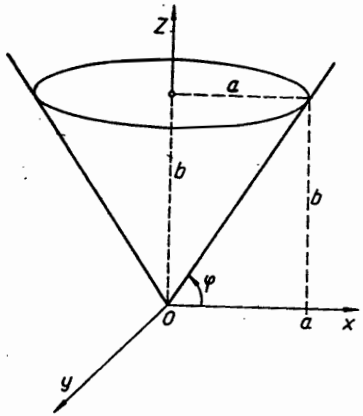
$$\underline{R \equiv 3x + 4y + 12z - 169 = 0.}$$

C. Stožaste i valjkaste plohe

Zadaci

122. Koje plohe predočuju jednadžbe:

a) $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$; b) $\frac{x^2}{4} - y^2 + \frac{z^2}{4} = 0$; c) $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2+z^2}{16} = 0$



Slika 28.

Ad a) Napisavši jednadžbu zadane plohe u obliku

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2} z^2$$

i usporedivši je s jednadžbom rotacione plohe $x^2 + y^2 = [f(z)]^2$ [vidi formulu (90) u II dijelu Repetitorija], vidimo da je $f(z) = \frac{a}{b} z$, ili $x = \frac{a}{b} z$, odnosno $z = \frac{b}{a} x$ a to je pravac kroz ishodište, kojemu je $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$. Zadana ploha predočuje kružni (rotacioni) stožac, kojemu je os Z os rotacije, dok je a polumjer poprečnog presjeka udaljenog za b od vrha (vidi sl. 28).

ad b) Prikazavši jednadžbu zadane plohe u obliku $x^2 + z^2 = (2y)^2$ zaključujemo prema (90) da ona predočuje kružni stožac nastao rotacijom oko osi Y pravca $z = 2y$ (ili $x = 2y$) kojemu je vrh u ishodištu koordinatnog sustava. Nariši sliku plohe.

ad c) Postupajući na isti način zaključujemo da zadana jednadžba predočuje kružni stožac nastao rotacijom oko osi X pravcu $z = \frac{4}{3} x$. Nariši sliku plohe.

123. Odredi kut što ga zatvara izvodnica s osi rotacije stošca $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{3} = 0$ i sve prikaži grafički.

$$\left[\varphi = \frac{\pi}{6}\right].$$

124. Odredi ravninu koja tangira eliptični stožac $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - z^2 = 0$ u tački $T_1(4, -6, 4)$ stošca.

Računamo:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{2}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2}{3} y \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -2z$$

a u $T_1(4_1 - 6, 4)$:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 = 2; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 = -4 \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1 = -8.$$

Uvrštenje u (76) daje:

$$2(x-4) - 4(y+6) - 8(z-4) = 0$$

ili

$$\underline{x - 2y - 4z = 0.}$$

125. Napiši jednadžbu stošca kojem je vrh u ishodištu koordinatnog sustava a ravnalica je zadana jednadžbama $\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 9 \\ z = 4. \end{cases}$

Znamo da se stožastom plohom ili, kraće, stošcem zove općenito ploha što je opisuje pomični pravac (izvodnica) koja prolazi stalnom tačkom (vrh stošca) i siječe neku krivulju (ravnalicu). (Vidi § 15 III dijela Repetitorija).

Prema (38) jednadžba izvodnice zadane plohe glasi:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{1}$$

jer prema zadatku prolazi ishodištem koordinatnog sustava. Odatle je

$$\left.\begin{aligned} x &= az \\ y &= bz \end{aligned}\right\} \text{(a)} \quad \text{i} \quad \left.\begin{aligned} a &= \frac{x}{z} \\ b &= \frac{y}{z} \end{aligned}\right\} \text{(b)}$$

Da uklonimo x, y i z iz jednadžbe ravnalice uvrstimo jednakosti (a) u njenu jednadžbu:

$$a^2 z^2 + b^2 z^2 + (z - 5)^2 = 9$$

a uz $z = 4$ dobijemo:

$$16 a^2 + 16 b^2 = 8$$

ili

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$$

Uvrštenjem jednakosti (b) dobivamo traženu jednadžbu stošca

$$\underline{\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = \frac{1}{2}}.$$

126. U ravnini XY leži parabola $y^2 = 4x$. Napiši jednadžbu stošca kojem je ta parabola ravnalica dok je vrh u tački $V(0, 0, 8)$.

Iz jednadžbe izvodnice

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z - 8}{1}$$

slijedi:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(z - 8) \\ y &= b(z - 8) \end{aligned}\right\} \text{(a)} \quad \text{i} \quad \left.\begin{aligned} a &= \frac{x}{z - 8} \\ b &= \frac{y}{z - 8} \end{aligned}\right\} \text{(b)}$$

Uvrštenje (a) u jednadžbu ravnalice daje

$$b^2 (z - 8)^2 = 4 a (z - 8)$$

a uz $z = 0$

$$2 b^2 = - a$$

a odatle uvrstivši (b) dobijemo traženu jednadžbu stošca

$$\underline{2 y^2 + x z - 8 x = 0.}$$

127. Pravac

$$p \equiv \frac{x - 2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$$

okreće se oko osi X. Odredi jednadžbu nastale rotacione plohe.

Pravac p siječe os X u tački $V(2, 0, 0)$ pa opisuje stožastu plohu s vrhom u V pri čemu ta izvodnica p zatvara s osi X stalni kut α, kojemu je

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = \frac{3}{7}.$$

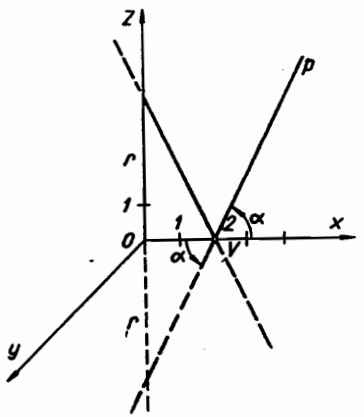
Iz slike 29 se vidi da taj stožac siječe ravninu YZ u kružnici polumjera $r = 2 \operatorname{tg} \alpha$ pa ćemo tu kružnicu uzeti kao ravnalicu zadane plohe.

Računamo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \frac{\sqrt{40}}{3},$$

pa je

$$r = \frac{2\sqrt{40}}{3}.$$



Slika 29.

Jednadžba ravnalice glasi:

$$\left.\begin{aligned} y^2 + z^2 &= \frac{160}{9} \\ x &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

Napisavši jednadžbu izvodnice

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

računamo

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{b}{3}(x - 2) \\ z &= \frac{c}{3}(x - 2) \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

i

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{3y}{x - 2} \\ c &= \frac{3z}{x - 2} \end{aligned}\right\} \quad \text{(c)}$$

Uvrštenje (b) u (a) daje:

$$b^2 + c^2 = 40,$$

a uvrstivši ovamo (c) dobijemo traženu jednadžbu stošca

$$\underline{40(x - 2)^2 - 9y^2 - 9z^2 = 0.}$$

128. Napiši jednadžbu valjka kojemu je ravnalica kružnica $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 0 \end{cases}$ a smjer izvodnice zadan je razmjerom

$$a : b : c = 5 : 3 : 2.$$

Valjkastu plohu opisuje pravac (izvodnica) koji pri pomicanju ne mijenja svoga smjera i uvijek siječe određenu krivulju (ravnalicu). [Vidi § 15 u III dijelu Repetitorija.]

Jednadžbu izvodnice napišimo u obliku

$$\frac{x - m}{5} = \frac{y - n}{3} = \frac{z}{2}. \quad \text{(a)}$$

Tu su $(m, n, 0)$ kordinate tačaka u kojim izvodnice probadaju ravninu XY, m i n su prema tome promjenljivi parametri.

Iz (a) slijedi:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{5}{2} z + m \\ y &= \frac{3}{2} z + n \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)} \quad \text{i} \quad \left.\begin{aligned} m &= x - \frac{5}{2} z \\ n &= y - \frac{3}{2} z \end{aligned}\right\} \quad \text{(c)}$$

Uvrštenje (b) u jednadžbu ravnalice daje

$$m^2 + n^2 = 25$$

pa je s obzirom na (c)

$$\underline{\left(x - \frac{5}{2}z\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}z\right)^2 = 25}$$

tražena jednadžba valjka.

129. Pokaži da se međusobno tangiraju stožac

$$x^2 + y^2 = z^2$$

i sfera

$$x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2$$

u tački $D(0, 1, 1)$.

[Izvedi jednadžbe tangentnih ravnina na stožac i na sferu u tački D pa ćeš dobiti za obje plohe istu tangentnu ravninu jednadžbe $y - z = 0$, plohe se dakle tangiraju u tački D.]

D. Općenite plohe

Zadaci

130. Odredi jednadžbe tangentnih ravnina i normala na zadane plohe u zadanim diralištima.

a) $z = x^2 - xy - y^2$ u $T_1(1, 1, -1)$ plohe.

Računamo prema (75) i (77a):

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y; \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -x - 2y$$

$$p_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1 = 2 - 1 = 1; \qquad q_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_1 = -1 - 2 = -3.$$

Tangentna ravnina

$$E \equiv (x - 1) \cdot 1 + (y - 1) \cdot (-3) = z + 1$$

ili

$$\underline{E \equiv x - 3y - z + 1 = 0}$$

normala

$$\underline{n \equiv \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{-3} = \frac{z + 1}{-1}}.$$

b) $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ u $T_1\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$.

Prema (75) i (77):

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}; \qquad p_1 = -\frac{1}{2}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}; \qquad q_1 = \frac{1}{2}$$

$$\underline{E \equiv x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0}$$

$$\underline{n \equiv \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - \frac{\pi}{4}}{2}}.$$

c) $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$ u $T_1(2, 2, 1)$.

Računamo prema (76) i (78):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2^{\frac{x}{z}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{z}; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2^{\frac{y}{z}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -2^{\frac{x}{z}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{x}{z^2} - 2^{\frac{y}{z}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{y}{z^2}$$

a u $T_1(2, 2, 1)$:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 = 4 \ln 2; \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 = 4 \ln 2; \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1 = -16 \ln 2$$

$$E \equiv 4 \ln 2 (x - 2) + 4 \ln 2 (y - 2) - 16 \ln 2 (z - 1) = 0$$

ili

$$\underline{E \equiv x + y - 4z = 0}$$

$$\underline{n \equiv \frac{x - 2}{1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 1}{-4}}$$

d) $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$ u $T_1(1, 1, 2)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (z^2 - x^2)yz - 2x^2yz; \qquad (F_x)_1 = 2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (z^2 - x^2)xz - 5y^4; \qquad (F_y)_1 = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = (z^2 - x^2)xy + 2xyz^2; \qquad (F_z)_1 = 11$$

$$\underline{E \equiv 2x + y + 11z - 25 = 0}$$

$$\underline{n \equiv \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 2}{11}}.$$

e) $z = y + \ln \frac{x}{z}$ u $T_1(1, 1, 1)$

$$\left[x + y - 2z = 0; \quad \frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 1}{2}\right]$$

f) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ u $T_1(3, 4, -7)$

$$\left[17x + 11y + 5z = 0; \quad \frac{x - 3}{17} = \frac{y - 4}{11} = \frac{z + 7}{5}\right]$$

g) $5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 4xy + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$ u $T_1(0, -4, 4)$.

$$\left[5x + 6y + 7z - 4 = 0;\ \frac{x}{5} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-4}{7}\right]$$

h) $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z$ u $T_1(2, 3, 6)$.

$$\left[5x + 4y + z - 28 = 0;\ \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-6}{1}\right].$$

131. Pod kojim se kutom sijeku valjak $x^2 + y^2 = a^2$ i ploha $bz = xy$ u tački $T_0(x_0, y_0, z_0)$?

Kako je kut ploha kut njihovih normala, odredimo prema (78) jednadžbe normala zadanih ploha u zadanoj tački T_0.

Za valjak:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = 2x_0; \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = 2y_0 \qquad \text{i} \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = 0.$$

Za $bz = xy$:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = y_0; \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = x_0 \qquad \text{i} \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = -b.$$

Prema (42a):

$$\cos\varphi = \frac{2x_0y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\cdot\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + b^2}}$$

jer je

$$n_1 \equiv \frac{x - x_0}{2x_0} = \frac{y - y_0}{2y_0} = \frac{z - z_0}{0}$$

ili

$$n_1 \equiv \frac{x - x_0}{x_0} = \frac{y - y_0}{y_0} = \frac{z - z_0}{0}, \quad \text{dok je} \quad n_2 \equiv \frac{x - x_0}{y_0} = \frac{y - y_0}{x_0} = \frac{z - z_0}{-b}.$$

Uzevši u obzir da je

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 \qquad \text{i} \qquad x_0y_0 = bz_0,$$

dobijemo:

$$\underline{\cos\varphi = \frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

132. Odredi one tangentne ravnine plohe

$$4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0$$

koje su paralelne s ravninom

$$x + 2y + 7 = 0.$$

Računamo prema (76) označivši s x_0, y_0, z_0 nepoznate koordinate dirališta T_0.

Tangentna ravnina

$$E \equiv (8x_0 + 4z_0)(x - x_0) + (12y_0 - 8)(y - y_0) + (8z_0 + 4x_0 - 4)(z - z_0) = 0. \qquad \text{(a)}$$

Iz uvjeta (55) paralelnosti dviju ravnina slijedi

$$\frac{8x_0 + 4z_0}{1} = \frac{12y_0 - 8}{2} = \frac{8z_0 + 4x_0 - 4}{0}$$

pa je

$$16x_0 + 8z_0 = 12y_0 - 8$$

i

$$8z_0 + 4x_0 - 4 = 0$$

ili

$$\left.\begin{aligned} 4x_0 - 3y_0 + 2z_0 + 2 &= 0 \\ x_0 + 2z_0 - 1 &= 0. \end{aligned}\right|$$

Odatle dobijemo:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= -2z_0 + 1 \\ y_0 &= -2z_0 + 2. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

Uvrštenje (b) i $z = z_0$ u jednadžbu plohe daje nakon uređenja

$$12z_0^2 - 16z_0 + 5 = 0.$$

Odatle

$$(z_0)_1 = \frac{5}{6}; \qquad (z_0)_2 = \frac{1}{2}$$

a prema (b)

$$(x_0)_1 = -\frac{2}{3}; \qquad (x_0)_2 = 0$$

$$(y_0)_1 = \frac{1}{3}; \qquad (y_0)_2 = 1.$$

Uvrštenje u (a) daje tražene jednadžbe tangentnih ravnina zadane plohe

$$\underline{E_1 \equiv x + 2y = 0;} \qquad \underline{E_2 \equiv x + 2y - 2 = 0.}$$

133. Pokaži da tangentna ravnina na plohu $xyz = a^3$ u bilo kojoj tački plohe čini s koordinatnim ravninama tetraedar stalnog volumena i odredi taj volumen.

Prema (76):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = xz; \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = xy.$$

Tangentna ravnina u tački $T_1(x_1, y_1, z_1)$ plohe:

$$E \equiv (x - x_1)y_1z_1 + (y - y_1)x_1z_1 + (z - z_1)x_1y_1 = 0. \qquad \text{(a)}$$

Odredimo odreske što ih čini ta ravnina na koordinatnim osima:

Os $X \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Uvrštenje u (a) daje $x = 3x_1$. Na isti način dobijemo odreske na osi $Y \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $y = 3y_1$ i na osi $Z \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $z = 3z_1$.

Spojimo li izračunate tri tačke pravcima dobijemo tetraedar (nariši sliku!), kojemu je volumen

$$V = \frac{1}{6}3x_1\cdot 3y_1\cdot 3z_1 = \frac{9}{2}x_1y_1z_1 = \underline{\frac{9}{2}a^3} = \underline{\text{const.}}$$

jer je prema jednadžbi zadane plohe $x_1y_1z_1 = a^3$.

134. Na isti način pokaži da tangentne ravnine na plohu $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ sijeku na koordinatnim osima odreske kojim je zbroj a.

135. Zadana je ploha $z = xy$. Odredi jednadžbu tangentne ravnine koja je okomita na pravcu $\frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

Prema (75):

$$E \equiv (x - x_1)\, p_1 + (y - y_1)\, q_1 = z - z_1.$$

Znamo uvjet okomitosti (58) pravca i ravnine:

$$\frac{p_1}{2} = \frac{q_1}{1} = \frac{-1}{-1}$$

pa je $p_1 = 2$ i $q_1 = 1$.

Iz $z = xy$ slijedi:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = y \quad \text{i} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

pa je $p_1 = y_1 = 2$ i $q_1 = x_1 = 1$, dok uvrštenje u $z = xy$ daje $z_1 = 2$.

Prema (a) dobijemo:

$$\underline{E \equiv 2x + y - z - 2 = 0.}$$

136. Tačkom $A(0, 0, -1)$ položi tangentnu ravninu na plohu $x^2 - y^2 - 3z = 0$ koja je paralelna s pravcem $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$.

Izračunavši

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = -3$$

dobijemo prema (76) jednadžbu tangentne ravnine u tački $T_1(x_1, y_1, z_1)$ plohe:

$$E \equiv (x - x_1)\, 2x_1 - (y - y_1)\, 2y_1 - (z - z_1)\, 3 = 0. \qquad \text{(a)}$$

Znamo uvjet paralelnosti (57) pravca i ravnine pa je

$$2x_1 \cdot 2 - 2y_1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 0$$

ili

$$2x_1 - y_1 - 3 = 0. \qquad \text{(b)}$$

Ravnina E prolazi tačkom $A(0, 0, -1)$, dakle prema (a):

$$-2x_1^2 + 2y_1^2 + 3z_1 + 3 = 0. \qquad \text{(c}$$

Tačka $T_1(x_1, y_1, z_1)$ leži na zadanoj plohi, dakle

$$x_1^2 - y_1^2 - 3z_1 = 0. \qquad \text{(d)}$$

Iz (c) i (d) slijedi $z_1 = 1$, a iz (b) i (d) uz $z_1 = 1$ dobijemo $x_1 = 2$ i $y_1 = 1$.

Uvrštenje u (a) daje konačno

$$\underline{E \equiv 4x - 2y - 3z - 3 = 0.}$$

137. Položi tangentne ravnine na plohu $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21 = 0$ koje su paralelne s ravninom $x + 4y + 6z = 0$.

$$[x + 4y + 6z \pm 21 = 0].$$

138. Na plohi $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ odredi tačke u kojim su tangentne ravnine paralelne s koordinatnim ravninama.

[(1, ± 1, 0); (0, 0, 0) i (2, 0, 0). Tangentne ravnine paralelne s ravninom XY nema].

III. FUNKCIJE DVIJU I VIŠE NEZAVISNIH PROMJENLJIVIH

A. Parcijalne derivacije funkcija dviju i više nezavisnih promjenljivih

a. PARCIJALNE DERIVACIJE PRVOG REDA

Zadaci

139. $u = x^{y^z}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^z \cdot x^{y^z - 1}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^z} \cdot \ln x \cdot z \cdot y^{z-1}; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^z} \cdot \ln x \cdot y^z \cdot \ln y.$$

140. $u = \operatorname{arc\,tg}(x - y)^z$

$$u_x = \frac{1}{1 + (x-y)^{2z}} \cdot z(x-y)^{z-1} = \frac{z(x-y)^{z-1}}{1 + (x-y)^{2z}};$$

$$u_y = -\frac{z(x-y)^{z-1}}{1 + (x-y)^{2z}};$$

$$u_z = \frac{(x-y)^z \cdot \ln(x-y)}{1 + (x-y)^{2z}}.$$

141. $z = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x^y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = \frac{1}{1 + x^y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^y}} \cdot y\, x^{y-1} = \frac{y\, x^y\, x^{-1}}{2(1 + x^y)\sqrt{x^y}} = \frac{y\sqrt{x^y}}{2x(1 + x^y)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = \frac{1}{1 + x^y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^y}} \cdot x^y \cdot \ln x = \frac{\sqrt{x^y}\, \ln x}{2(1 + x^y)}.$$

142. $u = x^{\frac{y}{z}}$

$$u_x = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1} = \frac{y}{z} \cdot x^{\frac{y-z}{z}}$$

$$u_y = x^{\frac{y}{z}} \cdot \ln x \cdot \frac{1}{z} = x^{\frac{y}{z}} \frac{\ln x}{z}$$

$$u_z = x^{\frac{y}{z}} \cdot \ln x \cdot \frac{-y}{z^2} = -x^{\frac{y}{z}} \frac{y \ln x}{z^2}.$$

143. $u = \dfrac{\cos(\varphi - 2\psi)}{\cos(\varphi + 2\psi)}$. Odredi u_ψ u $T_1\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$.

$$u_\psi = \frac{+2\cos(\varphi+2\psi)\sin(\varphi-2\psi) + 2\cos(\varphi-2\psi)\sin(\varphi+2\psi)}{\cos^2(\varphi+2\psi)} =$$

$$= \frac{2\sin[(\varphi-2\psi)+(\varphi+2\psi)]}{\cos^2(\varphi+2\psi)} = \frac{2\sin 2\varphi}{\cos^2(\varphi+2\psi)}$$

$$(u_\psi)_1 = \frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)} = \frac{2}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = \underline{4.}$$

144. $u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$. Odredi u_z u $T_1\left(0, 0, \frac{\pi}{4}\right)$.

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

145. $u = \dfrac{r(2-\cos 2\Theta)}{r^2+z^2}$

$$u_r = \frac{(r^2+z^2)(2-\cos 2\Theta) - 2r^2(2-\cos 2\Theta)}{(r^2+z^2)^2} = \frac{(2-\cos 2\Theta)(z^2-r^2)}{(r^2+z^2)^2}$$

$$u_\Theta = \frac{2r\sin 2\Theta}{r^2+z^2}$$

$$u_z = \frac{-2rz(2-\cos 2\Theta)}{(r^2+z^2)^2}.$$

146. $z = \dfrac{x\cos y - y\cos x}{1+\sin x+\sin y}$. Odredi z_x i z_y u $T_1(0, 0)$.

$$[1; -1].$$

147. $z = \sqrt{e^{x+2y} - y^2}$. Odredi z_x i z_y u $T_1(1, 2)$.

$$\left[\frac{e^5}{2\sqrt{e^5-4}};\ \frac{e^5-2}{\sqrt{e^5-4}}\right].$$

b. PARCIJALNE DERIVACIJE VIŠIH REDOVA

Zadaci

148. $z = x^y$. Pokaži da je $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

$$z_x = y x^{y-1}; \qquad z_{xy} = y x^{y-1}\ln x + x^{y-1} = \underline{x^{y-1}(y\ln x + 1)}$$

$$z_y = x^y \ln x; \qquad z_{yx} = x^y \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot y x^{y-1} = \underline{x^{y-1}(y\ln x + 1)}.$$

149. $z = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$. Pokaži da je $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}$.

$$z_y = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2};$$

$$z_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z_{yyx} = -2\frac{(x^2+y^2)^2 y - 2xy(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} = -2\frac{(x^2+y^2)y - 4x^2y}{(x^2+y^2)^3} =$$

$$= -2\frac{y^3-3x^2y}{(x^2+y^2)^3} = \underline{\frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}}.$$

$$z_x = -\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$z_{xy} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z_{xyy} = -\frac{-(x^2+y^2)^2 2y - (x^2-y^2)2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4} = +\frac{2x^2y+2y^3+4x^2y-4y^3}{(x^2+y^2)^3} =$$

$$= \underline{\frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}}.$$

150. $z = x\ln(xy)$. Izračunaj $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}$.

$$z_x = x \cdot \frac{1}{xy} \cdot y + \ln(xy) = 1 + \ln(xy);$$

$$z_{xx} = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x};$$

$$z_{xxy} = \underline{0.}$$

151. $u = x^3 y^5 z^7$. Odredi $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$.

$$u_x = 3x^2y^5z^7; \qquad u_{xy} = 15x^2y^4z^7; \qquad \underline{u_{xyz} = 105x^2y^4z^6.}$$

152. Odredi vrijednost konstante a u funkciji $u = x^3 + a x y^2$ uz uvjet da ta funkcija zadovoljava Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

$$u_x = 3x^2 + a y^2; \qquad u_{xx} = 6x;$$

$$u_y = 2 a x y; \qquad u_{yy} = 2 a x.$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje

$$6x + 2 a x = 0$$

pa je

$$2x(3 + a) = 0 \qquad \underline{a = -3.}$$

153. Pokaži da zadane funkcije zadovoljavaju Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu u prostoru

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

a) $u = e^{3x+4y} \cdot \cos 5z$

$$u_x = e^{3x+4y} \cdot 3 \cos 5z; \qquad u_{xx} = 9 e^{3x+4y} \cdot \cos 5z;$$

$$u_y = e^{3x+4y} \cdot 4 \cos 5z; \qquad u_{yy} = 16 e^{3x+4y} \cdot \cos 5z;$$

$$u_z = -e^{3x+4y} \cdot 5 \sin 5z; \qquad u_{zz} = -25 e^{3x+4y} \cdot \cos 5z.$$

Uvrštenje u Δu daje:

$$e^{3x+4y} \cdot \cos 5z (9 + 16 - 25) = \underline{0.}$$

b) $u = 2z^3 - 3x^2 z - 3y^2 z;$

c) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

154. $z = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}$. Pokaži da je $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

155. $z = x^3 \sin y + y^3 \sin x$. Izračunaj $\frac{\partial^6 z}{\partial x^3 \partial y^3}$.

156. Pokaži da funkcija $u = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ zadovoljava jednadžbu $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

$$u_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(-e^{-\frac{x^2}{4t}} \cdot \frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} \cdot \frac{x^2}{4t^2}\right) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{t^3}} + \frac{x^2}{4t^2\sqrt{t}}\right) =$$

$$= \underline{\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{8t^2\sqrt{\pi t}}(x^2 - 2t)}$$

$$u_x = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{2x}{4t}\right) = -\frac{x e^{-\frac{x^2}{4t}}}{4t\sqrt{\pi t}}$$

$$u_{xx} = -\frac{1}{4t\sqrt{\pi t}}\left(-x \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} \cdot \frac{2x}{4t} + e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = \underline{\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{8t^2\sqrt{\pi t}}(x^2 - 2t).}$$

B. Totalni diferencijali funkcija

a. RAČUNANJE TOTALNIH DIFERENCIJALA PRVOG I VIŠIH REDOVA

Formule

Diferencijali prvog reda

Za funkciju $z = f(x, y)$:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{80}$$

Za funkciju $u = f(x, y, z)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \tag{80}$$

Diferencijali viših redova

Za $z = f(x, y)$:

$$d^2 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \tag{82}$$

$$d^3 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^3 = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3. \tag{83}$$

Za $u = f(x, y, z)$:

$$d^2 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz\right)^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx\, dy + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx\, dz + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy\, dz. \tag{84}$$

Zadaci

157. $z = e^{xy}$. Izračunaj dz i d^2z.

I način.

Računamo prema (80) i (82) parcijalne derivacije zadane funkcije z:

$$z_x = y\,e^{xy}; \qquad z_y = x\,e^{xy}$$

pa je

$$dz = e^{xy}(y\,dx + x\,dy)$$

$$z_{xx} = y^2 e^{xy}; \qquad z_{xy} = y\,x\,e^{xy} + e^{xy}; \qquad z_{yy} = x^2 e^{xy}$$

$$d^2z = e^{xy}[y^2\,dx^2 + 2(x\,y + 1)\,dx\,dy + x^2\,dy^2] =$$

$$= \underline{e^{xy}[(y\,dx + x\,dy)^2 + 2\,dx\,dy.}$$

II način.

Računajući dz neposredno diferenciramo $z = e^{xy}$ po x i po y:

$$dz = y\,e^{xy}\,dx + x\,e^{xy}\,dy$$

a računajući d^2z diferenciramo izraze ispred dx i dy prvo po x a zatim po y smatrajući da dx i dy ne ovise o x i y, tj. da su konstante.

$$d^2z = [y^2 e^{xy}\,dx + (y\,x\,e^{xy} + e^{xy})\,dy]\,dx + [(x\,y\,e^{xy} + e^{xy})\,dx + x^2 e^{xy}\,dy]\,dy =$$

$$= e^{xy}[(y^2\,dx^2 + 2\,x\,y\,dx\,dy + x^2\,dy^2) + 2\,dx\,dy] = \underline{e^{xy}[(y\,dx + x\,dy)^2 + 2\,dx\,dy].}$$

158. Odredi na dva načina dz i d^2z za funkcije

a) $z = 2x^2 - 3xy - y^2$

$$[4\,dx^2 - 6\,dx\,dy - 2\,dy^2]$$

b) $z = \ln(x^2 + y)$

$$\left\{\frac{1}{(x^2 + y)^2}[2(y - x^2)\,dx^2 - 2\,x\,dx\,dy - dy^2]\right\}$$

c) $u = \sin(x + y + z)$

$$[-\sin(x + y + z)(dx + dy + dz)^2].$$

159. $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$. Izračunaj dz u tački $T_1(4, 5)$

Računamo prema (80):

$$dz = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y}\,dx + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)dy = \frac{dx}{\sqrt{y^2 - x^2}} - \frac{x\,dy}{y\sqrt{y^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{y\,dx - x\,dy}{y\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

U $T_1(4, 5)$:

$$\underline{dz = \frac{1}{15}(5\,dx - 4\,dy).}$$

160. $z = \sin(x\,y)$. Izračunaj dz u tački $T_1(2, 3)$.

$$dz = \cos(x\,y)\,y\,dx + \cos(x\,y)\,x\,dy = \cos(x\,y)(y\,dx + x\,dy).$$

U $T_1(2, 3)$:

$$dz = (3\,dx + 2\,dy)\cos 6.$$

161. $z = \sin(x^2 + y^2)$. Izračunaj d^3z.

Računamo prema (83):

$$z_x = 2\,x\cos(x^2 + y^2);$$

$$z_{xx} = -2\,x\sin(x^2 + y^2)\,2x + \cos(x^2 + y^2) \cdot 2 = 2[\cos(x^2 + y^2) - 2x^2\sin(x^2 + y^2)]; \quad \text{(a)}$$

$$z_{xxx} = 2[-2x\sin(x^2 + y^2) - 2x^2\cos(x^2 + y^2) \cdot 2x - 4x\sin(x^2 + y^2)] =$$

$$= -2[6x\sin(x^2 + y^2) + 4x^3\cos(x^2 + y^2)] \quad \text{(b)}$$

Na isti način dobijemo:

$$z_y = 2y\cos(x^2 + y^2);$$

$$z_{yy} = 2[\cos(x^2 + y^2) - 2y^2\sin(x^2 + y^2)] \quad \text{(c)}$$

$$z_{yyy} = -2[6y\sin(x^2 + y^2) + 4y^3\cos(x^2 + y^2)] \quad \text{(d)}$$

$$z_{xxy} = \text{prema (a)} = 2[-2y\sin(x^2 + y^2) - 4x^2y\cos(x^2 + y^2)] \quad \text{(e)}$$

$$z_{yyx} = \text{prema (c)} = 2[-2x\sin(x^2 + y^2) - 4xy^2\cos(x^2 + y^2)]. \quad \text{(f)}$$

Uvrstimo li (b), (e), (f) i (d) u (83), dobit ćemo nakon uređenja

$$\underline{d^3z = -8\cos(x^2 + y^2)(x\,dx + y\,dy)^3 - 12\sin(x^2 + y^2)(x\,dx + y\,dy)(dx^2 + dy^2).}$$

162. $z = x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$. Izračunaj d^3z.

$$[6(dx^3 - 3\,dx^2\,dy + 3\,dx\,dy^2 + dy^3)].$$

163. $u = e^{ax+by+cz}$. Izračunaj d^2u.

Računamo prema (84):

$$u_x = a\,u; \qquad u_y = b\,u; \qquad u_z = c\,u; \qquad u_{xy} = a\,b\,u;$$

$$u_{xx} = a^2\,u; \qquad u_{yy} = b^2\,u; \qquad u_{zz} = c^2\,u; \qquad u_{xz} = a\,c\,u;$$

$$u_{yz} = b\,c\,u.$$

Uvrštenje u (84) daje:

$$d^2u = e^{ax+by+cz}(a^2\,dx^2 + b^2\,dy^2 + c^2\,dz^2 + 2\,a\,b\,dx\,dy + 2\,a\,c\,dx\,dz + 2\,b\,c\,dy\,dz)$$

ili

$$\underline{d^2u = e^{ax+by+cz}(a\,dx + b\,dy + c\,dz)^2.}$$

164. $z = x\ln\dfrac{y}{x}$. Odredi d^2z.

$$\left[-\frac{dx^2}{x} + 2\frac{dx\,dy}{y} - x\frac{dy^2}{y^2}\right].$$

165. $z = \sin(2x + y)$. Odredi d^3z u tačkama $T_1(0, \pi)$ i $T_2\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$[d^3z = -\cos(2x + y)(2\,dx + dy)^3; \quad \text{u } T_1 \quad d^3z = (2\,dx + dy)^3; \quad \text{u } T_2 \quad d^3z = 0].$$

166. $z = e^x \cos y$. Izračunaj d^2z u tački $T_1\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$.

$$\left\{e^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{2}(dx^2 - dy^2) - \sqrt{3}\,dx\,dy\right]\right\}.$$

b. PRIBLIŽNO RAČUNANJE POMOĆU TOTALNOG DIFERENCIJALA

Formule

Za $z = f(x, y)$:

$$\Delta z \doteq dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \tag{81}$$

Za $u = f(x, y, z)$:

$$\Delta u \doteq du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z \tag{81'}$$

za male $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ i $|\Delta z|$.

Zadaci

167. Za koliko će se promijeniti dijagonala i površina pravokutnika sa stranama $x = 6$ m i $y = 8$ m, ako je prva strana poveća za 2 mm a druga se umanji za 5 mm.

Budući da je povećanje odnosno umanjenje strana pravokutnika vrlo maleno s obzirom na duljine strana, promjenu Δz duljine dijagonale z i promjenu ΔS površine S pravokutnika odredimo približno pomoću diferencijala, tj. prema (81).

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Delta z \doteq dz = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\Delta x + \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\Delta y = \frac{x\,\Delta x + y\,\Delta y}{z}.$$

Kako je $z = \sqrt{36 + 64} = 10$ m dobijemo:

$$\Delta z \doteq \frac{6 \cdot 0{,}002 - 8 \cdot 0{,}005}{10} = \underline{-0{,}003 \text{ m}}$$

dijagonala će se skratiti za približno 3 mm.

$$S = x\,y$$

$$\Delta S \doteq dS = y\,\Delta x + x\,\Delta y = 8 \cdot 0{,}002 - 6 \cdot 0{,}005 = -0{,}014 \text{ m}^2 =$$
$$= -0{,}014 \cdot 10^4 \text{ cm}^2 = \underline{-140 \text{ cm}^2}.$$

Površina će se smanjiti za približno 140 cm².

168. Približno izračunaj $\sqrt{(0{,}98)^2 + (2{,}01)^2 + (1{,}94)^2}$.

Označimo li $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = f(x, y, z)$ gdje je

$$x = x_0 + \Delta x = 1 - 0{,}02$$
$$y = y_0 + \Delta y = 2 + 0{,}01$$
$$z = z_0 + \Delta z = 2 - 0{,}06$$

možemo zadani izraz prikazati u obliku $u = u_0 + \Delta u$, gdje je $u_0 = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$.

Računamo prema (81)':

$$\Delta u \doteq du = \frac{x\,\Delta x + y\,\Delta y + z\,\Delta z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\Delta u \doteq \frac{1 \cdot (-0{,}02) + 2(0{,}01) + 2(-0{,}06)}{3} = -0{,}04$$

$$u = u_0 + \Delta u = 3 - 0{,}04 \doteq \underline{2{,}96}.$$

169. Približno izračunaj

$$\ln(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1).$$

Neka je

$$z = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1) \tag{a}$$

gdje je

$$x = x_0 + \Delta x = 1 + 0{,}03$$
$$y = y_0 + \Delta y = 1 - 0{,}02$$

pa z prima oblik:

$$z = z_0 + \Delta z.$$

Računamo:

$$z_0 = \ln(\sqrt{1} + \sqrt{1} - 1) = \ln 1 = 0.$$

Prema (81) i (a):

$$\Delta z \doteq dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Delta x + \frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}}\Delta y\right) =$$

$$= \frac{1}{1}\left(\frac{1}{3} \cdot 0{,}03 - \frac{1}{4} \cdot 0{,}02\right) = 0{,}005.$$

$$z = z_0 + \Delta z \doteq \underline{0{,}005}.$$

170. Izračunaj na isti način približnu vrijednost $\sqrt{(3{,}01)^2 + (3{,}97)^2}$

[4,98].

171. Izračunaj približnu vrijednost promjene funkcije $z = \dfrac{x + 3y}{y - 3x}$ pri promjeni x od $x_1 = 2$ do $x_2 = 2{,}5$ i y od $y_1 = 4$ do $y_2 = 3{,}5$.

Iz navedenog slijedi:

$$x = x_0 + \Delta x = 2 + 0{,}5; \qquad y = y_0 + \Delta y = 4 - 0{,}5.$$

pa je

$$z = z_0 + \Delta z, \quad \text{gdje je} \quad z_0 = \frac{2 + 12}{4 - 6} = -7.$$

Prema (81):

$$\Delta z \doteq dz = \frac{1}{(y - 3x)^2}[(y + 9y)\,\Delta x + (-9x - x)\,\Delta y] = \frac{10}{(y - 3x)^2}(y\,\Delta x - x\,\Delta y).$$

$$\Delta z \doteq \frac{5}{2}(2 + 1) = \underline{7{,}5.}$$

172. Središnji kut $\alpha = 60^0$ kružnog sektora povećao se za $\Delta\alpha = 1^0$. Za koliko treba skratiti polumjer $r = 20$ cm sektora da se površina sektora ne promijeni?

Odredimo promjenu površine sektora $S = \frac{1}{2} r^2 \alpha$ u slučaju povećanja kuta α za 1^0 i to pomoću logaritamskog računala.

$$\Delta S \doteq dS = \frac{\partial S}{\partial \alpha}\Delta\alpha = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{arc} 1^0 = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{1^0}{57{,}3^0} = 3{,}49 \text{ cm}^2$$

dok ΔS u slučaju pomjene r za Δr bit će:

$$\Delta S \doteq dS = \frac{\partial S}{\partial r}\Delta r = r \cdot \operatorname{arc}\alpha \cdot \Delta r = 20 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \Delta r.$$

Sada možemo odrediti traženo skraćivanje Δr polumjera r sektora:

$$3{,}49 = 20 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \Delta r$$

$$\Delta r = \frac{3{,}49 \cdot 3}{20\,\pi} = 0{,}167 \text{ cm} = \underline{1{,}7 \text{ mm.}}$$

173. Polumjer osnovke uspravnog kružnog stošca iznosi $r = 10{,}2 \pm 0{,}1$ cm a izvodnica $s = 44{,}6 \pm 0{,}1$ cm. Odredi obujam stošca i apsolutnu pogrešku dobivenog rezultata.

Računamo:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{s^2 - r^2} = 4731 \text{ cm}^3$$

$$\Delta V \doteq dV = \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial s}\Delta s = \frac{\pi}{3\sqrt{s^2 - r^2}}[(-r^3 + 2rs^2 - 2r^3)\,\Delta r + r^2 s\,\Delta s] =$$

$$= \frac{\pi}{3\sqrt{s^2 - r^2}}[(2rs^2 - 3r^3)\,\Delta r + r^2 s\,\Delta s].$$

Računanje pomoću logaritamskog računala daje

$$\Delta V \doteq \frac{3{,}14 \cdot 4203}{130{,}2} = \underline{100 \text{ cm}^3}, \qquad V = 4731 \text{ cm}^3 \pm 100 \text{ cm}^3 \quad \text{ili} \quad \underline{V = 47 \cdot 10^2 \text{ cm}^3},$$

jer su već stotine nisu sigurne za jedinicu.

174. Mjerenjem bridova pravokutna paralelepipeda dobiveno je:

$$a = 3 \text{ m} \pm 0{,}01 \text{ m}; \qquad b = 4 \text{ m} \pm 0{,}01 \text{ m} \quad \text{i} \quad c = 12 \text{ m} \pm 0{,}03 \text{ m}.$$

Odredi duljinu l prostorne dijagonale tog paralelepipeda i apsolutnu pogrešku Δl dobivene vrijednosti.

[$l = 13$ m $\pm$ 3 cm].

175. Polumjeri osnovaka krnjeg stošca iznose $R = 30$ cm i $r = 20$ cm dok je visina $h = 40$ cm. Za koliko će se promijeniti volumen tog stošca, ako se poveća R za 3 mm, r za 4 mm i h za 2 mm?

[2575 cm^3].

176. Pri mjerenju polumjera R osnovke i visine H valjka dobiveni su rezultati:

$$R = 2{,}5\,m \pm 0{,}1\,m \quad \text{i} \quad H = 4{,}0\,m \pm 0{,}2\,m.$$

Odredi apsolutnu i procentualnu pogrešku izračunatog volumena valjka.

[10,2 m^3; 13%].

C. Parcijalne derivacije i diferencijali složenih funkcija[4]

Formule

Za funkciju $w = f(u, v)$, gdje su $u = u(x, y, z)$ i $v = v(x, y, z)$ pa je

$$w = f\,[u(x, y, z);\ v(x, y, z)]$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv \tag{85}$$

$$d^2w = \left(\frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial u}d^2u + \frac{\partial w}{\partial v}d^2v \tag{86}$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx} \tag{87}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \tag{88}$$

Zadaci

177. $u = e^{x-2y}$, gdje je $x = \sin t$ i $y = t^3$. Odredi $\frac{du}{dt}$.

$$u = f(x, y),\ x = x(t) \quad \text{i} \quad y = y(t) \quad \text{pa je} \quad u = f[x(t), y(t)].$$

S obzirom na tu shemu prema (87) imamo:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

pa je

$$\frac{du}{dt} = e^{x-2y} \cdot \cos t - e^{x-2y} \cdot 2 \cdot 3t^2 = \underline{e^{\sin t - 2t^3}(\cos t - 6t^2)}.$$

178. $z = \arcsin(x - y)$, gdje je $x = 3t$ i $y = 4t^3$. Odredi $\frac{dz}{dt}$.

Prema sličnoj shemi i (87) računamo:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \cdot 3 - \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \cdot 12t^3 = \underline{\frac{3 - 12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}}.$$

179. $u = z^2 + y^2 + zy$, gdje je $z = \sin t$, $y = e^t$. $\frac{du}{dt} = ?$

$$[\sin 2t + 2e^{2t} + e^t(\sin t + \cos t)].$$

180. $z = \operatorname{tg}(3t + 2x^2 - y)$, gdje je $x = \frac{1}{t}$ i $y = \sqrt{t}$. $\frac{dz}{dt} = ?$

Prema shemi $z = f[t, x(t), y(t)]$ imamo s obzirom na (87):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Računamo:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{3}{\cos^2(3t + 2x^2 - y)} - \frac{4x}{\cos^2(3t + 2x^2 - y)} \cdot \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\cos^2(3t + 2x^2 - y)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$= \frac{3 - 4\frac{x}{t^2} - \frac{1}{2\sqrt{t}}}{\cos^2(3t + 2x^2 - y)} = \underline{\frac{3 - \frac{4}{t^2} - \frac{1}{2\sqrt{t}}}{\cos^2\left(3t + \frac{2}{t^2} - \sqrt{t}\right)}}.$$

181. $z = u^v$, gdje je $u = \sin x$ i $v = 2x$. Odredi $\frac{dz}{dx}$.

$$[2(\sin x)^{2x}(x \operatorname{ctg} x + \ln \sin x)].$$

182. $u = \ln(e^x + e^y)$, gdje je $y = x^3$. Odredi $\frac{du}{dx}$.

Prema shemi $u = f[x, y(x)]$ dobijemo:

$$\frac{du}{dx} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} \cdot 3x^2 = \underline{\frac{e^x + 3x^2 e^{x^3}}{e^x + e^{x^3}}}.$$

183. $z = \operatorname{arc\,tg}(xy)$, gdje je $y = e^x$. Odredi $\frac{dz}{dx}$.

$$\left[\frac{e^x(x+1)}{1 + x^2 e^{2x}}\right].$$

184. $z = x^2 \ln y$, gdje je $x = \frac{u}{v}$ i $y = 3u - 2v$. Odredi $\frac{\partial z}{\partial u}$ i $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Kako je $z = f[x(u, v); y(u, v)]$ prema (88) imamo:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Računamo:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2x \cdot \ln y \cdot \frac{1}{v} + \frac{x^2}{y} \cdot 3 = \underline{2\frac{u}{v^2}\ln(3u - 2v) + \frac{3u^2}{v^2(3u - 2v)}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -2x \cdot \ln y \cdot \frac{u}{v^2} - 2\frac{x^2}{y} = \underline{-2\frac{u^2}{v^3}\ln(3u - 2v) - \frac{2u^2}{v^2(3u - 2v)}}.$$

185. Pokaži da funkcija $z = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$, gdje je $x = u + v$, $y = u - v$, zadovoljava relaciju

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}.$$

Kako je $z = f[x(u, v); y(u, v)]$ računat ćemo prema formulama navedenim u pređašnjem zadatku 184.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(\frac{1}{y} \cdot 1 - \frac{x}{y^2} \cdot 1\right) = \frac{y - x}{x^2 + y^2} = \frac{-2v}{2(u^2 + v^2)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}}\left(\frac{1}{y} \cdot 1 + \frac{x}{y^2} \cdot 1\right) = \frac{y + x}{x^2 + y^2} = \frac{2u}{2(u^2 + v^2)}$$

pa je

$$\underline{\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}}.$$

186. $w = \ln(x^2 + y^2 + 2z)$, gdje je $x = r + s$, $y = r - s$ i $z = 2rs$. Odredi $\frac{\partial w}{\partial r}$ i $\frac{\partial w}{\partial s}$.

$$w = f[x(r, s);\ y(r, s);\ z(r, s)]$$

pa je

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}.$$

Računamo:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{x^2 + y^2 + 2z}(2x \cdot 1 + 2y \cdot 1 + 2 \cdot 2s) = \frac{2(2r + 2s)}{2r^2 + 2s^2 + 4rs} = \frac{2(r + s)}{(r + s)^2} = \underline{\frac{2}{r + s}}.$$

Na isti način izračunaj $\frac{\partial w}{\partial s}$. Dobit ćeš istu vrijednost.

187. $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}$, gdje je $x = u \sin v$, $y = u \cos v$. Odredi $\frac{\partial z}{\partial u}$ i $\frac{\partial z}{\partial v}$.

[0; 1].

188. $z = x^2 y - y^2 x$, gdje je $x = u \cos v$, $y = u \sin v$. Izračunaj dz.

Prema (85):

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2xy - y^2)\, dx + (x^2 - 2xy)\, dy.$$

Uvrštenje

$$x = u \cos v \quad \text{i} \quad y = u \sin v$$

daje:

$$dz = (2u^2 \sin v \cos v - u \sin^2 v)\, dx + (u^2 \cos^2 v - 2u^2 \sin v \cos v)\, dy. \qquad \text{(a)}$$

Prema (80):

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = \cos v\, du - u \sin v\, dv$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = \sin v\, du + u \cos v\, dv.$$

Uvrštenje tih vrijednosti za dx i dy u (a) daje nakon uređenja:

$$\underline{dz = [3u^2 \sin v \cos v (\cos v - \sin v)]\, du + [u^3 (\sin v + \cos v)(1 - 3 \sin v \cos v)]\, dv.}$$

189. $u = x^2 + y^2 + z^2$, gdje je $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ i $z = r$. Odredi du.

Prema (85):

$$du = 2x\, dx + 2y\, dy + 2z\, dz = 2(r \cos \varphi\, dx + r \sin \varphi\, dy + r\, dz). \qquad \text{(a)}$$

Prema (80):

$$\left.\begin{aligned} dx &= -r \sin \varphi\, d\varphi + \cos \varphi\, dr \\ dy &= r \cos \varphi\, d\varphi + \sin \varphi\, dr \\ dz &= dr. \end{aligned}\right\}$$

Uvrštenje u (a) daje nakon uređenja.

$$\underline{du = 4r\, dr.}$$

190. Izračunaj dz za funkcije

a) $z = \ln(e^x + e^y)$, gdje je $x = u + v$, $y = u - v$.

$$\left[\frac{(e^{u+v} + e^{u-v})\, du + (e^{u+v} - e^{u-v})\, dv}{e^{u+v} + e^{u-v}}\right].$$

b) $z = (x^2 + y^2)\, e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$.

$$\left[\frac{e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}}{x^2 y^2} [(y^4 - x^4 + 2xy^2)\, x\, dy + (x^4 - y^4 + 2x^2 y)]\, y\, dx\right].$$

D. Zamjena promjenljivih u diferencijalnim izrazima

Zadaci

191. U diferencijalnom izrazu

$$x^4 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3 \frac{dy}{dx} + y$$

zamijeni nezavisnu promjenljivu x s $x = \frac{1}{t}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \text{jer se } dt \text{ krati} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{t^2}} = -t^2 \frac{dy}{dt} \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d\left(-t^2 \cdot \frac{dy}{dt}\right)}{dx} = \frac{\left(-t^2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot 2t\right) dt}{-\frac{1}{t^2} dt} = t^4 \frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dy}{dt}. \qquad \text{(b)}$$

Uvrštenje $x = \frac{1}{t}$, (a) i (b) u zadani diferencijalni izraz daje:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{t} \cdot \frac{dy}{dt} - \frac{2}{t} \frac{dy}{dt} + y = \underline{\frac{d^2y}{dt^2} + y.}$$

192. Isto za $x^2 y'' - 4xy' + y$ uzevši da je $x = e^z$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dz}} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{e^z} \qquad \text{(a)}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d\left(\frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{e^z}\right)}{dx} = \frac{\left(-\frac{dy}{dz} e^{-z} + \frac{1}{e^z} \frac{d^2y}{dz^2}\right) dz}{e^z \cdot dz} = -\frac{1}{e^{2z}} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{e^{2z}} \cdot \frac{d^2y}{dz^2}. \qquad \text{(b)}$$

Uvrštenje $x = e^z$, (a) i (b) u diferencijalni izraz daje:

$$-\frac{dy}{dz} + \frac{d^2y}{dz^2} - 4\frac{dy}{dz} + y = \underline{\frac{d^2y}{dz^2} - 5\frac{dy}{dz} + y.}$$

193. Isto za $(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + ay$ i $x = \sin t$.

$$\left[\frac{d^2y}{dt^2} + ay\right].$$

194. Transformiraj izraz $y'y''' - 3y''^2$ uzevši da je y nezavisna promjenljiva a x funkcija od y.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x'}\right) = \frac{d\left(\frac{1}{x'}\right)}{dx} = \frac{-\frac{1}{x'^2}\cdot x''dy}{x'\,dy} = -\frac{x''}{x'^3}$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{d}{dx}(x'^{-3}\cdot x'') = -\frac{(x'^{-3}x''' - x''\cdot 3x'^{-4}x'')\,dy}{x'\,dy} = -\frac{x'''}{x'^4} + \frac{3x''^2}{x'^5}.$$

Uvrštenje u diferencijalni izraz daje:

$$\frac{1}{x'}\left(-\frac{x'''}{x'^4} + \frac{3x''^2}{x'^5}\right) - 3\frac{x''^2}{x'^4} = \underline{-\frac{x'''}{x'^5}}.$$

195. Na isti način transformiraj izraz $\frac{y''}{y'^2} + y$ uzevši opet da je x funkcija od y.

$$[y - x'].$$

196. Transformiraj izraz $yy'' - 2(y^2 + y'^2)$ uzevši v za novu funkciju uz pretpostavku da je $y = \frac{1}{v}$.

Držeći na pameti da je y funkcija od v, a v funkcija od x dobijemo:

$$y' = -\frac{1}{v^2}\cdot v'$$

$$y'' = -\frac{v^2\cdot v'' - v'\cdot 2vv'}{v^4} = \frac{2v'^2 - vv''}{v^3}.$$

Uvrštenje u diferencijalni izraz daje

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{2v'^2 - vv''}{v^3} - 2\left(\frac{1}{v^2} + \frac{v'^2}{v^4}\right) = \underline{-\frac{v'' + 2v}{v^3}}.$$

197. Izrazi u polarnim koordinatama diferencijalnu jednadžbu $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\rho\sin\varphi)}{d(\rho\cos\varphi)} = \text{prema (80)} = \frac{\rho\cos\varphi\,d\varphi + \sin\varphi\,d\rho}{-\rho\sin\varphi\,d\varphi + \cos\varphi\,d\rho} = \frac{\rho\cos\varphi + \sin\varphi\frac{d\rho}{d\varphi}}{-\rho\sin\varphi + \cos\varphi\frac{d\rho}{d\varphi}}.$$

Uvrštenje tog izraza za $\frac{dy}{dx}$, a također $x = \rho\cos\varphi$ i $y = \rho\sin\varphi$ u zadanu jednadžbu daje:

$$\frac{\sin\varphi\frac{d\rho}{d\varphi} + \rho\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{d\rho}{d\varphi} - \rho\sin\varphi} = \frac{\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi}.$$

Nakon pojednostavljenja tog izraza dobijemo:

$$\underline{\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho.}$$

198. z je funkcija od x i y. U izrazu $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y}$ izvrši zamjenu nezavisnih promjenljivih pomoću formula

$$x = u\cos v \qquad y = u\sin v. \tag{a}$$

Iz tih formula slijedi:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} v, \quad \text{pa je} \quad v = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$
$$x^2 + y^2 = u^2, \quad \text{pa je} \quad u = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{b}$$

Prema (a) $z = f(u, v)$, a prema (b) $z = f[u(x, y); v(x, y)]$, pa prema (88) i (b) računamo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Kako je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{u}; \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y}{x^2} = \frac{-y}{u^2}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{u};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{u^2},$$

dobijemo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{x}{u} - \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{y}{u^2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{y}{u} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{x}{u^2}. \tag{c}$$

Uvrštenje (c) u zadani diferencijalni izraz daje:

$$\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{xy}{u} - \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{y^2}{u^2} - \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{xy}{u} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{x^2}{u^2} = -\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{x^2+y^2}{u^2} = \underline{-\frac{\partial z}{\partial v}}.$$

199. w je funkcija od x i od y. U izrazu $\frac{\partial w}{\partial x} - a\frac{\partial w}{\partial y}$ izvrši zamjenu nezavisnih promjenljivih uzevši $y - ax = r$ i $y + ax = s$, dok je a konstanta.

$$\left\{\text{Kako je } w = f[r(x, y); s(x, y)] \text{ računaj prema (88). Rezultat: } -2a\frac{\partial w}{\partial r}\right\}.$$

200. Parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} - z^2 = 0$$

transformiraj uzevši za nezavisne promjenljive $u = x$, $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ a za novu funkciju $w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$.

Prema (80) računamo diferencijale:

$$du = dx; \qquad dv = -\frac{dy}{y^2} + \frac{dx}{x^2} \quad \text{(a)}; \qquad dw = -\frac{dz}{z^2} + \frac{dx}{x^2}. \tag{b}$$

U drugu ruku uzevši u obzir da je $w = f(u, v)$ pa prema formuli (85) o invarijabilnosti totalnog diferencijala imamo

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv.$$

Uvrštenje jednakosti (b) daje:

$$\frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv = -\frac{dz}{z^2} + \frac{dx}{x^2}$$

pa je prema (a)

$$\frac{\partial w}{\partial u} dx + \frac{\partial w}{\partial v}\left(-\frac{dy}{y^2} + \frac{dx}{x^2}\right) = -\frac{dz}{z^2} + \frac{dx}{x^2}.$$

Odatle računamo dz:

$$dz = z^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right) dx + \frac{z^2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v} dy. \qquad \text{(c)}$$

Kako je

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

slijedi prema (c):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\right) \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Uvrštenje tih vrijednosti u zadanu jednadžbu daje:

$$x^2 z^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right) + z^2\frac{\partial w}{\partial v} - z^2 = 0$$

ili kako je $x \neq 0$ i $z \neq 0$

$$\underline{\frac{\partial w}{\partial u} = 0.}$$

201. Izrazi zadanu diferencijalnu jednadžbu

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$$

u novim nezavisnim promjenljivim u i v, ako je $u = x$ i $v = \frac{y}{x}$.

$$\left[u\frac{\partial z}{\partial u} - z = 0\right].$$

E. Derivacije funkcija zadanih implicitno i parametarski

Formule

Za funkciju $f(x, y) = 0$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \qquad (90)$$

Za funkciju $F(x, y, z) = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \qquad (92)$$

Zadaci

202. $y x^2 - e^y = 0$. Izračunaj $\frac{dy}{dx}$.

Prema (90):

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{2xy}{x^2 - e^y}.$$

Uvrštenje $e^y = y x^2$ daje:

$$y' = -\frac{2xy}{x^2 - y x^2} = \underline{\frac{2y}{x(y-1)}}.$$

203. $\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{a} = \frac{y}{a}$. Odredi $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Prema (90) označivši $\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{a} - \frac{y}{a}$ s $f(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{a}\cdot\frac{a^2}{a^2 + (x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{a}\left[\frac{a^2}{a^2 + (x+y)^2} - 1\right] = \frac{1}{a}\cdot\frac{-(x+y)^2}{a^2 + (x+y)^2}$$

$$\underline{y' = \frac{a^2}{(x+y)^2}}.$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ možemo izračunati prema (91), ali jednostavnije dolazimo do istog rezultata derivirajući neposredno y' po x pri čemu pamtimo da je y funkcija od x:

$$y'' = \frac{-a^2\cdot 2(x+y)(1+y')}{(x+y)^4} = -2a^2\frac{1 + \frac{a^2}{(x+y)^2}}{(x+y)^3} = \underline{-2a^2\frac{a^2 + (x+y)^2}{(x+y)^5}}.$$

204. $\ln\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = 0$. Odredi $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y}{x^2} = \frac{x+y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{y-x}{x^2 + y^2}.$$

Prema (90):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y}{y-x} = \underline{\frac{x+y}{x-y}} \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x-y)(1+y') - (x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = \text{uvrstimo li (a)} =$$

$$= \frac{(x-y)2x + (x+y)2y}{(x-y)^2} = \underline{\frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^3}}.$$

205. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$. Izračunaj $\frac{dy}{dx}$ za $x = 6$, $y = 2$ i $x = 6$, $y = 8$ i daj geometrijsko tumačenje dobivenim rezultatima.

Prema (90):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x-4}{2y-10} = -\frac{x-2}{y-5}.$$

U $T_1(6, 2)$: $y_1' = \frac{4}{3}$; u $T_2(6, 8)$: $y_2' = -\frac{4}{3}$.

Prikažemo li zadanu jednadžbu u obliku

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$$

vidjet ćemo da predočuje kružnicu pa su y_1' i y_2' koeficijenti smjera tangenata povučenih na tu kružnicu u tačkama T_1 i T_2. Napiši njihove jednadžbe.

$$[4x - 3y - 18 = 0; \quad 4x + 3y - 48 = 0].$$

206. $ye^x + e^y = 0$. Odredi $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ye^x}{e^x + e^y} = -\frac{y}{1 + \frac{e^y}{e^x}} = \underline{\frac{y}{y-1}}$$

jer iz zadane jednadžbe slijedi da je $\frac{e^y}{e^x} = -y$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y-1)y' - yy'}{(y-1)^2} = -\frac{y'}{(y-1)^2} = \underline{-\frac{y}{(y-1)^3}}.$$

207. $y^x = x^y$. Izračunaj $\frac{dy}{dx}$.

$$\left[\frac{y^2(\ln x - 1)}{x^2(\ln y - 1)}\right].$$

208. $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$. Odredi $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\left[-\frac{y}{x}; \frac{2y}{x^2}\right].$$

209. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Odredi $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$, a također dz.

Prema (92):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = -\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2z}{c^2}} = \underline{-\frac{c^2x}{a^2z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = -\frac{\frac{2y}{b^2}}{\frac{2z}{c^2}} = \underline{-\frac{c^2y}{b^2z}}.$$

Prema (80):

$$dz = -\frac{c^2x\,dx}{a^2z} - \frac{c^2y\,dy}{b^2z} = \underline{-\frac{c^2}{z}\left(\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2}\right)}.$$

210. $e^z - xyz = 0$. Odredi dz.

$$z_x = -\frac{-yz}{e^z - xy} = \frac{yz}{xyz - xy} = \frac{z}{x(z-1)}, \text{ jer je } e^z = xyz$$

$$z_y = -\frac{-xz}{e^z - xy} = \frac{z}{y(z-1)}.$$

$$\underline{dz = \frac{z}{z-1}\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right)}.$$

211. Izračunaj $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ za funkcije

a) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.

$$\left[\frac{2-x}{z+1}; \frac{2y}{z+1}\right].$$

b) $z^2 + 3xyz = a^2$.

$$\left[-\frac{yz}{xy + z^2}; -\frac{xz}{xy + z^2}\right].$$

212. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$. Odredi dz.

$$\left[-\frac{\sin 2x\,dx + \sin 2y\,dy}{\sin 2z}\right].$$

213. $x + y + z = xyz$. Izračunaj dz.

$$\left[\frac{(yz-1)\,dx + (xz-1)\,dy}{1 - xy}\right].$$

214. $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$. Odredi $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ u $T_1(3, 2, 1)$.

Na tom primjeru pokažimo drugi način određivanja parcijalnih derivacija implicitnih funkcija.

Diferencirajući zadanu jednadžbu dobijemo:

$$3x^2\,dx + 6y^2\,dy + 3z^2\,dz - 3yz\,dx - 3xz\,dy - 3xy\,dz - 2\,dy = 0.$$

Uredimo:

$$3(x^2 - yz)\,dx + (6y^2 - 3xz - 2)\,dy + 3(z^2 - xy)\,dz = 0.$$

Odatle

$$dz = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2}\,dx + \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(xy - z^2)}\,dy.$$

Usporedimo li s formulom (80)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

vidimo da je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 - y z}{x y - z^2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6 y^2 - 3 x z - 2}{3 (x y - z^2)},$$

a u $T_1(3, 2, 1)$:

$$\underline{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1 = \frac{7}{5}} \quad \text{i} \quad \underline{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_1 = \frac{13}{15}}.$$

Riješi na taj drugi način oba primjera iz zadatka 211 i zadatak 215 koji slijedi.

215. $u^3 - 3(x + y) u^2 + z^3 = 0$. Odredi $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ i $\frac{\partial u}{\partial z}$.

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u}{u - 2(x + y)}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{u - 2(x + y)}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z^2}{2(x + y) u - u^2}\right].$$

216. Funkcije $y(x)$ i $z(x)$ zadane su implicitno sustavom jednadžbi

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$x^2 + 2 y^2 + 3 z^2 - 4 = 0.$$

Odredi $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ i $\frac{d^2z}{dy^2}$ u $T_1(1, 0, 1)$.

Kako je $y = y(x)$ i $z = z(x)$, zadane jednadžbe možemo prikazati u općem obliku kako slijedi

$$f[x, y(x), z(x)] \equiv 0$$

$$g[x, y(x), z(x)] \equiv 0.$$

Derivirajući te identitete po x dobijemo s obzirom na (88) i (93):

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0.$$

Odatle računamo y' i z':

$$y' = -\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ g_x & g_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2x & -2z \\ 2x & 6z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2y & -2z \\ 4y & 6z \end{vmatrix}} = -\frac{4x}{5y}; \quad \underline{y'_1 = -\infty}$$

$$z' = -\frac{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}}{20 y z} = -\frac{\begin{vmatrix} 2y & 2x \\ 4y & 2x \end{vmatrix}}{20 y z} = \frac{x}{5z}; \quad \underline{z'_1 = \frac{1}{5}}.$$

Derivirajući po x izraze dobivene za y' i z' dobijemo y'' i z''.

$$y'' = -\frac{4}{5} \frac{y - x y'}{y^2} = -\frac{4}{5} \frac{y + \frac{4x^2}{5y}}{y^2} = -\frac{4}{25} \frac{5y^2 + 4x^2}{y^3}; \quad \underline{y''_1 = -\infty}$$

$$z'' = \frac{1}{5} \frac{z - x \cdot z'}{z^2} = \frac{1}{5} \frac{z - \frac{x^2}{5z}}{z^2} = \frac{1}{25} \frac{5z^2 - x^2}{z^3}; \quad \underline{z''_1 = \frac{4}{25}}.$$

217. Funkcije $y(x)$ i $z(x)$ zadane su implicitno sustavom jednadžbi $x y z - a = 0$, $x + y + z - b = 0$.

Izračunaj y' i z'.

$$\left[y' = \frac{y(z - x)}{x(y - z)}; \quad z' = \frac{z(x - y)}{x(y - z)}\right].$$

218. Funkcije $u(x, y)$ i $v(x, y)$ zadane su implicitno sustavom jednadžbi $u + v - x = 0$, $u - y v = 0$. Odredi du i dv.

Prikazavši zadane jednadžbe u obliku identiteta

$$\begin{aligned} f[u(x, y);\ v(x, y);\ x] &\equiv 0 \\ g[u(x, y);\ v(x, y);\ y] &\equiv 0 \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

deriviramo ih po x prema (93):

$$\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

a kako je $\frac{\partial f}{\partial u} = 1$; $\frac{\partial f}{\partial v} = 1$; $\frac{\partial g}{\partial u} = 1$; $\frac{\partial g}{\partial v} = -y$; $\frac{\partial f}{\partial x} = -1$ i $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$. dobijemo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Odatle je $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{1 + y}$ i $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1 + y}$.

Sada deriviramo identitete (a) po y pa postupajući na isti način dobijemo:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial v}{\partial y} - v = 0$$

a odatle je

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v}{1 + y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{v}{1 + y}.$$

Prema tome je

$$\underline{du = \frac{y}{1 + y} dx + \frac{v}{1 + y} dy} \quad \text{i} \quad \underline{dv = \frac{1}{1 + y} dx - \frac{v}{1 + y} dy.}$$

219. Funkcije $u(x, y)$ i $v(x, y)$ zadane su implicitno sustavom jednadžbi $u - x - y = 0$, $u v - y = 0$.

Izračunaj $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ i $\frac{\partial v}{\partial y}$ u $T_1(0, 1)$.

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 = 1; \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_1 = -1; \quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_1 = 0\right].$$

220. Funkcija $z(x, y)$ zadana je parametarski

$$x = \frac{u^2 + v^2}{2}$$
$$y = \frac{u^2 - v^2}{2} \qquad \text{(a)}$$
$$z = u\,v.$$

Izračunaj $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ i dz uz probu.

Kako je $z = z[u(x, y),\ v(x, y)]$ prema (88) imamo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad \text{(b)}$$

Prema (a):

$$\frac{u^2 + v^2}{2} - x \equiv f[u(x, y);\ v(x, y);\ x] = 0,$$
$$\frac{u^2 - v^2}{2} - y \equiv g[u(x, y);\ v(x, y); y] = 0. \qquad \text{(c)}$$

(c) deriviramo po x, a zatim po y:

po x:

$$\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{(d)}$$

po y:

$$\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0. \qquad \text{(e)}$$

Prema (c):

$$\frac{\partial f}{\partial u} = u; \quad \frac{\partial f}{\partial v} = v; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -1$$
$$\frac{\partial g}{\partial u} = u; \quad \frac{\partial g}{\partial v} = -v; \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -1.$$

Uvrštenje u (d) i (e) daje:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} - 1 = 0$$
$$u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

pa je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2u} \quad \text{i} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2v}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$u\frac{\partial u}{\partial y} - v\frac{\partial v}{\partial y} - 1 = 0$$

a odatle je

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2u} \quad \text{i} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{2v}.$$

Uvrštenje u (b) daje

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\,\frac{v^2 + u^2}{u\,v} = \text{prema (a)} = \underline{\frac{x}{z}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{v^2 - u^2}{u\,v} = \text{prema (a)} = -\underline{\frac{y}{z}}$$

pa je

$$\underline{dz = \frac{x\,dx - y\,dy}{z}}.$$

P r o b a. Prikažimo z kao eksplicitnu funkciju od x i y. Zbroj odnosno razlika prvih dviju jednadžbi (a) daje

$$\left.\begin{aligned} x + y &= u^2 \\ x - y &= v^2 \end{aligned}\right|$$

izmnožimo

$$x^2 - y^2 = u^2 v^2$$

odnosno

$$x^2 - y^2 = z^2,$$

jer je

$$z = u\,v.$$

Odatle

$$2z\,dz = 2x\,dx - 2y\,dy$$

pa je

$$\underline{dz = \frac{x\,dx - y\,dy}{z}}.$$

221. Izračunaj $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ i dz za parametarski zadane funkcije $z(x, y)$ uz probe.

a) $x = u + v;\quad y = u - v;\quad z = u\,v.$

$$\left[dz = \frac{1}{2}x\,dx - \frac{1}{2}y\,dy\right].$$

b) $x = u + v;\quad y = u - v;\quad z = u^2 v^2.$

$$[dz = \sqrt{z}\,(x\,dx - y\,dy)].$$

c) $x = u\cos v;\quad y = u\sin v;\quad z = u^2.$

$$[dz = 2x\,dx + 2y\,dy].$$

F. Taylorove i Mac Laurinove formule za funkcije više promjenljivih

Formule

Taylorova formula za funkciju dviju promjenljivih.

Prvi simbolički oblik

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^2_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^3_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}\right)^n_{\substack{x=x_0+\vartheta h\\ y=y+\vartheta_1 k}}, \tag{96}$$

gdje je

$$0 < \vartheta < 1$$
$$0 < \vartheta_1 < 1.$$

Drugi simbolički oblik

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x-h) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-k)\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} + \tag{96a}$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x-h) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-k)\right]^2_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} + \cdots + \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x-h) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-k)\right]^n_{\substack{x=x_0+\vartheta h\\ y=y_0+\vartheta_1 k}}$$

Slične fotmule vrijede za funkcije triju i više promjenljivih.

Za $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $h = x$ i $k = y$ dobijaju se Mac Laurinove formule:

Mac Laurinova formula za funkciju dviju promjenljivih u simboličkom obliku.

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y\right)_{\substack{x=0\\ y=0}} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y\right)^2_{\substack{x=0\\ y=0}} +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y\right)^3_{\substack{x=0\\ y=0}} + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y\right)^n_{\substack{x=\vartheta x\\ y=\vartheta_1 y}}, \tag{97}$$

gdje je

$$0 < \vartheta < 1$$
$$0 < \vartheta_1 < 1.$$

Ako funkcija $f(x,y)$ ima derivacije svih redova i $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,y) = 0$, navedene formule prelaze u beskonačne konvergentne redove potencija i to Taulerov red (96b) i Mac Laurinov red (97a):

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x-x_0)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}(x-x_0)^2(y-y_0 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}(x-x_0)(y-y_0)^2 +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(y-y_0)^3\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} + \cdots \tag{96b}$$

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y\right)_{\substack{x=0\\ y=0}} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y^2\right)_{\substack{x=0\\ y=0}} +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}x^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}x^2y + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}xy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}y^3\right)_{\substack{x=0\\ y=0}} + \cdots \tag{97a}$$

Slični oblik imaju redovi za funkcije triju i više nezavisnih promjenljivih.

Zadaci

222. Zadane funkcije razvij po Taylorovoj formuli u okolišu zadanih tačaka T_1.

a) $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$; $T_1(1; -2)$.

Računamo prema (96a), odnosno (96b):

$$f(1,-2) = 2 + 2 - 4 - 6 + 6 + 5 = 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - y - 6; \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 = 4 + 2 - 6 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x - 2y - 3; \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 = -1 + 4 - 3 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -1; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2.$$

Sve su ostale parcijalne derivacije jednake nuli.

$$f(x,y) = 5 + \frac{1}{2!}[4(x-1)^2 - 2(x-1)(y+2) - 2(y+2)^2] =$$

$$= 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2.$$

b) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$; $T_1(1; 1; 1)$.

Računamo prema (96a), odnosno (96b):

Funkcije Derivacije	u $T(x, y, z)$	u $T_1(1, 1, 1)$
f		0
f_x	$3x^2 - 3yz$	0
f_y	$3y^2 - 3xz$	0
f_z	$3z^2 - 3xy$	0
f_{xx}	$6x$	6
f_{xy}	$-3z$	-3
f_{xz}	$-3y$	-3
f_{yy}	$6y$	6
f_{yz}	$-3x$	-3
f_{zz}	$6z$	6

$f_{xxx} = f_{yyy} = f_{zzz} = 6$;
$f_{xyz} = -3$,
dok su
$f_{xxy} = f_{xxz} = f_{xyy} = f_{xzz} = f_{yyz} = f_{yzz} = 0$

Uvrštenje tih vrijednosti u (96b) daje nakon uređivanja:

$$\underline{f(x, y, z) = 3[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) - (y-1)(z-1)] + (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 - 3(x-1)(y-1)(z-1).}$$

c) $f(x, y) = -x^3 + 2xy + 3y^3 - 6x - 2y - 4$; $T_1(-2; 1)$.

$$[1 - (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^3].$$

223. Odredi prirast Δf što ga dobije funkcija $f(x, y) = x^2 y$ pri prelazu od $x = 1$, $y = 1$ na $x_1 = 1 + h$, $y_1 = 1 + k$.

$$\Delta f = f(1 + h, 1 + k) - f(x, y).$$

Računamo prema (96) za okoliš tačke $T_1(1; 1)$:

$$f(x, y) = x^2 y, \quad f_1 = 1.$$

$$f_x = 2xy, \ (f_x)_1 = 2; \qquad f_y = x^2, \ (f_y)_1 = 1.$$

$$f_{xx} = 2y, \ (f_{xx})_1 = 2; \qquad f_{xy} = 2x, \ (f_{xy})_1 = 2; \qquad f_{yy} = 0.$$

Sve se ostale parcijalne derivacije poništavaju osim $f_{xxy} = 2$.

$$\Delta f = 1 + \frac{1}{1!}(2h + k) + \frac{1}{2!}(2h^2 + 4hk) + \frac{1}{3!}3 \cdot 2h^2 k - 1 =$$

$$= \underline{2h + k + h^2 + 2hk + h^2 k.}$$

224. Odredi prirast Δf funkcije $f(x, y) = x^2 y + xy^2 - 2xy$ pri prelazu od $x = 1$, $y = -1$ na $1 + h$, $-1 + k$.

$$[\Delta f = h - 3k + (-h^2 - 2hk + k^2) + (h^2 k + hk^2)].$$

225. Odredi Δf za $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy - 39x + 18y + 4$ pri prelazu od $x = 5$, $y = 6$ na $x = 5 + h$, $y = 6 + k$.

$$[\Delta f = 15h^2 - 6hk + k^2 + h^3].$$

226. Zadanu funkciju $f(x, y) = \sin x \cos y$ razvij u red po potencijama δ uzevši $f(x + \delta, y + \delta)$.

Računamo prema (96b):

$$f_x = \cos x \cos y, \qquad f_y = -\sin x \sin y;$$

$$f_{xx} = -\sin x \cos y, \quad f_{xy} = -\cos x \sin y, \quad f_{yy} = -\sin x \cos y$$

$$f_{xxx} = -\cos x \cos y, \quad f_{xxy} = \sin x \sin y, \quad f_{xyy} = -\cos x \cos y,$$

$$f_{yyy} = \sin x \sin y.$$

$$f(x + \delta, y + \delta) = \sin x \cos y + \frac{1}{1!}(\delta \cos x \cos y - \delta \sin x \sin y) +$$

$$+ \frac{1}{2!}(-\delta^2 \sin x \cos y - 2\delta^2 \cos x \sin y - \delta^2 \sin x \cos y) +$$

$$+ \frac{1}{3!}(-\delta^3 \cos x \cos y + 3\delta^3 \sin x \sin y - 3\delta^3 \cos x \cos y + \delta^3 \sin x \sin y) + \cdots =$$

$$= \underline{\sin x \cos y + \frac{\delta}{1} \cos(x + y) - 2 \cdot \frac{\delta^2}{2!} \sin(x + y) - 4 \cdot \frac{\delta^3}{3!} \cos(x + y) + \cdots.}$$

227. Zadana je funkcija $f(x, y) = x^3 + xy^2$. Razvij u red $f(x + h, y + k)$, a zatim uvrsti $h = 1$ i $k = 2$.

$$[f(x + 1, y + 2) = (x^3 + xy^2) + (3x^2 + y^2 + 4xy) + (7x + 4y) + 5].$$

228. Razvij po Taylorovoj formuli $f(x, y) = y^x$ do članova drugog reda uključivo u okolišu tačke $T_1(1; 1)$.

Računamo prema (96a):

$$f(1, 1) = 1^1 = 1; \quad f_x = y^x \ln y, \ (f_x)_1 = 1 \cdot \ln 1 = 0; \quad f_y = xy^{x-1}, \ (f_y)_1 = 1;$$

$$f_{xx} = y^x \ln^2 y, \ (f_{xx})_1 = 0; \quad f_{xy} = y^x \frac{1}{y} + \ln y \, xy^{x-1} \ (f_{xy})_1 = 1;$$

$$f_{yy} = x(x-1)y^{x-2}, \ (f_{yy})_1 = 0.$$

$$y^x = 1 + (y-1) + \frac{1}{2!} \cdot 2(x-1)(y-1) + \cdots = \underline{1 + (y-1) + (x-1)(y-1) + \cdots.}$$

229. Razvij po Taylorovoj formuli $f(x, y) = e^{x+y}$ do članova trećeg reda uključivo u okolišu tačke $T_1(1; -1)$.

$$\left\{1 + \frac{1}{1!}[(x-1) + (y+1)] + \frac{1}{2!}[(x-1) + (y+1)]^2 + \frac{1}{3!}[(x-1) + (y+1)]^3 + \cdots\right\}.$$

230. Razvij u red potencija funkciju $z = e^x \ln(1 + y)$ do članova trećeg reda uključivo.

Zadatak traži da se zadana funkcija razvije u Mac Laurinov red do članova trećeg reda uključivo.

Računamo prema (97a):

$$f(0,0) = e^0 \ln 1 = 0$$

$$f_x = \ln(1+y)\cdot e^x, \quad (f_x)_0 = 0; \qquad f_y = \frac{e^x}{1+y}, \quad (f_y)_0 = 1$$

$$f_{xx} = \ln(1+y)\cdot e^x, \quad (f_{xx})_0 = 0; \qquad f_{xy} = \frac{e^x}{1+y}, \quad (f_{xy})_0 = 1$$

$$f_{yy} = -\frac{e^x}{(1+y)^2}; \quad (f_{yy})_0 = -1; \qquad f_{xxx} = f_{xx}, \quad (f_{xxx})_0 = 0$$

$$f_{xxy} = f_{xy}, \quad (f_{xxy})_0 = 1; \qquad f_{xyy} = f_{yy}, \quad (f_{xyy})_0 = -1$$

$$f_{yyy} = \frac{2e^x}{(1+y)^3}, \quad (f_{yyy})_0 = 2$$

$$\underline{z = y + \frac{1}{2!}(2xy - y^2) + \frac{1}{3!}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3) + \cdots.}$$

231. Razvij u red potencija

a) $z = a^x \ln(1+y)$ do članova drugog reda uključivo.

$$\left[y + xy\ln a - \frac{1}{2}y^2 + \cdots\right]$$

b) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ do članova četvrtog reda uključivo.

$$\left[1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2) - \frac{1}{8}(x^2+y^2)^2 + \cdots\right]$$

c) $z = \cos x \cos y$ do članova četvrtog reda uključivo.

$$\left[1 - \frac{1}{2!}(x^2+y^2) + \frac{1}{4!}(x^4 + 6x^2y^2 + y^4) + \cdots\right].$$

232. Izvedi za funkciju $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$ približnu formulu s tačnosti do članova drugog reda, ako su $|x|$ i $|y|$ maleni u usporedbi s 1.

Računamo prema (97a), tj. razvijemo zadanu funkciju u Mac Laurinov red.

$$f(0,0) = 1; \qquad f_x = -\frac{\sin x}{\cos y}, \quad (f_x)_0 = 0; \qquad f_y = \frac{\cos x \sin y}{\cos^2 y},$$

$$(f_y)_0 = 0; \qquad f_{xx} = -\frac{\cos x}{\cos y}, \quad (f_{xx})_0 = -1; \qquad f_{xy} = -\frac{\sin x \sin y}{\cos^2 y},$$

$$(f_{xy})_0 = 0; \qquad f_{yy} = \frac{\cos^3 y \cos x + 2\cos x \sin^2 y \cos y}{\cos^4 y}, \quad (f_{yy})_0 = 1$$

$$\frac{\cos x}{\cos y} \doteq 1 + \frac{1}{2!}(-x^2 + y^2) = \underline{1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2).}$$

233. Izvedi približnu formulu za funkciju $f(\alpha, \beta) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1+\alpha}{1-\beta}$ s tačnošću do članova drugog reda uz pretpostavku da su $|\alpha|$ i $|\beta|$ maleni u usporedbi s 1.

Računamo prema (97a):

$$f(0,0) = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$f_\alpha = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+\alpha}{1-\beta}\right)^2} \cdot \frac{1}{1-\beta} = \frac{1-\beta}{(1-\beta)^2 + (1+\alpha)^2}; \qquad f_\alpha(0,0) = \frac{1}{2}$$

$$f_\beta = \frac{(1-\beta)^2}{(1-\beta)^2 + (1+\alpha)^2} \cdot \frac{1+\alpha}{(1-\beta)^2} = \frac{1+\alpha}{(1-\beta)^2 + (1+\alpha)^2}; \qquad f_\beta(0,0) = \frac{1}{2}$$

itd.

$$\underline{\operatorname{arc\,tg} \frac{1+\alpha}{1-\beta} \doteq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{4}(\alpha^2 - \beta^2).}$$

234. Izračunaj približnu vrijednost zadanih izraza pomoću Taylorove formule do članova drugog reda uključivo:

a) $(0{,}95)^{2{,}01}$

$$(0{,}95)^{2{,}01} = (1 - 0{,}05)^{2+0{,}01} = (y+k)^{x+h},$$

gdje je $x = 2$, $h = 0{,}01$, dok je $y = 1$, $k = -0{,}05$; slijedi

$$(0{,}95)^{2{,}01} = f(x+h,\ y+k).$$

Funkciju $f(x,y) = y^x$ razvijamo po Taylorovoj formuli (96) u okolišu tačke $T_1(2,1)$:

$f(2,1) = 1^2 = 1.$

$$f_x = y^x \ln y, \quad (f_x)_1 = 1^2 \cdot \ln 1 = 0; \qquad f_y = xy^{x-1}, \quad (f_y)_1 = 2;$$

$$f_{xx} = \ln^2 y \cdot y^x, \quad (f_{xx})_1 = 0; \qquad f_{xy} = y^x \cdot \frac{1}{y} + \ln y \cdot xy^{x-1}, \quad (f_{xy})_1 = 1;$$

$$f_{yy} = x(x-1)y^{x-2}, \quad (f_{yy})_1 = 2.$$

Dobijemo:

$$(y+k)^{x+h} = 1 + 2k + hk + k^2.$$

Uvrštenje vrijednosti za x, y, h i k daje:

$$\underline{(0{,}95)^{2{,}01} = 0{,}902.}$$

b) $\sqrt{1{,}03} \cdot \sqrt[3]{0{,}98}$.

[Razvij prema (96) u red $f(x,y) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}$ u okolišu $T_1(1,1)$ uzevši $h = 0{,}03$ i $k = -0{,}02$. Rezultat je 1,0081.].

G. Ekstremne vrijednosti funkcija dviju i više promjenljivih

a. STACIONARNE TAČKE FUNKCIJE

To su one tačke u kojim se poništavaju sve prve parcijalne derivacije funkcije. Samo u stacionarnim tačkama funkcija više promjenljivih može postići ekstremne vrijednosti, tj. samo u tim tačkama ispunjeni su nužni uvjeti za ekstrem. Geometrijsko značenje tog nužnog uvjeta sastoji se u tome, što je u stacionarnoj tački tangentna ravnina na plohu $z = f(x, y)$ paralelna s koordinatnom ravninom XY.

Zadaci

U zadacima **235 - 244** uklj. odredi stacionarne tačke zadanih funkcija.

235. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 2y = 0. \qquad \text{(b)}$$

Kako su obje dobivene jednadžbe homogene, rješenja $x = 0$ i $y = 0$ zadovoljavaju obje jednadžbe, pa je

$\underline{S_1(0, 0)}$ prva stacionarna tačka.

Iz (b) slijedi:

$$2y(x + 1) = 0,$$

a odatle je

$$y = 0 \quad \text{i} \quad x = -1.$$

Uvrštenje $y = 0$ u (a) daje:

$$6x^2 + 10x = 0, \quad \text{odnosno} \quad 2x(3x + 5) =$$

pa je

$$x_1 = 0 \quad \text{i} \quad x_2 = -\frac{5}{3}$$

$\underline{S_2\left(-\frac{5}{3}, 0\right)}$ druga je stacionarna tačka.

Uvrštenje $x = -1$ u (a) daje:

$$6 + y^2 - 10 = 0, \quad \text{pa je} \quad y_{1,2} = \pm 2.$$

Slijedi:

$$\underline{S_3(-1, 2)} \quad \text{i} \quad \underline{S_4(-1, -2)}$$

također su stacionarne tačke zadane funkcije.

236. $z = (2ax - x^2)(2by - y^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2by - y^2)(2a - 2x) = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (2ax - x^2)(2b - 2y) = 0. \qquad \text{(b)}$$

Iz (b) slijedi:

$$2ax - x^2 = 0 \quad \text{ili} \quad x(2a - x) = 0$$

pa je

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = 2a.$$

Uvrštenje u (a) daje:

$x_1 = 0$	$x_2 = 2a$
$2a(2by - y^2) = 0$	$-2a(2by - y^2) = 0$
$y(2b - y) = 0$	$y_1 = 0; \quad y_2 = 2b$
$y_1 = 0; \quad y_2 = 2b$	
$\underline{S_1(0, 0)}; \quad \underline{S_2(0, 2b)}.$	$\underline{S_3(2a, 0)}; \quad \underline{S_4(2a, 2b)}.$

Iz (b) slijedi dalje:

$$2b - 2y = 0$$

$$y = b,$$

pa uvrštenje u (a) daje:

$$b^2(2a - 2x) = 0, \quad x = a \quad \underline{S_5(a, b)}.$$

237. $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$

$$\text{za} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}; \qquad 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x - \sin(x + y) = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y - \sin(x + y) = 0. \qquad \text{(b)}$$

Iz (a):

$$\cos x = \sin(x + y).$$

Uvrštenje u (b) daje:

$$\cos y = \cos x \quad \text{pa je} \quad x = y.$$

To uvrstimo u (a):

$$\cos x - \sin 2x = 0$$

$$\cos x - 2\sin x \cos x = 0$$

$$\cos x(1 - 2\sin x) = 0.$$

Slijedi:

$$\cos x = 0 \quad \text{pa je} \quad x_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Ta vrijednost ne odgovara uvjetu

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4},$$

$$1 - 2\sin x = 0 \quad \text{pa je} \quad x_2 = \frac{\pi}{6}; \quad x = y = \frac{\pi}{6}$$

$$\underline{S\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)}.$$

238. $u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{22 - x - y - z} = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{y} - \frac{1}{22 - x - y - z} = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{5}{z} - \frac{1}{22 - x - y - z} = 0. \qquad \text{(c)}$$

Iz (a), (b) i (c) slijedi:

$$\frac{3}{x} = \frac{2}{y} = \frac{5}{z}, \quad \text{a odatle je} \quad \begin{cases} y = \dfrac{2x}{3} \\ z = \dfrac{5x}{3}. \end{cases} \qquad \text{(d)}$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$\frac{3}{x} = \frac{3}{66 - 3x - 2x - 5x} \quad \text{ili} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{66 - 10x} \quad \text{pa je} \quad x = 6.$$

Uvrštenje u (d) daje $y = 4$ i $z = 10$.

$$\underline{S(6, 4, 10).}$$

239. $z = y\sqrt{1 + x} + x\sqrt{1 + y}$

$$\left[-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right].$$

240. $z = xy(a - x - y)$

$$\left[(0, 0);\ (0, a);\ (a, 0);\ \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)\right].$$

241. $u = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$

$$[S(2, 1, 7)].$$

242. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0.$

Parcijalne derivacije implicitne funkcije računamo prema (92).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4x + 8z}{2z + 8x - 1} = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4y}{2z + 8x - 1} = 0. \qquad \text{(b)}$$

Iz (a) i (b) slijedi:

$$\begin{matrix} 4x + 8z = 0 \\ \text{i} \quad 4y = 0 \end{matrix} \quad \text{pa je} \quad \begin{cases} z = -\dfrac{1}{2}x \\ y = 0. \end{cases} \qquad \text{(c)}$$

To uvrstimo u zadanu funkciju:

$$2x^2 + \frac{1}{4}x^2 - 4x^2 + \frac{1}{2}x + 8 = 0$$

ili

$$7x^2 - 2x - 32 = 0$$

pa je $x_1 = \frac{16}{7}$ i $x_2 = -2$ i prema (c) $z_1 = -\frac{8}{7}$ i $z_2 = 1$, dok je $y = 0$.

Uvrštenje tih vrijednosti u nazivnik $2z + 8x - 1$ parcijalnih derivacija daje:

$$2 \cdot \left(-\frac{8}{7}\right) + 8 \cdot (-2) - 1 \neq 0 \quad \text{i} \quad 2 \cdot 1 + 8 \cdot \frac{16}{7} - 1 \neq 0$$

pa su stacionarne tačke

$$\underline{S_1\left(\frac{16}{7}, 0\right)} \quad \text{i} \quad \underline{S_2(-2, 0).}$$

243. $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{10x - 2y - 2z}{10z - 2x - 2y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{10y - 2x - 2z}{10z - 2x - 2y} = 0.$$

Slijedi:

$$\begin{matrix} 10x - 2y - 2z = 0 \\ 10y - 2x - 2z = 0. \end{matrix} \qquad \text{(a)}$$

Ishodište $O(0, 0, 0)$ nije stacionarna tačka, jer uvrštenje $x = 0$, $y = 0$ i $z = 0$ u parcijalne derivacije daje neodređene oblike $\frac{0}{0}$.

Oduzmemo li od prve jednadžbe sustava (a) drugu jednadžbu, dobijemo

$$y = x, \quad \text{pa iz (a) slijedi} \quad z = 4x.$$

Uvrštenje tih vrijednosti za y i z u zadanu funkciju daje $x_{1,2} = \pm 1$, a kako je $y = x$ dobijemo

$$\underline{S_1(1, 1)} \text{ i } \underline{S_2(-1, -1).}$$

244. $x^2 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$

$$[(1, 2);\ (-1, 2)].$$

b. SLOBODNI EKSTREMI FUNKCIJA

Formule

Za $z = f(x, y)$.

A. Nužni uvjet za ekstrem u tački $T_0(x_0, y_0)$ funkcije:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0,$$

odnosno rješenja sustava jednadžbi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (100)$$

daju koordinate stacionarnih tačaka samo u kojim funkcija može imati ekstrem.

B. Dovoljni uvjet za ekstrem u tački $T_0(x_0, y_0)$ funkcije:

I. $r_0 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \neq 0$

a) $r_0 t_0 - s_0^2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0^2 > 0$

funkcija ima ekstrem u tački $T_0(x_0, y_0)$ i to

maksimum, ako je $r_0 < 0$

minimum, ako je $r_0 > 0$

b) $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$

funkcija u tački $T_0(x_0, y_0)$ nema ekstrema

c) $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$ (101)

neodlučan slučaj

II. $r_0 = 0$

a) $s_0 \neq 0$

funkcija nema ekstrema u $T_0(x_0, y_0)$

b) $s_0 = 0$

neodlučan slučaj.

Za funkciju triju i više promjenljivih nužni su uvjeti za ekstrem analogni gore navedenim.

Zadaci

U zadacima **245** do **265** uklj. odredi ekstremne vrijednosti zadanih funkcija.

245. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$

Prema (100) odredimo stacionarne tačke:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y - 6x; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 4y$$

Iz sustava jednadžbi:

$$\left.\begin{aligned} y - 3x &= 0 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ slijedi } x_0 = 0 \text{ i } y_0 = 0$$

pa je

$$\underline{S(0, 0).}$$

Prema (101) računamo dovoljni uvjet:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6; \qquad r_0 = -6.$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2; \qquad s_0 = 2$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4; \qquad t_0 = -4$$

$$r_0 = -6 \neq 0 \text{ slučaj I}$$

a) $r_0 t_0 - s_0^2 = 24 - 4 = 20 > 0$ funkcija ima ekstrem u $S(0, 0)$ i to maksimum, jer je $r_0 = -6 < 0$. Uvrštenje $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$ u zadanu funkciju daje

$$\underline{z_{\text{maks}} = 10.}$$

246. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$

Prema (100):

$$z_x = 2x + y + 1$$

$$z_y = x + 2y - 1.$$

Iz

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + 1 &= 0 \\ x + 2y - 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ slijedi: } x_0 = -1, \ y_0 = 1,$$

pa je

$$\underline{S(-1, 1).}$$

Prema (101):

$$z_{xx} = r_0 = 2; \qquad z_{xy} = s_0 = 1 \qquad \text{i} \qquad z_{yy} = t_0 = 2$$

$$r_0 = 2 \neq 0 \cdots \text{slučaj I.}$$

a) $r_0 t_0 - s^2 = 4 - 1 = 3 > 0$ ekstrem u $S(-1, 1)$ i to minimum, jer je $r_0 = 2 > 0$

$$\underline{z_{\min} = 0.}$$

247. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$

$$z_x = 4x^3 - 4x + 4y$$

$$z_y = 4y^3 + 4x - 4y.$$

Stavimo li $z_x = 0$ i $z_y = 0$ dobijemo

$$\begin{aligned} x^3 - x + y &= 0 \\ y^3 + x - y &= 0 \end{aligned} \Bigg| + \qquad \text{(a)}$$

$$x^3 + y^3 = 0$$

ili

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 0$$

pa je

$$y = -x.$$

Uvrštenje u (a) daje

$$x^3 - 2x = 0$$

ili

$$x^3(x - 2) = 0$$

pa je

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \sqrt{2} \qquad \text{i} \qquad x_3 = -\sqrt{2}$$

i

$$y_1 = 0 \qquad y_2 = -\sqrt{2} \qquad \text{i} \qquad y_3 = \sqrt{2}.$$

Dobili smo tri stacionarne tačke $S_1(0, 0)$; $S_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; $S_3(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Prelazimo na dovoljni uvjet:

$$r = 12x^2 - 4; \quad s = 4 \quad \text{i} \quad t = 12y^2 - 4$$

$S_1(0, 0)$	$S_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	$S_3(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
$r_1 = -4$	$r_2 = 20$	$r_3 = 20$
$s_1 = 4$	$s_2 = 4$	$s_3 = 4$
$t_1 = -4$	$t_2 = 20$	$t_3 = 20$
$r_1 \neq 0 \ldots$ sl. I	$r_2 \neq 0 \ldots$ sl. I	$r_3 \neq 0 \ldots$ sl. I
$r_1 t_1 - s_1^2 = 16 - 16 = 0$	$r_2 t_2 - s_2^2 = 400 - 16 > 0$	
neodlučno	ekstrem u S_2 i S_3 i to minimum jer je $r_2 = r_3 > 0$.	

$$\underline{z_{\min} = -8.}$$

U $S_1(0, 0)$ dovoljni uvjet nije dao odgovora. Međutim nije teško dokazati da u ishodištu $O(0, 0, 0)$ funkcija nema ekstrema, jer nema istog predznaka u okolišu te tačke. Npr. uzduž osi X $(y = 0)$ negativna je:

$$z = x^4 - 2x^2 = -x^2(2 - x^2) < 0$$

za male $|x|$, dok uzduž pravca $y = x$ pozitivna je:

$$z = 2x^4 > 0.$$

248. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$

$$[z_{\text{maks}} = 8 \text{ u } S(2, -2)].$$

249. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$

$$[z_{\min} = -86 \text{ u } S(5, 6)].$$

250. $z = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 4$

$$[z_{\min} = -8 \text{ u } S(-2, -2)].$$

251. $z = xy \ln(x^2 + y^2).$

$$z_x = y\left[\frac{2x^2}{x^2 + y^2} + \ln(x^2 + y^2)\right]$$

$$z_y = x\left[\frac{2y^2}{x^2 + y^2} + \ln(x^2 + y^2)\right].$$

Da odredimo stacionarne tačke, stavimo:

$$y\left[\frac{2x^2}{x^2 + y^2} + \ln(x^2 + y^2)\right] = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$x\left[\frac{2y^2}{x^2 + y^2} + \ln(x^2 + y^2)\right] = 0. \qquad \text{(b)}$$

Iz (a) slijedi: $y = 0$. Uvrštenje u (b) daje

$$x \ln x^2 = 0 \quad \text{ili} \quad 2x \ln x = 0$$

pa je

$$x_1 = 0 \quad \text{i} \quad \ln x = 0 \quad \text{te je} \quad x_2 = 1.$$

Dobijemo:

$$\underline{S_1(1, 0).}$$

(Tačka $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ otpada, jer je toj tački $z = -0 \cdot \infty$).

Na isti način dobijemo iz (b) i (a)

$$\underline{S_2(0, 1).}$$

Iz (a) i (b) slijedi dalje:

$$\frac{2x^2}{x^2 + y^2} + \ln(x^2 + y^2) = 0$$

$$\frac{2y^2}{x^2 + y^2} + \ln(x^2 + y^2) = 0. \qquad \text{(c)}$$

Oduzmemo li od prve jednadžbe drugu, dobijemo

$$x^2 = y^2 \quad \text{pa je} \quad y = \pm x.$$

Uvrštenje u (c) daje:

$$1 + \ln(2x^2) = 0 \quad \text{ili} \quad \ln(2x^2) = -1$$

pa je

$$2x^2 = e^{-1}$$

i konačno

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

S obzirom na $x = \pm y$ dobijemo još četiri stacionarne tačke

$$S_{3,4}\left(x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) \quad \text{i} \quad S_{5,6}\left(x = -y = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right).$$

Računamo:

$$r = z_{xx} = 2xy\frac{x^2 + 3y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$s = z_{xy} = 2\frac{x^4 + y^4}{(x^2 + y^2)^2} + \ln(x^2 + y^2)$$

$$t = z_{yy} = 2xy\frac{3x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

U $S_1(1, 0)$: $r_1 = 0$. slučaj II; $s_1 = 2 + \ln 1 = 2 \neq 0$. U S_1 funkcija nema ekstrema.

U $S_2(0, 1)$ z nema ekstrema, jer je $r_2 = 0$ i $s_2 \neq 0$.

U $S_{3,4}\left(x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ $r_3 = 2 \neq 0 \ldots$ slučaj I; $s_3 = 0$ i $t_3 = 2$

$r_3 t_3 - s_3^2 = 4 > 0$ ekstrem u S_3 i to minimum, jer je $r_3 = 2 > 0$.

$$\underline{z_{\min}} = \frac{1}{2e} \cdot \ln\frac{1}{e} = \underline{-\frac{1}{2e}}.$$

U $S_{5,6}\left(x = -y = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ $r_5 = -2 \ldots$ sl. I, $s_5 = 0$ i $t_5 = -2$

$$r_5 t_5 - s_5^2 = 4 > 0.$$

Ekstrem u S_5 i to maksimum jer je $r_5 < 0$.

$$\underline{z_{\text{maks}}} = -\frac{1}{2e} \cdot \ln\frac{1}{e} = \underline{\frac{1}{2e}}.$$

252. $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2+y^2)$.

$$\left[z_{\min} = 0 \text{ u } S_1(0,0);\ z_{\text{maks}} = \frac{2}{e} \text{ u } S_{3,2}(\pm 1; 0);\ \text{u } S_{4,5}(0; \pm 1) \text{ nema ekstrema.} \right].$$

253. $z = \sin x \sin y \sin(x+y)$ za $0 < x < \pi;\ 0 < y < \pi$.

$$z_x = \sin y\,[\sin x \cos(x+y) + \sin(x+y)\cos x] = \sin y \sin(2x+y)$$

$$z_y = \sin x\,[\sin y \cos(x+y) + \sin(x+y)\cos y] = \sin x \sin(2y+x).$$

Iz sličnosti jednadžbi: $z_x = 0$ i $z_y = 0$ slijedi:

$$x = y$$

pa je

$$\sin x = \sin y = 0 \quad \text{te je} \quad x = y = 0 \quad \text{i} \quad x = y = \pi.$$

Obje tačke leže izvan zadanog intervala.

Iz $\sin(2x+y) = 0$ uz $y = x$ imamo:

$$\sin 3x = 0$$

a odatle je

$$3x = \pi \quad \text{pa je} \quad x_1 = y_1 = \frac{\pi}{3} \quad \text{i} \quad 3x = 2\pi \quad \text{pa je} \quad x_2 = y_2 = \frac{2\pi}{3}.$$

Zadana funkcija ima u zadanom intervalu dvije stacionarne tačke

$$\underline{S_1\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)} \quad \text{i} \quad \underline{S_2\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)}.$$

Računamo:

$$r = 2 \sin y \cos(2x+y)$$
$$s = \sin(2x+2y)$$
$$t = 2 \sin x \cos(x+2y).$$

U S_1: $r_1 = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$; $s_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $t_1 = -\sqrt{3}$; $r_1 \neq 0$ ... slučaj I.

$r_1 t_1 - s_1^2 = 3 - \frac{3}{4} > 0$ ... ekstrem u S_1 i to maksimum, jer je $r_1 < 0$.

$$z_{\text{maks}} = \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{2\pi}{3} = \underline{\frac{3\sqrt{3}}{8}}.$$

U S_2: $r_2 = \sqrt{3}$; $s_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $t_2 = \sqrt{3}$

$r_2 \neq 0$ ... slučaj I.

$r_2 t_2 - s_2^2 = \frac{9}{4} > 0$ ... ekstrem u S_2 i to minimum, jer je $r_2 > 0$.

$$\underline{z_{\min} = -\frac{3\sqrt{3}}{8}}.$$

254. $z = e^{-x^2-y^2}$.

$$[z_{\text{maks}} = 1 \text{ u } S(0,0)].$$

255. $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$.

$$[z_{\text{maks}} = 1 \text{ u } S(0,0)].$$

256. $z = \sin x + \cos y + \cos(x-y)$ za $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2};\ 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$.

$$\left[z_{\text{maks}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ u } S\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) \right].$$

257. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

Računamo prema (92):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x-2}{2z-4}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y+2}{2z-4}.$$

Iz $z_x = 0$ i $z_y = 0$ slijedi:

$$\left.\begin{array}{ll} 2x - 2 = 0 & \text{pa je} \quad x_1 = 1 \\ 2y + 2 = 0 & \text{pa je} \quad y_1 = -1 \end{array}\right\} S(1, -1).$$

Uvrštenje $x_1 = 1$ i $y_2 = -1$ u zadanu funkciju daje nakon uređenja:

$$z^2 - 4z - 12 = 0$$

a odatle je

$$z_1 = 6 \quad \text{i} \quad z_2 = -2.$$

S obzirom na zadanu implicitnu funkciju i na dobivene vrijednosti za z zaključujemo:

$$\underline{z_{\text{maks}} = 6 \quad \text{i} \quad z_{\min} = -2 \quad \text{u} \quad S(1, -1).}$$

(Funkcija predočuje sferu sa središtem u $(1, -1, 2)$ i $r = 4$).

258. $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$

$$u_x = 2x - y + 1$$
$$u_y = 2y - x$$
$$u_z = 2z - 2.$$

Iz

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x = 0 \end{array}\right| \quad \text{slijedi} \quad \underline{x_1 = -\frac{2}{3}}$$

a iz

$$2z - 2 = 0 \qquad \underline{y_1 = -\frac{1}{3}}$$

$$\underline{z_1 = 1.}$$

Uvrštenje tih vrijednosti u zadanu funkciju daje

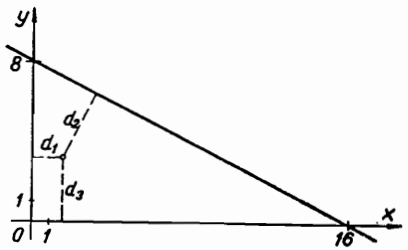
$$\underline{u = -\frac{4}{3}}.$$

Kako zadana funkcija u ima samo jednu stacionarnu tačku $S_1\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ u kojoj je negativna, a dalje prima pozitivne vrijednosti, zaključujemo da funkcija u tački S ima minimum $-\frac{4}{3}$.

259. $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ za $x > 0,\ y > 0$ i $z > 0$.

$$\left[u_{\min} = 4 \text{ u } S\left(\frac{1}{2};\ 1;\ 1\right)\right].$$

260. U ravnini XY odredi tačku $T(x, y)$ za koju je zbroj kvadrata udaljenosti od pravaca $x = 0$, $y = 0$ i $x + 2y - 16 = 0$ najmanji.



Slika 30.

Prema sl. 30: $d_1 = x$, $d_2 = y$, a d_3 odredimo kao udaljenost tačke $T(x, y)$ od pravca $x + 2y - 16 = 0$. Nakon prijelaza na normalnu jednadžbu pravca $\frac{x + 2y - 16}{\sqrt{5}} = 0$ dobijemo

$$d_3 = \frac{x + 2y - 16}{\sqrt{5}}.$$

Zbroj kvadrata udaljenosti

$$z = x^2 + y^2 + \frac{(x + 2y - 16)^2}{5}$$

ili

$$z = \frac{1}{5}(6x^2 + 9y^2 + 4xy - 32x - 64y + 256)$$

$$z_x = \frac{1}{5}(12x + 4y - 32)$$

$$z_y = \frac{1}{5}(18y + 4x - 64).$$

Stavimo li $z_x = 0$ i $z_y = 0$ pa riješimo tako dobiveni sustav linearnih jednadžbi, dobit ćemo

$$x_1 = \frac{8}{5} \quad \text{i} \quad y_1 = \frac{16}{5}$$

$$z_{xx} = r_1 = \frac{12}{5} \neq 0 \text{ slučaj I.}$$

$z_{xy} = s_1 = \frac{4}{5}$ i $z_{yy} = t_1 = \frac{18}{5}$, $r_1 t_1 - s_1^2 > 0$ funkcija z ima ekstrem u $T_1\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$ i to minimum, jer je $r_1 > 0$. Tačka T_1 je tražena tačka.

261. Odredi najkraću udaljenost tačke $T(1, 2, 3)$ od pravca $\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}$.

Prelazom na parametarsku jednadžbu pravca svodimo zadatak na određivanje ekstrema funkcije jedne promjenljive t.

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2} = t.$$

Odatle

$$x = t;\quad y = -3t \quad \text{i} \quad z = 2t.$$

Te vrijednosti uvrstimo u kvadrat udaljenosti tačke $T(1, 2, 3)$ od neke tačke $M(x, y, z)$ zadanog pravca, tj. u:

$$d^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2.$$

Dobijemo:

$$d^2 = (t - 1)^2 + (-3t - 2)^2 + (2t - 3)^2. \tag{a}$$

Odredimo onu vrijednost parametra t za koju je d^2 a dakle i d minimum:

$$\frac{d(d^2)}{dt} = 2(t - 1) - 6(-3t - 2) + 4(2t - 3).$$

Stavimo $\frac{d(d^2)}{dt} = 0$ pa dobijemo $t_0 = \frac{1}{14}$, a kako je $\frac{d^2(d^2)}{dt^2} = 28 > 0$, bit će za $t_0 = \frac{1}{14}$ udaljenost d od tačke T do pravca najkraća.

Iz (a) dobijemo uvrstivši $t = \frac{1}{14}$:

$$d_{\min} = \frac{1}{14}\sqrt{2730}.$$

262. Napiši jednadžbu ravnine koja prolazi zadanom tačkom $A(a, b, c)$ i zatvara s koordinatnim ravninama tetraedar najmanjeg obujma.

Napišemo li jednadžbu ravnine u segmentnom obliku

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{q} = 1,$$

dobit ćemo za obujam tetraedra izraz

$$V = \frac{1}{6} m n q.$$

Tražimo dakle one vrijednosti segmenata m, n i q za koje je $V_{\min}$.

Tačka $A(a, b, c)$ leži u ravnini, dakle

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{q} = 1,$$

pa je

$$q = \frac{c}{1 - \frac{a}{m} - \frac{b}{n}}. \tag{a}$$

Uvrštenje u V daje:

$$V = \frac{c}{6} \frac{mn}{1 - \frac{a}{m} - \frac{b}{n}}.$$

Računamo:

$$\frac{\partial V}{\partial m} = \frac{c\,n}{6} \cdot \frac{1 - \frac{2a}{m} - \frac{b}{n}}{\left(1 - \frac{a}{m} - \frac{b}{n}\right)^2}$$

pa iz $V_m = 0$ slijedi

$$1 - \frac{2a}{m} - \frac{b}{n} = 0.$$

Na isti način dobijemo iz

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

$$1 - \frac{a}{m} - \frac{2b}{n} = 0.$$

Iz tih jednadžbi slijedi:

$$\underline{m = 3a} \quad \text{i} \quad \underline{n = 3b.}$$

Uvrštenje u (a) daje

$$\underline{q = 3c.}$$

Jednadžba tražene ravnine glasi

$$\underline{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3.}$$

Očito je da ta ravnina čini s koordinatnim ravninama tetraedar najmanjeg obujma, jer bi najveći obujam tako zadanog tetraedra bio neizmjerno velik.

263. Odredi vanjske dimenzije otvorenog pravokutnog sanduka zadane debljine stijenki δ i nutarnje zapremnine V tako da bi se potrošilo što manje materijala za njegovu izradbu.

$$\left[x = y = 2\delta + \sqrt[3]{2V};\ z = \frac{x}{2}\right].$$

264. U pravokutnom koordinatnom sustavu $X\,Y$ iskolčene su s istom tačnošću tri tačke $A(-1, 2)$, $B(0, 1)$ i $C(3, -1)$ pravca. Odredi u smislu teorije najmanjih kvadrata, tj. uz uvjet da je suma kvadrata pogrešaka $[v\,v]$ = minimum, najvjerojatniju jednadžbu pravca.

Da u traženoj jednadžbi pravca $y - a\,x - b = 0$ odredimo u smilu te metode koeficijente a i b, uvrstimo redom u tu jednadžbu koordinate iskolčenih tačaka A, B i C. Kako te koordinate sadržavaju slučajne pogreške mjerenja, dobit ćemo na desnoj strani pogreške v.

$$\left.\begin{array}{ll} A(-1, 2): & 2 + a - b = v_1 \\ B(0, 1): & 1 \qquad - b = v_2 \\ C(3, -1): & -1 - 3a - b = v \end{array}\right| \qquad \text{(a)}$$

Kvadriramo:

$$\left.\begin{array}{l} v_1^2 = 4 + a^2 + b^2 + 4a - 4b - 2ab \\ v_2^2 = 1 \qquad + b^2 \qquad - 2b \\ v_3^2 = 1 + 9a^2 + b^2 + 6a + 2b + 6ab \end{array}\right| +$$

$$[vv] = 6 + 10a^2 + 3b^2 + 10a - 4b + 4ab.$$

Sada odredimo one vrijednosti koeficijenata a i b za koje je $[vv]$ = minimum.

$$\frac{\partial [v\,v]}{\partial a} = 20a + 10 + 4b; \qquad \frac{\partial [v\,v]}{\partial b} = 6b - 4 + 4a.$$

Iz jednadžbi:

$$20a + 4b + 10 = 0$$
$$4a + 6b - 4 = 0$$

slijedi:

$$a = -\frac{19}{26}; \qquad b = \frac{30}{26}.$$

$$r_1 = [v\,v]_{aa} = 20 \neq 0 \cdots \text{slučaj I}; \qquad s_1 = [vv]_{ab} = 4$$

i $\quad t_1 = [v\,v]_{bb} = 6 \qquad r_1 t_1 - s_1^2 = 104 > 0 \ldots$ ekstrem,

a kako je $r_1 > 0$, $[v\,v]$ = minimum za

$$a = -\frac{19}{26} \quad \text{i} \quad b = \frac{30}{26}.$$

Proba:

$$[v] \text{ prema (a)} = \frac{3}{26} - \frac{4}{26} + \frac{1}{26} = 0.$$

Tražena jednadžba pravca glasi

$$y = -\frac{19}{26}x + \frac{30}{26} \quad \text{ili} \quad \underline{19x + 26y - 30 = 0.}$$

Prikaži grafički iskolčene tačke i pravac.

265. Odredi u smislu teorije najmanjih kvadrata najvjerojatnije jednadžbe

a) pravca $y = a\,x + b$ određenog tačkama $A(-2, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, 3)$.

$$[9x - 12y + 20 = 0]$$

b) ravnine $z = A\,x + B\,y + C$ određene tačkama

$$A(0, 0, 0), \quad B(0, 1, 1), \quad C(1, 1, 1), \quad D(1, 0, -1).$$

$$\left[z = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{4}\right].$$

c. VEZANI (UVJETNI) EKSTREMI FUNKCIJA

Formule

Određivanje vezanih ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$ svodi se na računanje slobodnih ekstrema Lagrangeove funkcije:

$$F = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{array}\right| \qquad (102)$$

Iz tog sustava jednadžbi određujú se vrijednosti za x, y i Lagrangeov multiplikator λ.

Pitanje ima li zadana funkcija $z = f(x, y)$ za tako određene vrijednosti x, y i λ maksimum ili minimum, rješava se po smislu zadatka ili pomoću drugog totalnog diferencijala Lagrangeove funkcije $F(x, y)$ koji prema (82) glasi:

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 \qquad (102)'$$

pri čemu: ako je $d^2F < 0$ u izračunatoj tački, funkcija $z = f(x, y)$ ima maksimum u toj tački, dok za $d^2F > 0$ ima minimum.

Na isti način određuju se vezani ekstremi funkcije bilo kojeg broja promjenljivih uz više uvjetnih jednadžbi, pri čemu broj uvjeta mora biti manji od broja promjenljivih.

Npr. za funkciju

$$u = f(x, y, z) \text{ uz dva uvjeta } \varphi_1(x, y, z) = 0 \text{ i } \varphi_2(x, y, z) = 0.$$

Lagrangeova funkcija glasi:

$$F = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z). \qquad (102\text{ a})$$

dok se d^2F računa prema (84).

Zadaci

266. Odredi stacionarne tačke funkcije

$$z = a \cos^2 x + b \cos^2 y \quad \text{uz uvjet} \quad y - x = \frac{\pi}{4}.$$

Prema (102) pišemo Lagrangeovu funkciju

$$F = a \cos^2 x + b \cos^2 y + \lambda \left(y - x - \frac{\pi}{4} \right)$$

i računamo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= F_x = -a \sin 2x - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= F_y = -b \sin 2y + \lambda = 0 \\ y - x &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}\right|$$

Dobili smo sustav od 3 jednadžbe s tri nepoznanice x, y i λ.

Iz 3. jednadžbe sustava slijedi $y = x + \frac{\pi}{4}$, a uvrštenje u 2. jednadžbu daje

$$-b \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) + \lambda = 0$$

pa je

$$\lambda = b \cos 2x.$$

To uvrstimo u 1. jednadžbu:

$$-a \sin 2x - b \cos 2x = 0$$

ili

$$\operatorname{tg} 2x = -\frac{b}{a}$$

$$2x = \operatorname{arc\,tg} \left(-\frac{b}{a} \right)$$

$$x = -\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}.$$

Uvrštenje $x = y - \frac{\pi}{4}$ u 1. jednadžbu daje $\lambda = a \cos 2y$ pa iz druge jednadžbe dobijemo

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}$$

$$\underline{S \left(-\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}, \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} \right)}.$$

U zadacima **267** do **285** uklj. odredi ekstremne vrijednosti zadanih funkcija uz zadane uvjete.

267. $z = x + 2y$ uz $x^2 + y^2 = 5$.

Geometrijski se zadatak svodi na određivanje kota z najviše i najniže tačke presječnice zadane ravnine $z = x + 2y$ i kružnog valjka $x^2 + y^2 = 5$.

Prema (102):

$$F = x + 2y + \lambda (x^2 + y^2 - 5).$$

Računamo:

$$F_x = 1 + 2\lambda x$$
$$F_y = 2 + 2\lambda y.$$

Iz sustava jednadžbi:

$$\left.\begin{aligned} 1 + 2\lambda x &= 0 \\ 2 + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned}\right|$$

slijedi:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2\lambda} \\ y &= -\frac{1}{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad \text{Uvrštenje u 3. jednadžbu daje} \quad \lambda = \pm \frac{1}{2}$$

pa je

$$\text{za } \lambda_1 = \frac{1}{2} \text{ dobijemo } \underline{S_1 (x_1 = -1;\ y_1 = -2)}$$

$$\text{a za } \lambda_2 = -\frac{1}{2} \qquad \underline{S_2 (x_2 = 1;\ y_2 = 2)}.$$

Računamo d^2F:

$$F_{xx} = F_{yy} = 2\lambda; \quad F_{xy} = 0$$

pa prema (102)': $d^2F = 2\lambda\, dx^2 + 2\lambda\, dy^2 = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$:

u $S_1\left(\lambda_1 = \frac{1}{2}\right)$ $d^2F > 0$ pa funkcija $z = x + 2y$ ima u S_1 uvjetni minimum:

$$\underline{z_{\min}} = -1 - 4 = \underline{-5} \quad \text{u} \quad S_1(-1, -2)$$

u $S_2\left(\lambda_2 = -\frac{1}{2}\right)$ $d^2F < 0$ pa z ima u S_2 uvjetni maksimum:

$$\underline{z_{\text{maks}}} = 1 + 4 = \underline{5} \quad \text{u} \quad S_2\,(1, 2).$$

268. $z = xy$ uz $x^2 + y^2 = 2a^2$.

Prema (102):

$$F = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2a^2)$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= y + 2\lambda x = 0 \\ F_y &= x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2a^2 &= 0. \end{aligned}\right| \qquad \text{(a)}$$

Pomnožimo li prvu jednadžbu s x, a drugu s y dobijemo

$$xy + 2\lambda x^2 = 0$$
$$xy + 2\lambda y^2 = 0$$

pa je

$$x^2 = y^2.$$

Uvrštenje u treću daje:

$$2x^2 - 2a^2 = 0$$
$$\text{i} \quad 2y^2 - 2a^2 = 0.$$

Slijedi:

$$x = \pm a; \qquad y = \pm a.$$

Time smo dobili 4 stacionarne tačke:

$$\underline{S_1(a; a);\ S_2(-a; -a),\ S_3(a; -a) \ \text{i}\ S_4(-a; a).}$$

Uvrštenje tih vrijednosti u $F_x = 0$, odnosno $F_y = 0$ daje za λ vrijednosti

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{2}.$$

Prva vrijednost $-\frac{1}{2}$ odgovara tačkama S_1 i S_2, dok druga $+\frac{1}{2}$ — tačkama S_3 i S_4, jer uvrštenje $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}$ i $\lambda_{3,4} = \frac{1}{2}$ u prve dvije jednadžbe sustava (a) daje $y = x$ i $x = y$, a to su tačke S_1 i S_3, odnosno $y = -x$ i $x = -y$, a to su tačke S_2 i S_4.

Računajmo d^2y prema (102)'. Dobijemo:

$$F_{xx} = F_{yy} = 2\lambda, \quad F_{xy} = 1$$

pa je

$$d^2F = 2(\lambda\, dx^2 + dx\, dy + \lambda\, dy^2)$$

Za $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$ $d^2F < 0$ pa je u $S_1\,(a, a)$ i $S_2\,(a, -a)$ prema $z = xy$

$$\underline{z_{\text{maks}} = a^2.}$$

Za $\lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{2}$ $d^2F > 0$ pa je u $S_3(a, -a)$ i $S_4(-a, a)$

$$\underline{z_{\min} = -a^2.}$$

269. $z = 6 - 4x - 3y$ uz $x^2 + y^2 = 1$.

$\left[U S_1\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right) \text{ i } \lambda_1 = \frac{5}{2} \quad z_{\min} = 1;\ \text{u } S_2\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right) \text{ i } \lambda_2 = -\frac{5}{2} \quad z_{\text{maks}} = 11\right]$.

270. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ uz $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$.

$\left[\text{U } S_1(-a\sqrt{2}; -a\sqrt{2}) \quad z_{\min} = -\frac{\sqrt{2}}{a}; \quad \text{u} \quad S_2(a\sqrt{2}; a\sqrt{2}) \quad z_{\text{maks}} = \frac{\sqrt{2}}{a}\right]$.

271. $u = x + y + z$ uz $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Prema (102a):

$$F = x + y + z + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1\right)$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 1 - \frac{\lambda}{x^2} = 0 \\ F_y &= 1 - \frac{\lambda}{y^2} = 0 \\ F_z &= 1 - \frac{\lambda}{z^2} = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 1 \end{aligned}\right|$$

Iz prve tri jednadžbe slijedi

$$x = y = z$$

pa iz posljednje imamo

$$x = y = z = 3$$

te je $S(3, 3, 3)$ i konačno iz prve dobijemo

$$\lambda = 9.$$

Prema (84) dobijemo

$$d^2F = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0,$$

jer je

$$F_{xx} = F_{yy} = F_{zz} = \frac{2\lambda x}{x^3},$$

odnosno 2 za $x = 3$ i $\lambda = 9$, dok je

$$F_{xy} = F_{xz} = F_{yz} = 0.$$

U $S(3, 3, 3)$ ima

$$\underline{u_{\min} = 9.}$$

272. $u = xyz$ uz uvjete $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + xz + yz = 8. \end{cases}$

Prema (102 a):

$$F = xyz + \lambda_1(x + y + z - 5) + \lambda_2(xy + xz + yz - 8)$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= yz + \lambda_1 + \lambda_2(y+z) = 0 \\ F_y &= xz + \lambda_1 + \lambda_2(x+z) = 0 \\ F_z &= xy + \lambda_1 + \lambda_2(x+y) = 0 \\ x + y + z &= 5 \\ xy + xz + yz &= 8. \end{aligned}\right| \qquad \text{(a)}$$

Pomnožimo li prvu jednadžbu sustava s x, a drugu s y, dobit ćemo iz tih jednadžbi:

$$\lambda_1 x + \lambda_2 x(y+z) = \lambda_1 y + \lambda_2 y(x+z)$$

ili

$$(x-y)(\lambda_1 + \lambda_2 z) = 0.$$

Odatle

$$x - y = 0 \quad \text{pa je} \quad x = y.$$

Uvrštenje $y = x$ u prvi uvjet daje

$$z = 5 - 2x$$

pa iz drugog uvjeta slijedi:

$$x^2 + x(5-2x) + x(5-2x) = 8$$

ili

$$3x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$x_1 = y_1 = 2 \quad \text{i} \quad x_2 = y_2 = \frac{4}{3}$$

dok je

$$z_1 = 1 \quad \text{i} \quad z_2 = \frac{7}{3}.$$

Uvrštenje tih vrijednosti u $u = xyz$ daje

$$\underline{\text{u } S_1(2,2,1) \ u_{\min} = 4}$$

$$\underline{\text{u } S_2\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) \ u_{\text{maks}} = \frac{112}{27} = 4\frac{4}{27}}.$$

Iste vrijednosti ekstrema ima funkcija $u = xyz$ i u tačkama $\underline{S_3(2,1,2)}$ i $\underline{S_5(1,2,2)}$ i to minimum, a u $\underline{S_4\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)}$ i $\underline{S_6\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)}$ maksimum. Do tih vrijednosti dolazimo tako da sada množimo prvu jednadžbu sustava (a) s x, a treću sa z pa ponavljamo čitav postupak računanja. Dobijemo tačke S_3 i S_4. Treće ponavljanje postupka daje tačke S_5 i S_6. Načini to!

273. $u = x^2 + y^2 + z^2$ uz $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a > b > c > 0).$

$$[u_{\text{maks}} = a \text{ u } S_{1,2}(\pm a, 0, 0); \quad u_{\min} = c \text{ u } S_{3,4}(0, 0, \pm c)].$$

274. U ravnini $3x - 2z = 0$ odredi tačku za koju je zbroj kvadrata udaljenosti od tačaka $A(1,1,1)$ i $B(2,3,4)$ najmanji.

Neka je $T(x,y,z)$ tražena tačka, tada je

$$(AT)^2 = d_1^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

$$(BT)^2 = d_2^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2.$$

Prema (102):

$$F = d_1^2 + d_2^2 + \lambda(3x - 2z)$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 2(x-1) + 2(x-2) + 3\lambda = 0 \\ F_y &= 2(y-1) + 2(y-3) = 0 \\ F_z &= 2(z-1) + 2(z-4) - 2\lambda = 0 \\ 3x - 2z &= 0. \end{aligned}\right|$$

Iz druge jednadžbe slijedi: $y = 2$.

Pomnožimo li 1. jednadžbu s 2, a 2. s 3 pa zbrojimo li te jednadžbe, dobit ćemo nakon uređenja

$$4x + 6z - 21 = 0. \qquad \text{(a)}$$

Iz posljednje jednadžbe slijedi $z = \dfrac{3}{2}x$, pa uvrštenje u (a) daje:

$$x = \frac{21}{13} \quad \text{te je} \quad z = \frac{63}{26}.$$

$$\underline{\text{Tražena tačka } T\left(\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26}\right).}$$

275. U ravnini $x + y - 2z = 0$ odredi tačku za koju je zbroj kvadrata udaljenosti od ravnina $x + 3z - 6 = 0$ i $y + 3z - 2 = 0$ najmanji.

Označivši s $T(x,y,z)$ traženu tačku izračunajmo prema (48 a) udaljenosti te tačke od zadanih ravnina:

$$d_1 = \frac{x + 3z - 6}{\sqrt{10}} \quad \text{i} \quad d_2 = \frac{y + 3z - 2}{\sqrt{10}}.$$

Prema (102):

$$F = \frac{1}{10}(x + 3z - 6)^2 + \frac{1}{10}(y + 3z - 2)^2 + \lambda(x + y - 2z)$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{5}(x + 3z - 6) + \lambda = 0 \\ F_y &= \frac{1}{5}(y + 3z - 2) + \lambda = 0 \\ F_z &= \frac{3}{5}(x + 3z - 6) + \frac{3}{5}(y + 3z - 2) - 2\lambda = 0 \\ x + y - 2z &= 0. \end{aligned}\right|$$

Iz prve dvije jednadžbe slijedi:

$$x + 3z - 6 = y + 3z - 2$$

pa je

$$x - y = 4.$$

Zbrojimo li prve tri jednadžbe sustava, dobit ćemo

$$x + y + 6z - 8 = 0$$

a kako je $x + y = 2z$, dobijemo $z = 1$.

$$\left.\begin{aligned} \text{Iz} \quad x + y &= 2 \\ \text{i} \quad x - y &= 4 \end{aligned}\right| \text{ slijedi } x = 3 \text{ i } y = -1.$$

$$\underline{\text{Tražena je tačka } T(3, -1, 1).}$$

276. Odredi volumen najvećeg pravokutnog paralelepipeda koji se može upisati u elipsoid s poluosima a, b i c.

Označimo li s x, y i z koordinate onog vrha A gornje osnovke upisanog paralelepipeda koji leži u prvom oktantu, glasit će volumen paralelepipeda

$$V = 2x \cdot 2y \cdot 2z = 8xyz. \quad \text{(Nariši sliku!)}$$

Naš je zadatak da odredimo V_{maks} uz uvjet da vrhovi paralelepipeda leže na elipsoidu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Prema (102):

$$F = 8xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 8yz + \frac{2\lambda}{a^2}x = 0 \\ F_y &= 8xz + \frac{2\lambda}{b^2}y = 0 \\ F_z &= 8xy + \frac{2\lambda}{c^2}z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &+ \frac{z^2}{c^2} = 1. \end{aligned}\right|$$

Pomnožimo li prve tri jednadžbe sustava redom s x, y i z, dobit ćemo:

$$\frac{2\lambda}{a^2}x^2 = \frac{2\lambda}{b^2}y^2 = \frac{2\lambda}{c^2}z^2$$

ili

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

Odatle:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad \text{i} \quad z^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2.$$

Uvrštenje u uvjetnu jednadžbu daje

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

pa je

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Na isti način dobijemo:

$$y = \frac{b}{\sqrt{3}} \quad \text{i} \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Uvrštenju u $V = 8xyz$ daje:

$$\underline{V_{\text{maks}} = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}}.$$

277. U zadanu kuglu promjera $2R$ upiši pravokutni paralelepiped najvećeg obujma.

$$\left[\text{Kocka}, \quad V_{\text{maks}} = \frac{8\sqrt{3}R^3}{9}\right].$$

278. Odredi pravokutni paralelepiped najvećeg volumena, ako je zbroj njegovih bridova zadan i iznosi $12a$.

$$[V_{\text{maks}} = a^3 \text{ ima kocka brida } a].$$

279. Odredi pravokutni paralelepiped zadanog volumena V koji ima najmanje oplošje.

$$[\text{Kocka brida } \sqrt[3]{V}].$$

280. Odredi pravokutni paralelepiped zadanog oplošja S koji ima najveći volumen.

$$\left[\text{Kocka brida } \sqrt{\frac{S}{6}}\right].$$

281. Pozitivni broj a prikaži u obliku umnoška četiri pozitivnih množitelja tako da njihov zbroj bude što manji.

Označivši tražene množitelje s x, y, z i u dobijemo:

$$\text{umnožak } P = xyzu = a \quad \text{i} \quad \text{zbroj } S = x + y + z + u$$

$$F = x + y + z + u + \lambda(xyzu - a)$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 1 + \lambda yzu = 0 \\ F_y &= 1 + \lambda xzu = 0 \\ F_z &= 1 + \lambda xyu = 0 \\ F_u &= 1 + \lambda xyz = 0 \\ xyzu &= a. \end{aligned}\right|$$

Podijelimo li prve četiri jednadžbe sustava s λ, dobit ćemo:

$$yzu = xzu = xyu = xyz \,|\, : xyz$$

$$\frac{u}{x} = \frac{u}{y} = \frac{u}{z} = 1$$

pa je

$$u = x = y = z$$

$$P = x^4 = a; \qquad x = \sqrt[4]{a} = y = z = u$$

$$S_{\min} = 4\sqrt[4]{a}.$$

282. Izračunaj najpovoljniji profil kanala oblika istokračnog trapeza i zadane protoke Q m³/sec uz uvjet da trenje bude što manje, tj. uz minimalni omočeni obod $O = 2l + b$ kanala.

Prema slici 31:

$$Q = P\,\text{m}^2 \cdot 1\,\text{m}' = \frac{(2b + 2x)}{2}h = (b + x)h\,\text{m}^3,$$

a kako je

$$h = l \sin\alpha \quad \text{i} \quad x = l\cos\alpha$$

$$Q = (b + l\cos\alpha)\, l \sin\alpha.$$

Uz taj uvjet tražimo $O_{\min}$.

$$F = 2l + b + \lambda(b\, l \sin\alpha + l^2 \sin\alpha\cos\alpha - Q)$$

$$F_l = 2 + \lambda(b\sin\alpha + l\sin 2\alpha) = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$F_b = 1 + \lambda\, l \sin\alpha = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$F_\alpha = \lambda(b\, l\cos\alpha + l^2\cos 2\alpha) = 0 \qquad \text{(c)}$$

$$Q = (b + l\cos\alpha)\, l\sin\alpha. \qquad \text{(d)}$$

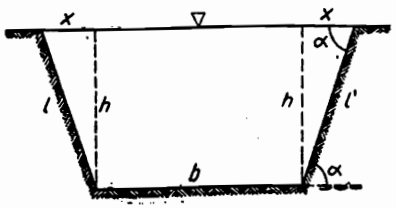
Iz (b) slijedi $\lambda = -\dfrac{1}{l\sin\alpha}$.

Uvrštenje u (a) daje nakon uređenja:

$$2 - \frac{b}{l} - \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 0$$

pa je

$$\frac{b}{l} = 2 - \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}.$$



Slika 31.

Podijelivši (c) s $\lambda\, l^2$ dobijemo

$$\frac{b}{l} = -\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{(e)}$$

pa je

$$2 - \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$$

ili

$$2 - 2\cos\alpha = -\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha}$$

ili uz $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ dobijemo

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{pa je} \quad \underline{\alpha = \frac{\pi}{3}}.$$

Uvrštenje u (e) daje

$$\frac{b}{l} = -\frac{\cos\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = 1 \quad \text{pa je} \quad \underline{b = l.}$$

Uvrštenje $b = l$ i $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ u (d) daje

$$Q = \frac{3}{2} l^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

pa je

$$l = b = \frac{2\sqrt{Q}}{\sqrt{3\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{3^3}}.$$

$$O_{\min} = 2l + b = 3l = \frac{6\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{3^3}} = \frac{6\sqrt{Q}\cdot\sqrt[4]{3}}{3}.$$

$$\underline{O_{\min} = 2\sqrt[4]{3}\sqrt{Q} \doteq 2{,}632\sqrt{Q}.}$$

283. Na elipsi $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ odredi tačke koje su najmanje i najviše udaljene od pravca

$$3x - y - 9 = 0.$$

Označivši s $T(x, y)$ tražene tačke na elipsi, odredimo prema (48a) udaljenosti tih tačaka od zadanog pravca

$$d = \frac{3x - y - 9}{\sqrt{10}} \qquad \text{(a)}$$

pa prema (102) računamo:

$$F = \frac{3x - y - 9}{\sqrt{10}} + \lambda\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right)$$

$$F_x = \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{2\lambda x}{4} = 0$$

$$F_y = -\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{2\lambda y}{9} = 0$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Pomnožimo li drugu jednadžbu sustava s 3 pa je zbrojimo s prvom jednadžbom, dobit ćemo

$$\frac{2\lambda x}{4} + \frac{6\lambda y}{9} = 0 \quad \text{a odatle je} \quad x = -\frac{4}{3}y.$$

Uvrštenje u jednadžbu elipse daje

$$y = \pm\frac{3}{\sqrt{5}} \quad \text{dok je} \quad x = \mp\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Izračunamo li prema (a) udaljenosti d za dobivene vrijednosti x i y ili iz grafičkog prikaza zadane elipse i pravca vidjet ćemo da je

$$\underline{T_1\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right)}$$

najmanje udaljena tačka od elipse, dok je

$$\underline{T_2\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)}$$

najdalja tačka.

284. Na paraboli $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$ odredi tačku najmanje udaljenu od pravca $3x - 6y + 4 = 0$.

$$\left[-\frac{5}{9}, -\frac{1}{9}\right].$$

285. Na rotacionom elipsoidu $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ odredi tačku T_1 koja je najmanje i tačku T_2 koja je najviše udaljena od ravnine $3x + 4y + 12z - 288 = 0$.

$$\left[T_1\left(9, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right);\ T_2\left(-9, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right)\right].$$

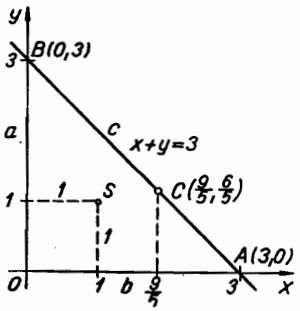
d. NAJVEĆE I NAJMANJE VRIJEDNOSTI FUNKCIJA U ZADANIM ZATVORENIM PODRUČJIMA

Ekstremne vrijednosti funkcija određene na gore navedeni način već su prema svojoj definiciji relativni ekstremi, jer imaju čisto lokalni karakter: u tački ekstrema funkcija prima maksimalnu ili minimalnu vrijednost samo u nekom često vrlo malom okolišu te tačke. U mnogim slučajevima potrebno je odrediti najveću i najmanju vrijednost zadane funkcije u nekom zadanom zatvorenom području. U tu svrhu treba izračunati sve maksimume i minimume funkcije ne samo u tom području već i na granicama tog područja, a zatim izabrati najveću i najmanju vrijednost funkcije.

Na početku se odrede stacionarne tačke u nutrini zadanog područja kao i vrijednosti funkcije u tim tačkama, pri čemu otpada računanje dovoljnog uvjeta, a zatim se traže vrijednosti funkcije na međi područja i to tako da se ta međa podijeli na dijelove jednadžbi $y = \varphi(x)$ za $a < x < b$, odnosno $x = \psi(y)$ za $c < y < d$ pa se funkcija od dvije promjenljive postaje funkcija od jedne promjenljive x ili y.

Zadaci

286. Odredi najveću i najmanju vrijednost funkcije $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ u trokutu koji je omeđen pravcima $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 3$. (slika 32).



Slika 32.

Odredimo stacionarne tačke funkcije z:

$$z_x = 2x + 4y - 6 = 0$$
$$z_y = -4y + 4x = 0.$$

Odatle dobijemo:

$$\underline{S(1, 1).}$$

Tačka leži u nutrini trokuta, pri čemu je

$$\underline{z_s = -4.}$$

Na strani $a \equiv x = 0$ za $0 \leqq y \leqq 3$

$$z_a = -2y^2 - 1.$$

$$\text{u } \underline{O(0.0)}\text{: } z_a(0) = -\underline{1}; \quad \text{u } \underline{B(0,3)}\text{: } z_b(3) = -\underline{19}.$$

$$z'_a = -4y = 0, \text{ pa je } y = 0 \text{ i } z_a(0) = -1. \quad \underline{\text{Tačka } O(0,0).}$$

Na strani $b \equiv y = 0$ za $0 \leqq x \leqq 3$

$$z_b = x^2 - 6x - 1.$$

$$\text{u } \underline{A(3,0)} \quad z_b(3) = -\underline{10}.$$

$$z'_b = 2x - 6 = 0, \quad x = 3, \quad z_b(3) = -\underline{10}. \quad \underline{\text{Tačka } A(3,0).}$$

Na strani $c \equiv y = 3 - x$ za $0 \leqq x \leqq 3$

$$z(x) = x^2 - 2(3-x)^2 + 4x(3-x) - 6x - 1$$

ili

$$z(x) = -5x^2 + 18x - 19; \quad z' = -10x + 18 = 0$$

pa je

$$x = \frac{9}{5}; \quad \underline{z\left(\frac{9}{5}\right) = -\frac{14}{5}} \quad \text{u} \quad \underline{C\left(\frac{9}{5}, \frac{6}{5}\right).}$$

Iz dobivenih rezultata slijedi: najveće i najmanje vrijednosti funkcije leže na stranicama trokuta i to

$$\underline{z_{\text{maks}} = -1 \text{ u } O(0,0)} \quad \text{i} \quad \underline{z_{\min} = -19 \text{ u } B(0,3).}$$

287. Odredi najveću i najmanju vrijednost funkcije $z = x^2 - y^2$ u krugu $x^2 + y^2 \leqq 1$.

Odredimo stacionarne tačke:

$$z_x = 2x = 0$$
$$z_y = -2y = 0$$

$\underline{O(0,0)}$ je stacionarna tačka u kojoj je $\underline{z = 0.}$

Prelazimo na među područja, tj. na kružnicu kojoj je jednadžba u parametarskom obliku

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad \Big| \quad 0 \leqq t < 2\pi.$$

Uvrštenje u $z = x^2 - y^2$ daje

$$z = \cos^2 t - \sin^2 t$$

ili

$$z(t) = \cos 2t.$$

Odredimo sada stacionarne tačke $z(t)$:

$$\frac{dz}{dt} = -2\sin 2t = 0.$$

Slijedi s obzirom na sliku jedinične kružnice koju nariši:

$$2t = 0, \quad t_1 = 0, \quad S_1(1,0), \quad z_1 = 1$$
$$2t = 180^\circ, \quad t_2 = 90^\circ, \quad S_2(0,1), \quad z_2 = -1$$
$$2t = 360^\circ, \quad t_3 = 180^\circ, \quad S_3(-1,0), \quad z_3 = 1$$
$$2t = 540^\circ, \quad t_4 = 270^\circ, \quad S_4(0,-1), \quad z_4 = -1.$$

Vidimo da je

$$\underline{z_{\text{maks}} = 1 \text{ u tačkama } S_1 \text{ i } S_3,} \quad \text{dok je} \quad \underline{z_{\min} = -1 \text{ u tačkama } S_2 \text{ i } S_4.}$$

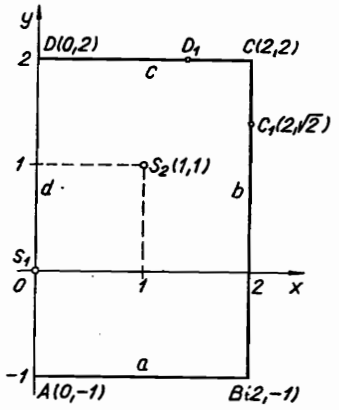
288. Odredi najveću i najmanju vrijednost funkcije $z = x^3 + y^3 - 3xy$ u pravokutniku $0 \leqq x \leqq 2$, $-1 \leqq y \leqq 2$. (Sliku 33).

$$\left.\begin{aligned} z_x &= 3x^2 - 3y = 0 \\ z_y &= 3y^2 - 3x = 0. \end{aligned}\right|$$

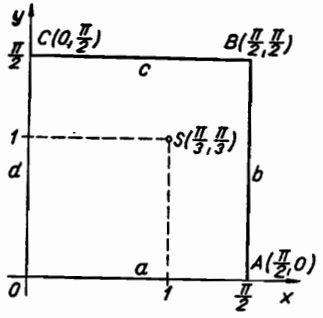
Slijedi $y = x$, pa je $3x^2 - 3x = 0$, a odatle je

$$x_1 = y_1 = 0, \quad \underline{S_1(0,0)} \text{ u kojoj je } \underline{z_1 = 0}$$

$$x_2 = y_2 = 1, \quad \underline{S_2(1,1)} \text{ u kojoj je } \underline{z_2 = -1.}$$



Slika 33.



Slika 34.

Stranice pravokutnika:

$$AB \equiv a \equiv y = -1, \quad z_a = x^3 + 3x - 1 \quad \text{za} \quad 0 \leqq x \leqq 2.$$

$$\text{U } \underline{A(0,-1) \quad z_a = -1;} \quad \text{u } \underline{B(2,-1) \quad z_a = 13.}$$

$$z_a' = 3x^2 + 3 = 0 \quad x_{1,2} = \pm i.$$

$$BC \equiv b \equiv x = 2, \quad z_b = y^3 - 6y + 8 \quad \text{za} \quad -1 \leqq y \leqq 2.$$

$$\text{U } \underline{C(2,2) \ z_b = 4;} \ z_b' = 3y^2 - 6 = 0 \ y_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$$

$$\text{U } \underline{C_1(2,\sqrt{2})} \ z_b = 8 - 4\sqrt{2} = \underline{2{,}36.}$$

$C_2(2, -\sqrt{2})$ otpada, jer leži izvan pravokutnika.

$$CD \equiv c \equiv y = 2, \quad z_c = x^3 - 6x + 8 \quad \text{za} \quad 0 \leqq x \leqq 2.$$

$$\text{U } \underline{D(0,2) \ z_c = 8.} \quad z_c' = 3x^2 - 6 = 0 \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$$

$$\text{U } \underline{D_1(\sqrt{2},2)} \quad \underline{z_c \doteq 2{,}36;} \quad D_2(-\sqrt{2},2) \text{ otpada.}$$

$$DA \equiv d \equiv x = 0, \quad z_d = y^3 \quad \text{za} \quad -1 \leqq y \leqq 2$$

$$z_d' = 3y^2 = 0, \quad y = 0,$$

a to je

$$\underline{\text{tačka } S_1(0,0)} \text{ u kojoj je } \underline{z_d = z = 0.}$$

Vidimo da je $z_{maks} = 13$ u međašnjoj tački $B(2,-1)$, dok je $z_{min} = -1$ u tački $S_2(1,1)$ unutra pravokutnika i u međašnjoj tački $A(0,-1)$.

289. Odredi najveću i najmanju vrijednost funkcije $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ u pravokutniku $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$; $0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$. (Slika 34).

$$\left.\begin{aligned} z_x &= \cos x + \cos(x+y) = 0 \\ z_y &= \cos y + \cos(x+y) = 0 \end{aligned}\right| \quad y = x$$

$$\cos x + \cos 2x = 0$$

ili

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

pa je

$$(\cos x)_1 = \frac{1}{2}; \qquad (\cos x)_2 = -1.$$

Slijedi:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}; \qquad x_2 = \frac{2}{3}\pi; \qquad x_3 = \pi.$$

Posljednje dvije tačke otpadaju, jer leže izvan zadanog pravokutnika.

$$\underline{\text{U } S\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \quad z = \frac{3}{2}\sqrt{3}.}$$

Stranice pravokutnika:

$$OA \equiv a \equiv y = 0; \quad z_a = 2\sin x \quad \text{za} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{U } \underline{O(0,0) \ z_a = 0;} \qquad \text{u } \underline{A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \ z_a = 2.}$$

$$z_a' = 2\cos x = 0; \quad x_1 = \frac{\pi}{2}.$$

To je

$$\underline{A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \ z_a = 2.}$$

$$AB \equiv b \equiv x = \frac{\pi}{2}; \quad z_b = 1 + \sin y + \cos y \quad \text{za} \quad 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}.$$

$$\underline{\text{U } B\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ z_b = 2.}$$

$$z_b' = \cos y - \sin y = 0 \quad \text{ili} \quad \operatorname{tg} y = 0$$

$y_1 = 0.$ To je opet $\underline{A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad z_b = 2}$

$y_2 = \pi,$ $B_1\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ otpada, jer leži izvan pravokutnika.

$$BC \equiv c \equiv y = \frac{\pi}{2}: \quad z_c = \sin x + \cos x + 1 \text{ za } 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}.$$

$$\underline{\text{U } C\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad z_c = 2.}$$

$$z_c' = \cos x - \sin x = 0 \quad \text{ili} \quad \operatorname{tg} x = 0$$

$x_1 = 0.$ To je $\underline{C\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad z_c = 2,}$

$x_2 = \pi$ otpada.

$$CO \equiv d \equiv x = 0$$

$$z_d = 2 \sin y \quad \text{za} \quad 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$$

$$z_d' = 2 \cos y = 0, \quad y = \frac{\pi}{2},$$

opet

$$\underline{C\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \qquad z_d = 2.}$$

Vidimo da je $z_{\text{maks}} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ unutra područja u $S\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ i $z_{\min} = 0$ u međašnjoj tački $O(0, 0)$.

290. Odredi najveću i najmanju vrijednost funkcije $z = x^2 y (4 - x - y)$ u trokutu omeđenom pravcima $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 6$.

[$z_{\text{maks}} = 4$ u tački $(2, 1)$ unutar trokuta,
$z_{\min} = -64$ u međašnjoj tački $(4, 2)$].

291. Odredi najveću i najmanju vrijednost funkcije $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ u pravokutniku omeđenom pravcima $x = 0$; $y = 0$; $x = 1$; $y = 2$.

[$z_{\text{maks}} = 17$ u tački $(1, 2)$, $z_{\min} = -3$ u tački $(1, 0)$, obje su tačke međašnje.
Stacionarna tačka $S(-4, 6)$ leži izvan zadanog područja].

292. Odredi najveću i najmanju vrijednost funkcije $z = x^2 - y^2$ u krugu $x^2 + y^2 \leqq 4$.

[$z_{\text{maks}} = 4$ u tačkama $(2, 0)$ i $(-2, 0)$; $z_{\min} = -4$ u tačkama $(0, 2)$ i $(0, -2)$,
sve su te tačke međašnje, tačka $S(0, 0)$ ne daje ekstrema].

H. Geometrijske primjene parcijalnih derivacija funkcija

a. SINGULARNE TAČKE RAVNIH KRIVULJA

Formule

Rješenja sustava jednadžbi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (103)$$

daju koordinate singularne tačke $T_0(x_0, y_0)$ krivulje $F(x, y) = 0$, ako ta rješenja zadovoljavaju i jednadžbu zadane krivulje. U tom je slučaju

$$\begin{aligned} T_0(x_0 y_0) \text{ dvostruka tačka, ako je } & r_0 t_0 - s_0^2 < 0, \\ \text{šiljak, ako je } & r_0 t_0 - s_0^2 = 0 \\ \text{izolirana tačka, ako je } & r_0 t_0 - s_0^2 > 0. \end{aligned} \qquad (104)$$

Zadaci

U zadacima **293** do **301** uključivo odredi singularne tačke zadanih krivulja.

293. $x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16 = 0.$

Računamo prema (103):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 4x^3 - 16x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 4y^3 - 20y = 0. \end{aligned}\right| \qquad (a)$$

Odatle:

$$x_1 = 0; \quad x_{2,3} = \pm 2; \quad y_1 = 0 \quad \text{i} \quad y_{2,3} = \pm\sqrt{5}.$$

Dobili smo tri vrijednosti za x i tri za y za koje se poništavaju parcijalne derivacije zadane funkcije. Međutim, da te tačke budu singularne, one moraju ležati na zadanoj krivulji, tj. izračunate koordinate moraju zadovoljavati ne samo jednadžbe (a) već i jednadžbu zadane krivulje.

Uvrštavajući u tu jednadžbu vrijednosti dobivene za x i y opažamo da samo dva para vrijednosti i to $x_1 = 2$ i $y_1 = 0$, a također $x_2 = -2$ i $y_2 = 0$ zadovoljavaju jednadžbu krivulje, pa zadana krivulja ima dvije singularne tačke $T_1(2, 0)$ i $T_2(-2, 0)$.

Sada računamo prema (104):

	u $T_1(2, 0)$	u $T_2(-2, 0)$
$r = F_{xx} = 12x^2 - 16$	$r_1 = 32$	$r_2 = 32$
$s = F_{xy} = 0$	$s_1 = 0$	$s_2 = 0$
$t = F_{yy} = 12y^2 - 20$	$t_1 = -20$	$t_2 = -20.$

U T_1 i T_2 $\quad r_1 t_1 - s_1^2 = -640 < 0,$ pa su obje tačke dvostruke.

294. $x^4 + 12x^3 - 6y^3 + 36x^2 + 27y^2 - 81 = 0.$

[Tri dvostruke tačke $T_1(0, 3)$, $T_2(-3, 0)$ i $T_3(-6, 3)$].

295. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4.$

$$F \equiv x^2 + y^2 - x^4 - y^4 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 2x - 4x^3 = 0 \\ F_y &= 2y - 4y^3 = 0. \end{aligned}\right|$$

Odatle:

$$x_1 = 0; \quad x_{2,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad y_1 = 0 \quad \text{i} \quad y_{2,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Samo jedan par vrijednosti zadovoljava i jednadžbu zadane krivulje i to $(0, 0)$, pa krivulja ima samo jednu singularnu tačku $T_0(0, 0)$.

$$\begin{aligned} r &= 2 - 12x^2, \quad \text{a u } T_0: & r_0 &= 2 \\ s &= 0 & s_0 &= 0 \\ t &= 2 - 12y^2 & t_0 &= 2 \end{aligned}$$

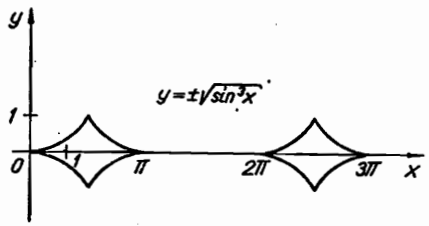
$$r_0 t_0 - s^2 = 4 > 0.$$

Tačka $T_0(0, 0)$ je izolirana tačka.

296. $y^2 = \sin^3 x$

$$F \equiv \sin^3 x - y^2 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 3\sin^2 x \cos x = 0 \\ F_y &= -2y = 0. \end{aligned}\right|$$



Slika 35.

Odatle:

$$\left.\begin{aligned} \sin^2 x = 0 \quad & x_1 = k\pi \\ \cos x = 0 \quad & x_2 = \frac{\pi}{2}(2k+1) \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

$$y = 0.$$

Singularne su tačke $T(k\pi, 0)$, jer koordinate $(k\pi, 0)$ zadovoljavaju i zadanu funkciju.

u T $(k\pi, 0)$

$$\begin{aligned} r &= 3(-\sin^2 x + \sin 2x \cos x) & r &= 0 \\ s &= 0 & s &= 0 \\ t &= -2 & t &= -2. \end{aligned}$$

pa je $rt - s^2 = 0$. Slijedi: u tačkama T je šiljak.

Iz slike 35 vidimo da krivulja ima u tačkama $T(k\pi, 0)$ šiljke prve vrste, pri čemu je os X zajednička tangenta za obje grane krivulje.

297. $x^3 + xy^2 - ay^2 = 0.$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 3x^2 + y^2 = 0 \\ F_y &= 2xy - 2ay = 0. \end{aligned}\right|$$

Slijedi:

$$2y(x - a) = 0 \quad \text{pa je} \quad y = 0 \quad \text{i} \quad x = a,$$

dok iz $F_x = 0$ imamo za $y = 0$ i $x = a$:

$$x = 0 \quad \text{i} \quad y = \pm\sqrt{-3a^2}.$$

Kako vrijednosti $x_1 = 0$ i $y_1 = 0$ zadovoljavaju i jednadžbu zadane krivulje, $T_0(0, 0)$ je singularna tačka.

$$\begin{aligned} r &= 6x & \text{a u } T_0: & r_0 &= 0 \\ s &= 2y & & s_0 &= 0 \\ t &= 2x - 2a & & t_0 &= -2a \end{aligned}$$

$$r_0 t_0 - s_0^2 = 0.$$

Tačka $T_0(0, 0)$ je šiljak prve vrste. Zadana krivulja je cisoida (vidi sl. 90 u I dijelu Repetitorija).

298. $x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0.$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 2xy^2 - 2x = 0 \\ F_y &= 2yx^2 - 2y = 0. \end{aligned}\right|$$

Slijedi:

$$y = x \quad \text{pa je} \quad 2x^3 - 2x = 0 \quad \text{ili}$$

$$2x(x^2 - 1) = 0$$

$$x_1 = y_1 = 0; \quad x_{2,3} = y_{2,3} = \pm 1.$$

Samo koordinate tačke $T_0(0, 0)$ zadovoljavaju i jednadžbu zadane krivulje, pa je $T_0(0, 0)$ singularna tačka krivulje.

$$\begin{aligned} r &= 2y^2 - 2 & r_0 &= -2 \\ s &= 4xy & s_0 &= 0 \\ t &= 2x^2 - 2 & t_0 &= -2. \end{aligned} \qquad r_0 t_0 - s_0^2 = 4 > 0$$

Tačka $T(0, 0)$ je izolirana tačka krivulje.

299. $x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y = 0.$

[Dvostruka tačka $T_0\,(0, 0)$, nariši krivulju koja se zove Descartesov list].

300. $y^2 = (x - a)^3.$

[$T_0\,(a, 0)$ šiljak I vrste. Nariši krivulju].

301. $(y - x^2)^2 = x^5.$

[$T_0\,(0, 0)$ šiljak II vrste. Nariši krivulju].

b. OVOJNICE (ANVELOPE) FAMILIJA RAVNIH KRIVULJA OVISNIH O JEDNOM PARAMETRU

Formule

Za zadanu familiju krivulja $F(x, y, \alpha) = 0$, gdje je α parametar, jednadžba ovojnice se dobije tako da se iz sustava jednadžbi

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} &= 0 \\ F(x, y, \alpha) &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (105)$$

ukloni parametar α, ukoliko tako dobivena jednadžba ne predočuje geometrijsko mjesto singularnih tačaka zadane familije.

Zadaci

302. Odredi ovojnicu familije pravaca $y = 2\,m\,x + m^4$, gdje je m parametar.

Prema (105):

$$\left.\begin{aligned} F &\equiv 2\,m\,x + m^4 - y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial m} &= 2\,x + 4\,m^3 = 0. \end{aligned}\right|$$

Iz druge jednadžbe slijedi

$$m = -\sqrt[3]{\frac{x}{2}}$$

dok uvrštenje u prvu daje

$$-2\sqrt[3]{\frac{x}{2}} \cdot x + \sqrt[3]{\frac{x^4}{16}} - y = 0$$

ili

$$-\frac{3}{2}\,x\sqrt[3]{\frac{x}{2}} = y \quad \Big|^3$$

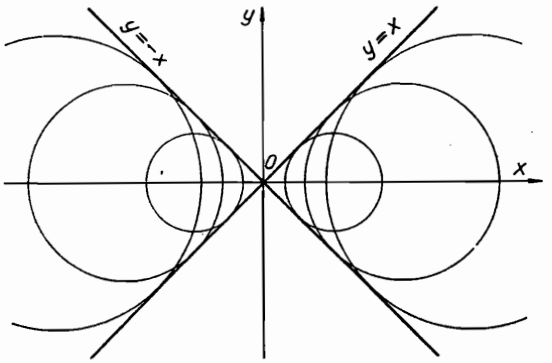
$$-\frac{27}{16}\,x^4 = y^3$$

pa je

$$\underline{27\,x^4 + 16\,y^3 = 0 \text{ jednadžba ovojnice.}}$$

303. Odredi ovojnicu za familiju kružnica $(x - a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$.

$$\left.\begin{aligned} F &\equiv (x - a)^2 + y^2 - \frac{a^2}{2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial a} &= -2\,(x - a) - a = 0. \end{aligned}\right|$$



Slika 36.

Iz druge jednadžbe slijedi $a = 2\,x$, a uvrštenje u prvu daje traženu jednadžbu ovojnice:

$\underline{y = \pm\,x.}$ (Vidi sl. 36).

304. Odredi ovojnicu familije pravaca zadanih u normalnom obliku $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$ (p je pozitivna konstanta).

$$\left.\begin{aligned} F &\equiv x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha} &= -x \sin\alpha + y \cos\alpha = 0. \end{aligned}\right|$$

Iz druge jednadžbe imamo:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},$$

a kako je prema poznatim trigonometrijskim formulama

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} \quad \text{a} \quad \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}},$$

dobijemo

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{i} \quad \sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Uvrštenje u prvu jednadžbu sustava daje

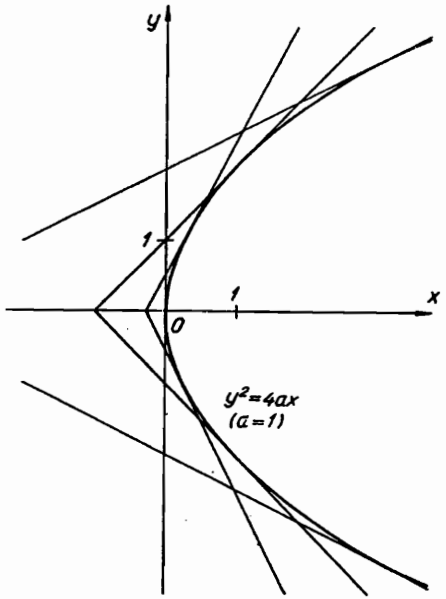
$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = p$$

ili

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = p \quad \Big|^2$$

$$\underline{x^2+y^2=p^2.}$$

Kružnica polumjera p je tražena ovojnica, koju pravci zadane familije tangiraju. Nariši sliku!



Slika 37.

305. Odredi ovojnicu familije pravaca $y = kx + \frac{a}{k}$, gdje je k parametar dok je a konstanta.

$$F \equiv kx + \frac{a}{k} - y = 0$$

$$F_k = x - \frac{a}{k^2} = 0.$$

Iz druge jednadžbe slijedi $k = \sqrt{\frac{a}{x}}$, dok uvrštenje u prvu daje

$$\sqrt{\frac{a}{x}}\,x + a\sqrt{\frac{x}{a}} = y$$

ili

$$2\sqrt{ax} = y \quad |^2$$

$$\underline{y^2 = 4ax} \text{ (vidi sl. 37).}$$

Vidi Repetitorij II dio, § 10, 2. f) Tip V.

306. Odredi ovojnicu familije parabola $y^2 = 2px + p^2$.

$$F \equiv 2px + p^2 - y^2 = 0$$

$$F_p = 2x + 2p = 0.$$

Odatle:

$$p = -x \quad \text{pa je} \quad -2x^2 + x^2 - y^2 = 0$$

ili

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Zadana familija parabola nema ovojnice, jer iz dobivene jednakosti slijedi samo $x = 0$ i $y = 0$ u realnom području, tj. ishodište koordinatnog sustava.

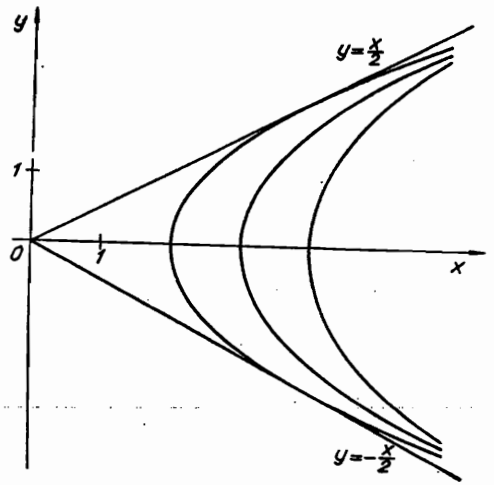
307. Odredi ovojnicu familije parabola $y^2 = a(x-a)$.

$$F \equiv ax - a^2 - y^2 = 0$$

$$F_a = x - 2a = 0.$$

Odatle:

$$a = \frac{x}{2}, \quad \text{pa je} \quad y^2 = \frac{x^2}{4},$$



Slika 38.

odnosno

$$\underline{y = \pm\frac{x}{2}} \quad \text{(vidi sl. 38).}$$

308. Odredi ovojnicu familije elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ konstantne površine S.

Znamo da je $S = ab\pi$, a odatle je $b = \frac{S}{a\pi}$. Slijedi:

$$F \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{a^2\pi^2y^2}{S^2} - 1 = 0$$

pa je

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -\frac{2x^2}{a^3} + \frac{2a\pi^2y^2}{S^2} = 0.$$

Odatle dobijemo:

$$a^2 = \pm \frac{S x}{\pi y}.$$

Uvrštenje u F daje

$$\pm \frac{\pi y x^2}{S x} \pm \frac{S x \pi^2 y^2}{\pi y S^2} = 1$$

ili

$$\underline{x y = \pm \frac{S}{2\pi}}, \quad \text{odnosno} \quad \underline{y = \pm \frac{S}{2\pi} \cdot \frac{1}{x}}.$$

Ovojnica je par konjugiranih istostranih hiperbola.

309. Odredi ovojnicu trajektorija metaka izbačenih u vertikalnoj ravnini s početnom brzinom v_0, ako se kut izbačaja α mijenja od 0^0 do 180^0 a otpor zraka zanemari. Vidi sl. 39.

Iz mehanike poznata nam je jednadžba trajektorije metka

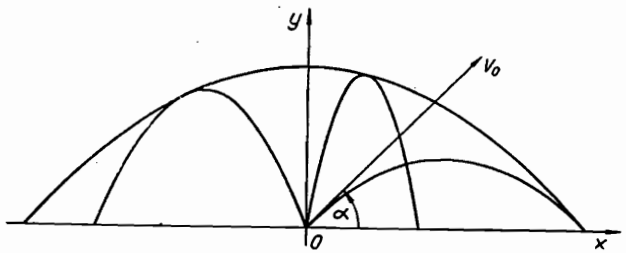
$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2,$$

gdje je g akceleracija sile teže, ili

$$F \equiv x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 - y = 0.$$

Računamo:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{x}{\cos^2 \alpha} - \frac{g x^2 \sin \alpha}{v_0^2 \cos^3 \alpha} = 0.$$



Slika 39.

Parametar α treba ukloniti iz tih jednadžbi. Iz druge jednadžbe slijedi:

$$\frac{x}{\cos^2 \alpha} \cdot \left(1 - \frac{g x \operatorname{tg} \alpha}{v_0^2}\right) = 0$$

$$\frac{x}{\cos^2 \alpha} \neq 0, \quad \text{pa je} \quad 1 - \frac{g x \operatorname{tg} \alpha}{v_0^2} = 0$$

a odatle je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{g x}.$$

Uvrštenje u prvu jednadžbu uz $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ daje:

$$\frac{v^2}{g} - \frac{g x^2}{2 v_0^2} \left(1 + \frac{v_0^4}{g^2 x^2}\right) - y = 0$$

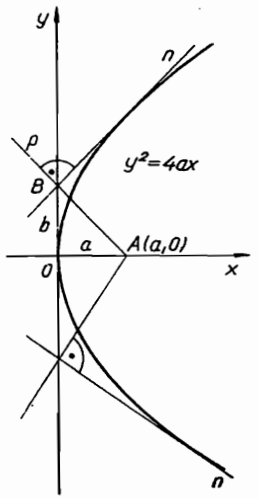
ili

$$\underline{y = \frac{v^2}{2 g} - \frac{g}{2 v_0^2} x^2.}$$

To je tzv. »parabola sigurnosti«.

310. Zadan je pramen zraka s vrhom u $A(a, 0)$. Odredi ovojnicu normala povučenih na pravce tog pramena u sjecištima tih pravaca s osi Y. Vidi sl. 40.

Jednadžba zadanog pramena glasi: $y = k(x - a)$, gdje je k parametar.



Slika 40.

Napišimo jednadžbu normale n na pravac p pramena, koji prolazi bilo kojom tačkom $B(0, b)$ na osi Y:

$$y - b = -\frac{1}{k} x$$

ili

$$y - b + \frac{x}{k} = 0. \qquad \text{(a)}$$

Tačka $B(0, b)$ leži na pravcu pramena $y = k(x - a)$, pa je

$$b = -a k.$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$F \equiv y + a k + \frac{x}{k} = 0.$$

Računamo:

$$\frac{\partial F}{\partial k} = a - \frac{x}{k^2} = 0$$

pa je

$$k = \sqrt{\frac{x}{a}}.$$

Uvrštenje u F daje:

$$y + a\sqrt{\frac{x}{a}} + x\sqrt{\frac{a}{x}} = 0$$

ili

$$y = -2\sqrt{a\,x}\,|^2$$

$$\underline{y^2 = 4\,a\,x.}$$

Ovojnica je parabola u vršnom obliku.

311. Odredi ovojnicu familije polukubnih parabola

$$(y-a)^2 = (x-a)^3.$$

$$F = (x-a)^2 - (y-a)^3 = 0$$

$$F_a = -3(x-a)^2 + 2(y-a) = 0.$$

Odatle

$$y - a = \frac{3}{2}(x-a)^2.$$

Uvrštenje u F daje:

$$\frac{9}{4}(x-a)^4 - (x-a)^2 = 0$$

ili

$$(x-a)^2\left[\frac{9}{4}(x-a) - 1\right] = 0.$$

Odatle:

$$a_1 = x$$

$$a_2 = x - \frac{4}{9}.$$

Uvrštenje u F daje:

za $a_1 = x$: $(y-x)^2 = 0$ pa je $\underline{y = x}$

za $a_2 = x - \frac{4}{9}$: $\left(\frac{4}{9}\right)^3 - \left(y - x + \frac{4}{9}\right)^2 = 0$

ili

$$y - x + \frac{4}{9} = \left(\sqrt{\frac{4}{9}}\right)^3$$

pa je

$$\underline{y = x - \frac{4}{27}.}$$

Prikaži grafički zadanu familiju polukubnih parabola pa ćeš vidjeti da je pravac $y = x$ geometrijsko mjesto singularnih tačaka (šiljaka) tih parabola, dok je pravac $y = x - \frac{4}{27}$ ovojnica.

312. Odredi ovojnicu familije pravaca koji zatvaraju s koordinatnim osima trokute konstantne površine S.

Znamo jednadžbu pravca u segmentnom obliku:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1. \qquad \text{(a)}$$

Kako je

$$S = \frac{m \cdot n}{2}, \quad \text{pa je} \quad n = \frac{2S}{m}. \qquad \text{(b)}$$

Uvrštenje (b) u (a) daje jednoparametarsku jednadžbu zadane familije pravaca

$$F \equiv \frac{x}{m} + \frac{y\,m}{2S} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial m} = -\frac{x}{m^2} + \frac{y}{2S} = 0.$$

Odatle je $m = \sqrt{\frac{2Sx}{y}}$, dok uvrštenje m u (b) daje $n = \sqrt{\frac{2Sy}{x}}$.

Uvrštenje u (a) daje nakon uređenja

$$\underline{y = \frac{S}{2} \cdot \frac{1}{x}.}$$

Tražena ovojnica je istostrana hiperbola. Prikaži je grafički kao i pravce zadane familije.

313. Odredi ovojnice zadanih familija parabola i sve prikaži grafički

a) $a\,x^2 + a^2\,y = 1$

$$\left[y = -\frac{x^4}{16}\right].$$

b) $y = a^2(x-a)^2$

$$\left[y = 0 \quad \text{i} \quad y = \frac{x^4}{16}\right].$$

314. Odredi ovojnicu familije elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ako je zbroj poluosiju svake elipse jednak d.

$$[\text{astroida } x^{2/3} + y^{2/3} = d^{2/3}].$$

315. Pravac se pomiče tako da je zbroj segmenata, tj. odrezaka na koordinatnim osima, ostaje konstantan i jednak c. Odredi ovojnicu te familije pravaca uz grafički prikaz.

$$[\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}].$$

315a. Riješi isti zadatak, ako je produkt segmenata, tj. $m \cdot n = c$ (konstanta).

$$\left[y = \frac{c}{4} \cdot \frac{1}{x}\right].$$

VIŠESTRUKI INTEGRALI

IV. DVOSTRUKI INTEGRALI

A. Promjena redoslijeda integriranja u dvostrukim integralima i računanje tih integrala

Formula

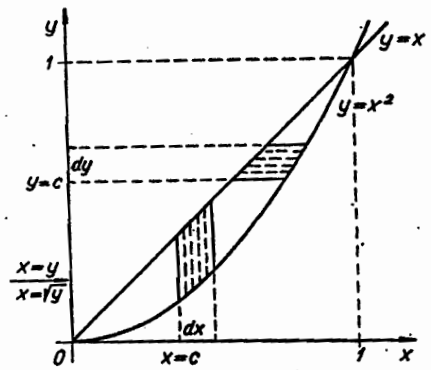
$$\iint_{\sigma} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx. \qquad (106)$$

Zadaci

U zadacima **316** do **330** uključivo promijeni redoslijed integriranja.

316. $\displaystyle\int_0^1 dy \underbrace{\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx}_{y=c} =$

iz zadanog integrala vidimo da se najprije integriralo u smjeru osi X uz $y = c$ (konstanta) i $dy = c$ (vidi sliku 41) i to od pravca $x = y$ do parabole $x = \sqrt{y}$, a zatim se integriralo u smjeru osi Y od $y = 0$ do $y = 1$, pa je područje integracije segment parabole. Promijenimo li redoslijed integriranja, moramo najprije integrirati u smjeru osi Y uzevši $x = c$ i $dx = c$ i to od parabole $y = x^2$ do pravca $y = x$, a zatim integrirati u smjeru osi X od $x = 0$ do $x = 1$,



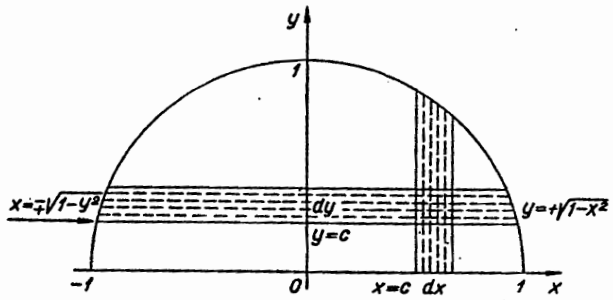
Slika 41.

kako se to vidi iz slike, pa je

$$= \int_0^1 dx \underbrace{\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy}_{x=c}.$$

317. $\displaystyle\int_{-1}^1 dx \underbrace{\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy}_{x=c} =$

iz zadanog integrala vidimo da se najprije integriralo u smjeru osi Y uz konstantne x i dx i to od $y = 0$ do kružnice $y = +\sqrt{1-x^2}$ (vidi sl. 42), a zatim u smjeru osi X od $x = -1$ do $x = 1$.



Slika 42.

Promijenimo li redoslijed integriranja, moramo najprije integrirati u smjeru osi X uz neke konstantne y i dy i to od $x = -\sqrt{1-y^2}$ do $x = +\sqrt{1-y^2}$; a zatim u smjeru osi Y i to od $y = 0$ do $y = 1$, pa je

$$= \int_0^1 dy \underbrace{\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx}_{y=c}.$$

318. $\displaystyle\int_0^r dx \underbrace{\int_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x,y)\,dy}_{x=c} =$

pri integriranju u smjeru osi Y uz neke konstantne x i dx uzet je za donju granicu pravac $y = x$, a za gornju granicu kružnica $y = \sqrt{2rx - x^2}$ ili $y^2 = 2rx - x^2$ ili $x^2 + y^2 \rightarrow$

VIŠESTRUKI INTEGRALI

IV. DVOSTRUKI INTEGRALI

A. Promjena redoslijeda integriranja u dvostrukim integralima i računanje tih integrala

Formula

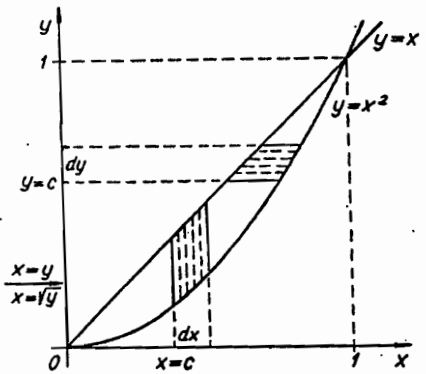
$$\iint_{\sigma} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx. \qquad (106)$$

Zadaci

U zadacima **316** do **330** uključivo promijeni redoslijed integriranja.

316. $\displaystyle\int_0^1 dy \underbrace{\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx}_{y=c} =$

iz zadanog integrala vidimo da se najprije integriralo u smjeru osi X uz $y = c$ (konstanta) i $dy = c$ (vidi sliku 41) i to od pravca $x = y$ do parabole $x = \sqrt{y}$, a zatim se integriralo u smjeru osi Y od $y = 0$ do $y = 1$, pa je područje integracije segment parabole. Promijenimo li redoslijed integriranja, moramo najprije integrirati u smjeru osi Y uzevši $x = c$ i $dx = c$ i to od parabole $y = x^2$ do pravca $y = x$, a zatim integrirati u smjeru osi X od $x = 0$ do $x = 1$,



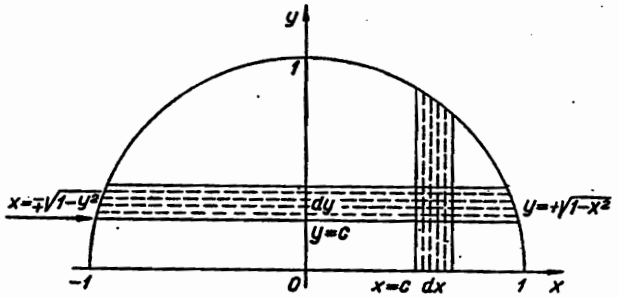
Slika 41.

kako se to vidi iz slike, pa je

$$= \int_0^1 dx \underbrace{\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy}_{x=c}.$$

317. $\displaystyle\int_{-1}^1 dx \underbrace{\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy}_{x=c} =$

iz zadanog integrala vidimo da se najprije integriralo u smjeru osi Y uz konstantne x i dx i to od $y = 0$ do kružnice $y = +\sqrt{1-x^2}$ (vidi sl. 42), a zatim u smjeru osi X od $x = -1$ do $x = 1$.



Slika 42.

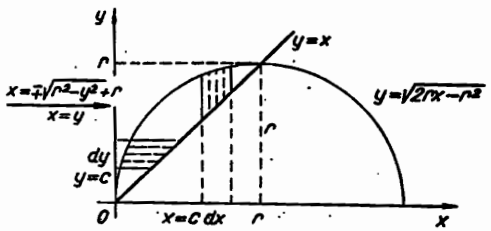
Promijenimo li redoslijed integriranja, moramo najprije integrirati u smjeru osi X uz neke konstantne y i dy i to od $x = -\sqrt{1-y^2}$ do $x = +\sqrt{1-y^2}$; a zatim u smjeru osi Y i to od $y = 0$ do $y = 1$, pa je

$$= \int_0^1 dy \underbrace{\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx}_{y=c}.$$

318. $\displaystyle\int_0^r dx \underbrace{\int_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x,y)\,dy}_{x=c} =$

pri integriranju u smjeru osi Y uz neke konstantne x i dx uzet je za donju granicu pravac $y = x$, a za gornju granicu kružnica $y = \sqrt{2rx - x^2}$ ili $y^2 = 2rx - x^2$ ili $x^2 + y^2 \rightarrow$

$-2rx = 0$ ili $(x-r)^2 + y^2 = r^2$ (vidi sl. 43), a zatim se integriralo u smjeru osi X od 0 do r, pa je područje integracije segment kruga Nakon promjene redoslijeda integriranja

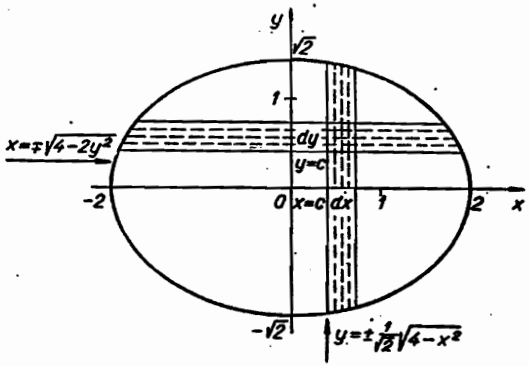


Slika 43.

najprije integriramo u smjeru osi X uz neke konstantne y i dy i to od kružnice, kojoj je inverzna jednadžba $x = \mp\sqrt{r^2 - y^2} + r$, do tetive $x = y$, a zatim u smjeru osi Y od $y = 0$ do $y = r$, pa je

$$= \int_0^r dy \int_{-\sqrt{r^2-y^2}+r}^{y} f(x,y)\,dx.$$

319. $$\int_{-2}^{2} dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy =$$



Slika 44.

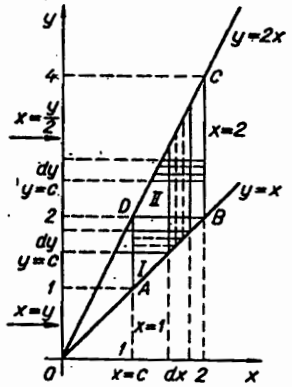
kako se vidi iz sl. 44 područje integracije je elipsa s poluosima 2 i $\sqrt{2}$ kojoj je jednadžba $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}$ ili $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, te u inverznom obliku njena jednadžba glasi $x = \mp\sqrt{4-2y^2}$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{+\sqrt{4-2y^2}} f(x,y)\,dx.$$

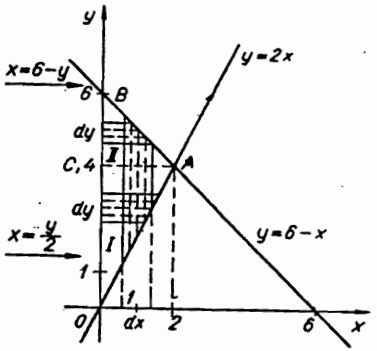
320. $$\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)\,dy =$$

kako se vidi iz zadanog integrala i slike 45, područje integracije je četverokut $ABCD$, što ga čine pravci $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$ i $x = 2$. Iz slike se vidi dalje da pri promjeni redoslijeda integriranja moramo područje integracije, tj. četverokut $ABCD$ podijeliti u dva trokuta ADB i BCD pa dobijemo dva dvostruka integrala

$$= \int_1^2 dy \int_1^y f(x,y)\,dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,dx.$$



Slika 45.



Slika 46.

321. $$\int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x,y)\,dy =$$

iz slike 46 se vidi da nakon promjene redoslijeda integriranja treba područje integracije, što ga čini $\triangle OAB$, podijeliti u dva trokuta OAC i CAB

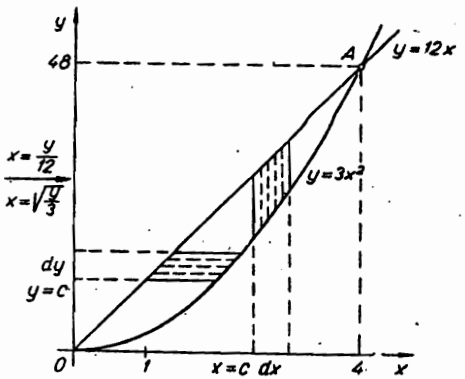
$$= \int_0^4 dy \int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx + \int_4^6 dy \int_0^{6-y} f(x,y)\,dx.$$

322. $$\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)\,dy =$$

područje integracije omeđeno je parabolom $y = 3x^2$ i pravcem $y = 12x$; riješimo li te dvije jednadžbe zajedno, dobit ćemo koordinate sjecišta $O(0,0)$ i $A(4,48)$, te je područje

... parabole, kako se to vidi iz slike 47

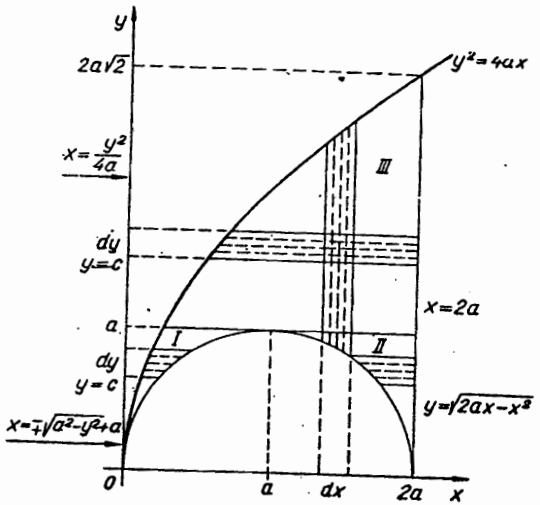
$$= \int_0^{48} dy \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x, y)\, dx.$$



Slika 47.

323. $\displaystyle\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y)\, dy =$

područje integracije omeđeno je polukružnicom $y = \sqrt{2ax - x^2}$, odnosno $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, parabolom $y = \sqrt{4ax}$, odnosno $y^2 = 4ax$, kojim su inverzne jednadžbe $x = a \mp \sqrt{a^2 - y^2}$ i $x = \frac{y^2}{4a}$, i pravcem $x = 2a$, pri čemu za $x = 2a$ ordinata parabole



Slika 48.

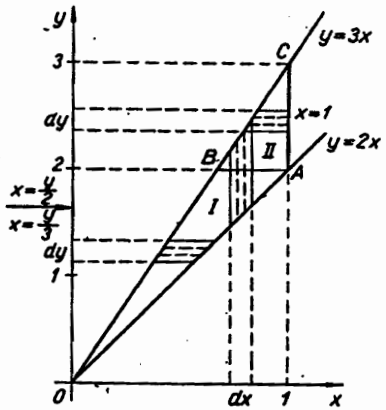
prima vrijednost $y = 2a\sqrt{2}$. Iz slike 48 se vidi da pri promjeni redoslijeda integriranja treba područje integracije podijeliti u tri dijela pa se dobiju tri dvostruka integrala

$$= \int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y)\, dx + \int_a^{2a\sqrt{2}} dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f(x, y)\, dx.$$

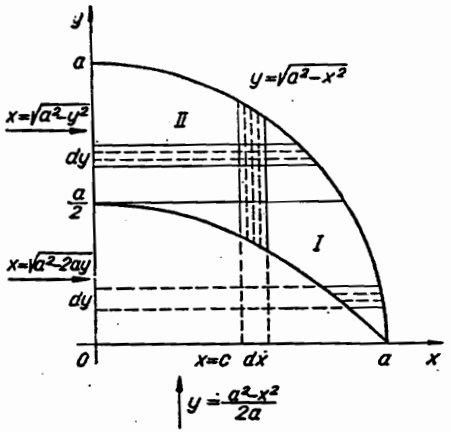
324. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y)\, dy =$

iz slike 49 se vidi da je područje integracije trokut, što ga čine pravci $y = 2x$, $y = 3x$ i $x = 1$, i da se taj trokut raspada na dva dijela OAB i BAC pri promjeni redoslijeda integriranja

$$= \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x, y)\, dx + \int_2^3 dy \int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x, y)\, dx.$$



Slika 49.



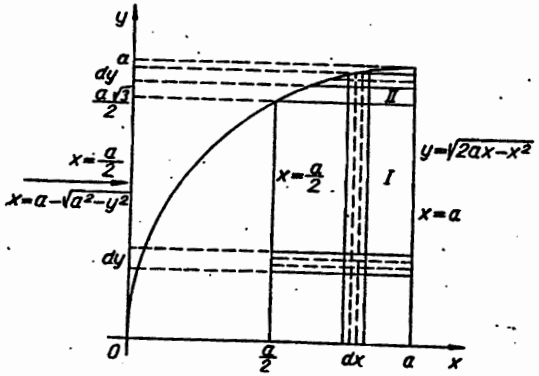
Slika 50.

325. $\displaystyle\int_0^a dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy =$

područje integracije omeđeno je parabolom $y = \frac{a^2 - x^2}{2a}$; kvadrantom kružnice $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, kojim su inverzne jednadžbe $x = \sqrt{a^2 - 2ay}$ i $x = \sqrt{a^2 - y^2}$, i osiju Y. Iz slike 50 vidimo da promjena redoslijeda integriranja vodi do dva dvostruka integrala

$$= \int_0^{\frac{a}{2}} dy \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx.$$

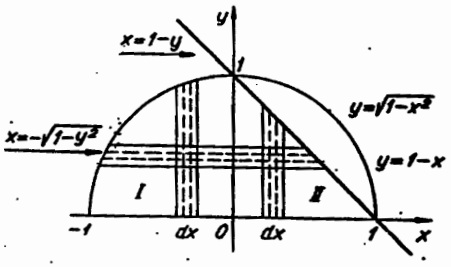
326. $\displaystyle\int_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy =$



Slika 51.

kako se vidi iz slike 51 područje integracije omeđeno je lukom kružnice $y = \sqrt{2ax - x^2}$, odnosno $x = a - \sqrt{a^2 - y^2}$, i pravcima $x = \frac{a}{2}$, $x = a$ i $y = 0$, pri čemu ordinata kružnice za $x = \frac{a}{2}$ iznosi $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$= \int_{0}^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} dy \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x,y)\,dx + \int_{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{a} dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a} f(x,y)\,dx.$$



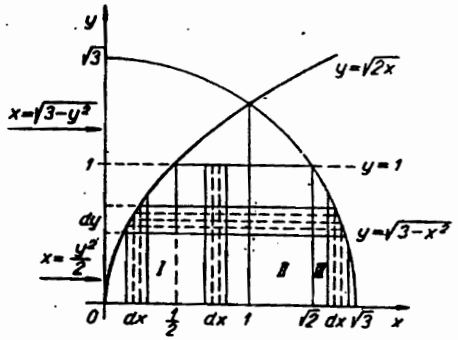
Slika 52.

327. $\displaystyle\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx =$

iz slike 52 vidimo područje integracije koje se raspada na dva dijela

$$= \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1-x} f(x\ y)\,dy.$$

328. $\displaystyle\int_{0}^{1} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x\ y)\,dx =$

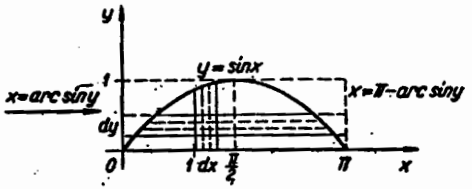


Slika 53.

iz slike 53 vidimo da je područje integracije omeđeno parabolom $x = \frac{y^2}{2}$, odnosno $y = \sqrt{2x}$, kvadrantom kružnice $x = \sqrt{3 - y^2}$, odnosno $y = \sqrt{3 - x^2}$, i pravcima $y = 0$ i $y = 1$ i da se zadani integral raspada pri promjeni redoslijeda integriranja u tri integrala

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} dx \int_{0}^{\sqrt{2}x} f(x,y)\,dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{0}^{1} f(x,y)\,dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_{0}^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

328a. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} dx \int_{0}^{\sin x} f(x\ y)\,dy =$



Slika 54.

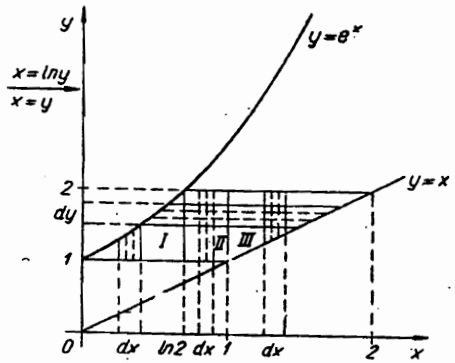
iz slike 54 se vidi da nakon promjene redoslijeda integracije pri integriranju u smjeru osi X granice su $x = \arcsin y$ i $x = \pi - \arcsin y$

$$= \int_{0}^{1} dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)\,dx.$$

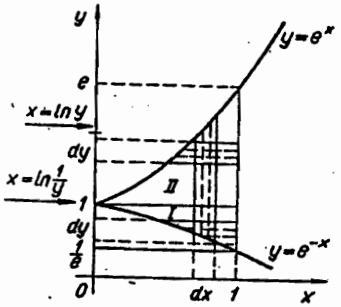
329. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{\ln y}^{y} f(x,y)\,dx =$

iz zadanog integrala i slike 55 vidimo da je područje integracije četverokut što ga čine logaritamska krivulja $x = \ln y$, odnosno eksponencijalna $y = e^x$, pravac $x = y$, odnosno $y = x$, i pravci $y = 1$ i $y = 2$ i da pri promjeni redoslijeda integriranja dobijemo tri dvostruka integrala

$$= \int\limits_0^{\ln 2} dx \int\limits_1^{e^x} f(x,y)\,dy + \int\limits_{\ln 2}^{1} dx \int\limits_1^{2} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^{2} dx \int\limits_x^{2} f(x,y)\,dy.$$



Slika 55.



Slika 56.

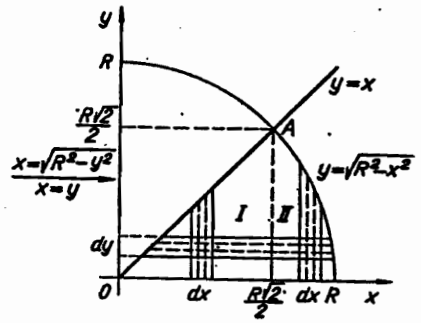
330. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{e^{-x}}^{e^x} f(x,y)\,dy =$

područje integracije omeđuju eksponencijalne krivulje $y = e^{-x}$, odnosno $x = -\ln y = \ln\frac{1}{y}$, $y = e^x$, odnosno $x = \ln y$, i pravac $x = 1$, pa prema slici 56 imamo

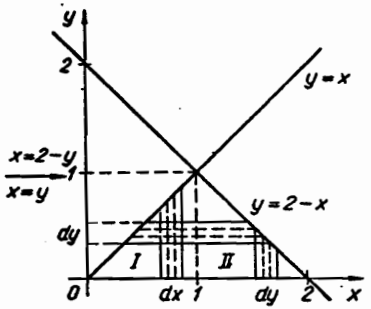
$$= \int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} dy \int\limits_{\ln\frac{1}{y}}^{1} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f(x,y)\,dx.$$

U zadacima **331** do **335** uključivo promijeni redoslijed integriranja pa prikaži zadani izraz u obliku jednog dvostrukog integrala.

331. $\int\limits_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int\limits_0^{x} f(x,y)\,dy + \int\limits_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dy =$



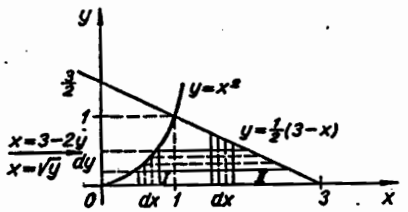
Slika 57.



Slika 58.

pravac $y = x$ i kružnica $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ sijeku se u tački $A\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}, \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$ te prema slici 57 imamo

$$= \int\limits_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dy \int\limits_y^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

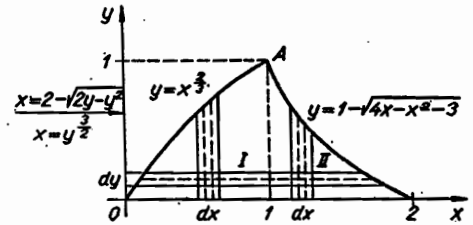


Slika 59.

332. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-y} f(x,y)\,dy =$ prema slici 58 $= \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x,y)\,dx.$

333. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,dy =$ prema slici 59 $= \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx.$

334. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{x^{2/3}} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)\,dy =$

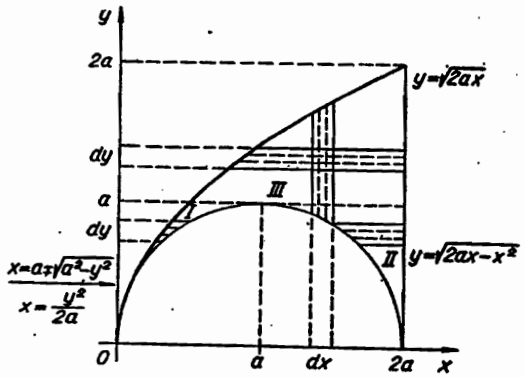


Slika 60.

područje integracije omeđeno je s dvije parabole $y = x^{2/3}$, odnosno $x = y^{3/2}$, $y = 1 - \sqrt{4x - x^2 - 3}$, odnosno $x = 2 - \sqrt{2y - y^2}$, i osi X, pri čemu se obje parabole sijeku u tački $A(1, 1)$, pa prema slici 60 dobijamo

$$= \int_0^1 dy \int_{y^{3/2}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

335. $\displaystyle\int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx + \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\,dx =$



Slika 61.

prema slici 61 iz koje vidimo da je područje integracije omeđeno parabolama $x = \frac{y^2}{2a}$ i $x = a \mp \sqrt{a^2 - y^2}$ i pravcem $x = 2a$ imamo

$$= \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy.$$

U zadacima **336** do **343** uključivo promijeni redoslijed integriranja i izračunaj zadane integrale.

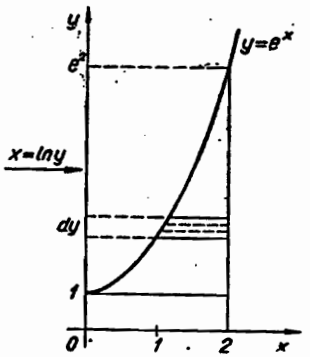
336. $\displaystyle\int_0^2 \int_1^{e^x} dx\,dy = \int_0^2 dx \int_1^{e^x} dy =$

iz zadanog integrala i slike 62 slijedi da je područje integracije omeđeno pravcima $y = 1$, $x = 2$ i krivuljom $y = e^x$, odnosno $x = \ln y$

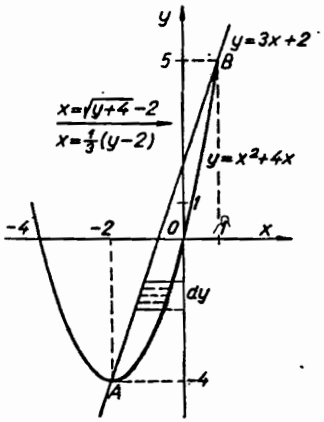
$$= \int_1^{e^2} dy \int_{\ln y}^{2} dx = \int_1^{e^2} dy\,|x|_{\ln y}^{2} = \int_1^{e^2} (2 - \ln y)\,dy = 2\int_1^{e^2} dy - \int_1^{e^2} \ln y\,dy = \text{drugi integral lako}$$

se izračuna načinom parcijalne integracije $= |2y - (y\ln y - y)|_1^{e^2} = |y(3 - \ln y)|_1^{e^2} =$

$$= e^2(3 - \ln e^2) - 3 = e^2(3 - 2\ln e) - 3 = \underline{e^2 - 3}.$$



Slika 62.



Slika 63.

337. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \int_{x^2+4x}^{3x+2} dy\,dx = \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2+4x}^{3x+2} dy =$

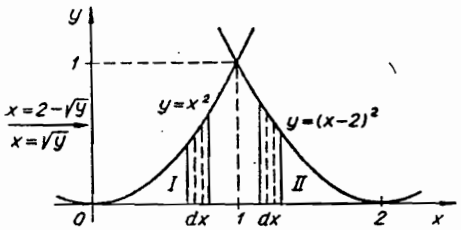
područje integracije omeđeno je parabolom $y = x^2 + 4x$ ili $y = (x + 2)^2 - 4$ pa je $x = \sqrt{y + 4} - 2$ i pravcem $y = 3x + 2$, odnosno $x = \frac{1}{3}(y - 2)$, pri čemu se parabola i pravac sijeku u tačkama $A(-2, -4)$ i $B(1, 5)$, te prema slici 63 imamo

$$= \int_{-4}^{5} dy \int_{\frac{1}{3}(y-2)}^{\sqrt{y+4}-2} dx = \int_{-4}^{5} \left(\sqrt{y+4} - 2 - \frac{y}{3} + \frac{2}{3}\right) dy =$$

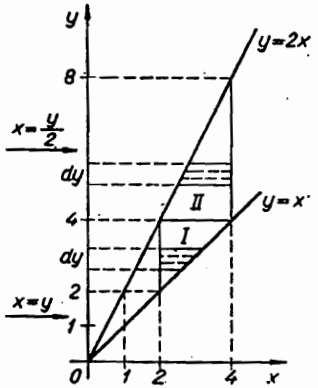
$$= \left|\frac{2}{3}\sqrt{(y+4)^3} - \frac{y^2}{6} - \frac{4}{3}y\right|_{-4}^{5} = \underline{\frac{9}{2}}.$$

338. $\int\limits_0^1\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} x\,y\,dx\,dy$ = s obzirom na sliku 64 dobijemo $= \int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_0^{x^2} y\,dy + \int\limits_1^2 x\,dx \int\limits_0^{(x-2)^2} y\,dy =$

$$= \int\limits_0^1 x\,dx \left|\frac{y^2}{2}\right|_0^{x^2} + \int\limits_1^2 x\,dx \left|\frac{y^2}{2}\right|_0^{(x-2)^2} = \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^1 x^5\,dx + \int\limits_1^2 x(x-2)^4\,dx\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{7}{30}\right) = \underline{\frac{1}{5}}.$$



Slika. 64.



Slika 65.

339. $\int\limits_2^4\int\limits_x^{2x} \frac{y}{x}\,dx\,dy = \int\limits_2^4 \frac{dx}{x}\int\limits_x^{2x} y\,dy =$ prema slici 65 $= \int\limits_2^4 y\,dy \int\limits_2^y \frac{dx}{x} + \int\limits_4^8 y\,dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^4 \frac{dx}{x} =$

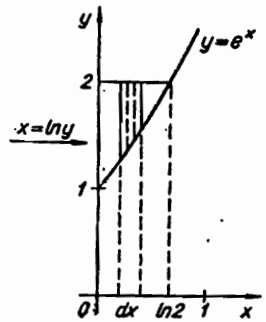
$$= \int\limits_2^4 y\,dy\,|\ln x|_2^y + \int\limits_4^8 y\,dy\,|\ln x|_{\frac{y}{2}}^4 = \int\limits_2^4 y(\ln y - \ln 2)\,dy + \int\limits_4^8 y\left(\ln 4 - \ln\frac{y}{2}\right)dy =$$

$$= \left|\frac{1}{2}y^2\ln y - \frac{1}{2}\frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{2}\ln 2\right|_2^4 + \left|\frac{y^2}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}y^2\ln y + \frac{1}{2}\frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2}\ln 2\right|_4^8 = \underline{9}.$$

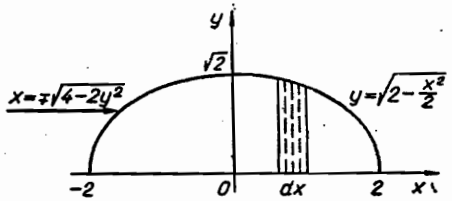
340. $\int\limits_1^2\int\limits_0^{\ln y} e^x\,dx\,dy = \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\ln y} e^x\,dx =$ prema slici 66 $= \int\limits_0^{\ln 2} e^x\,dx \int\limits_{e^x}^2 dy = \int\limits_0^{\ln 2} e^x\,dx\,|y|_{e^x}^2 =$

$$= \int\limits_0^{\ln 2}(2e^x - e^{2x})\,dx = \left|2e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\right|_0^{\ln 2} = 2e^{\ln 2} - \frac{1}{2}e^{2\ln 2} - 2 + \frac{1}{2} = 2\cdot 2 - \frac{1}{2}e^{\ln 4} - \frac{3}{2} =$$

$$= 4 - \frac{1}{2}\cdot 4 - \frac{3}{2} = \underline{\frac{1}{2}}.$$



Siika 66.



Slika 67.

341. $\int\limits_0^{\sqrt{2}}\int\limits_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y\,dx\,dy = \int\limits_0^{\sqrt{2}} y\,dy \int\limits_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} dx =$ prema slici 67 $= \int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}} y\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^2\left(2-\frac{x^2}{2}\right)dx =$

$$= \frac{1}{2}\left|2x - \frac{x^3}{6}\right|_{-2}^2 = \underline{\frac{8}{3}}.$$

342. $\int\limits_0^1\int\limits_{\sqrt{y}}^1 dx\,dy$

$$\left[\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} dy = \frac{1}{3}\right].$$

343. $\int\limits_0^a\int\limits_0^{\sqrt{x}} dx\,dy$

$$\left[\int\limits_0^{\sqrt{a}} dy \int\limits_{y^2}^a dx = \frac{2}{3}a\sqrt{2}\right].$$

U zadacima **344** do **347** uključivo prikaži $\iint f(x,y)\,dx\,dy$, gdje je σ grafičko prikazano područje integracije, u obliku sume dvostrukih integrala s najmanjim brojem adenada.

344. Prema slici 68:

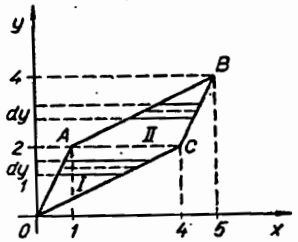
$OC \equiv y = \frac{1}{2}x$, odnosno $x = 2y$

$OA \equiv y = 2x$, odnosno $x = \frac{y}{2}$

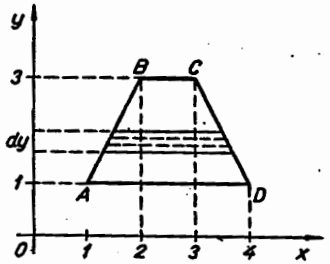
$AB \equiv y - 2 = \frac{1}{2}(x-1)$ ili $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, odnosno $x = 2y - 3$

$BC \equiv y - 2 = 2(x-4)$ ili $y = 2x - 6$, odnosno $x = \frac{y}{2} + 3$.

$$\iint_\sigma f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{2y} f(x,y)\,dx + \int_2^4 dy \int_{2y-3}^{\frac{y}{2}+3} f(x,y)\,dx.$$



Slika 68.



Slika 69.

345. Prema slici 69:

$AD \equiv y = 1$

$BC \equiv y = 3$

$AB \equiv y - 3 = 2(x-2)$ ili $y = 2x - 1$, odnosno $x = \frac{1}{2}(y+1)$

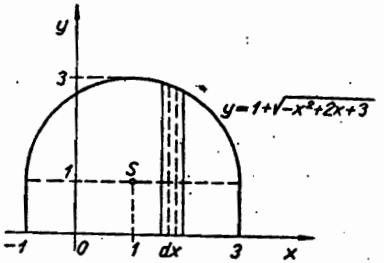
$CD \equiv y - 3 = -2(x-3)$ ili $y = -2x + 9$, odnosno $x = \frac{1}{2}(9-y)$

$$\iint_\sigma f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^3 dy \int_{\frac{1}{2}(y+1)}^{\frac{1}{2}(9-y)} f(x,y)\,dx.$$

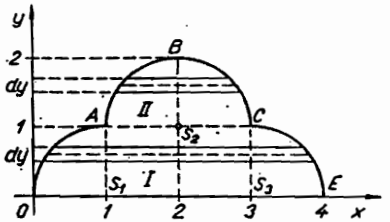
346. Prema slici 70:

Kružnica $\equiv (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ ili $y = 1 + \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$

$$\iint_\sigma f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{3} dx \int_0^{1+\sqrt{-x^2+2x+3}} f(x,y)\,dy.$$



Slika 70.



Slika 71.

347. Prema slici 71:

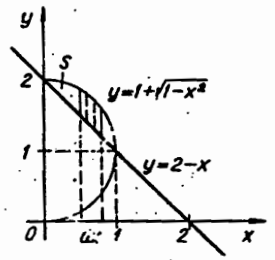
1. kružnica $OA \equiv (x-1)^2 + y^2 = 1$, odnosno $x = 1 \pm \sqrt{1-y^2}$
2. kružnica $ABC \equiv (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$, odnosno $x = 2 \pm \sqrt{2y - y^2}$
3. kružnica $CE \equiv (x-3)^2 + y^2 = 1$, odnosno $x = 3 \pm \sqrt{1-y^2}$

$$\iint_\sigma f(x\ y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{3+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{2-\sqrt{2y-y^2}}^{2+\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

U zadacima **348** do **361** uključivo izračunaj zadane dvostruke integrale prethodno narisavši područje integracije σ.

348. $\iint_\sigma x\,dx\,dy$, gdje je σ područje omeđeno kružnicom $x^2 + (y-1)^2 = 1$ i pravcem $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$.

Narisavši sliku 72 i prikazavši jednadžbu kružnice u obliku $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$, a jednadžbu pravca kao $y = 2 - x$, računamo prema slici:



Slika 72.

$$I = \int_0^1 x\,dx \int_{2-x}^{1+\sqrt{1-x^2}} dy = \int_0^1 x\,dx\,|y|_{2-x}^{1+\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{1-x^2} + x - 1)\,x\,dx = \left| -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

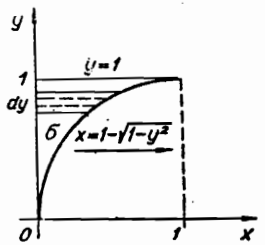
349. $\iint\limits_{\sigma} x\,dx\,dy$, gdje je σ područje omeđeno kružnicom $(x-1)^2+y^2=1$ i pravcima $y=1$ i $x=0$.

Prema slici 73:

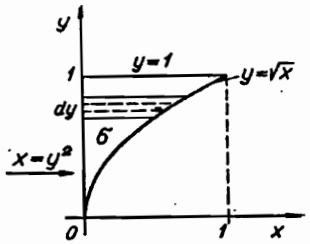
$$I=\int_0^1 dy\int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 dy\,|x^2|_0^{1-\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{2}\int_0^1(1-2\sqrt{1-y^2}+1-y^2)\,dy=$$

$$=\left|y-\frac{1}{6}y^3\right|_0^1-\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy=\text{ prema predtipu } C \text{ (vidi II dio Repetitorija)}=$$

$$=1-\frac{1}{6}-\left|\frac{1}{2}\arcsin y+\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2}\right|_0^1=\underline{\frac{5}{6}-\frac{\pi}{4}}.$$



Slika 73.



Slika 74.

350. $\iint\limits_{\sigma} e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy$, gdje je σ omeđeno parabolom $y=\sqrt{x}$ i pravcima $y=1$ i $x=0$.

Nariši sliku područja integracije σ, koje je prikazano na slici 74, pa računaj:

$$I=\int_0^1 dy\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx=\int_0^1 dy\,|y\,e^{\frac{x}{y}}|_0^{y^2}=\int_0^1(y\,e^y-y)\,dy=\left|y\,e^y-e^y-\frac{y^2}{2}\right|_0^1=\underline{\frac{1}{2}}.$$

351. $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y)\,dx\,dy$, gdje je σ područje omeđeno parabolama $y=x^2$ i $x=y^2$, odnosno $y=\sqrt{x}$.

Prema slici 75:

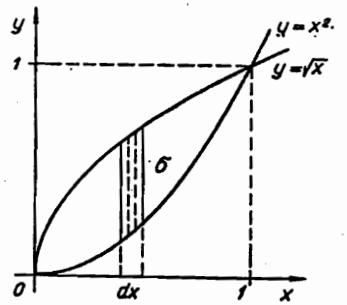
$$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y)\,dy=\int_0^1\left|x^2y+\frac{y^2}{2}\right|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=\int_0^1\left(x^2\sqrt{x}+\frac{x}{2}-x^4-\frac{x^4}{2}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}x^4\right)dx=\left|\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{x^2}{4}-\frac{3}{10}x^5\right|_0^1=\underline{\frac{33}{140}}.$$

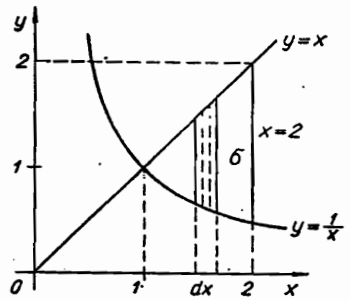
352. $\iint\limits_{\sigma}\frac{x^2}{y^3}\,dx\,dy$, gdje je σ područje omeđeno pravcima $x=2$, $y=x$ i hiperbolom $xy=1$, odnosno $y=\frac{1}{x}$.

Prema slici 76:

$$I=\int_1^2 x^2\,dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{dy}{y^3}=-\int_1^2 x^2\,dx\left|\frac{1}{y}\right|_{\frac{1}{x}}^{x}=-\int_1^2 x^2\left(\frac{1}{x}-x\right)dx=-\left|\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right|_1^2=\underline{\frac{9}{4}}.$$

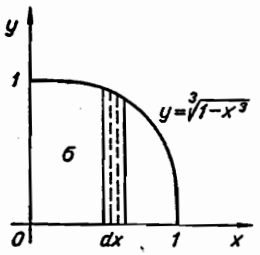


Slika 75.



Slika 76.

353. $\iint\limits_{\sigma} x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\,dx\,dy$, gdje je σ područje koje leži u prvom kvadrantu a omeđeno je krivuljom $x^3+y^3=1$ i koordinatnim osima.



Slika 77.

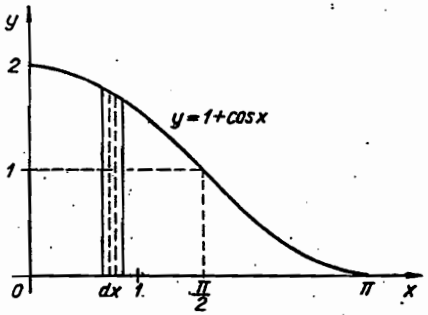
Prema slici 77:

$$I=\int_0^1 x^2\,dx\int_0^{\sqrt[3]{1-x^3}} y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\,dy=\Big[\text{uz supstituciju } 1-x^3-y^3=t,\text{ pa je}$$

$$y^2\,dy = -\frac{1}{3}\,dt\Big] = -\frac{2}{9}\int_0^1 x^2\,dx\,\Big|\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{9}\int_0^1 x^2\sqrt{(1-x^2)^3}\,dx =$$

$$= -\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{15}\Big|\sqrt{(1-x^2)^5}\Big|_0^1 = \underline{\frac{4}{135}}.$$

354. $\iint\limits_\sigma y^2 \sin x\,dx\,dy$, gdje je σ područje omeđeno krivuljom $y = 1 + \cos x$ od $x = 0$ do $x = \pi$ i koordinatnim osima.

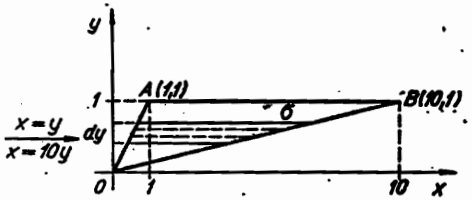


Slika 78.

Prema slici 78:

$$I = \int_0^\pi \sin x\,dx \int_0^{1+\cos x} y^2\,dy = \frac{1}{3}\int_0^\pi \sin x\,dx\,|y^3|_0^{1+\cos x} = \frac{1}{3}\int_0^\pi \sin x\,(1+\cos x)^3\,dx = [\text{uz}$$

supstituciju $1 + \cos x = t$, pa je $-\sin x\,dx = dt] = -\frac{1}{12}|(1+\cos x)^4|_0^\pi = \underline{\frac{4}{3}}$.



Slika 79.

355. $\iint\limits_\sigma \sqrt{xy - y^2}\,dx\,dy$, gdje je σ trokut OAB $[O(0,0);\ A(1,1);\ B(10,1)]$.

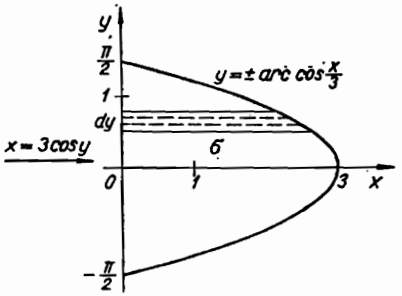
Iz slike 79 slijedi:

$$OA \equiv y = x;\quad AB \equiv y = 1 \quad \text{i} \quad OB \equiv y = \frac{x}{10},$$

te je

$$I = \int_0^1 dy \int_y^{10y} \sqrt{xy - y^2}\,dx = [\text{uz supstituciju } xy - y^2 = t,\ \text{pa je } y\,dx = dt] =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dy}{y}\Big|\sqrt{(xy-y^2)^3}\Big|_y^{10y} = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dy}{y}\sqrt{(10y^2-y^2)^3} = 18\int_0^1 y^2\,dy = 18\cdot\Big|\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \underline{6}.$$



Slika 80.

356. $\iint\limits_\sigma x^2 \sin^2 y\,dx\,dy$, gdje je σ područje omeđeno krivuljom $y = \pm \arccos\frac{x}{3}$ i pravcem $x = 0$.

Prema slici 80 i uzevši u obzir da jednadžba krivulje u inverznom obliku glasi $x = 3\cos y$, računamo:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 y\,dy \int_0^{3\cos y} x^2\,dx = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 y\,dy\,|x^3|_0^{3\cos y} = 9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 y\cdot\cos^3 y\,dy =$$

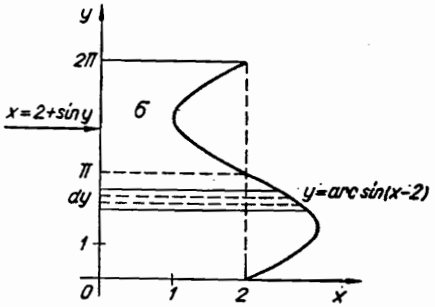
$$= 9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 y - \sin^4 y)\cos y\,dy = 9\Big|\frac{\sin^3 y}{3} - \frac{\sin^5 y}{5}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{12}{5}}.$$

357. $\iint\limits_\sigma \frac{x}{2}\,dx\,dy$, gdje je σ područje omeđeno krivuljom $y = \arcsin(x-2)$ i pravcima $y = 2\pi$, $x = 0$ i $y = 0$.

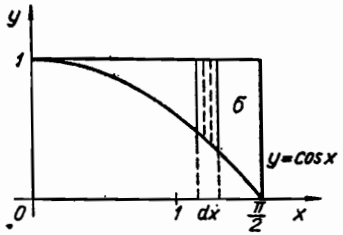
Prema slici 81 dobijemo uzevši u obzir da je $x = 2 + \sin y$ jednadžba međašnje krivulje u inverznom obliku:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dy \int_0^{2+\sin y} x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} dy \left| x^2 \right|_0^{2+\sin y} = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (4 + 4\sin y + \sin^2 y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{4}\left| 4y - 4\cos y + \frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4} \right|_0^{2\pi} = \underline{\frac{9\pi}{4}}.$$



Slika 81.



Slika 82.

358. $\iint\limits_\sigma y^4\,dx\,dy$, gdje je σ područje omeđeno krivuljom $y = \cos x$ i pravcima $y = 1$ i $x = \frac{\pi}{2}$.

Prema slici 82 računamo:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\cos x}^{1} y^4\,dy = \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \left| y^5 \right|_{\cos x}^{1} = \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^5 x)\,dx =$$ prema tipu VIII (vidi

II dio Repetitorija) $= \frac{1}{5}\left| x - \frac{1}{5}\left(\cos^4 x + \frac{4}{3}\cos^2 x + \frac{8}{3}\right)\sin x \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{8}{15}\right) =$

$$= \underline{\frac{15\pi - 16}{150}}.$$

359. $\iint\limits_\sigma \cos(x + y)\,dx\,dy$, gdje je σ područje omeđeno pravcima $x = 0$, $y = \pi$ $y = x$.

[-2].

360. $\iint\limits_\sigma \sqrt{x^2 - y^2}\,dx\,dy$, gdje je σ $\triangle$ ABC [$A(0, 0)$; $B(1, -1)$; $C(1, 1)$].

$\left[\frac{\pi}{6}\right]$.

361. $\iint\limits_\sigma e^x\,dx\,dy$, gdje je σ područje omeđeno krivuljom $x = \ln y$ i pravcima $x = 0$ i $y = 3$.

[2, vidi sl. 66 uz zadatak 340].

B. Srednja vrijednost dvostrukog integrala

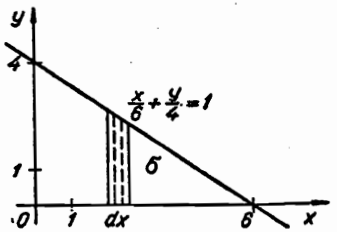
Formula

$$z_0 = f(\xi, \eta) = \frac{\iint\limits_\sigma f(x, y)\,dx\,dy}{\sigma} \qquad (107)$$

Zadaci

U zadacima 362 do 365 uključivo izračunaj srednju vrijednost z_0 zadane funkcije z u zadanom području σ.

362. $z = 12 - 2x - 3y$ u području σ koje je omeđeno pravcima $12 - 2x - 3y = 0$, $x = 0$ i $y = 0$.



Slika 83.

Iz slike 83 vidimo da je površina područja $\sigma = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$ pa prema (107) računamo:

$$z_0 = \frac{1}{12}\iint\limits_\sigma (12 - 2x - 3y)\,dx\,dy = \frac{1}{12}\int_0^6 dx \int_0^{-\frac{2}{3}x+4} (12 - 2x - 3y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^6 dx \left| 12y - 2xy - \frac{3}{2}y^2 \right|_0^{-\frac{2}{3}x+4} = \frac{1}{12}\int_0^6 \left(\frac{2}{3}x^2 - 8x + 24\right) dx =$$

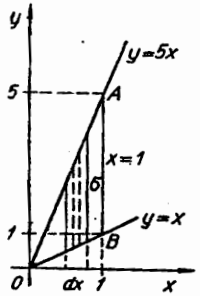
$$= \frac{1}{12}\left| \frac{2}{9}x^3 - 4x^2 + 24x \right|_0^6 = \underline{4.}$$

363. $z = x + 6y$ u trokutu koji je omeđen pravcima $y = x$, $y = 5x$ i $x = 1$.

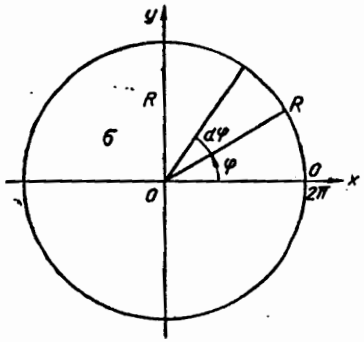
Iz slike 84 vidimo da je površina zadanog područja $\sigma \equiv \triangle OAB$ jednaka $\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$ pa prema (107) računamo:

$$z_0 = \frac{1}{2}\iint_\sigma (x + 6y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_x^{5x} (x + 6y)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \left| xy + 3y^2 \right|_x^{5x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (5x^2 + 75x^2 - x^2 - 3x^2)\,dx = 38 \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = 12\,\underline{\frac{2}{3}}.$$



Slika 84.



Slika 85.

364. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ u krugu $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Prema slici 85 i formuli (107) imamo:

$$z_0 = \frac{1}{\pi R^2}\iint_\sigma \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy.$$

Prelazimo na polarne koordinate: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$ (vidi dalje tačku C ovog poglavlja):

$$z_0 = \frac{1}{\pi R^2}\iint_\sigma \sqrt{R^2 - \rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi}\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2}\,\rho\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\cdot 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{3}\left|\sqrt{(R^2 - \rho^2)^3}\right|_0^R\right) = \frac{2}{3R^2}\cdot R^3 = \underline{\frac{2}{3}R}.$$

365. $z = xy^2$ u kvadratu koji je omeđen pravcima $x = 0$, $y = 1$, $x = 1$ i $y = 0$.

$$\left[\frac{1}{6}\right].$$

C. Zamjena promjenljivih u dvostrukim integralima i računanje tih integrala uz tu zamjenu

Formule

Polarne koordinate

$$x = \rho\cos\varphi;\quad y = \rho\sin\varphi;\quad dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$$

$$\iint_\sigma f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\sigma'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho \quad (111)$$

Eliptičke koordinate

$$x = a\,u\cos v;\quad y = b\,u\sin v;\quad dx\,dy = a\,b\,u\,du\,dv$$

$$\iint_\sigma f(x, y)\,dx\,dy = a\,b\iint_{\sigma'} f(a\,u\cos v,\ b\,u\sin v)\,u\,du\,dv =$$

$$= a\,b\int_{v_1}^{v_2} dv \int_0^{u(v)} f(a\,u\cos v,\ b\,u\sin v)\,u\,du. \quad (113)$$

Gornja granica $u(v)$ drugog integrala računa se tako da se $x = a\,u\cos v$ i $y = b\,u\sin v$ uvrste u zadanu jednadžbu krivulje koja omeđuje područje integracije σ.

Općenite koordinate.

$$x = x(u, v);\ y = y(u, v):\ dx\,dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv, \quad (112)$$

pri čemu se uzima apsolutna vrijednost determinante.

a. DVOSTRUKI INTEGRALI U POLARNIH KOORDINATAMA

Zadaci

U zadacima **366** do **373** uključivo izrazi

$$\iint_\sigma f(x, y)\,dx\,dy$$

u polarnim koordinatama i rastavi granice integriranja prikazavši grafički područje integracije σ.

366. Područje σ je krug:

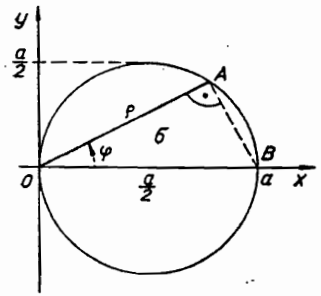
$$x^2 + y^2 \leqq a\,x.$$

Napišemo li jednadžbu zadane kružnice u obliku $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, iz slike 86 s obzirom na pravokutni $\triangle\, O\,A\,B$ imamo $\rho = a \cos\varphi$, pa je prema toj slici i formuli (111):

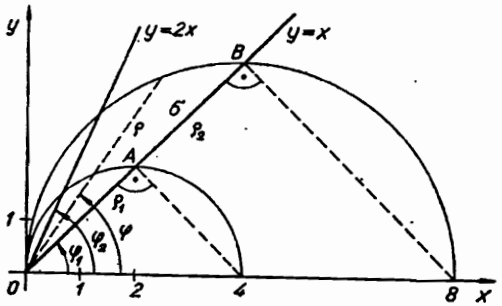
$$I = \iint\limits_{\sigma} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

367. Područje σ je krug: $x^2 + y^2 \leqq b\,y$. Nariši ga!

$$\left[\int\limits_{0}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{b\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\right].$$



Slika 86.



Slika 87.

368. Područje σ omeđeno je kružnicama $x^2 + y^2 = 4\,x$ i $x^2 + y^2 = 8\,x$ i pravcima $y = x$ i $y = 2\,x$.

Prikazavši jednadžbe zadanih kružnica u obliku $(x-2)^2 + y^2 = 4$ i $(x-4)^2 + y^2 = 16$ i narisavši njihove slike dobijemo prema slici 87: $O\,A \equiv \rho_1 \equiv 4\cos\varphi$; $O\,B \equiv \rho_2 = 8\cos\varphi$; $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ i $\operatorname{tg}\varphi_2 = 2$ te je $\varphi_2 = \operatorname{arc\,tg} 2$, pa je s obzirom na (111)

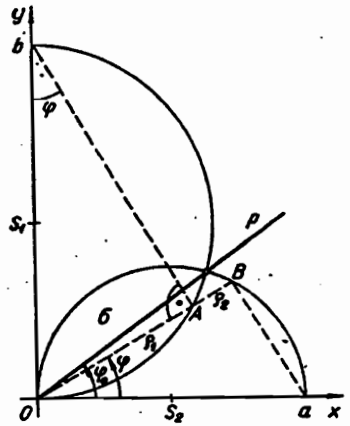
$$I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arc\,tg} 2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

369. Područje σ zajednički je dio dvaju krugova $x^2 + y^2 \leqq a\,x$ i $x^2 + y^2 \leqq b\,y$.

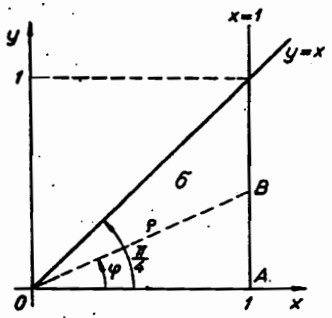
Prikazavši jednadžbe zadanih kružnica u obliku $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ i $x^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$, rišemo područje integracije σ (vidi sl. 88), a riješivši zajedno jednadžbe zadanih kružnica dobijemo: $b\,y = a\,x$, pa je $p \equiv y = \frac{a}{b}\,x$. Odatle je $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{a}{b}$, a $\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}$.

Iz slike slijedi dalje: $O\,A \equiv \rho_1 = b\sin\varphi$; $O\,B \equiv \rho_2 = a\cos\varphi$. Dobijemo:

$$I = \int\limits_{0}^{\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}} d\varphi \int\limits_{0}^{b\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho + \int\limits_{\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$$



Slika 88.



Slika 89.

370. Područje σ omeđeno je pravcima $y = x$, $x = 1$ i $y = 0$.

Prema slici 89:

$$\rho = \frac{1}{\cos\varphi},$$

kako se to vidi iz pravokutnog $\triangle\, O\,A\,B$.

$$I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{1}{\cos\varphi}} (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

371. Područje σ je segment što ga odsjeca pravac $p \equiv x + y = 2$ od kružnice $x^2 + y^2 = 4$. Vidi sl. 90.

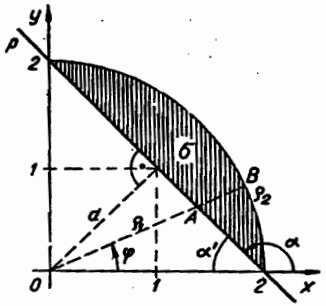
Jednadžba zadanog pravca p u polarnim koordinatama glasi:

$$\rho = \frac{d}{\sin(\alpha - \varphi)} \quad \text{[vidi formulu (88 f) u I dijelu Repetitorija].}$$

Iz $y = -x + 2$ slijedi da je $\operatorname{tg}\alpha = -1$, pa je $\alpha = 135^\circ$, odnosno $\frac{3}{4}\pi$, dok je $\alpha' = 45^\circ$.

Prema slici:

$$d = 2\sin 45^\circ = \sqrt{2},$$



Slika 90.

te je

$$OA \equiv \rho_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi - \varphi\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3}{4}\pi - \varphi\right)\right]} = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)},$$

dok je $\rho_2 \equiv OB = 2$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}}^{2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

372. Područje σ određeno je nejednakostima $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ (x^2 + y^2)^2 \leqq 4a^2x^2y^2$.

Prijelaz na polarne koordinate $x = \rho\cos\varphi$ i $y = \rho\sin\varphi$ daje

$$(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)^2 = 4a^2\rho^2\cos^2\varphi\,\rho^2\sin^2\varphi$$

ili

$$\rho^6 = 4a^2\rho^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi \quad \text{ili} \quad \rho = a\sin 2\varphi$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sin 2\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

373. Područje σ je nutarnji dio desne petlje lemniskate $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

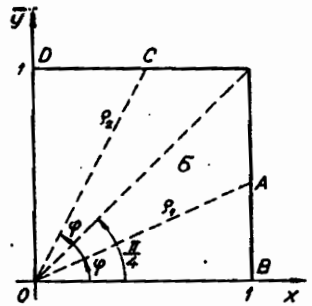
$$\left[\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho, \text{ vidi sl. 46 u II dijelu Repetitorija}\right].$$

U zadacima 374 – 380 uključivo zadane dvostruke integrale izrazi u polarnim koordinatama.

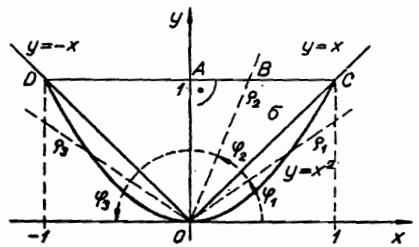
374. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\,dy$

Iz slike 91 se vidi da je područje integracije kvadrat stranice 1. Pri prijelazu na polarne koordinate treba to područje raspoloviti dijagonalom, jer u desnoj polovini iz prav. $\triangle OBA$ slijedi da je $OA \equiv \rho_1 = \frac{1}{\cos\varphi}$, dok u lijevoj polovini iz prav. $\triangle ODC$ slijedi da je $OC \equiv \rho_2 = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \frac{1}{\sin\varphi}$. Dobijemo

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$$



Slika 91.



Slika 92.

375. $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} f\left(\frac{y}{x}\right) dy.$

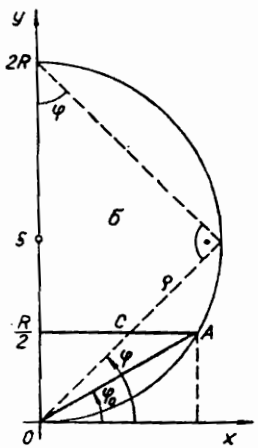
U slici 92 prikazano je područje integracije, koje se sastoji od dva segmenta parabole $y = x^2$ i $\triangle OCD$. Uvrštenje $x = \rho\cos\varphi$ i $y = \rho\sin\varphi$ u jednadžbu parabole daje:

$$\rho\sin\varphi = \rho^2\cos^2\varphi, \quad \text{pa je } \rho = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} = \rho_1 = \rho_2 \quad \text{dok je } f\left(\frac{y}{x}\right) = f(\operatorname{tg}\varphi).$$

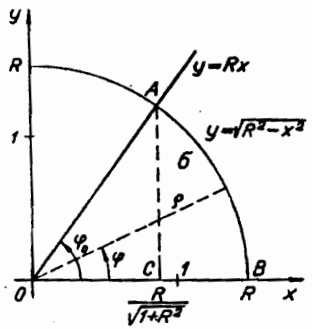
U $\triangle OCD$ radijvektor $\rho_2 = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \frac{1}{\sin\varphi}$, kako se to vidi iz prav. $\triangle OAB$.

Uzmemo li u obzir, da pravci $y = x$ i $y = -x$ zatvaraju s osi $+X$ kutove $\frac{\pi}{4}$, odnosno $\frac{3\pi}{4}$ dobijemo:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi \int_0^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} \rho\,d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} \rho\,d\rho + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi \int_0^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} \rho\,d\rho.$$



Slika 93.



Slika 94.

376. $\displaystyle\int_{\frac{R}{2}}^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x, y)\,dx$

Kako se vidi iz sl. 93 područje integracije omeđeno je lukom kružnice $x^2 + (y - R)^2 = R^2$, pravcem $y = \frac{R}{2}$ i osi Y. Uvrštenje $y = \frac{R}{2}$ u jednadžbu kružnice daje za apscisu x tačke A vrijednost $\frac{R\sqrt{3}}{2}$, pa je

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{R\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{6}.$$

Iz slike slijedi dalje da je

$$OC = \frac{\frac{R}{2}}{\sin\varphi} = \frac{R}{2\sin\varphi} \quad \text{i} \quad \rho = 2R\sin\varphi.$$

Dobijemo:

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{R}{2\sin\varphi}}^{2R\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

377. $\displaystyle\int_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} dx \int_0^{Rx} f\left(\frac{y}{x}\right) dy + \int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right) dy.$

Kako se zadana kružnica $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ i zadani pravac $y = Rx$ sijeku u tački A apscise $x = \frac{R}{\sqrt{1+R^2}}$, područje integracije σ je sektor OAB kruga, pri čemu se lijevi dio OAC odnosi na prvi, a desni CAB na drugi integral (vidi sl. 94). Iz $y = Rx$ slijedi da je $\operatorname{tg}\varphi_0 = R$, odnosno $\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg} R$. Prema slici imamo:

$$I = \int_0^R \rho\,d\rho \int_0^{\operatorname{arc\,tg} R} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi = \frac{R^2}{2}\int_0^{\operatorname{arc\,tg} R} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi.$$

378. $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^x f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy.$

$$\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} f(\rho)\,\rho\,d\rho\right].$$

379. $\displaystyle\iint_\sigma f(x, y)\,dx\,dy$, gdje je σ trokut koji je omeđen pravcima $y = x$, $y = -x$, $y = 1$.

$$\left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\right]$$

380. $\displaystyle\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2+y^2)\,dy.$

$$\left[\frac{\pi}{2}\int_0^R f(\rho^2)\,\rho\,d\rho\right].$$

U zadacima 381 do 388 uključivo izrazi zadane dvostruke integrale u polarnim koordinatama pa ih izračunaj uz grafički prikaz područja integracije.

381. $\displaystyle\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2)\, dy.$

Iz granica integracije zadanog integrala slijedi da je područje integracije prvi kvadrant kruga polumjera R (nariši ga!), pa su granice integracije od 0 do R, odnosno od 0 do $\frac{\pi}{2}$, dok je $1 + x^2 + y^2 = 1 + \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 1 + \rho^2$. Dobijemo prema (111):

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \ln(1 + \rho^2)\, \rho\, d\rho = [\text{supstituirajući } 1 + \rho^2 = t \text{ parcijalno integriramo}] =$$

$$= \left| \varphi \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2} \left| (1 + \rho^2)[\ln(1 + \rho^2) - 1] \right|_0^R = \frac{\pi}{4}\{(1 + R^2)[\ln(1 + R^2) - 1] + 1\} =$$

$$= \underline{\frac{\pi}{4}[(1 + R^2)\ln(1 + R^2) - R^2].}$$

382. $\displaystyle\iint_\sigma \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}\, dx\, dy$, gdje je σ prvi kvadrant jediničnog kruga. Nariši ga!

Nakon prijelaza na polarne koordinate prema (111) dobijemo:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2}}\, \rho\, d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2}}\, \rho\, d\rho.$$

Uz supstituciju $\rho^2 = t$ svodimo neodređeni integral

$$I_1 = \int \sqrt{\frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2}}\, \rho\, d\rho \quad \text{na} \quad I_1 = \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{1 - t}{1 + t}}\, dt,$$

tj. na tip II (vidi II dio Repetitorija), pa uz novu supstituciju $\sqrt{\frac{1 - t}{1 + t}} = z$ i parcijalno integriranje dobijemo konačno

$$I_1 = \frac{z}{1 + z^2} - \operatorname{arc\,tg} z.$$

Slijedi:

$$I = \frac{\pi}{2} \left| \frac{\sqrt{\frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2}}}{1 + \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2}} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2}} \right|_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(0 - \operatorname{arc\,tg} 0 - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \underline{\frac{\pi(\pi - 2)}{8}}.$$

383. $\displaystyle\iint_\sigma (h - 2x - 3y)\, dx\, dy$, gdje je područje σ krug $\equiv x^2 + y^2 \leqq R^2$.

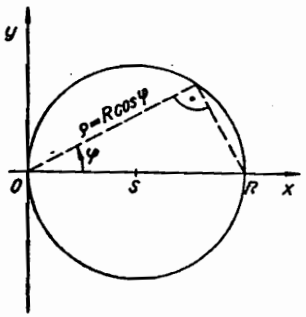
Prema (111):

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (h - 2\rho\cos\varphi - 3\rho\sin\varphi)\, \rho\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left| h \cdot \frac{\rho^2}{2} - 2\cos\varphi \cdot \frac{\rho^3}{3} - 3\sin\varphi \cdot \frac{\rho^3}{3} \right|_0^R = \frac{R^2}{6} \int_0^{2\pi} (3h - 4R\cos\varphi - 6R\sin\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{R^2}{6} \left| 3h\varphi - 4R\sin\varphi + 6R\cos\varphi \right|_0^{2\pi} = \underline{\pi h R^2}.$$

384. $\displaystyle\iint_\sigma \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$, gdje je σ krug $\equiv x^2 + y^2 \leqq Rx$.



Slika 95.

Budući da je integrand, a također i područje integracije, kako se to vidi iz slike 95, simetrični s obzirom na os X, računat ćemo dvostruku vrijednost zadanog integrala uzevši za područje integracije samo gornju polovinu kruga.

Prema (111) dobijemo

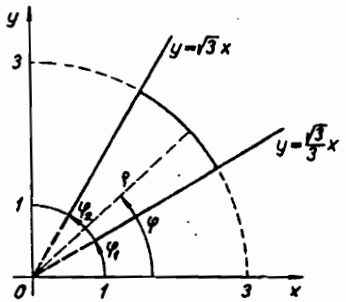
$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2}\, \rho\, d\rho = \left[\text{uz supstituciju } R^2 - \rho^2 = t,\ \rho\, d\rho = -\frac{1}{2}\, dt\right] =$$

$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left| \frac{1}{3}\sqrt{(R^2 - \rho^2)^3} \right|_0^{R\cos\varphi} = -\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{(R^2 - R^2\cos^2\varphi)^3} - R^3\right) d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 \varphi - 1)\, d\varphi = \text{[vidi tip VIII, II dio Repetitorija]} =$$

$$= -\frac{2}{3} R^3 \left| -\frac{1}{3} \sin^2 \varphi \cos \varphi - \frac{2}{3} \cos \varphi - \varphi \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{R^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)}.$$

385. $\iint\limits_{\sigma} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\, dx\, dy$, gdje je σ dio ravnine što ga omeđuju kružnice $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$ i pravci $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x$ i $y = \sqrt{3}\, x$.



Slika 96.

Prema slici 96 i (111) uzevši u obzir da iz $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x$ i $y = \sqrt{3}\, x$ slijedi: $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, pa je $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$, i $\operatorname{tg} \varphi_2 = \sqrt{3}$, pa je $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$, a osim toga je $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} \varphi) = \varphi$ [vidi I dio Repetitorija, formula (73a)]. Dobijemo:

$$I = \iint\limits_{\sigma} \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} \varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi\, d\varphi \int_1^3 \rho\, d\rho = \left| \frac{\varphi^2}{2} \right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cdot \left| \frac{\rho^2}{2} \right|_1^3 = \underline{\frac{\pi^2}{6}}.$$

386. $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$, gdje je područje σ omeđeno desnom petljom lemniskate $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$.

Uvrštenje $x = \rho \cos \varphi$ i $y = \rho \sin \varphi$ daje jednadžbu lemniskate u polarnim koordinatama: $\rho^4 = a^2 \rho^2 \cos 2\varphi$ ili $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (slika i konstrukcija lemniskate prikazana je u sl. 46, dio II Repetitorija).

Budući da su integrand i područje integracije simetrični na os X, dobijemo prema (111):

$$I = \iint\limits_{\sigma'} \sqrt{a^2 - \rho^2} \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{a^2 - \rho^2}\, \rho\, d\rho =$$

$$= -\frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \left| \sqrt{(a^2 - \rho^2)^3} \right|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} = -\frac{2}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{(1 - \cos 2\varphi)^3} - 1\right) d\varphi =$$

$$= [\text{uz } 1 - \cos 2\varphi = 2 \sin^2 \varphi] = -\frac{2}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{8 \sin^6 \varphi} - 1\right) d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sqrt{2} \sin^3 \varphi - 1)\, d\varphi = \text{[prema tipu VIII, dio II Repetitorija]} =$$

$$= -\frac{2}{3} a^3 \left| 2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{3} \sin^2 \varphi \cos \varphi - \frac{2}{3} \cos \varphi \right) - \varphi \right|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -\frac{2}{3} a^3 \left[2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} \right) - \frac{\pi}{4} \right] = \underline{\frac{a^3}{2} \left(\frac{20 - 16\sqrt{2}}{9} + \frac{\pi}{3} \right)}.$$

387. $\iint\limits_{\sigma} y\, dx\, dy$, gdje je σ polukrug promjera a sa središtem u tački $S\left(\frac{a}{2}; 0\right)$.

$$\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \rho^2 \sin \varphi\, d\rho = \frac{a^3}{12} \right].$$

388. $\iint (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, gdje je σ područje omeđeno kružnicom $x^2 + y^2 = 2ax$.

$$\left[\frac{3}{2} \pi a^4 \right].$$

b. DVOSTRUKI INTEGRALI U ELIPTIČKIM I OPĆENITIM KOORDINATAMA

Zadaci

U zadacima **389** do **394** uključivo izvrši prijelaz na eliptičke koordinate pa izračunaj zadane dvostruke integrale, ukoliko integrand nije zadan općenito.

389. $\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, dx\, dy$, gdje je σ područje omeđeno elipsom $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

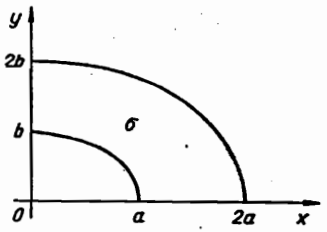
Računamo prema (113):

$$x = 2u\cos v; \quad y = 3u\sin v; \quad dx\, dy = 6u\, du\, dv.$$

Uvrštenje gore navedenih vrijednosti za x i y u jednadžbu elipse daje:

$$u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v = 1, \quad \text{pa je} \quad u = 1.$$

$$I = 6\iint\limits_{\sigma'} f(2u\cos v,\ 3u\sin v)\, u\, du\, dv = 6\int_0^{2\pi} dv \int_0^1 f(2u\cos v,\ 3u\sin v)\, u\, du.$$



Slika 97.

390. $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{4 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy$, gdje je σ dio prstena koji je omeđen elipsama $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i $\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$, a leži u I kvadrantu (vidi sl. 97).

Prema (113):

$$x = au\cos v; \quad y = bu\sin v.$$

Uvrštenje u jednadžbu prve elipse daje $u = 1$, dok za drugu elipsu dobijemo:

$$\frac{u^2\cos^2 v}{4} + \frac{u^2\sin^2 v}{4} = 1, \quad \text{pa je} \quad u = 2.$$

Kako je $dx\, dy = ab\, u\, du\, dv$, imamo:

$$I = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_1^2 \sqrt{4 - u^2}\, u\, du = -ab\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}\left|\sqrt{(4-u^2)^3}\right|_1^2 = \frac{ab\pi\sqrt{3}}{2}.$$

391. $\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, dx\, dy$, gdje je σ područje omeđeno krivuljom $\left(\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{3}\right)^2 = x^2 y$.

Uvrštenje $x = u\cos v$ i $y = \sqrt{3}\, u\sin v$ u jednadžbu međašnje krivulje daje:

$$(u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v)^2 = \sqrt{3}\, u^3\cos^3 v\sin v$$

a odatle je

$$u = \sqrt{3}\cos^2 v\sin v.$$

Kako je $dx\, dy = \sqrt{3}\, u\, du\, dv$ prema (113), dobijemo:

$$I = \sqrt{3}\int_0^{\pi} dv \int_0^{\sqrt{3}\cos^2 v\sin v} f(u\cos v,\ \sqrt{3}\, u\sin v)\, u\, du.$$

392. $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{xy}\, dx\, dy$, gdje je σ područje omeđeno krivuljom $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right)^4 = \frac{xy}{\sqrt{6}}$ a leži u I kvadrantu.

Prema (113):

$$x = \sqrt{2}\, u\cos v; \quad y = \sqrt{3}\, u\sin v.$$

$dx\, dy = \sqrt{6}\, u\, du\, dv$ dok uvrštenje navedenih za x i y vrijednosti u jednadžbu krivulje daje za u graničnu vrijednost $\sqrt[4]{\cos v\cdot\sin v}$. Dobijemo:

$$I = \sqrt{6}\iint\limits_{\sigma'} \sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\, u^2\cos v\sin v}\cdot u\, du\, dv =$$

$$= \sqrt{6}\cdot\sqrt[4]{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos v\cdot\sin v}\, dv \int_0^{\sqrt[4]{\cos v\cdot\sin v}} u^2\, du = \frac{\sqrt[4]{6^3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\cos v\cdot\sin v}\right)^3 dv =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{6^3}}{3}\left|\frac{\sin^2 v}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt[4]{6^3}}{6} = \frac{1}{\sqrt[4]{6}}.$$

393. $\iint\limits_{\sigma} xy\, dx\, dy$, gdje je σ područje omeđeno elipsom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a leži u I kvadrantu

$$\left[\frac{a^2 b^2}{8}\right].$$

394. $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy$, gdje je σ područje omeđeno elipsom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\left[\frac{2\pi ab}{3}\right].$$

395. Izrazi $\int\limits_0^c dx \int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\, dy$, gdje je $0 < \alpha < \beta$ i $c > 0$, u novim promjenljivim $u = x + y$, $uv = y$.

Izrazimo x i y s u i v:

$$x = u - y = u - uv = u(1 - v)$$
$$y = uv. \qquad \text{(a)}$$

Prema (112) izračunajmo pripadnu jakobijanu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u - uv + uv = u.$$

Sad odredimo granice integracije:

Za u: iz zadanog integrala vidimo da se x mijenja od 0 do c, pa prema (a) imamo:

za $x = 0$ $\quad u(1 - v) = 0$, $\quad$ pa je $\quad u = 0$, $\quad$ jer je $\quad 1 - v \neq 0$

za $x = c$ $\quad c = u(1 - v)$, $\quad$ pa je $\quad u = \frac{c}{1 - v}$.

za v: Kako se y mijenja od αx do βx dobijemo prema (a):

za $y = \alpha x$: uvrštenje $x = \frac{y}{\alpha}$ u $x = u(1 - v)$ uz $y = uv$ daje $\frac{uv}{\alpha} = u(1 - v)$, a odatle je $v = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$.

Za $y = \beta x$ dobijemo na isti način $v = \frac{\beta}{1 + \beta}$. Slijedi:

$$I = \iint\limits_{\sigma'} f(u - uv, uv)\, u\, du\, dv = \int\limits_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}} dv \int\limits^{\frac{c}{1-v}} f(u - uv, uv)\, u\, du.$$

396. $\iint\limits_{\sigma} (x + y)\, dx\, dy$, gdje je σ područje omeđeno pravcima $p_1 \equiv x + y = 1$; $p_2 \equiv x + y = 2$; $p_3 \equiv 2x - y = 1$ i $p_4 \equiv 2x - y = 3$ (vidi sl. 98.)

Zadani integral mogli bismo izračunati na obični način podijelivši u tri dijela područje σ, tj. paralelogram, kako je to prikazano u slici. Jednostavnije dolazimo do rezultata prijelazom na novi koordinatni sustav UV označivši:

$$x + y = u; \quad 2x - y = v.$$

Odatle dobijemo:

$$x = \frac{u + v}{3}; \qquad y = \frac{2u - v}{3} \qquad \text{(a)}$$

pri čemu je:

za $x + y = 1$ $\quad u = 1$, a za $x + y = 2$ $\quad u = 2$

dok je

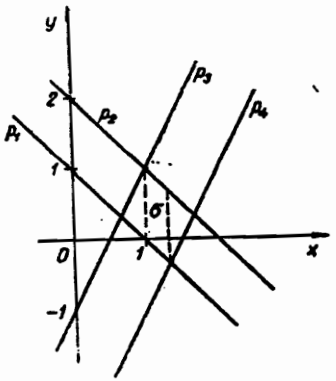
za $2x - y = 1$ $\quad v = 1$, a za $2x - y = 3$ $\quad v = 3$.

Prema (112) računamo jakobijanu:

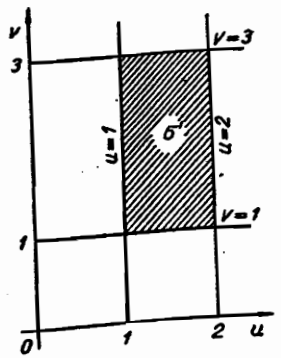
$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{3}; \quad |J| = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Iz navedenoga slijedi da zadanom paralelogramu σ u ravnini XY odgovara u ravnini UV pravokutnik σ', što ga čine pravci $u = 1$, $u = 2$, $v = 1$ i $v = 3$ (vidi sl. 99).

$$I = \frac{1}{3} \iint\limits_{\sigma'} u\, du\, dv = \frac{1}{3} \int\limits_1^3 dv \int\limits_1^2 u\, du = \frac{1}{3} \left| v \right|_1^3 \cdot \left| \frac{u^2}{2} \right|_1^2 = \underline{1.}$$



Slika 98.



Slika 99.

396a. Pokaži da u $\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, dx\, dy$, gdje je σ I kvadrant elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, to se područje σ preslikava pri prijelazu na eliptičke koordinate na pravokutno područje σ' ravnine UV koje je omeđeno pravcima $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$ i $v = \frac{\pi}{2}$.

D. Primjena dvostrukih integrala

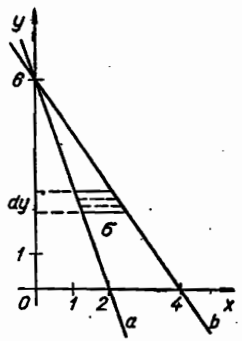
a. ODREĐIVANJE VOLUMENA ZADANIH TIJELA

Formule

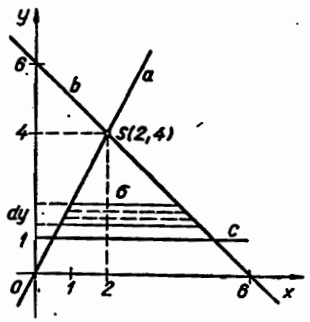
$$V = \iint_{\sigma} z(x, y)\, dx\, dy \qquad (106) \qquad\qquad V = \iint_{\sigma'} z(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi. \qquad (111)$$

Zadaci

U zadacima **397** do **422** uključivo izračunaj pomoću dvostrukih integrala volumene tijela koja su omeđena zadanim plohama uz grafički prikaz područja integracije.



Slika 100.



Slika 101.

397. Ravninama $y = 0$, $z = 0$, $a \equiv 3x + y = 6$, $b \equiv 3x + 2y = 12$ i $x + y + z = 6$.

U slici 100 prikazano je područje integracije σ, koje je omeđeno pravcima $a \equiv x = -\frac{1}{3}y + 2$ i $b \equiv x = -\frac{2}{3}y + 4$, u kojim dotične ravnine sijeku ravninu $XY \equiv z = 0$, i osiju X. Prema toj slici:

$$V = \iint_{\sigma} (6 - x - y)\, dx\, dy = \int_0^6 dy \int_{-\frac{y}{3}+2}^{-\frac{2}{3}y+4} (6 - x - y)\, dx = \int_0^6 dy \left| 6x - \frac{x^2}{2} - yx \right|_{-\frac{y}{3}+2}^{-\frac{2}{3}y+4} =$$

$$= \int_0^6 \left\{ -4y + 24 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}y^2 - \frac{16}{3}y + 16\right) + \frac{2}{3}y^2 - 4y - \right.$$

$$\left. - \left[-2y + 12 - \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{9} - \frac{4}{3}y + 4\right) + \frac{y^2}{3} - 2y \right] \right\} dy =$$

$$= \int_0^6 \left(\frac{y^2}{6} - 2y + 6\right) dy = \left| \frac{y^3}{18} - y^2 + 6y \right|_0^6 = \underline{12}.$$

398. Koordinatnim ravninama, ravninama $x = 4$ i $y = 4$ i rotacionim paraboloidom $z = x^2 + y^2 + 1$

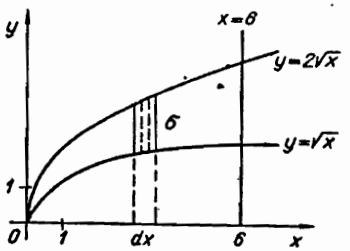
$$\left[186\frac{2}{3} \right].$$

399. Rotacionim paraboloidom $z = x^2 + y^2$ i ravninama $z = 0$, $a \equiv y = 2x$; $b \equiv y = 6 - x$ i $c \equiv y = 1$.

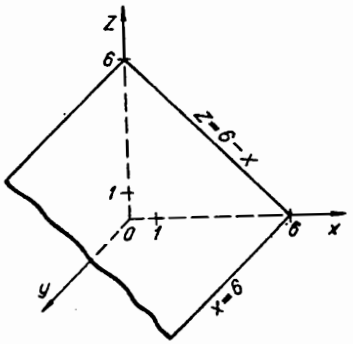
Prikazavši jednadžbe ravnina a i b u obliku $x = \frac{y}{2}$, odnosno $x = 6 - y$, dobijemo prema slici 101 uzevši u obzir da se pravci a i b sijeku u tački $S(2, 4)$:

$$V = \int_1^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^{6-y} (x^2 + y^2)\, dx = \int_1^4 dy \left| \frac{x^3}{3} + y^2 x \right|_{\frac{y}{2}}^{6-y} =$$

$$= \frac{1}{3} \int_1^4 \left[(6 - y)^3 + 3y^2(6 - y) - \frac{y^3}{8} - \frac{3}{2}y^3 \right] dy = \underline{78\frac{15}{32}}.$$



Slika 102 a.



Slika 102 b.

400. Rotacionim paraboloidom $z = x^2 + y^2$, koordinatnim ravninama i ravninom $x + y = 1$

$$\left[\frac{1}{6} \right].$$

401. Valjkovitim plohama $y = \sqrt{x}$ i $y = 2\sqrt{x}$ i ravninama $z = 0$ i $z = 6 - x$.

Traži se volumen tijela, koje je dolje omeđeno ravninama $XY \equiv z = 0$, odozgo ravninom $z = 6 - x$, koja je prikazana na slici 102 b, a sa strana valjkovitim plohama, koje su okomite na ravnini XY, a sijeku je u parabolama $y = \sqrt{x}$ i $y = 2\sqrt{x}$, i pravcem $x = 6$, kako je to prikazano na slici 102 a.

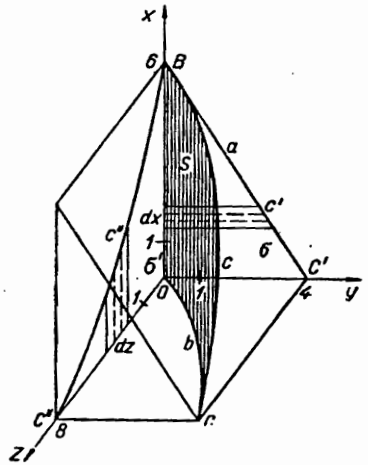
$$v = \iint_\sigma (6 - x)\,dx\,dy = \int_0^6 (6 - x)\,dx \int_{\sqrt{x}}^{0} dy = \int_0^6 (6 - x)(2\sqrt{x} - \sqrt{x})\,dx =$$

$$= \int_0^6 (6\sqrt{x} - x\sqrt{x})\,dx = \left| 4x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} \right|_0^6 = \underline{\frac{48}{5}\sqrt{6}}.$$

402. Koordinatnim ravninama, ravninom $a \equiv 2x + 3y - 12 = 0$ i valjkovitom plohom $b \equiv z = \frac{1}{2}y^2$ okomitom na ravnini YZ.

Iz slike 103 se vidi, da se zapravo traži površina S ravnog lika OBC. Projekcija toga lika na ravninu XY je $\triangle BOC'$, jer se luk c projicira kao pravac c'. Uzevši taj trokut kao područje integracije σ, dobijemo:

$$S = \iint_\sigma \frac{1}{2}y^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^6 dx \int_0^{-\frac{2}{3}x+4} y^2\,dy = \frac{1}{6}\int_0^6 dx\,|y^3|_0^{-\frac{2}{3}x+4} = \frac{4}{3}\int_0^6 \left(-\frac{x}{3} + 2\right)^3 dx = \underline{16}.$$



Slika 103.

Odredimo još jednom S i to tako da plohu OBC projiciramo na ravninu XZ. Da dobijemo projekciju luka c na tu ravninu, uvrstimo u $z = \frac{1}{2}y^2$ vrijednost $y = -\frac{2}{3}x + 4$ dobivenu iz a. Imamo $c'' \equiv x = -3\sqrt{\frac{z}{2}} + 6$. Prema slici računamo:

$$S = \iint_{\sigma'} dz\,dx = \int_0^8 dz \int_0^{-3\sqrt{\frac{z}{2}}+6} dx = \int_0^8 \left(-3\sqrt{\frac{z}{2}} + 6\right) dz = \left| -\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{z^3} + 6z \right|_0^8 = \underline{16}.$$

Riješi sada slični zadatak 403:

403. Valjkovitom plohom $z = 9 - y^2$, koordinatnim ravninama i ravninom $3x + 4y - 12 = 0$ $(y \geqq 0)$.

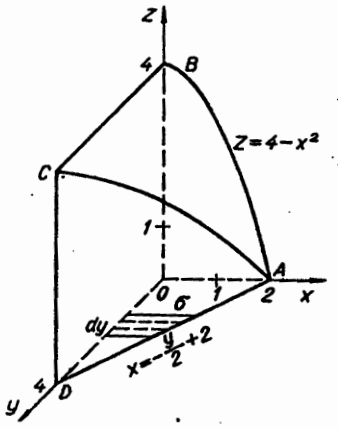
[45].

404. Valjkovitom plohom $z = 4 - x^2$, koordinatnim ravninama i ravninom $2x + y = 4$ $(x \geqq 0)$.

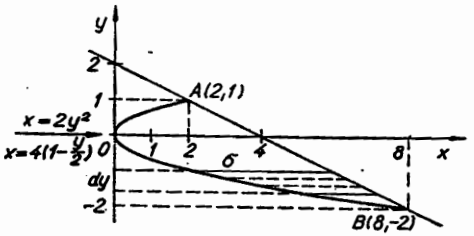
U slici 104 prikazana je valjkovita ploha $ABC \equiv z = 4 - x^2$ i ravnina $ACD \equiv x = -\frac{y}{2} + 2$. Prema toj slici računamo:

$$V = \iint_\sigma (4 - x^2)\,dx\,dy = \int_0^4 dy \int_0^{-\frac{y}{2}+2} (4 - x^2)\,dx = \int_0^4 dy \left| 4x - \frac{x^3}{3} \right|_0^{-\frac{y}{2}+2} =$$

$$= \int_0^4 \left(8 + \frac{1}{24}y^3 - \frac{y^2}{2} - \frac{8}{3}\right) dy = \underline{13\frac{1}{3}}.$$



Slika 104.



Slika 105.

405. Valjkovitom plohom $x = 2y^2$ i ravninama $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$ i $z = 0$.

Uvrštenje $z = 0$ u jednadžbu prve ravnine daje jednadžbu pravca $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$, u kojem ta ravnina siječe ravninu XY, a riješimo li zajedno jednadžbe toga pravca i parabole, dobijemo njihova sjecišta $A(2, 1)$ i $B(8, -2)$. Vidi sl. 105.

$$V = 4\int_{-2}^{1} dy \int_{2y^2}^{4\left(1-\frac{y}{2}\right)} \left(1 - \frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right) dx = 4\int_{-2}^{1} \left| x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}xy \right|_{2y^2}^{4\left(1-\frac{y}{2}\right)} dy =$$

$$= 4\int_{-2}^{1} \left(2 - 2y - \frac{3}{2}y^2 + y^3 + \frac{y^4}{2}\right) dy = \underline{16\frac{1}{5}}.$$

406. Hiperbolnim paraboloidom $z = xy$, valjkovitom plohom $y = \sqrt{x}$ i ravninama $x + y = 2$, $y = 0$ i $z = 0$.

$$\left[\frac{3}{8}\right].$$

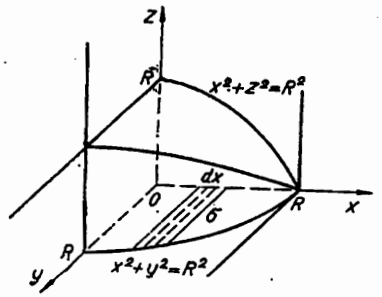
407. Eliptičkim valjkom $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ i ravninama $z = 12 - 3x - 4y$ i $z = 1$.

$$[22\pi].$$

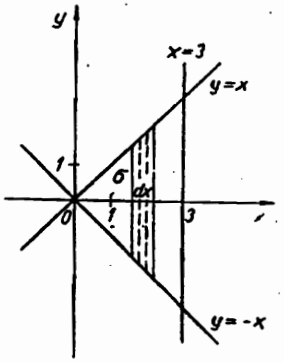
408. Valjcima $x^2 + y^2 = R^2$ i $x^2 + z^2 = R^2$.

Slika 106 prikazuje jedan oktant tijela omeđenog zadanim valjcima, kojim je os simetrije os Z, odnosno os Y.

$$V = 8\iint_\sigma \sqrt{R^2 - x^2}\,dx\,dy = 8\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = 8\int_0^R (R^2 - x^2)\,dx = \underline{\frac{16}{3}R^3}.$$



Slika 106.



Slika 107.

409. Hiperbolnim paraboloidom $z = x^2 - y^2$ i ravninama $z = 0$, $y = 0$ i $x = 3$.

Uvrštenje $z = 0$ u jednadžbu paraboloida daje njegovu projekciju $y = \pm x$ na ravninu $X\,Y$. Prema slici 107:

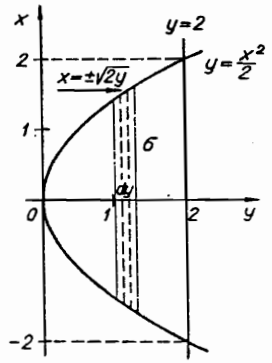
$$V = \int_0^3 dx \int_{-x}^{x} (x^2 - y^2)\,dy = \int_0^3 \left| x^2 y - \frac{y^3}{3} \right|_{-x}^{x} dx = \frac{4}{3}\int_0^3 x^3\,dx = \underline{27}.$$

410. Valjkovitim plohama $z = 4 - y^2$ i $y = \frac{x^2}{2}$ i ravninom $z = 0$.

Uvrštenje $z = 0$ u $z = 4 - y^2$ daje $y = 2$, pa je područje integracije σ omeđeno tim pravcem i parabolom $x = \pm\sqrt{2y}$, kako je to prikazano u slici 108.

$$V = \iint_\sigma (4 - y^2)\,dx\,dy = \int_0^2 (4 - y^2)\,dy \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dx = 2\int_0^2 (4 - y^2)\sqrt{2y}\,dy =$$

$$= 2\sqrt{2}\left| 4 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{y^3} - \frac{2}{7}\sqrt{y^7} \right|_0^2 = \underline{12\frac{4}{21}}.$$



Slika 108.

411. Valjkovitim plohama $x^2 + y^2 = R^2$, $z = \frac{x^3}{a^2}$ i ravninom $z = 0$ $(x \geqq 0)$.

Područje integracije σ je desna polovica kružnice $x^2 + y^2 = R^2$. Uz prijelaz na polarne koordinate (111) dobijemo:

$$V = \iint_\sigma \frac{x^3}{a^2}\,dx\,dy = \frac{1}{a^2}\iint_{\sigma'} \rho^3 \cos^3\varphi\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \frac{1}{a^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\,d\varphi \int_0^R \rho^4\,d\rho =$$

$$= \text{prema tipu VIII, dio II Repetitorija} = \frac{1}{a^2}\left| \frac{1}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi + \frac{2}{3}\sin\varphi \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left| \frac{\rho^5}{5} \right|_0^R = \underline{\frac{4R^5}{15a^2}}.$$

412. Rotacionim paraboloidom $z = x^2 + y^2$, valjkovitom plohom $y = x^2$ i ravninama $y = 1$ i $z = 0$.

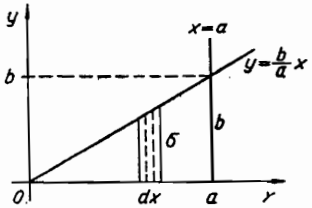
$$\left[\frac{88}{105}\right].$$

413. Eliptičkim valjkom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ i ravninama $y = \frac{b}{a}x$, $y = 0$ i $z = 0$ $(x \geqq 0)$.

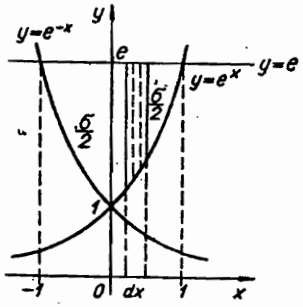
Da narišemo područje integracije σ, odredimo desnu među tog područja. Uvrštenje $z = 0$ u jednadžbu valjka daje tu traženu među $x = a$, pa prikazavši jednadžbu valjka u obliku

$z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ dobijemo prema slici 109:

$$V = \frac{c}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \int_0^{\frac{b}{a}x} dy = \frac{cb}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,x\,dx = -\frac{cb}{3a^2}\left|\sqrt{(a^2 - x^2)^3}\right|_0^a = \underline{\frac{abc}{3}}.$$



Slika 109.



Slika 110.

414. Valjkovitim plohama $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $z = e^2 - y^2$ i ravninom $z = 0$.

Uvrštenje $z = 0$ u $z = e^2 - y^2$ daje presječnicu te plohe s ravninom XY, tj. $y = e$. Budući da je traženi volumen a također i područje integracije σ simetrični s obzirom na os Y (vidi sl. 110), računamo:

$$V = 2\int_0^1 dx \int_{e^x}^{e} (e^2 - y^2)\,dy = 2\int_0^1 dx \left| e^2 y - \frac{y^3}{3}\right|_{e^x}^{e} = 2\int_0^1 dx\left(e^3 - \frac{e^3}{3} - e^2 e^x + \frac{e^{3x}}{3}\right) =$$

$$= 2\left|\frac{2}{3}e^3 x - e^2 e^x + \frac{1}{9}e^{3x}\right|_0^1 = 2\left(e^3 - \frac{2e^3 + 1}{9}\right).$$

415. Valjkovitim plohama $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$ i ravninama $z = 0$ i $y + z = 1$.

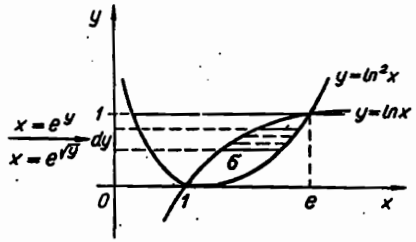
Ravnina $z = 1 - y$ siječe ravninu $z = 0$ u pravcu $y = 1$. Iz slike 111 se vidi, da ćemo najprije integrirati u smjeru osi x, pa prelazimo na inverzne funkcije $x = e^y$ i $x = e^{\sqrt{y}}$. Dobijemo:

$$V = \int_0^1 (1 - y)\,dy \int_{e^y}^{e^{\sqrt{y}}} dx = \int_0^1 (1 - y)(e^{\sqrt{y}} - e^y)\,dy =$$

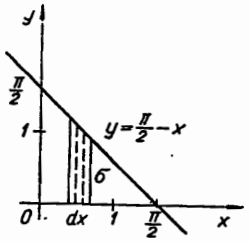
$$= \int_0^1 e^{\sqrt{y}}\,dy - \int_0^1 y\,e^{\sqrt{y}}\,dy - \left| e^y \right|_0^1 + \int_0^1 y\,e^y\,dy.$$

Prva dva integrala riješimo pomoću supstitucije $\sqrt{y} = t$, a treći parcijalnom integracijom. Imamo:

$$V = \left| -10\sqrt{y}\,e^{\sqrt{y}} + 10\,e^{\sqrt{y}} - 2\sqrt{y^3}\,e^y + 6y\,e^{\sqrt{y}} + y\,e^y - 2\,e^y \right|_0^1 = \underline{3e + 8}.$$



Slika 111.



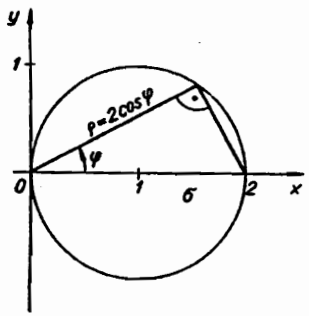
Slika 112.

416. Plohom $z = \cos x \cos y$ i ravninom $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $x + y = \frac{\pi}{2}$, odnosno $y = \frac{\pi}{2} - x$. Prema slici 112:

$$V = \iint_\sigma \cos x \cos y\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx \int_0^{\frac{\pi}{2} - x} \cos y\,dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx \left| \sin y \right|_0^{\frac{\pi}{2} - x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \left| \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{\pi}{4}}.$$

417. Kružnim valjkom $x^2 + y^2 = 2x$ i ravninama $2x - z = 0$ i $4x - z = 0$.



Slika 113.

Iz zadatka vidimo da razlika kota z iznosi $4x - 2x = 2x$, pa s obzirom na sliku 113 dobijemo prikazavši jednadžbu $x^2 + y^2 = 2x$ u obliku $(x - 1)^2 + y^2 = 1$:

$$V = 2\iint_\sigma x\,dx\,dy = \text{prema (111)} = 2\iint_{\sigma'} \rho\cos\varphi \cdot \rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \cdot \left|\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{2\cos\varphi} = \frac{16}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi = \text{tip VIII, dio II}$$

$$\text{Repetitorija} = \frac{16}{3}\left|\frac{1}{4}\sin\varphi\cos^3\varphi + \frac{3}{8}\varphi + \frac{3}{16}\sin 2\varphi\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3}\cdot\frac{6\pi}{16} = \underline{2\pi}.$$

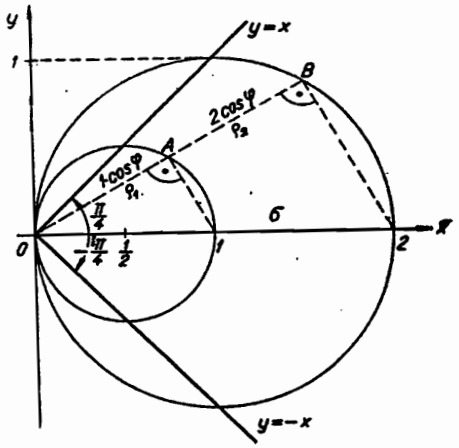
418. Kružnim valjkom $x^2 + y^2 = 4$ i ravninama $z = 0$ i $z = x + y + 10$.

[40 π].

419. Kružnim valjkom $x^2 + y^2 = R^2$, paraboloidom $Rz = 2R^2 + x^2 + y^2$ i ravninom $z = 0$.

$$\left[\frac{5}{2}\pi R^3\right].$$

420. Kružnim valjcima $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, rotacionim paraboloidom $z = x^2 + y^2$ i ravninama $y = x$, $y = -x$ i $z = 0$.



Slika 114.

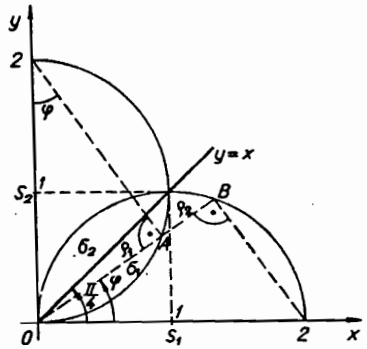
Računamo prema slici 114 uzevši u obzir simetričnost zadanog tijela i područja σ:

$$V = 2\iint_\sigma (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \text{prema (111)} = 2\iint_{\sigma'} (\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} \rho^3\, d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (16\cos^4\varphi - \cos^4\varphi)\, d\varphi = \text{prema tipu VIII} =$$

$$= \frac{15}{2}\left|\frac{1}{4}\sin\varphi\cdot\cos^3\varphi + \frac{3}{8}\varphi + \frac{3}{16}\sin 2\varphi\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \underline{\frac{15}{8}\left(\frac{3\pi}{8} + 1\right)}.$$

421. Kružnim valjcima $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 2y$ i ravninama $z = x + 2y$ i $z = 0$.



Slika 115.

Iz slike 115 slijedi: $OA = \rho_1 = 2\sin\varphi$, $OB = \rho_2 = 2\cos\varphi$ pa dobijemo uzevši u obzir da se valjci sijeku u ravnini $y = x$:

$$V = \iint_\sigma (x + 2y)\, dx\, dy = \iint_{\sigma_1'} (\rho_1\cos\varphi + 2\rho_1\sin\varphi)\, \rho_1\, d\rho_1\, d\varphi +$$

$$+ \iint_{\sigma_2'} (\rho_2\cos\varphi + 2\rho_2\sin\varphi)\, \rho_2\, d\rho_2\, d\varphi =$$

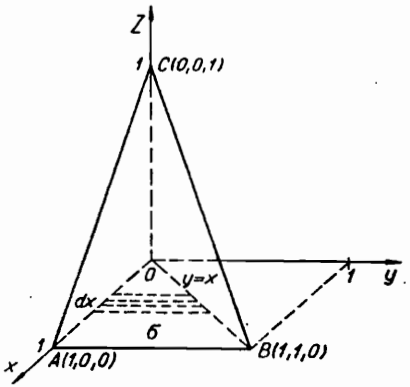
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \left|\frac{\rho_1^3}{3}\cos\varphi + \frac{2}{3}\rho_1^3\sin\varphi\right|_0^{2\sin\varphi} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left|\frac{\rho_2^3}{3}\cos\varphi + \frac{2}{3}\rho_2^3\sin\varphi\right|_0^{2\cos\varphi} =$$

$$= \frac{8}{3}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos\varphi\sin^3\varphi + 2\sin^4\varphi)\, d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4\varphi + 2\sin\varphi\cos^3\varphi)\, d\varphi\right] =$$

$$= \frac{8}{3}\left[\left|\frac{\sin^4\varphi}{4} - \frac{1}{2}\sin^3\varphi\cos\varphi + \frac{3}{4}\varphi - \frac{3\sin 2\varphi}{8}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} +\right.$$

$$\left. + \left|\frac{1}{4}\sin\varphi\cos^3\varphi + \frac{3}{8}\varphi + \frac{3}{16}\sin 2\varphi - \frac{2\cos^4\varphi}{4}\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right] = \underline{\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}.$$

422. Izračunaj volumen piramide kojoj su vrhovi $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$ i $C(0, 0, 1)$.



Slika 116.

Prema slici 116 izračunajmo jednadžbu ravnine ABC. S obzirom na (51) imamo:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ili prema § 1,5} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

a odatle je $z = -x + 1$.

$$V = \int_0^1 (1 - x)\,dx \int_0^x dy = \underline{\frac{1}{6}}.$$

b. RAVNI LIKOVI

1. Površina ravnih likova

Formule

$$S = \iint_S dx\,dy \quad (121) \qquad S = \iint_S \rho\,d\rho\,d\varphi \quad (122)$$

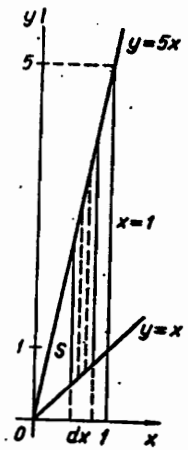
$$S = \iint_S a\,b\,u\,du\,dv. \quad (113)$$

Zadaci

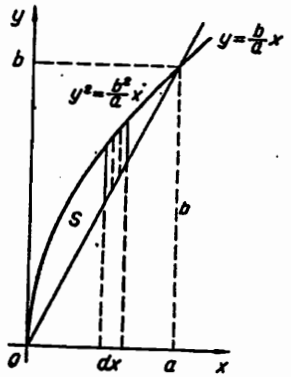
U zadacima **423 — 434** uklj. odredi površine zadanih likova.

423. Lik je omeđen pravcima $y = x$, $y = 5x$ i $y = 1$. (Sl. 117).

$$S = \iint_S dx\,dy = \int_0^1 dx \int_x^{5x} dy = \int_0^1 (5x - x)\,dx = 4\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \underline{2.}$$



Slika 117.



Slika 118.

424. Lik je omeđen parabolom $y^2 = \frac{b^2}{a}x$ i pravcem $y = \frac{b}{a}x$ (Sl. 118).

Riješimo li zajedno zadane jednadžbe parabole i pravca, dobit ćemo $x_1 = 0$ i $x_2 = a$ pa prema slici imamo:

$$S = \iint_S dx\,dy = \int_0^a dx \int_{\frac{b}{a}x}^{\sqrt{\frac{b^2}{a}x}} dy = \int_0^a \left(\sqrt{\frac{b^2}{a}x} - \frac{b}{a}x\right) dx =$$

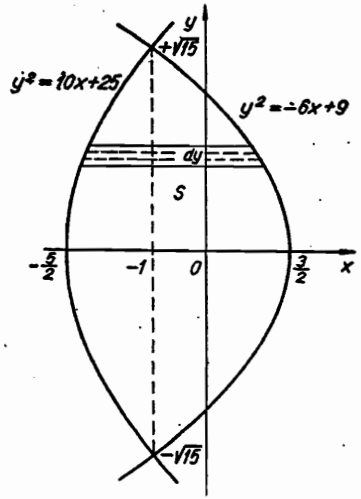
$$= \left|\frac{b}{\sqrt{a}} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2}{2}\right|_0^a = \frac{2}{3}ab - \frac{1}{2}ab = \underline{\frac{ab}{6}}.$$

425. Lik je omeđen parabolama $y^2 = 10x + 25$ i $y^2 = -6x + 9$.

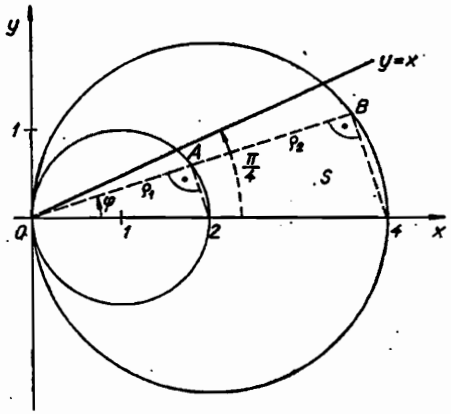
Napisavši jednadžbe parabola u obliku $y^2 = 10\left(x + \frac{5}{2}\right)$ i $y^2 = -6\left(x - \frac{3}{2}\right)$, opažamo da su $x_1 = -\frac{5}{2}$ i $x_2 = \frac{3}{2}$ apscise njihovih vrhova, a zajedničko rješavanje njihovih jednadžbi daje koordinate njihova sjecišta $(-1, \pm\sqrt{15})$. Vidi sl. 119.

$$S = \iint\limits_S dx\,dy = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} dy \int_{\frac{y^2}{10}-\frac{5}{2}}^{-\frac{y^2}{6}+\frac{3}{2}} dx = \int_{-\sqrt{16}}^{\sqrt{15}} \left(-\frac{y^2}{6} + \frac{3}{2} - \frac{y^2}{10} + \frac{5}{2}\right) dy =$$

$$= \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \left(-\frac{4}{15}y^2 + 4\right) dy = 4\left| -\frac{y^2}{45} + y \right|_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} = \underline{\frac{16}{3}\sqrt{15}}.$$



Slika 119.



Slika 120.

426. Lik je omeđen kružnicama $x^2 + y^2 = 2x$ i $x^2 + y^2 = 4x$ i pravcima $y = x$ i $y = 0$ (Sl. 120).

Napisavši jednadžbe kružnica u obliku $(x-1)^2 + y^2 = 1$ i $(x-2)^2 + y^2 = 4$, iz kojih sada vidimo koordinate središta i polumjere, rišemo sl. 120 pa prelazimo na polarne koordinate. Iz slike slijedi: $\rho_1 = 2\cos\varphi$ a $\rho_2 = 4\cos\varphi$.

$$S = \iint\limits_{S'} \rho\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho\,d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|\rho^2\right|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (16\cos^2\varphi - 4\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= 6\left|\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \underline{3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)}.$$

427. Lik je omeđen krivuljom

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}.$$

Prelazimo na eliptičke koordinate (113):

$$x = a\,u\cos v; \qquad y = b\,u\sin v; \qquad dx\,dy = a\,b\,u\,du\,dv$$

pa uvrštenje u jednadžbu krivulje daje:

$$(u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v)^2 = \frac{1}{c^2}\,a\,b\,u^2\cos v\sin v$$

a odatle je

$$u^4 = \frac{1}{c^2}\,a\,b\sin v\cos v$$

pa je

$$u = \pm\frac{1}{c}\sqrt{a\,b\sin v\cos v}.$$

$$S = 2\,a\,b\int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{\frac{1}{c}\sqrt{ab\sin v\cos v}} u\,du = 2\,a\,b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\,b}{2\,c^2}\sin v\cos v\,dv = \frac{a^2b^2}{c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v\cdot\cos v\,dv =$$

$$= \frac{a^2b^2}{c^2}\left|\frac{\sin^2 v}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{a^2b^2}{2\,c^2}}.$$

428. Lik je omeđen pravcima $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 1$.

$$\left[\frac{1}{2}\right].$$

429. Lik je omeđen parabolama $y = \sqrt{x}$ i $y = 2\sqrt{x}$ i pravcem $x = 4$ $(y \geqq 0)$.

$$\left[\frac{16}{3}\right].$$

430. Lik je omeđen parabolom $y = x^2 + 4x$ i pravcem $y = 3x + 2$.

$$\left[\frac{9}{2}\right].$$

431. Lik je omeđen pravcima $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$ i krivuljom $y = e^x$.

$$[e^2 - 1].$$

432. Lik je omeđen pravcima $x = 0$, $y = 1$ i $y = 3$ i hiperbolom $y = \frac{1}{x}$.

$$[\ln 3].$$

433. Lik je omeđen pravcima $y = 0$ i $y = x$ i kružnicom $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

$$\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right].$$

434. Lik je omeđen Bernoullijevom lemniskatom

$$(x^2 + y^2)^2 = 2\,a^2(x^2 - y^2).$$

$$[2\,a^2].$$

Formula

$$m = \iint_S \mu(x, y)\, dx\, dy. \qquad (123\ b)$$

Tu je $\mu(x, y)$ površinska gustoća lika,
S površina ravnog lika.

Zadaci

435. Odredi masu kvadratične pločice stranica $2a$, ako je gustoća materijala ploče razmjerna s kvadratom udaljenosti od sjecišta dijagonala, a u vrhovima kvadrata jednaka jedinici.

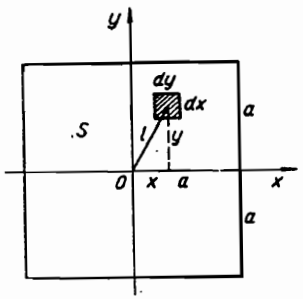
Prema slici 121 i zadatku:
gustoća $\mu = c \cdot l^2 = c(x^2 + y^2)$, gdje je c faktor razmjernosti. Kako je za $x = y = a$ $\mu = 1$, dobijemo

$$1 = c \cdot 2a^2, \quad \text{pa je } c = \frac{1}{2a^2}, \text{ dok je } \mu = \frac{1}{2a^2}(x^2 + y^2).$$

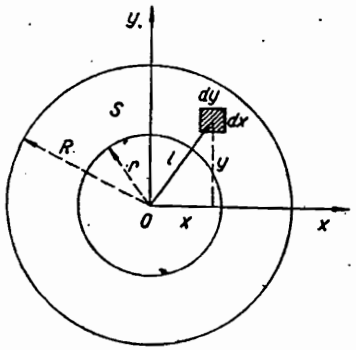
Prema (123 b):

$$m = \frac{1}{2a^2}\iint_S (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \frac{1}{2a^2}\int_{-a}^{a} dx \left| x^2 y + \frac{y^3}{3} \right|_{-a}^{a} = \frac{2}{2a^2}\int_{-a}^{a}\left(a x^2 + \frac{a^3}{3}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left| a\frac{x^3}{3} + \frac{a^3}{3}x \right|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}a^2$$



Slika 121.



Slika 122.

436. Odredi masu plosnatog prstena koji je omeđen s dvije koncentrične kružnice polumjera R i r ($r < R$), ako je gustoća materijala obratno razmjerna s udaljenošću od središta kružnice, a na nutarnjoj kružnici jednaka je jedinici.

$c = 1$, pa je $1 = \frac{c}{r}$, te je $c = r$, dok je gustoća $\mu = \frac{r}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

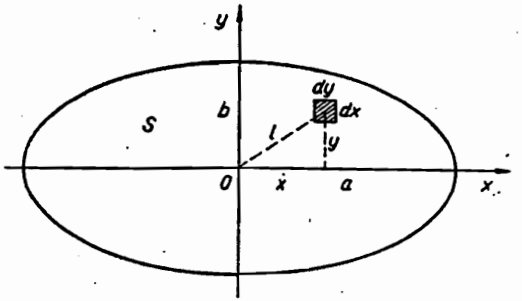
Prema (123 b):

$$m = r\iint_S \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \text{prelazimo na polarne koordinate} = r\iint_{S'} \frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= r\int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^R d\rho = \underline{2\pi r(R - r)}.$$

437. Odredi masu okrugle ploče polumjera R, ako je gustoća razmjerna s udaljenošću od središta, a jednaka je δ na kraju ploče.

$$\left[\frac{2}{3}\pi\delta R^2\right].$$



Slika 123.

438. Na liku koji je omeđen elipsom s poluosima a i b masa je raspodjeljena tako, da je njena gustoća razmjerna s udaljenošću od velike osi, pri čemu je jednaka γ u udaljenosti jednakoj jedinici od te osi. Odredi masu lika.

Prema slici 123 i zadatku:

$$\mu = c \cdot y, \quad \text{a za} \quad y = 1\ \gamma = c \quad \text{pa je} \quad \mu = \gamma y.$$

$$\frac{m}{2} = \gamma\iint_{\frac{S}{2}} y\, dx\, dy = \text{prelazimo na eliptičke koordinate} = \gamma\iint_{\frac{S}{2}} a u \sin v \cdot a b u\, du\, dv =$$

$$= \gamma a^2 b\int_0^{\pi} \sin v\, dv \int_0^1 u^2\, du = \gamma a^2 b\left| -\cos v \right|_0^{\pi} \cdot \left| \frac{u^3}{3} \right|_0^1 = \frac{2}{3}\gamma a^2 b; \quad \underline{m = \frac{4}{3}\gamma a^2 b.}$$

3. Statički momenti i koordinate težišta ravnih likova

Formule za $\mu = 1$

U pravokutnim koordinatama

$$M_x = \iint_S y\,dx\,dy; \qquad M_y = \iint_S x\,dx\,dy \tag{124}$$

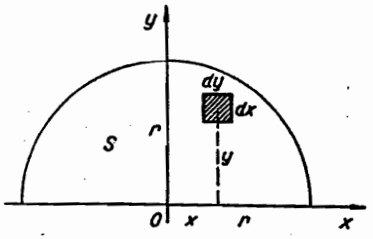
$$x_t = \frac{M_y}{S} = \frac{\iint_S x\,dx\,dy}{\iint_S dx\,dy}; \qquad y_t = \frac{M_x}{S} = \frac{\iint_S y\,dx\,dy}{\iint_S dx\,dy}. \tag{125}$$

U polarnim koordinatama

$$x_t = \frac{M_y}{S} = \frac{\iint_S \rho^2 \cos\varphi\,d\rho\,d\varphi}{\iint_S \rho\,d\rho\,d\varphi}; \qquad y_t = \frac{M_x}{S} = \frac{\iint_S \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi}{\iint_S \rho\,d\rho\,d\varphi}. \tag{125 a}$$

Zadaci

U zadacima **439** do **441** uklj. izračunaj statičke momente zadanih homogenih ravnih likova ($\mu = 1$).



Slika 124.

439. Polukruga s obzirom na dijametar (sl. 124).

Prema (124):

$$M_x = \iint_S y\,dx\,dy = \text{uz prijelaz na polarne koordinate} = \iint_S \rho \sin\varphi\,\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

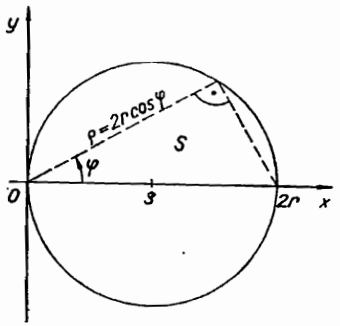
$$= \int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi \int_0^{r} \rho^2\,d\rho = \Big|-\cos\varphi\Big|_0^{\pi} \cdot \Big|\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{r} = \underline{\frac{2}{3}r^3}.$$

440. Kruga s obzirom na tangentu (sl. 125).

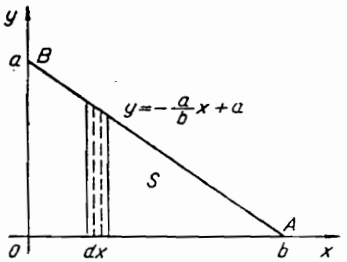
Uzevši za tangentu os Y, dobijemo prema (125 a):

$$M_y = \iint_S \rho\cos\varphi \cdot \rho\,d\rho\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi \int_0^{2r\cos\varphi} \rho^2\,d\rho = \frac{8}{3}r^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\,d\varphi = \text{vidi tip VIII,}$$

$$\text{dio II Repetitorija} = \frac{8}{3}r^3 \left| \frac{1}{4}\sin\varphi\cos^3\varphi + \frac{3}{8}\varphi + \frac{3}{16}\sin 2\varphi \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\pi r^3}.$$



Slika 125.



Slika 126.

441. Pravokutnika sa stranicama a i b s obzirom na stranicu a.

$$\left[\frac{a\,b^2}{2}\right].$$

442. Pločica ima oblik pravokutnog trokuta s katetama $OB = a$ i $OA = b$, pri čemu je njena gustoća u bilo kojoj tački jednaka udaljenosti tačke od katete OA. Odredi statičke momente ploče s obzirom na katete OA i OB.

Prema slici 126:

$$\mu = y; \quad AB \equiv \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \quad \text{ili} \quad y = -\frac{a}{b}x + a.$$

Prema (124):

$$M_x = \iint_S y \cdot y\,dx\,dy = \int_0^b dx \int_0^{-\frac{a}{b}x + a} y^2\,dy = \int_0^b dx \left|\frac{y^3}{3}\right|_0^{-\frac{a}{b}x + a} =$$

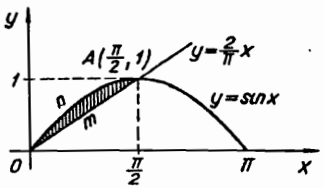
$$= \frac{1}{3}\int_0^b \left(-\frac{a^3}{b^3}x^3 + \frac{3a^3}{b^3}x^2 - \frac{3a^3}{b}x + a^3\right) dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left| -\frac{a^3}{4b^3}x^4 + \frac{a^3}{b^3}x^3 - \frac{3a^3}{\ }x^2 + a^3 x \right|_0^b = \underline{\frac{a^3 b}{12}}.$$

Izračunaj na isti način M_y, dobit ćeš $M_y = \underline{\frac{a^2 b^2}{24}}$.

U zadacima **443** do **446** uklj. izračunaj težišta zadanih ravnih likova ($\mu = 1$).

443. Lika $O\,m\,A\,n\,O$ koji je prikazan u slici 127.



Slika 127.

Prema toj slici i formuli (125) dobijemo:

$$OA \equiv y = \frac{2}{\pi}x$$

$$x_t = \frac{\iint\limits_S x\,dx\,dy}{\iint\limits_S dx\,dy} = \frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx \int\limits_{\frac{2}{\pi}x}^{\sin x} dy}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\frac{2}{\pi}x}^{\sin x} dy} = \frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x\right) x\,dx}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x\right) dx} =$$

$$= \frac{\left| -x\cos x + \sin x - \frac{2x^2}{3\pi} \right|_0^{\frac{\pi}{2}}}{\left| -\cos x - \frac{x^2}{\pi} \right|_0^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1 - \frac{\pi^2}{12}}{-\frac{\pi}{4} + 1} = \underline{\frac{12 - \pi^2}{3(4 - \pi)}}.$$

Na isti način izračunaj y_t. Dobit ćeš

$$y_t = \frac{\pi}{6(4 - \pi)}.$$

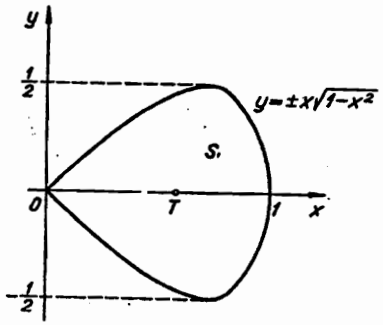
444. Lika koji je omeđen krivuljom $y = \pm x\sqrt{1 - x^2}$ $(x \geqq 0)$.

Prema slici 128: $\underline{y_t = 0}$, a prema formuli (125):

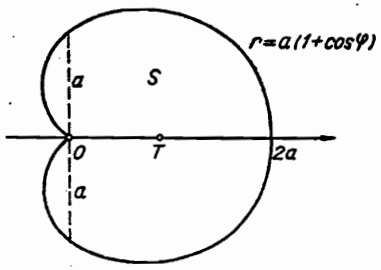
$$x_t = \frac{2\int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_0^{+x\sqrt{1-x^2}} dy}{2\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{+x\sqrt{1-x^2}} dy} = \frac{\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1 - x^2}\,dx}{\int\limits_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\,dx} =$$ integral u brojniku riješi kao posebni

slučaj b) tipa III, dio II Repetitorija, a integral u nazivniku uz supstituciju $1 - x^2 = t =$

$$= \frac{\left| \left(\frac{x^3}{4} - \frac{x}{8}\right)\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{8}\arcsin x \right|_0^1}{-\frac{1}{3}\left| \sqrt{(1 - x^2)^3} \right|_0^1} = \underline{\frac{3\pi}{16}}.$$



Slika 128.



Slika 129.

445. Lika koji je omeđen kardioidom $r = a(1 + \cos\varphi)$.

Prema slici 129 i formuli (125 a):

$$\underline{y_t = 0;}\ x_t = \frac{\iint\limits_S \rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi}{\iint\limits_S \rho\,d\rho\,d\varphi} = \frac{\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho^2\,d\rho}{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho\,d\rho} =$$

$$= \frac{\frac{a^3}{3}\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\,(1 + \cos\varphi)^3\,d\varphi}{\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^2\,d\varphi} = \frac{2}{3}a\,\frac{\int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos^3\varphi + \cos^4\varphi)\,dy}{\int\limits_0^{2\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi} =$$

= riješimo li te integrale prema tipu VIII, dio II Repetitorija, dobit ćemo $= \underline{\frac{5}{6}a}$.

446. Lika omeđenog parabolama

$$y^2 = 4x + 4 \quad \text{i} \quad y^2 = -2x + 4.$$

$\left[\text{Vrhovi su parabola } (-1,0) \text{ i } (2,0), \text{ a sijeku se u tačkama } (0,2) \text{ i } (0,-2);\ y_t = 0;\ x_t = \frac{2}{5}\right].$

4. Momenti tromosti ravnih likova

Formule za $\mu = 1$

I U pravokutnim koordinatama

$$I_x = \iint_S y^2\,dx\,dy \qquad I_y = \iint_S x^2\,dx\,dy \qquad I_{xy} = \iint_S x\,y\,dx\,dy \tag{126}$$

$$I_p = I_0 = \iint_S (x^2 + y^2)\,dx\,dy = I_x + I_y. \tag{127 a}$$

II U polarnim koordinatama

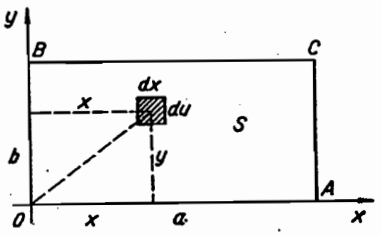
$$I_x = \iint_S \rho^3 \sin^2\varphi\,d\rho\,d\varphi \qquad I_y = \iint_S \rho^3 \cos^2\varphi\,d\rho\,d\varphi$$

$$I_{xy} = \iint_S \rho^3 \sin\varphi \cos\varphi\,d\rho\,d\varphi. \tag{128}$$

$$I_p = I_0 = \iint_S \rho^3\,d\rho\,d\varphi. \tag{129}$$

Zadaci

447. Odredi moment tromosti pravokutnika $OACB$ kojemu su stranice $OA = a$ i $OB = b$ s obzirom na vrh O i stranice OA i OB, ako je gustoća razmjerna s udaljenošću od stranice OB (k = faktor razmjernosti).



Slika 130.

Prema (127 a) i slici 130:

$$I_0 = k \iint_S x(x^2 + y^2)\,dx\,dy = k \int_0^b dy \int_0^a (x^3 + x y^2)\,dx = k \int_0^b dy \left| \frac{x^4}{4} + y^2 \frac{x^2}{2} \right|_0^a =$$

$$= k \int_0^b \left(\frac{a^4}{4} + \frac{a^2}{2} y^2 \right) dy = \frac{a^2 k}{2} \left| \frac{a^2}{2} y + \frac{y^3}{3} \right|_0^b = \underline{\frac{a^2 b k}{12} (3a^2 + 2b^2)}.$$

Prema (126):

$$I_a = I_x = k \iint_S x y^3\,dx\,dy = k \int_0^a x\,dx \int_0^b y^3\,dy = k \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^a \cdot \left| \frac{y^4}{4} \right|_0^b = \underline{\frac{a^2 b^4 k}{8}}.$$

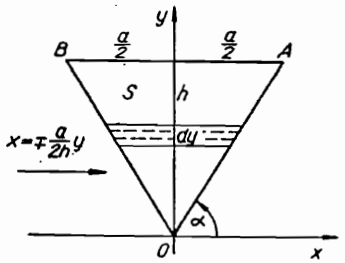
Izračunaj na isti način $I_b = I_y$. Dobit ćeš $\underline{\frac{a^4 b k}{4}}$.

448. Odredi moment tromosti kvadrata stranice a s obzirom na jedan njegov vrh, ako je gustoća razmjerna s y (k je faktor razmjernosti).

$$\left[\frac{5}{12} k a^5 \right].$$

U zadacima **449** do **456** uklj. izračunaj momente tromosti zadanih homogenih likova ($\mu = 1$).

449. Istokračnog trokuta baze a i visine h s obzirom na vrh.



Slika 131.

Prema slici 131:

$$OA \equiv y = k x; \quad k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{2h}{a}, \quad \text{pa je} \quad y = \frac{2h}{a} x, \quad \text{odn.} \quad x = \frac{a}{2h} y.$$

Slično:

$$OB \equiv x = -\frac{a}{2h} y.$$

Prema (127 a):

$$I_0 = \int_0^h dy \int_{-\frac{a}{2h}y}^{\frac{a}{2h}y} (x^3 + y^3)\,dx = 2 \int_0^h dy \left| \frac{x^4}{3} + y^3 x \right|_0^{\frac{a}{2h}y} = 2 \int_0^h \left(\frac{1}{3} \frac{a^4}{8h^4} y^4 + \frac{a}{2h} y^4 \right) dy =$$

$$= 2 \left| \frac{1}{3} \frac{a^4}{8h^4} \cdot \frac{y^5}{5} + \frac{a}{2h} \frac{y^5}{5} \right|_0^h = \underline{\frac{a h}{48} (a^4 + 12 h^4)}.$$

450. Kruga polumjera R s obzirom na tangentu.

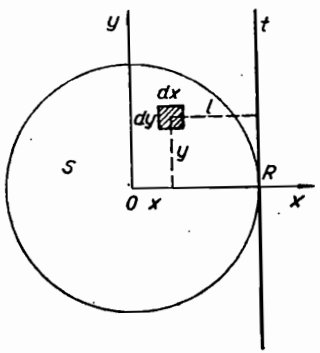
Prema slici 132 i (126):

$$I_t = \iint_S l^2\,dx\,dy = \iint_S (R-x)^2\,dx\,dy = \text{uz prijelaz na polarne koordinate} =$$

$$= \iint_{S'} (R-\rho\cos\varphi)^2\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R^2\rho - 2R\rho^2\cos\varphi + \rho^3\cos^2\varphi)\,d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left| R^2\frac{\rho^2}{2} - \frac{2}{3}R\rho^3\cos\varphi + \frac{\rho^4}{4}\cos^2\varphi \right|_0^R = R^4\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= R^4\left|\frac{\varphi}{2} - \frac{2}{3}\sin\varphi + \frac{1}{4}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\right|_0^{2\pi} = \underline{\frac{5}{4}\pi R^4}.$$



Slika 132.

451. Segmenta parabole prema slici 133 s obzirom na vrh parabole.

Izvedimo jednadžbu parabole: tačka $A\left(h, \frac{a}{2}\right)$ leži na paraboli. Uvrštenje u $y^2 = 2px$ daje:

$$\frac{a^2}{4} = 2ph, \text{ pa je } 2p = \frac{a^2}{4h}, \text{ a } y^2 = \frac{a^2}{4h}x \text{ i } y = \pm\frac{a\sqrt{x}}{2\sqrt{h}}.$$

Prema (127 a):

$$I_0 = 2\int_0^h dx \int_0^{\frac{a}{2\sqrt{h}}\sqrt{x}} (x^2+y^2)\,dy = 2\int_0^h dx \left| x^2y + \frac{y^3}{3}\right|_0^{\frac{a}{2\sqrt{h}}\sqrt{x}} =$$

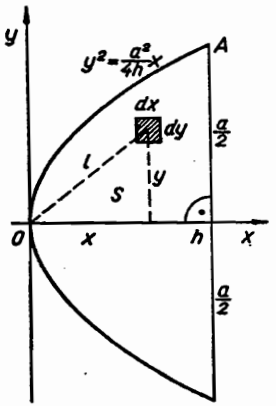
$$= 2\int_0^h dx\left(\frac{a}{2\sqrt{h}}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}\frac{a^3}{8h\sqrt{h}}x^{\frac{3}{2}}\right) = 2\left(\frac{ah^2}{7} + \frac{a^3h}{60}\right) = \underline{ah\left(\frac{2h^2}{7} + \frac{a^2}{30}\right)}.$$

452. Kruga polumjera r s obzirom na tačku kružnice.

Prema formuli (129) i slici 125 navedenoj uz zadatak 440 dobijemo:

$$I_0 = \iint_S \rho^3\,d\rho\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left|\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{2r\cos\varphi} = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 16r^4\cos^4\varphi\,d\varphi = \text{tip VIII, dio II Repetitorija} =$$

$$= 4r^4\left|\frac{1}{4}\sin\varphi\cos^3\varphi + \frac{3}{8}\varphi + \frac{3}{16}\sin 2\varphi\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4r^4\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{3}{8}\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\frac{3}{2}\pi r^4}.$$



Slika 133.

453. Segmenta parabole $y^2 = ax$ što ga odsjeca pravac $x = a$ s obzirom na pravac $y = -a$.

$$\left[\frac{8}{5}a^4\right].$$

454. Trokuta omeđenog pravcima $x + y = 2$, $x = 2$ i $y = 2$ s obzirom na os X.

[4].

455. Lika omeđenog parabolom $y = x^2$ i pravcem $y = x + 2$ s obzirom na os Y.

$$\left[\frac{63}{20}\right].$$

456. Lika omeđenog kardioidom $r = a(1 + \cos\varphi)$ s obzirom na pol.

$$\left[I_0 = \frac{35}{16}\pi a^4\right].$$

c. PLOHE

1. Komplanacija (određivanje površine) ploha

Formule

Tražena površina S plohe projicira se na ravninu:

XY:
$$S = \iint_{\sigma} \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\; dx\,dy. \qquad (131)$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

YZ:
$$S = \iint_{\sigma_1} \frac{dy\,dz}{\cos\alpha} = \iint_{\sigma_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\; dy\,dz \qquad (131\text{ a})$$

XZ:
$$S = \iint_{\sigma_2} \frac{dx\,dz}{\cos\beta} = \iint_{\sigma_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\; dx\,dz. \qquad (131\text{ b})$$

Kako se vodi iz navedenih formula, pri računanju površine S zadane plohe možemo tu plohu projicirati na bilo koju koordinatnu ravninu, ukoliko je ta projekcija dvodimenzionalni lik površine σ. U svim tim slučajevima dobijemo za traženu površinu S plohe istu vrijednost

Zadaci

457. Odredi površinu onog dijela ravnine $6x + 3y + 2z - 12 = 0$ koji se nalazi u prvom oktantu projicirajući zadani dio ravnine 1) na ravninu XY; 2) na ravninu YZ i 3) na ravninu XZ. (Sl. 134).

ad 1) Kako je $z = 6 - 3x - \frac{3}{2}y$, računamo prema (131):

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -3; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{2}$$

pa je

$$S = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + 9 + \frac{9}{4}}\; dx\,dy = \frac{7}{2}\iint_{\sigma} dx\,dy = \frac{7}{2}\int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy,$$

jer je za $z = 0$ $y = 4 - 2x$

$$S = \frac{7}{2}\int_0^2 dx\,(4 - 2x) = \frac{7}{2}\left|4x - x^2\right|_0^2 = \underline{14}.$$

Izračunaj sada 2) i 3) prema (131 a), odn. (131 b). Rezultat mora biti isti!

458. Izračunaj površinu onog dijela plohe $z^2 = 2xy$ koji se nalazi iznad pravokutnika u ravnini $z = 0$ omeđenog pravcima $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$ i $y = 6$ (sl. 135).

Parcijalne derivacije računamo iz implicitne funkcije $z^2 - 2xy = 0$ prema formuli (92):

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-2y}{2z} = \frac{y}{z}; \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-2x}{2z} = \frac{x}{z}.$$

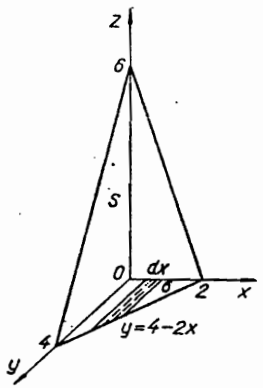
$$S = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + \frac{y^2}{z^2} + \frac{x^2}{z^2}}\; dx\,dy = \int_0^3 dx \int_0^6 \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z}\; dy,$$

a kako je $z = \sqrt{2xy}$, dobijemo:

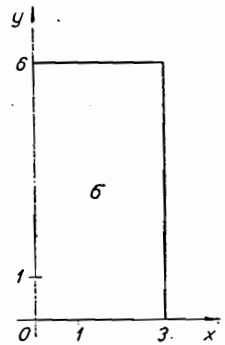
$$S = \int_0^3 dx \int_0^6 \frac{x + y}{\sqrt{2xy}}\, dy = \int_0^3 dx \int_0^6 \left(\sqrt{\frac{x}{2y}} + \sqrt{\frac{y}{2x}}\right) dy =$$

$$= \int_0^3 dx \left|\sqrt{\frac{x}{2}} \cdot 2\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{y^3}\right|_0^6 = \left|\sqrt{12} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{6^3} \cdot 2\sqrt{x}\right|_0^3 =$$

$$= 12 + 24 = \underline{36}.$$



Slika 134.



Slika 135.

459. Odredi površinu onog dijela plašta kružnog stošca $x^2 + y^2 = z^2$, koji leži iznad ravnine XY a odsjeca ga

1) ravnina $z = \sqrt{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$

2) valjkovita ploha $z^2 = 2py$.

ad 1) Odredimo projekciju zadanog dijela plašta stošca na ravninu XY, tj. područje integracije σ. U tu svrhu uvrstimo $z = \sqrt{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ u $x^2 + y^2 = z^2$:

$$x^2 + y^2 = 2\left(\frac{x^2}{4} + x + 1\right) \cdot 2$$

i uredimo:

$$x^2 - 4x + 2y^2 = 4$$

ili

$$(x-2)^2 + 2y^2 = 8 \mid :8$$

$$\left.\frac{(x-2)^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1\right\}$$ σ je elipsa s poluosima $a = 2\sqrt{2}$ i $b = 2$, dok je središte u $(2, 0)$.

Računamo prema (131), a s obzirom na $z^2 = x^2 + y^2$ dobijemo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}$$

$$S = \iint_\sigma \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}}\, dx\, dy = \iint_\sigma \sqrt{\frac{z^2 + x^2 + y^2}{z^2}}\, dx\, dy =$$

$$= \text{uz uvrštenje } x^2 + y^2 = z^2 = \iint_\sigma \frac{z\sqrt{2}}{z}\, dx\, dy = \sqrt{2} \iint_\sigma dx\, dy = \sqrt{2} \cdot \sigma =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \text{površina elipse} = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\pi = \underline{8\pi}.$$

ad 2) Riješi na slični način. Rezultat je $2\sqrt{2}\,\pi p^2$.

U zadacima **460** do **466** uklj. izračunaj površine dijelova zadanih ploha.

460. Dijela plohe $y^2 + z^2 = x^2$, koji leži unutar valjka $x^2 + y^2 = R^2$.

Usporedimo li jednadžbu zadane plohe $y^2 + z^2 = x^2$ s jednadžbom plohe koja nastaje rotacijom oko osi X krivulje $y = f(x)$ [formula (90), dio II Repetitorija] $y^2 + z^2 = [f(x)]^2$, vidjet ćemo da je $f(x) = x$, tj. zadana ploha predočuje plašt kružnog stošca nastalog rotacijom oko osi X pravca $z = x$ ili $y = x$. Odredimo projekciju na ravninu YZ zadanog dijela plašta stošca, tj. područje integracije σ:

Iz $x^2 + y^2 = R^2$ slijedi da je $x^2 = R^2 - y^2$, pa uvrštenje u $y^2 + z^2 = x^2$ daje:

$$2y^2 + z^2 = R^2 \mid : R^2$$

$$\frac{y^2}{\frac{R^2}{2}} + \frac{z^2}{R^2} = 1,$$

a to je elipsa s poluosima $a = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ i $b = R$. Kako je $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, računamo prema (131 a):

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{y}{x}, \text{ analogno } \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{z}{x},$$

pa je

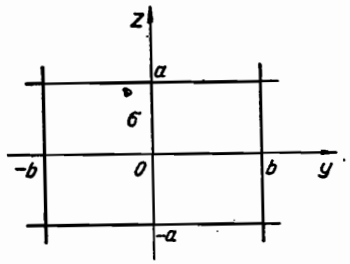
$$S = \iint_\sigma \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{x^2}}\, dy\, dz \text{ [jer je } y^2 + z^2 = x^2] = \iint_\sigma \sqrt{\frac{2x^2}{x^2}}\, dy\, dz = \sqrt{2} \iint_\sigma dy\, dz =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sigma = \sqrt{2} \cdot \text{površina elipse} = \sqrt{2} \cdot a\, b\, \pi = \sqrt{2} \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} \cdot R\pi = \underline{\pi R^2},$$

odnosno $2\pi R^2$, ako uzmemo u obzir plašt stošca za $x < 0$.

461. Dijela plohe $y^2 + z^2 = x^2$ isječenog valjkovitom plohom $x^2 - y^2 = a^2$ i ravninama $y = b$ i $y = -b$.

Da dobijemo područje integracije σ, projiciramo presječnicu zadanih ploha na ravninu YZ.



Slika 136.

Iz $x^2 - y^2 = a^2$ slijedi $x^2 = a^2 + y^2$, a uvrštenje u $y^2 + z^2 = x^2$ daje $z = \pm a$. Slika 136 predočuje područje σ.

Kako je $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, dobijemo

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{y}{x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{z}{x}.$$

Uzevši u obzir oba plašta stošca, računamo

$$S = 2\iint_\sigma \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{x^2}}\, dy\, dz = 2\iint_\sigma \sqrt{\frac{2x^2}{x^2}}\, dy\, dz = \text{(jer je } y^2 + z^2 = x^2) =$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \sigma = \text{prema slici} = 2\sqrt{2} \cdot 4\, a\, b = \underline{8\sqrt{2}\, a\, b.}$$

462. Dijela valjkovite plohe $z^2 = 4x$ isječenog valjkovitom plohom $y^2 = 4x$ i ravninom $x = 1$.

Područje integracije σ čini u ravnini XY parabola $y^2 = 4x$ presječena pravcem $x = 1$. Nariši σ pa prema (131) dobit ćeš

$$S = \frac{16}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right).$$

463. Dijela plohe $z = xy$ isječenog valjkom $x^2 + y^2 = R^2$.

$$\left[\frac{2\pi}{3}\left\{\sqrt{(1 + R^2)^3} - 1\right\}\right].$$

464. Dijela plohe rotacionog paraboloida $x^2 + y^2 = 2z$ isječenog valjkom $x^2 + y^2 = 1$

$$\left[\frac{2\pi}{3}(\sqrt{8} - 1)\right].$$

465. Dijela kugline plohe $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ isječenog valjkom $x^2 + y^2 = R^2$ $(R < a)$. Sl. 137.

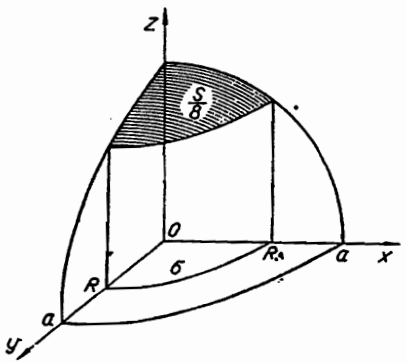
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

$$\frac{S}{8} = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}}\, dx\, dy = \iint\limits_{\sigma} \frac{\sqrt{z^2 + x^2 + y^2}}{z}\, dx\, dy =$$

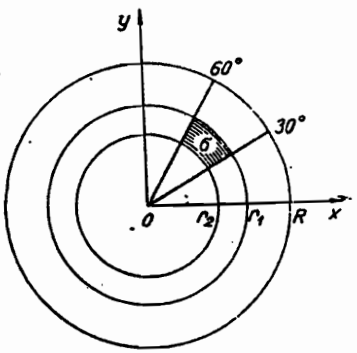
$$= a \iint\limits_{\sigma} \frac{dx\, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = a \iint\limits_{\sigma'} \frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} =$$

$$= -\frac{a\pi}{2} \left| \sqrt{a^2 - \rho^2} \right|_0^R = -\frac{a\pi}{2}\left(\sqrt{a^2 - R^2} - a\right) = \frac{\pi a}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - R^2}\right).$$

$$\underline{S = 4\pi a\left(a - \sqrt{a^2 - R^2}\right).}$$



Slika 137.



Slika 138.

466. Dijela kugline plohe $x^2 + y^2 + z = a^2$ isječenog valjkom $x^2 + y^2 = a\,x$.

U Vivianijevom zadatku, koji je riješen u § 5 tačke 3. dijela III Repetitorija uz slike 116 i 117, odredili smo kasnije površinu onog dijela valjka, koji se nalazi u nutrini kugle (vidi str. 267), a sada se traži površina kugline plohe u nutrini valjka.

Uzevši u obzir da je $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$ računamo prema gore navedenim slikama:

$$\frac{S}{4} = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}}\, dx\, dy = \iint\limits_{\sigma} \frac{a}{z}\, dx\, dy = a \iint\limits_{\sigma} \frac{dx\, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$= a \iint\limits_{\sigma'} \frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left| -\sqrt{a^2 - \rho^2} \right|_0^{a\cos\varphi} =$$

$$= -a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\sqrt{a^2 - a^2\cos^2\varphi} - a\right) = a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sqrt{1 - \cos^2\varphi}\right) d\varphi =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\varphi)\, d\varphi = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

$$\underline{S = 4a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).}$$

467. Izračunaj onaj dio površine Zemlje, koju smatraj da je sferna s $R = 6400$ km, što ga omeđuju meridijani $\lambda_1 = 30^0$ i $\lambda_2 = 60^0$ i paralele $\varphi_1 = 45^0$ i $\varphi_2 = 60^0$.

Kako je jednadžba sfere $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ pa su $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$, dok su polumjeri paralela

$$r_{45^0} = r_1 = R\cos 45^0 = \frac{R\sqrt{2}}{2} \quad \text{i} \quad r_{60^0} = r_2 = R\cos 60^0 = \frac{R}{2}$$

dobijemo prema sl. 138:

$$S = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}}\, dx\, dy = R \iint\limits_{\sigma} \frac{dx\, dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = R \iint\limits_{\sigma'} \frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} =$$

$$= R \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{\frac{R}{2}}^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = -R\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \left| \sqrt{R^2 - \rho^2} \right|_{\frac{R}{2}}^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= -R \cdot \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} - \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}}\right) = -R^2\frac{\pi}{12}\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) \doteq \underline{3{,}42 \cdot 10^6\ \text{km}^2}.$$

468. Osi dvaju jednakih valjaka polumjera baza R sijeku se pod pravim kutom. Odredi onu površinu jednog valjka koja leži u drugom valjku.

Neka jedan valjak ima za os simetrije os Z, a drugi os Y, pa njihove jednadžbe glase: $x^2 + y^2 = R^2$ i $x^2 + z^2 = R^2$, vidi sl. 139. Računamo prema drugoj jednadžbi:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

pa je

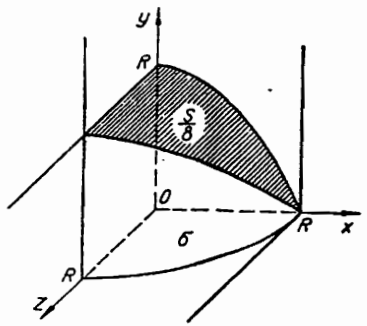
$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2}} = \frac{\sqrt{z^2 + x^2}}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

$$\frac{S}{4} = R \iint_\sigma \frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R \int_0^\pi d\varphi \int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2 \cos^2 \varphi}} = \text{(uz supstituciju } R^2 -$$

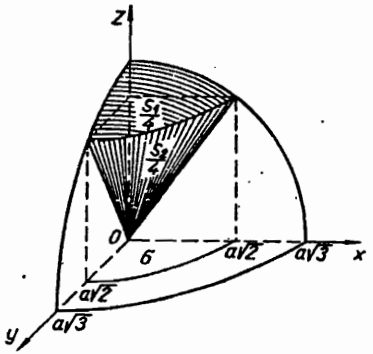
$$- \rho^2 \cos^2 \varphi = t) = R \int_0^\pi d\varphi \left| -\frac{\sqrt{R^2 - \rho^2 \cos \varphi}}{\cos^2 \varphi} \right|_0^R = -R \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \left(\sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 \varphi} - R\right) =$$

$$= R^2 \int_0^\pi \frac{1 - \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}\, d\varphi = R^2 \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} - \int_0^\pi \frac{\sin \varphi\, d\varphi}{\cos^2 \varphi} = R^2 \left| \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{\cos \varphi} \right|_0^\pi = 2 R^2.$$

$$\underline{S = 8 R^2.}$$



Slika 139.



Slika 140.

469. Izračunaj potpunu površinu tijela koje je omeđeno sferom $x^2 + y^2 + z^2 = 3 a^2$ i rotacionim paraboloidom $x^2 + y^2 = 2 a z$ $(z \geqq 0)$. Slika 140.

Da odredimo polumjer kružnice u kojoj paraboloid siječe sferu, a ta kružnica omeđuje područje integracije σ, uvrstimo $x^2 + y^2 = 2 a z$ u jednadžbu sfere. Dobijemo:

$$z^2 + 2 a z - 3 a^2 = 0 \qquad \text{pa je} \qquad z_1 = a \quad \text{i} \quad z_2 = -3 a.$$

Uzmimo $z = a$, jer je prema zadatku $z \geqq 0$. Uvrštenje $z = a$ u jednadžbu sfere daje traženu jednadžbu kružnice $x^2 + y^2 = 2 a^2$, kojoj je $r = a\sqrt{2}$, dok je za sferu $R = a\sqrt{3}$.

Prema slici:

$$S = S_1 + S_2.$$

Za sferu

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z};$$

za paraboloid:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a} \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{a}$$

$$\frac{S}{4} = \iint_\sigma \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}}\, dx\,dy + \iint_\sigma \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}}\, dx\,dy =$$

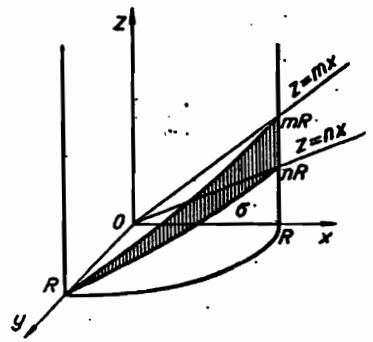
$$= a\sqrt{3} \iint_\sigma \frac{dx\,dy}{\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}} + \frac{1}{a} \iint_\sigma \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}\, dx\,dy =$$

$$= a\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{3a^2 - \rho^2}} + \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{a^2 + \rho^2}\, \rho\, d\rho =$$

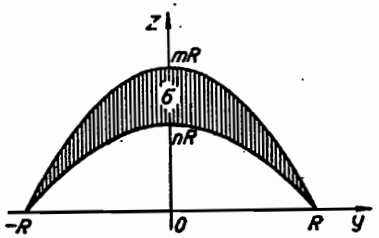
$$= -\frac{a\pi\sqrt{3}}{2} \left| \sqrt{3a^2 - \rho^2} \right|_0^{a\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2a} \left| \frac{1}{3} \sqrt{(a^2 + \rho^2)^3} \right|_0^{a\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{a\pi\sqrt{3}}{2} (a - a\sqrt{3}) + \frac{\pi}{6a} (3a^3\sqrt{3} - a^3) = \frac{4}{3} \pi a^2.$$

$$\underline{S = \frac{16}{3} \pi a^2.}$$



Slika 141 a.



Slika 141 b

470. Odredi površinu onog dijela oplošja valjka $x^2 + y^2 = R^2$ $(z \geqq 0)$ koji se nalazi između ravnina $z = m x$ i $z = n x$ $(m > n > 0)$.

Kako se vidi iz slika 141 a i b, obje ravnine sijeku plašt valjka u poluelipsama $(z \geqq 0)$, koje se projiciraju na ravninu YZ također kao poluelipse. Da odredimo njihove jednadžbe, a dakle i područje integracije σ, uvrstimo $x = \frac{z}{m}$, odnosno $x = \frac{z}{n}$ u $x^2 + y^2 = R^2$.

Dobijemo:

$$\frac{z^2}{m^2} + y^2 = R^2 \quad \text{ili} \quad \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{m^2 R^2} = 1, \quad \text{pa je} \quad a_1 = R; \quad b_1 = m R$$

Analogno:

$$\frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{n^2 R^2} = 1, \quad \text{pa je} \quad a_2 = R; \quad b_2 = n R.$$

Kako je prema

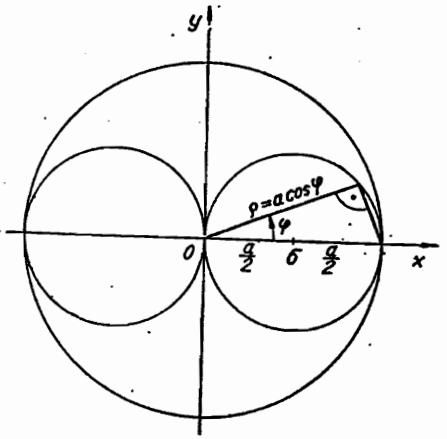
$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x} \quad \text{dok je} \quad \frac{\partial x}{\partial z} = 0,$$

prema (131 a) dobijemo:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}}.$$

$$S = R \iint_\sigma \frac{dy\, dz}{\sqrt{R^2 - y^2}} = R \int_{-R}^{R} \frac{dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} \int_{n\sqrt{R^2 - y^2}}^{m\sqrt{R^2 - y^2}} dz = R \int_{-R}^{R} (m - n)\, dy = \underline{2(m - n) R^2}.$$

471. Kugla polumjera a presječena je s dva kružna valjka kojim su promjeri baza jednaki polumjeru kugle i koji se međusobno dodiruju uzduž jednog promjera kugle (sl. 142). Odredi volumen i površinu preostalog dijela kugle.



Slika 142.

Uzevši u obzir da je jednadžba kugline plohe $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, izračunajmo volumen V_1 obaju valjaka.

$$V_1 = 8 \iint_\sigma \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = 8 \iint_{\sigma'} \sqrt{a^2 - \rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - \rho^2}\, \rho\, d\rho = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left| -\frac{1}{3} \sqrt{(a^2 - \rho^2)^3} \right|_0^{a\cos\varphi} =$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| -\sqrt{(a^2 - a^2\cos^2\varphi)^3} + a^3 \right|_0^{a\cos\varphi} = \frac{8}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^3\varphi + 1)\, d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3} a^3 \left| + \frac{1}{3} \sin^2\varphi \cos\varphi + \frac{2}{3} \cos\varphi + \varphi \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Traženi volumen

$$V = V_{\text{kugle}} - V_1 = \frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{4}{3}\pi a^3 + \frac{16}{9} a^3 = \underline{\frac{16}{9} a^3}.$$

Sada odredimo površinu S_1 onog dijela kugline plohe, koji su isjekli valjci. Prema

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

imamo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z} \quad \text{pa je} \quad \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$S_1 = 8 \iint_\sigma \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy = 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} =$$

$$= 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left| -\sqrt{a^2 - \rho^2} \right|_0^{a\cos\varphi} = 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sqrt{a^2 - a^2\cos^2\varphi} + a)\, d\varphi =$$

$$= 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin\varphi + 1)\, d\varphi = 8a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

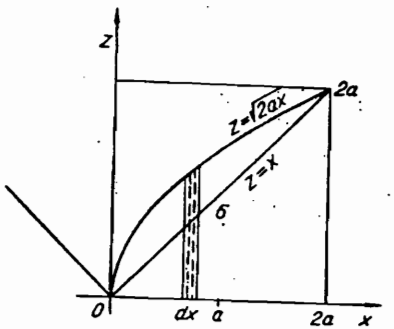
$$S = S_{\text{kugle}} - S_1 = 4\pi a^2 - 4\pi a^2 + 8a^2 = \underline{8a^2}.$$

472. Izračunaj površinu onog dijela valjka $x^2 + y^2 = 2ax$ koji se nalazi između ravnine XY i kružnog stošca $x^2 + y^2 = z^2$.

Zadani stožac nastao je rotacijom pravca $z = x$ oko osi z (vidi sl. 143), dok jednadžbu valjka možemo prikazati u obliku $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ (slika!).

Kako se plašt valjka projicira na ravninu XY kao kružnica, koja kao jednodimenzionalni lik ne može biti područjem integracije σ, projicirat ćemo dio valjka koji se nalazi između ravnine XY i stošca na ravninu XZ.

Iz $x^2 + y^2 = z^2$ i $x^2 + y^2 = 2ax$ slijedi $z^2 = 2ax$, tj. projekcije zadanih ploha sijeku se u paraboli (v. sl. 143).



Slika 143.

Iz $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ slijedi prema (131 b) uzevši u obzir da je $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2x - 2a}{2y} = \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}$, dok je $\frac{\partial y}{\partial z} = 0$. Kako je

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{(a-x)^2}{2ax - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}},$$

računamo:

$$\frac{S}{2} = a \iint_\sigma \frac{dx\,dz}{\sqrt{2ax - x^2}} = a \int_0^{2a} \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} \cdot \int_0^{\sqrt{2ax}} dz = a \int_0^{2a} \sqrt{\frac{2a}{2a - x}}\, dx =$$

$$= a\sqrt{2a} \int_0^{2a} \frac{dx}{\sqrt{2a - x}} = -2a\sqrt{2a}\, \left| \sqrt{2a - x} \right|_0^{2a} = 4a^2.$$

$$\underline{S = 8a^2.}$$

473. Izračunaj površinu dijela sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ isječenog plohom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Računamo prema jednadžbi sfere:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z} \quad \text{pa je} \quad \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Kako su obje plohe, tj. sfera i eliptički valjak simetrične s obzirom na os Z, računat ćemo $\frac{S}{8}$, tj. površinu onog dijela sfere, koji se nalazi u prvom oktantu:

$$\frac{S}{8} = a \iint_\sigma \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = a \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$= a \int_0^a dx \left| \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} = a \int_0^a \arcsin \frac{b}{a}\, dx = a^2 \arcsin \frac{b}{a}.$$

$$\underline{S = 8a^2 \arcsin \frac{b}{a}.}$$

2. Težišta i momenti tromosti homogenih ploha

Formule

Kako je za homogene plohe gustoće $\mu = 1$ masa m plohe jednaka njenoj površini S,

1) formule (134) za koordinate težišta homogenih ploha primaju oblik:

$$x_t = \frac{M_{yoz}}{S} = \frac{\iint_\sigma x(y,z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dy\, dz}{\iint_\sigma \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} \cdot dy\, dz} \tag{134 a}$$

$$y_t = \frac{M_{xoz}}{S} = \frac{\iint_{\sigma_2} y(x,z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dz}{\iint_{\sigma_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dz} \tag{134 b}$$

$$z_t = \frac{M_{xoy}}{S} = \frac{\iint_{\sigma_3} z(x,y) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy}{\iint_{\sigma_3} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy} \tag{134 c}$$

2) formule (138) za momente tromosti homogenih ploha primaju oblik:

$$I_x = \iint_{\sigma_1} (y^2 + z^2) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dy\, dz \tag{138 a}$$

$$I_y = \iint_{\sigma_2} (x^2 + z^2) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dz \tag{138 b}$$

$$I_z = \iint_{\sigma_3} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy \tag{138 c}$$

Zadaci

474. Odredi težište dijela homogene sfere koji se nalazi u prvom oktantu ($\mu = 1$).

Računamo prema (134 a) uzevši u obzir da je jednadžba sfere $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x}; \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{z}{x} \quad \text{pa je} \quad \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{x^2}} = \frac{R}{x} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}}.$$

$$M_{yoz} = R \iint\limits_{\sigma_1} \frac{x\,dy\,dz}{\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}} = R \iint\limits_{\sigma_1'} \frac{\rho\cos\varphi \cdot \rho\,d\rho\,d\varphi}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi \int_0^R \frac{\rho^2\,d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} =$$

= (drugi integral riješi načinom parcijalne integracije) =

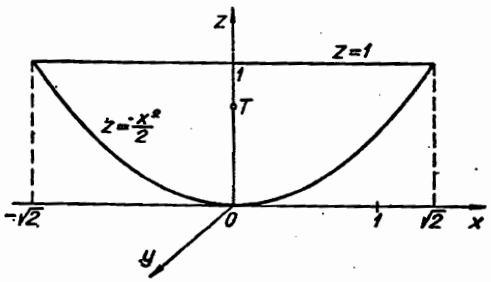
$$= R \left| \sin\varphi \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \left| -\frac{\rho}{2}\sqrt{R^2 - \rho^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin\frac{\rho}{R} \right|_0^R = \frac{R^2\pi}{4}.$$

$$S = R \iint\limits_{\sigma_1} \frac{dy\,dz}{\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}} = R \iint\limits_{\sigma_1'} \frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \frac{R^2\pi}{2}.$$

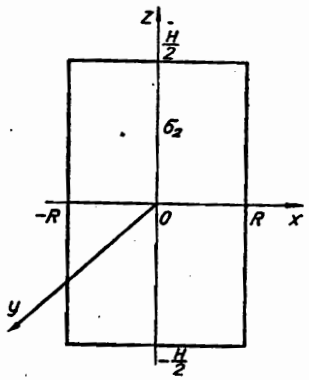
$$x_t = \frac{R^2\pi \cdot 2}{4R^2\pi} = \underline{\frac{R}{2}}.$$

Na isti način izračunaj prema (134 b) i (134 c) y_t i z_t.

$$\left[\frac{R}{2}\right].$$



Slika 144.



Slika 145.

475. Odredi težište dijela homogenog paraboloida $x^2 + y^2 = 2z$ što ga odsjeca ravnina $z = 1$.

Iz jednadžbe paraboloida vidimo da je ta ploha nastala rotacijom oko osi Z parabole $x = \sqrt{2z}$, odnosno $z = \frac{x^2}{2}$ (vidi sl. 144), pa os Z je os simetrije plohe.

Slijedi: $x_t = 0$, $y_t = 0$, $z_t = ?$ Vidi također sl. 146.

Napisavši jednadžbu paraboloida u obliku $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, računamo prema (134 c):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = y,$$

te je

$$M_{xoy} = \frac{1}{2} \iint\limits_{\sigma_3'} (x^2 + y^2)\sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dx\,dy.$$

Uvrštenje $z = 1$ u jednadžbu paraboloida daje $x^2 + y^2 = 2$, pa je σ krug polumjera $\sqrt{2}$. Prelazimo na polarne koordinate:

$$M_{xoy} = \frac{1}{2} \iint\limits_{\sigma_4'} \rho^2\sqrt{1 + \rho^2} \cdot \rho\,d\rho\,d\varphi = \text{(uz supstituciju } 1 + \rho^2 = t,$$

a dalje uz $\sqrt{t} = u$ dobijemo) $= \frac{2\pi}{2} \left| \frac{\sqrt{(1+\rho^2)^5}}{5} - \frac{\sqrt{(1+\rho^2)^3}}{3} \right|_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{15}(2\sqrt{27} + 1).$

$$S = \iint\limits_{\sigma_2} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \rho^2} \cdot \rho\,d\rho = 2\pi \cdot \frac{1}{3} \left| \sqrt{(1+\rho^2)^3} \right|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{3}(\sqrt{27} - 1).$$

$$z_t = \frac{2\pi(2\sqrt{27} + 1) \cdot 3}{15 \cdot 2\pi \cdot (\sqrt{27} - 1)} = \underline{\frac{1}{130}(55 + 9\sqrt{3})}.$$

U zadacima **476** do **478** uklj. izračunaj momente tromosti zadanih dijelova ploha, pri čemu je m masa svakog dijela.

476. Plašta valjka polumjera baze R i visine H s obzirom na os koja prolazi težištem valjka, a okomita je na njegovu os (sl. 145).

Računamo prema (138 b) uzevši u obzir da je $x^2 + y^2 = R^2$ jednadžba plašta valjka:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \quad \text{i} \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0,$$

pa je

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$I_y = 2R \iint\limits_{\sigma_1} \frac{x^2 + z^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx\,dz = 2R \left[\int_{-R}^{R} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2\,dz \right] =$$

= (prvi se integral lako riješi načinom parcijalne integracije) =

Kako je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{H}{R-r}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{H}{R-r}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

prema (138 c) dobijemo:

$$I_z = \iint\limits_{\sigma_z} (x^2+y^2)\,\frac{\sqrt{(R-r)^2+H^2}}{R-r}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{(R-r)^2+H^2}}{R-r}\iint\limits_{\sigma_z'} \rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{(R-r)^2+H^2}}{R-r}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3\,d\rho = \frac{\sqrt{(R-r)^2+H^2}}{R-r}\cdot 2\pi\cdot\frac{R^4-r^4}{4}.$$

Prema slici:

$$l = \sqrt{(R-r)^2+H^2}.$$

Uvrštenje daje:

$$\underline{I_z = \frac{1}{2}\pi l\,\frac{R^4-r^4}{R-r}}.$$

V. TROSTRUKI INTEGRALI

A. Računanje trostrukih integrala

Formula

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \tag{109}$$

Zadaci

U zadacima 479 do 483 uklj. izračunaj navedene trostruke integrale.

479. $$\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x+y+z)\,dz = \int_0^a dx \int_0^b dy \left|(x+y)z + \frac{z^2}{2}\right|_0^c =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^b \left[(x+y)c + \frac{c^2}{2}\right] dy = c\int_0^a dx \left|xy + \frac{y^2}{2} + \frac{c}{2}y\right|_0^b = c\int_0^a \left(bx + \frac{b^2}{2} + \frac{bc}{2}\right) dx =$$

$$= bc\left|\frac{x^2}{2} + \frac{b}{2}x + \frac{c}{2}x\right|_0^a = \underline{\frac{abc}{2}(a+b+c)}.$$

480. $$\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z\,dz = \int_0^a x^3\,dx \int_0^x y^2\,dy \int_0^{xy} z\,dz = \int_0^a x^3\,dx \int_0^x y^2 \left|\frac{z^2}{2}\right|_0^{xy} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a x^3\,dx \int_0^x y^2 x^2 y^2\,dy = \frac{1}{2}\int_0^a x^5\,dx \int_0^x y^4\,dy = \frac{1}{2}\int_0^a x^5 \left|\frac{y^5}{5}\right|_0^x dx = \frac{1}{10}\int_0^a x^{10}\,dx =$$

$$= \frac{1}{10}\left|\frac{x^{11}}{11}\right|_0^a = \underline{\frac{a^{11}}{110}}.$$

181. $$\int_0^{e-1} dx \int_0^{e-x-1} dy \int_e^{x+y+e} \frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)}\, dz = \int_0^{e-1} \frac{dx}{x-e} \int_0^{e-x-1} \frac{dy}{x+y-e} \int_e^{x+y+e} \ln(z-x-y)\, dz =$$

$$= \text{(uz supstituciju } -x-y=k \text{ i parcijalnu integraciju)} =$$

$$= \int_0^{e-1} \frac{dx}{x-e} \int_0^{e-x-1} \frac{dy}{x+y-e} \left| z\ln(z-x-y) - z + (-x-y)\ln(z-x-y) \right|_e^{x+y+e} =$$

$$= \int_0^{e-1} \frac{dx}{x-e} \int_0^{e-x-1} \frac{dy}{x+y-e} [\ln(e-x-y)\cdot(-e+x+y) - (x+y-e)] =$$

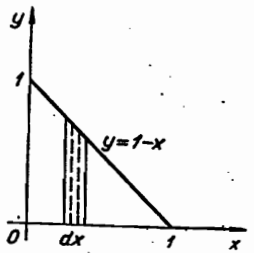
$$= \int_0^{e-1} \frac{dx}{x-e} \int_0^{e-x-1} [\ln(e-x-y) - 1]\, dy = \int_0^{e-1} \frac{dx}{x-e} \left| y\ln(e-x-y) - y - \right.$$

$$\left. - (e-x)\ln(e-x-y) - y \right|_0^{e-x-1} = \int_0^{e-1} \frac{-2(e-x-1) + (e-x)\ln(e-x)}{x-e}\, dx =$$

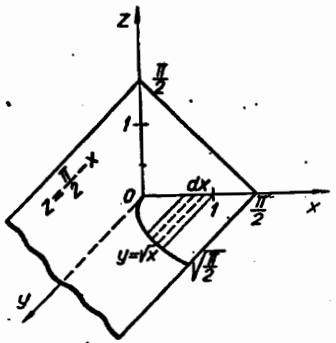
$$= \left[\text{uzevši u obzir da je } (e-x-1):(x-e) = -1 + \frac{1}{e-x}\right] =$$

$$= \int_0^{e-1} \left[2 - \frac{2}{e-x} - \ln(e-x)\right] dx = \left| 2x + 2\ln(e-x) - x\ln(e-x) + x + \right.$$

$$\left. + e\ln(e-x) \right|_0^{e-1} = \underline{2e-5.}$$



Slika 147 a.



Slika 147 b.

482. $\iiint\limits_V xy\, dx\, dy\, dz$, gdje je V područje omeđeno hiperbolnim paraboloidom $z = xy$ i ravninama $x + y = 1$ i $z = 0$ $(z \geqq 0)$.

Prema slici 147a i formuli (109) imamo:

$$I = \int_0^1 x\, dx \int_0^{1-x} y\, dy \int_0^{xy} dz = \int_0^1 x\, dx \int_0^{1-x} y\, dy \cdot xy = \int_0^1 x^2\, dx \int_0^{1-x} y^2\, dy = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2 (1-x)^3\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5)\, dx = \underline{\frac{1}{180}}.$$

483. $\iiint\limits_V y\cos(z+x)\, dx\, dy\, dz$, gdje je V područje omeđeno valjkovitom plohom $y = \sqrt{x}$ i ravninama $y = 0$, $z = 0$ i $x + z = \frac{\pi}{2}$.

Računamo prema (109) s obzirom na sliku 147b.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x}} y\, dy \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(z+x)\, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \left| \frac{y^2}{2} \right|_0^{\sqrt{x}} \cdot \left| \sin(z+x) \right|_0^{\frac{\pi}{2}-x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin x\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - x\sin x)\, dx = \frac{1}{2}\left| \frac{x^2}{2} + x\cos x - \sin x \right|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)}.$$

B. Zamjena promjenljivih u trostrukim integralima i računanje tih integrala uz tu zamjenu

Formule

Cilindričke koordinate

$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi \qquad (114)$$
$$z = z$$

$$dV = dx\, dy\, dz = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \qquad (115)$$

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_V f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz. \qquad (116)$$

Sferne ili prostrane polarne koordinate

$$x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi$$
$$y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi \qquad (117)$$
$$z = \rho \cos \vartheta$$

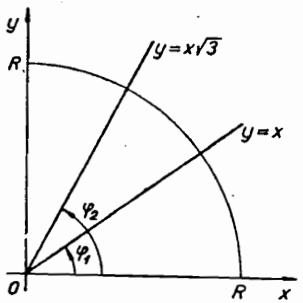
$$dV = dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin \vartheta\, d\varphi\, d\rho\, d\vartheta \qquad (118)$$

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \iiint f(\rho \sin \vartheta \cos \varphi, \rho \sin \vartheta \sin \varphi, \rho \cos \vartheta)\, \rho^2 \sin \vartheta\, d\varphi\, d\rho\, d\vartheta. \qquad (119)$$

Zadaci

U zadacima 484 – 488 uklj. izvrši prijelaz u $\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ na cilindričke, odnosno sferne koordinate i rastavi granice integriranja.

484. V je područje koje se nalazi u I oktantu, a omeđeno je valjkom $x^2 + y^2 = R^2$ i ravninama $z = 0$, $z = 1$, $y = x$ i $y = x\sqrt{3}$.

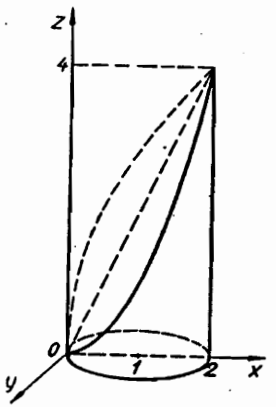


Slika 147c.

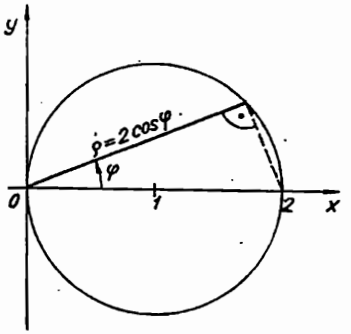
Prema slici 147c i formuli (116) dobijemo uzevši u obzir da je $x^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi$, $y^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi$, pa je $x^2 + y^2 = \rho^2$, dok iz $y = x$ slijedi da je $\operatorname{tg} \varphi_1 = 1$, pa je $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, a iz $y = \sqrt{3}\, x$ imamo: $\operatorname{tg} \varphi_2 = \sqrt{3}$ pa je $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$.

$$I = \int_0^1 dz \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^R f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)\, \rho\, d\rho.$$

485. V je područje omeđeno valjkom $x^2 + y^2 = 2x$, ravninom $z = 0$ i paraboloidom $x^2 + y^2 = z$.



Slika 148a.



Slika 148b.

Napisavši jednadžbu valjka u obliku $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, a jednadžbu paraboloida u obliku $x^2 + y^2 = (\sqrt{z})^2$, opažamo da je paraboloid nastao rotacijom parabole $x = \sqrt{z}$, odnosno $z = x^2$ oko osi Z, pa prema slikama 148 a i b i formuli (116) dobijemo uzevši još u obzir da je $z = x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2$.

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho\, d\rho \int_0^{\rho^2} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)\, dz.$$

486. V je dio kugle $x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2$ koji leži unutar valjkovite plohe $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$ $(x \geqq 0)$.

Područje integracije V je područje omeđeno valjkovitom plohom koja je okomita na ravnini XY i kojoj je baza desna petlja lemniskate $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$, odnosno $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ u polarnim koordinatama (vidi sl. 46 u II dijelu Repetitorija), dok je dolje i gore to područje omeđeno zadanom sferom.

Prelazimo na cilindričke koordinate uzevši u obzir da prema (114)

$$z = \pm \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} \quad \text{prima oblik} \quad z = \pm \sqrt{a^2 - \rho^2}$$

a iz

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi \quad \text{slijedi} \quad \rho = a \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Prema (116):

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho\, d\rho \cdot \int_{-\sqrt{a^2 - \rho^2}}^{\sqrt{a^2 - \rho^2}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)\, dz.$$

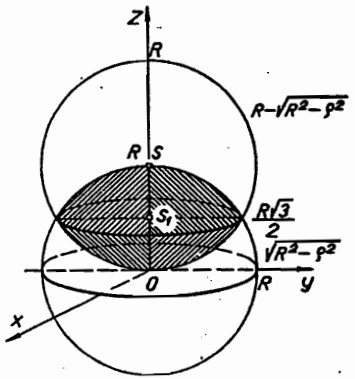
487. V je opći dio kugala $x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2$ i $x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leqq R^2$. (Sl. 149).

Zadatak najjednostavnije riješimo prijelazom na cilindričke koordinate. Odredimo jednadžbu presječnice zadanih sfera, odnosno njene projekcije u ravninu $X\,Y$.

Iz

$$\left.\begin{aligned} z &= \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\ z &= R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{aligned}\right|$$

slijedi $x^2 + y^2 = \frac{3}{4} R^2$, a to je kružnica polumjera $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ sa središtem S_1 na osi Z.



Slika 149.

Kako je prema (114) $x^2 + y^2 = \rho^2$, područje V omeđeno je odozdo sferom $z = R - \sqrt{R^2 - \rho^2}$ a odozgo sferom $z = \sqrt{R^2 - \rho^2}$ pa prema (116) i slici imamo:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} \rho\, d\rho \int_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, dz.$$

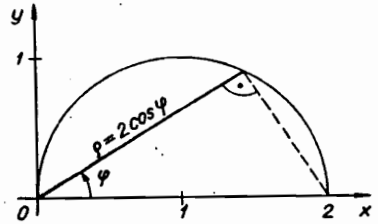
488. Područje V je dio kugle $x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2$ koji se nalazi u prvom oktantu.

$$\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R f(\rho\cos\varphi\sin\vartheta, \rho\sin\varphi\sin\vartheta, \rho\cos\vartheta)\ \rho^2\, d\rho\right].$$

U zadacima 489 do 495 uključivo izračunaj zadane trostruke integrale prelazeći na cilindričke, odnosno sferne koordinate.

489. $$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\, dz.$$

Iz granica integracije zadanog integrala slijedi da je područje V tog integrala uspravni kružni valjak, jer je kružnica $y = \sqrt{2x - x^2}$, odnosno $(x-1)^2 + y^2 = 1$ projekcija tog valjka na ravninu $X\,Y$, taj je valjak omeđen ravninama $z = 0$ i $z = a$.



Slika 150.

Prelazimo na cilindričke koordinate (116) uzevši u obzir da je prema slici 150 i formuli (114) $\rho = 2\cos\varphi$, dok je $\sqrt{x^2+y^2} = \rho$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2\, d\rho \int_0^a z\, dz = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{2\cos\varphi} = \frac{a^2}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\cos^3\varphi\, d\varphi =$$

$$= \text{prema tipu VIII (v. dio II Repetitorija)} = \frac{4}{3}a^2\left|\frac{1}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi + \frac{2}{3}\sin\varphi\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{9}a^2.$$

490. $$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dz.$$

Iz granica integracije zadanog integrala vidimo da je područje V gornja polukugla polumjera R. Prelazimo na sferne koordinate.

Prema (117):

$$x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi = \rho^2\sin^2\vartheta,$$

pa prema (119) dobijemo:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^R \rho^4\sin^2\vartheta\, d\rho = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta\, d\vartheta \cdot \left|\frac{\rho^5}{5}\right|_0^R =$$

$$= \frac{2}{5}\pi R^5\left|-\frac{1}{3}\sin^2\vartheta\cos\vartheta - \frac{2}{3}\cos\vartheta\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{15}\pi R^5.$$

491. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, gdje je V kugla $x^2+y^2+z^2 \leqq 1$.

Prelazimo na sferne koordinate. Prema (117) dobijemo

$$x^2+y^2+(z-2)^2 = \rho^2 - 4\rho\cos\vartheta + 4$$

pa je prema (119):

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2\,d\rho \int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{\rho^2-4\rho\cos\vartheta+4}} = [\text{uz supstituciju } \cos\vartheta = t;\quad dt = -\sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$\text{i}\quad \rho^2 - 4\rho t + 4 = u;\quad du = -4\rho\,dt] = 2\pi\int_0^1 \rho^2\cdot\frac{1}{2\rho}\left|\sqrt{\rho^2-4\rho\cos\vartheta+4}\right|_0^{\pi} =$$

$$= \pi\int_0^1 \rho\left(\sqrt{\rho^2+4\rho+4} - \sqrt{\rho^2-4\rho+4}\right)d\rho = \pi\int_0^1 \rho\,[(\rho+2)-(\rho-2)]\,d\rho =$$

$$= 4\pi\int_0^1 \rho\,d\rho = \underline{2\pi.}$$

492. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, gdje je V valjak $x^2+y^2 \leqq 1$ kojemu su baze u ravninama $z=-1$ i $z=1$.

Prelazimo na cilindričke koordinate. Prema (114)

$$x^2+y^2+(z-2)^2 = \rho^2+(z-2)^2,$$

pa prema (116) imamo:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} dz \int_0^1 \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2+(z-2)^2}} = \left(\text{uz}\quad \rho^2 = t;\quad \rho\,d\rho = \frac{dt}{2}\right) =$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1}\left|\sqrt{\rho^2+(z-2)^2}\right|_0^1 dz = 2\pi\int_{-1}^{1}\left[\sqrt{1+(z-2)^2}-(z-2)\right]dz =$$

$$= [\text{uz}\quad z-2=t;\quad dz = dt \quad \text{dobijemo predtip } C \text{ (v. dio II Repetitorija)}] =$$

$$= 2\pi\left|\frac{z-2}{2}\sqrt{(z-2)^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(z-2+\sqrt{(z-2)^2+1}\right) - \frac{z^2}{2} + 2z\right|_{-1}^{1} =$$

$$\underline{= \pi\left(3\sqrt{10} + \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3} - \sqrt{2} + 8\right).}$$

493. $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz$

$$\left[\frac{\pi a}{2}\right].$$

494. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz.$

$\left[V \text{ je gornja polukugla polumjera 1. Prijelaz na sferne koordinate daje } I = \frac{\pi}{8}\right].$

495. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, gdje je V područje određeno nejednakostima $z \geqq 0$ i

$$r^2 \leqq x^2+y^2+z^2 \leqq R^2.$$

$\left[V \text{ je zajednički dio dviju polukugala polumjera } r \text{ i } R\ (R > r).\quad I = \frac{4}{15}\pi(R^5 - r^5)\right]$

C. Primjena trostrukih integrala

a. ODREĐIVANJE OBUJMA TIJELA

Formula

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz. \tag{109}$$

Zadaci

U zadacima **496 — 512** uklj. izračunaj volumene tjelesa omeđenih zadanim plohama.

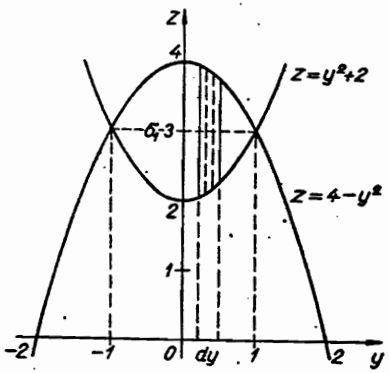
496. Valjkovitim plohama $z = 4 - y^2$ i $z = y^2 + 2$ i ravninama $x = -1$ i $x = 2$.

Iz $4 - y^2 = y^2 + 2$ dobijemo $y = \pm 1$ pa je $z = 3$. Plohe se sijeku dakle u pravcima $y = 1$ i $y = -1$, koji su okomiti na ravnini YZ. Slika 151a predočuje projekcije tih ploha na tu ravninu i područje integracije σ_1 u toj ravnini, dok slika 151b predočuje područje integracije σ_2 u ravnini XY.

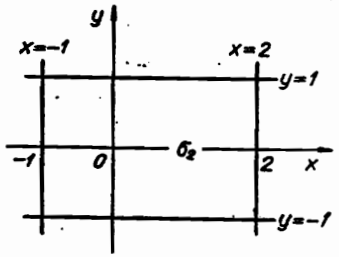
Prema tim slikama imamo:

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{2} dx \int_{-1}^{+1} dy \int_{y^2+2}^{4-y^2} dz = |x|_{-1}^{2} \cdot \int_{-1}^{1} (4 - y^2 - y^2 - 2)\,dy =$$

$$= 3\left|2y - \frac{2}{3}y^3\right|_{-1}^{1} = \underline{8.}$$



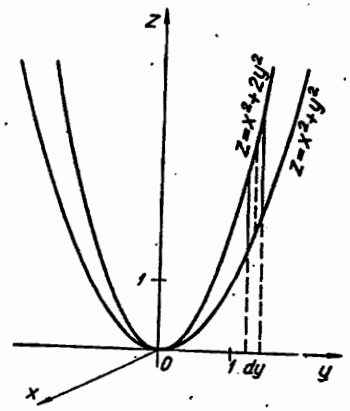
Slika 151 a.



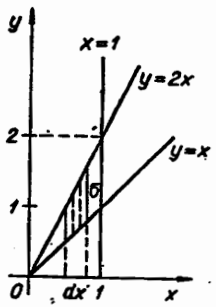
Slika 151 b.

497. Paraboloidima $z = x^2 + y^2$ i $z = x^2 + 2y^2$ i ravninama $y = x$, $y = 2x$ i $x = 1$.

Napisavši jednadžbe paraboloida u obliku $x^2 + y^2 = (\sqrt{z})^2$ i $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = \frac{z}{2}$, vidimo da je prva ploha kružni paraboloid nastao rotacijom parabole $z = y^2$ oko osi Z, dok je drugi paraboloid eliptički.



Slika 152 a.



Slika 152 b.

Slika 152 a predočuje projekcije tih ploha na ravninu YZ, dok slika 152 b prikazuje područje integracije σ u ravnini XY.

$$V = \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_x^{2x} (x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2)\,dy = \int_0^1 dx \left|\frac{y^3}{3}\right|_x^{2x} =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (8x^3 - x^3)\,dx = \frac{7}{3}\left|\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \underline{\frac{7}{12}}.$$

498. Na isti način izračunaj obujam tijela omeđenog paraboloidima $z = x^2 + y^2$ i $z = 2x^2 + 2y^2$, valjkovitom plohom $y = x^2$ i ravninom $y = x$.

$$\left[\frac{3}{35}\right].$$

499. Paraboloidom $(x-1)^2 + y^2 = z$ i ravninom $2x + z = 2$.

Da odredimo projekciju sjecišta tih ploha u ravnini XY, odnosno područje integracije σ u toj ravnini, uklonimo z iz zadanih jednadžbi. Dobijemo:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

a to je krug polumjera 1 sa središtem u ishodištu O. Prelazimo na cilindričke koordinate pa prema formuli (115) imamo:

$$V = \iiint\limits_V \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\,d\rho \int_{(x-1)^2+y^2}^{2-2x} dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\,d\rho\,(2 - 2x - x^2 + 2x - 1 - y^2) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - x^2 - y^2)\,\rho\,d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 [1 - (\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)]\,\rho\,d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - \rho^2)\,\rho\,d\rho =$$

$$= 2\pi\left|\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right|_0^1 = \underline{\frac{\pi}{2}}.$$

500. Paraboloidom $z = x^2 + y^2$ i ravninom $z = x + y$.

Granice integracije u smjeru osi Z vide se iz slike 153 a, u kojoj su prikazane projekcije zadanih ploha na ravninu YZ $(x = 0)$. Da odredimo područje integracije σ u ravnini XY, uklonimo z iz jednadžbi zadanih ploha, pa dobijemo

$$x^2 + y^2 = x + y \quad \text{ili} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

a to je krug sa središtem u $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ polumjera $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (sl. 153 b).

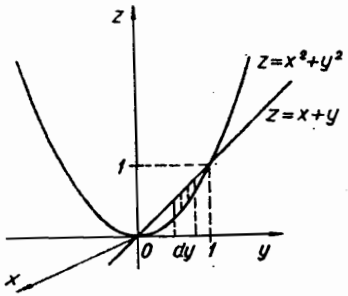
$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \iint\limits_\sigma dx\,dy \int\limits_{x^2+y^2}^{x+y} dz = \iint\limits_\sigma (x + y - x^2 - y^2)\,dx\,dy.$$

Ishodište O koordinatnog sustava prenesimo u $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

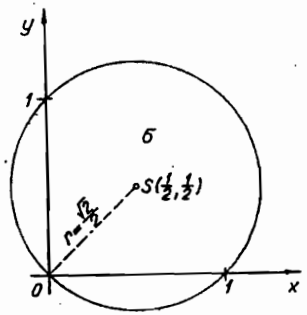
$$V = \iint\limits_\sigma \left[\left(x + \frac{1}{2} + y + \frac{1}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2\right] dx\,dy =$$

$$= -\iint\limits_\sigma \left(x^2 + y^2 - \frac{1}{2}\right) dx\,dy = \text{prelazimo na polarne koordinate} =$$

$$= -\iint\limits_\sigma \left(\rho^2 - \frac{1}{2}\right) \rho\,d\rho\,d\varphi = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left| \frac{\rho^4}{4} - \frac{1}{2}\,\frac{\rho^2}{2} \right|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2\pi\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\right) = \underline{\frac{\pi}{8}}.$$



Slika 153 a.



Slika 153 b.

501. Sferom $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ i paraboloidom $x^2 + y^2 = 3z$.

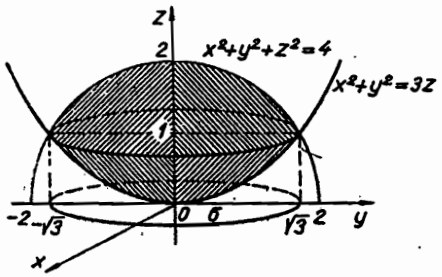
Uvrštenje $x^2 + y^2 = 3z$ u jednadžbu sfere daje kvadratnu jednadžbu $z^2 + 3z - 4 = 0$ kojoj je jedan korijen $z = 1$, pa je $x^2 + y^2 = 3$ pojekcija sjecišta zadanih ploha na ravninu XY (sl. 154), σ je dakle krug polumjera $\sqrt{3}$.

Prelazimo na cilindričke koordinate:

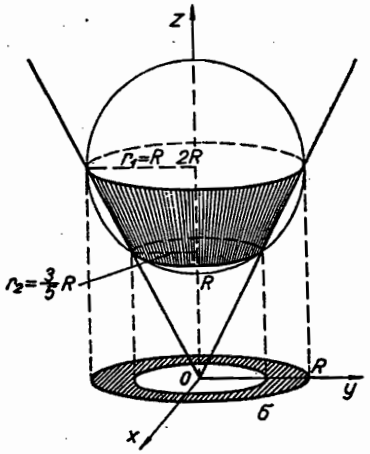
$$V = \iiint\limits_V \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho\,d\rho \int\limits_{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho\,d\rho \left(\sqrt{4 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 + y^2}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{3}} (3\sqrt{4 - \rho^2} - \rho^2)\,\rho\,d\rho =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left| -\sqrt{(4 - \rho^2)^3} - \frac{\rho^4}{4} \right|_0^{\sqrt{3}} = \underline{\frac{19\pi}{6}}.$$



Slika 154.



Slika 155.

Izračunali smo volumen V gornjeg dijela zadanog tijela. Međutim istim zadanim plohama, kako se vidi iz slike 154, omeđen je i donji dio, kojemu je volumen

$$V_1 = \text{volumen kugle} - V = \frac{4}{3} 2^3 \pi - \frac{19}{6}\pi = \underline{\frac{15}{2}\pi}.$$

502. Sferom $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ i paraboloidom $x^2 + y^2 = R(R - 2z)$ $(z \geqq 0)$.

$\left[\text{Slični zadatak, } \sigma \text{ je krug polumjera } R.\ V = \frac{5}{12} R^3 \pi\right].$

503. Sferom $x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz - 3R^2$ i stošcem $z^2 = 4(x^2 + y^2)$. (Traži se volumen onog dijela kugle, koji se nalazi u nutrini stošca).

Prikažemo li jednadžbu sfere u obliku $x^2 + y^2 + (z - 2R)^2 = R^2$, opažamo da je $S(0, 0, 2R)$ i $r = R$, dok je stožac $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4}$ nastao rotacijom pravca $z = 2y$ oko osi Z (sl. 155). Iz jednadžbi sfere i stošca slijedi:

$$\frac{z^2}{4} + z^2 = 4Rz - 3R^2$$

ili

$$5z^2 - 16Rz + 12R^2 = 0$$

a odatle je

$$z_1 = 2R \quad \text{i} \quad z_2 = \frac{6}{5}R,$$

pa je

$$y_1 = r_1 = \frac{z_1}{2} = R \quad \text{i} \quad y_2 = r_2 = \frac{3}{5}R.$$

Iz slike vidimo da traženi volumen V kugle najjednostavnije dobijemo tako, da od volumena kugle $\frac{4}{3}\pi R^3$ oduzmemo volumen V_1 onih dvaju dijelova kugle što ih odsjeca stožac. Uzevši u obzir da jednadžba donje polovine sfere glasi

$$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + 2R, \quad \text{dok je} \quad z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

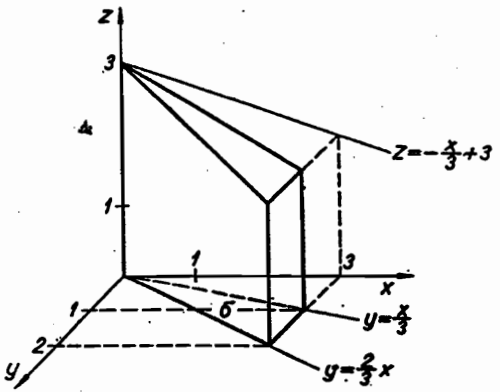
jednadžba stošca, dobijemo prema slici:

$$V_1 = \iiint\limits_{V_1} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{3}{5}R}^{R} \rho\, d\rho \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}+2R}^{2\sqrt{x^2-y^2}} dz =$$

$$= 2\pi \int_{\frac{3}{5}R}^{R} \left(2\sqrt{\rho^2} + \sqrt{R^2-\rho^2} - 2R\right)\rho\, d\rho =$$

$$= 2\pi \left| \frac{2}{3}\rho^3 - \frac{1}{3}\sqrt{(R^2-\rho^2)^3} - R\rho^2 \right|_{\frac{3}{5}R}^{R} = \frac{8}{75}\pi R^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{8}{75}\pi R^3 = \underline{\frac{92}{75}\pi R^3}.$$



Slika 156.

503a. Ravninama $y = \frac{x}{3}$, $y = \frac{2}{3}x$, $z = 0$ i $z = -\frac{x}{3} + 3$.

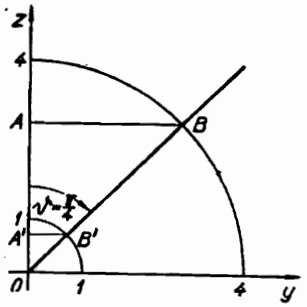
$$\left[\frac{7}{2}, \text{ vidi sl. } 156\right].$$

504. Sferama $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, rotacionim paraboloidom $x^2 + y^2 = z^2$ i koordinatnim ravninama $x = 0$, $y = 0$ i $z = 0$ $(x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0)$.

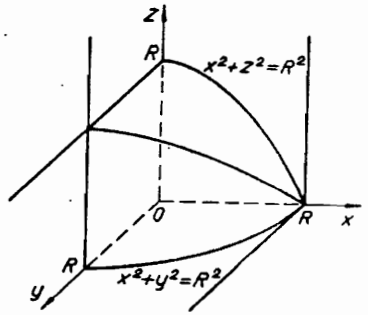
Sl. 157 predočuje projekcije zadanih ploha na ravninu YZ uzetih u I oktantu. Traženi volumen V dobit ćemo tako, da od volumena V_1 oktanta kuglina isječka OAB oduzmemo volumen V_2 oktanta kuglina isječka $OA'B'$. Prelazom na sferne koordinate (117) i (118a) dobijemo prema $V = \iiint\limits_V \rho^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\rho$:

$$V = V_1 - V_2 = \left|\frac{\rho^3}{3}\right|_0^4 \cdot \left|\varphi\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left|-\cos\vartheta\right|_0^{\frac{\pi}{4}} - \left|\frac{\rho^3}{3}\right|_0^1 \left|\varphi\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \left|-\cos\vartheta\right|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{64}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{1} + 1\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = \underline{\frac{21}{4}\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)}.$$



Slika 157.



Slika 158.

505. Osi dvaju jednakih valjaka polumjera baze R sijeku se pod pravim kutom. Odredi volumen onog dijela valjka koji leži u drugom valjku.

U slici 158 prikazan je oktant tijela, što ga omeđuju valjci $x^2 + y^2 = R^2$ i $x^2 + z^2 = R^2$ kojim su osi simetrije osi Z i Y. Odredimo četvrtinu traženog volumena uz primjenu cilindričkih koordinata (114) i (115 a):

$$\frac{V}{4} = \iiint\limits_{\frac{V}{4}} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{R} \rho\, d\rho \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dz =$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{R} \sqrt{R^2 - \rho^2\cos^2\varphi} \cdot \rho\, d\rho = \left[\text{uz } R^2 - \rho^2\cos^2\varphi = t, \text{ pa je } \rho\, d\rho = -\frac{dt}{2\cos^2\varphi}\right] =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \left|\sqrt{(R^2 - \rho^2\cos^2\varphi)^3}\right|_0^R = -\frac{R^3}{3}\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{1}{\cos^2\varphi}\right) d\varphi =$$

$$= [\text{uz } \cos\varphi = t, \text{ pa je } \sin\varphi\, d\varphi = -\,dt] = -\frac{R^3}{3}\left|\frac{1}{\cos\varphi} + \cos\varphi - \operatorname{tg}\varphi\right|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{R^3}{3}(-4) = \frac{4}{3}R^3.$$

$$\underline{V = \frac{16}{3}R^3.}$$

506. Riješi isti zadatak uzevši jednadžbe zadanih valjaka u obliku $y^2 + z^2 = R^2$ i $x^2 + z^2 = R^2$.

$$\left[\frac{16}{3}R^3\right].$$

507. Valjkom $x^2 + 4y^2 = 4$ i ravninama $z = 0$ i $z = x + 2$.

Traži se volumen tijela koje je omeđeno eliptičkim valjkom $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ i ravninama XY i $z = x + 2$. Pri računanju volumena prelazimo na eliptičke koordinate, jer je σ elipsa kojoj je $a = 2$ i $b = 1$, pa prema (113) imamo:

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \iint\limits_\sigma dx\,dy \int_0^{x+2} dz = \iint\limits_\sigma (x+2)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\sigma'} (2u\cos v + 2)\,2u\,du\,dv = 4\int_0^{2\pi} dv \int_0^1 (u\cos v + 1)\,u\,du =$$

$$= 4\int_0^{2\pi}\left|\frac{u^3}{3}\cos v + \frac{u^2}{2}\right|_0^1 dv = 4\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}\cos v + \frac{1}{2}\right)dv = 4\left|\frac{1}{3}\sin v + \frac{v}{2}\right|_0^{2\pi} = \underline{4\pi.}$$

508. Paraboloidima $z = 8 - x^2 - y^2$ i $z = x^2 + 3y^2$.

[Kako je projekcija sjecišta zadanih ploha elipsa $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, izvrši prijelaz na eliptičke koordinate.]

$$[V = 8\pi\sqrt{2}].$$

509. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x \quad (a > 0)$.

Budući da je lijeva strana jednadžbe plohe, koja omeđuje tijelo, pozitivna za sve x, y i z, tijelo se nalazi u onim oktantima u kojim je desna strana, tj. x, pozitivna, a to su oktanti I, II, V i VI. Dijelovi tijela, koji se nalaze u tim oktantima, jednaki su, pa računamo $\frac{V}{4}$ izvršivši prijelaz na sferne koordinate prema (117) i (118 a):

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\vartheta =$$
$$= \rho^2[\sin^2\vartheta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\vartheta] = \rho^2.$$

$$\rho^4 = a^3\rho\sin\vartheta\cos\varphi, \quad \text{pa je} \quad \rho = a\sqrt[3]{\sin\vartheta\cos\varphi}.$$

$$\frac{V}{4} = \iiint\limits_{\frac{V}{4}} \rho^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\,d\vartheta \int_0^{a\sqrt[3]{\sin\vartheta\cos\varphi}} \rho^2\,d\rho =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\,d\vartheta \left|\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{a\sqrt[3]{\sin\vartheta\cos\varphi}} = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta\,d\vartheta =$$

$$= \frac{a^3}{3}\left|\sin\varphi\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left|\frac{\vartheta}{2} - \frac{\cos 2\vartheta}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{3}\cdot\frac{\pi}{4}.$$

$$\underline{V = \frac{\pi}{3}a^3.}$$

510. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a\,x\,y\,z \quad (a > 0)$.

Tijelo se nalazi u oktantima I, III, VI i VIII, jer je samo u tim oktantima i desna strana jednadžbe pozitivna, pri čemu su dijelovi tijela u tim oktantima jednaki.

S obzirom na zadatak 509 i formule (117) i (118a) dobijemo:

$$\rho^4 = a\rho^2\sin\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta\sin\varphi\cos\vartheta,$$

pa je

$$\rho = a\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\vartheta\cos\vartheta$$

$$\frac{V}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\,d\vartheta \int_0^{a\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\vartheta\cos\vartheta} \rho^2\,d\rho = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\vartheta\cos^3\vartheta\,d\vartheta =$$

= [prema 4) tipa XI, v. dio II Repetitorija] =

$$= \frac{a^3}{3}\left|\frac{1}{4}\sin^4\varphi - \frac{1}{6}\sin^6\varphi\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left|\frac{\sin^8\vartheta}{8} - \frac{\sin^{10}\vartheta}{10}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{1440}.$$

$$\underline{V = \frac{a^3}{360}.}$$

511. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 z^4$.

Budući da su obje strane jednadžbe pozitivne za sve x, y i z, tijelo se nalazi u svim oktantima, pri čemu su dijelovi tijela u tim oktantima jednaki.

Na slični način kao u zadacima 509 i 510 dobijemo:

$$\rho^6 = a^2 \rho^4 \cos^4 \vartheta, \quad \text{pa je} \quad \rho = a \cos^2 \vartheta$$

$$\frac{V}{8} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \, d\vartheta \left| \frac{\rho^3}{3} \right|_0^{a \cos^2 \vartheta} = \frac{a^3}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{a^3}{6} \pi \left| -\frac{\cos^7 \vartheta}{7} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{42} \pi.$$

$$\underline{V = \frac{4}{21} \pi a^3.}$$

512. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3 x y z.$

$$\underline{\left[V = \frac{1}{2} \right].}$$

b. ODREĐIVANJE MASE NEHOMOGENIH TJELESA

Formule

$$dm = \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \tag{135}$$

$$m = \iiint_V \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \tag{136}$$

Zadaci

U zadacima 513—519 uklj. izračunaj masu tijela omeđenih zadanim plohama.

513. Koncentričnim sferama polumjera R i r $(R > r)$, ako je gustoća materijala obratno razmjerna s udaljenošću od središta sfera, a jednaka je γ u udaljenosti jednakoj jedinici.

Označivši s l udaljenost elementa zadanog tijela od ishodišta O, dobijemo prema slici 159 i zadatku

$$\text{gustoća } \mu = \frac{c}{l} = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

gdje je c faktor razmjernosti, a kako je za $l = 1$ $\mu = \gamma$, dobijemo $\mu = \frac{c}{1} = c$ pa je

$$\mu = \frac{\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Prema (136):

$$m = \gamma \iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \text{uz prijelaz na sferne koordinate} =$$

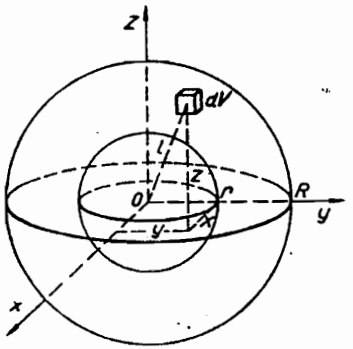
$$= \gamma \iiint_V \frac{\rho^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\rho \, d\varphi}{\rho} = \gamma \int_r^R \rho \, d\rho \int_0^{\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \underline{2 \pi \gamma (R^2 - r^2).}$$

514. Sferom polumjera R

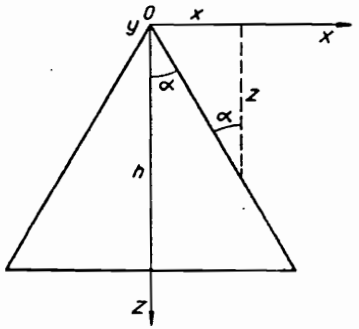
a) ako je gustoća razmjerka s kubom udaljenosti od središta, a na udaljenosti jednakoj jedinici iznosi γ,

b) ako je gustoća obratno razmjerna s kvadratom udaljenosti od središta kugle (k je zadani koeficijent razmjernosti).

$$\left[\frac{2}{3} \pi \gamma R^3; \quad 4 \pi R k \right].$$



Slika 159.



Slika 160.

515. Kružnim stošcem visine h i kuta α između osi i izvodnice, ako je gustoća razmjerna s n-tom potencijom udaljenosti od ravnine, koja prolazi vrhom stošca paralelno s osnovicom stošca, a u udaljenosti jedan iznosi γ $(n > 0)$.

Iz slike 160, koja predočuje projekciju zadanog stošca na ravninu XZ, slijedi:

$$\mu = c \cdot z^n, \quad \text{a za} \quad z = 1 \ \mu = \gamma, \quad \text{pa je} \quad \mu = \gamma \cdot z^n.$$

Znamo jednadžbu plohe nastale rotacijom oko osi Z:

$$x^2 + y^2 = [f(z)]^2.$$

Prema slici:

$$x = z \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{pa je} \quad x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

jednadžba plašta stošca, a odatle je

$$y = \pm \sqrt{z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - x^2}.$$

Prema (136) dobijemo uzevši u obzir i stražnju polovicu stošca:

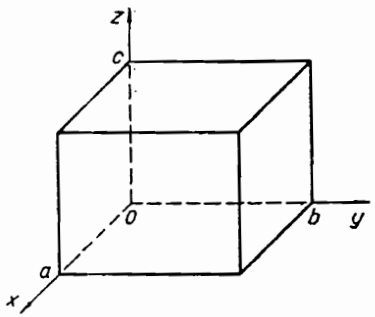
$$m = \gamma \iiint\limits_V z^n \, dx\, dy\, dz = 2\gamma \int\limits_0^h z^n \, dz \int\limits_{-z\,\mathrm{tg}\,\alpha}^{z\,\mathrm{tg}\,\alpha} dx \int\limits_0^{\sqrt{z^2\,\mathrm{tg}^2\alpha - x^2}} dy =$$

= prema predtipu C, v. dio II Repetitorija =

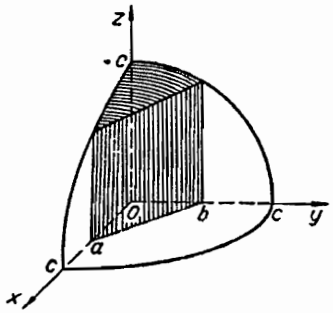
$$= 2\gamma \int\limits_0^h z^n \, dz \left| \frac{1}{2}\left(z^2\,\mathrm{tg}^2\alpha \arcsin \frac{x}{z\,\mathrm{tg}\,\alpha} + x\sqrt{z^2\,\mathrm{tg}^2\alpha - x^2} \right) \right|_{-z\,\mathrm{tg}\,\alpha}^{z\,\mathrm{tg}\,\alpha} =$$

$$= \gamma \int\limits_0^h z^n \left(z^2\,\mathrm{tg}^2\alpha \cdot \frac{\pi}{2} + z^2\,\mathrm{tg}^2\alpha \cdot \frac{\pi}{2} \right) dz = \pi\gamma \cdot \mathrm{tg}^2\alpha \int\limits_0^h z^{n+2}\, dz =$$

$$= \underline{\frac{\pi\gamma\,\mathrm{tg}^2\alpha\, h^{n+3}}{n+3}}.$$



Slika 161.



Slika 162.

516. Kružnim valjkom polumjera osnovke R i visine H, ako je gustoća u bilo kojoj tački tijela numerički jednaka kvadratu udaljenosti te tačke od središta osnovke valjka

$$\left[\text{Izvrši prijelaz na cilindričke koordinate } m = \frac{\pi R^2 H}{6}(3R^2 + 2H^2) \right].$$

517. Pravokutnim paralelepipedom omeđenim ravninama $0 \leqq x \leqq a$; $0 \leqq y \leqq b$ i $0 \leqq z \leqq c$, ako je $\mu(x, y, z) = x + y + z$.

Prema slici 161 i formuli 136:

$$m = \iiint\limits_V (x + y + z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^b dy \int\limits_0^c (x + y + z)\, dz =$$

$$= \int\limits_0^a dx \int\limits_0^b \left| xz + yz + \frac{z^2}{2} \right|_0^c dy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^b \left(cx + cy + \frac{c^2}{2} \right) dy =$$

$$= \int\limits_0^a \left| cxy + \frac{c}{2}y^2 + \frac{c^2}{2}y \right|_0^b dx = \int\limits_0^a \left(bcx + \frac{b^2c}{2} + \frac{bc^2}{2} \right) dx =$$

$$= \left| \frac{bc}{2}x^2 + \frac{b^2c}{2}x + \frac{bc^2}{2}x \right|_0^a = \underline{\frac{abc}{2}(a + b + c)}.$$

518. Sferom $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ i ravninama $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, ako je gustoća u svakoj tački jednaka koti dotične tačke tijela ($a < c$ i $b < c$).

Prema slici 162:

$$m = \iiint\limits_V z\, dx\, dy\, dz = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy \int\limits_0^{\sqrt{c^2 - x^2 - y^2}} z\, dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} (c^2 - x^2 - y^2)\, dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^a \left| c^2x - x^2y - \frac{y^3}{3} \right|_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^a \left[bc^2\left(1 - \frac{x}{a}\right) - bx^2\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{b^3}{3}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^3 \right] dx =$$

$$= \frac{b}{2}\int\limits_0^a \left(c^2 - \frac{c^2}{a}x - x^2 + \frac{1}{a}x^3 - \frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{b^2}{3a^2}x^3 \right) dx =$$

$$= \underline{\frac{ab}{24}(6c^2 - a^2 - b^2)}.$$

519. Ravninama $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$, ako je gustoća $\mu = x + y + z$.

$$\left[\frac{3}{2} \right].$$

c. ODREĐIVANJE STATIČKIH MOMENATA TJELESA

Formule

$$M_{YOZ} = \iiint_V \mu(x, y, z)\, x\, dx\, dy\, dz; \qquad M_{XOZ} = \iiint_V \mu(x, y, z)\, y\, dx\, dy\, dz;$$

$$M_{XOY} = \iiint_V \mu(x, y, z)\, z\, dx\, dy\, dz. \tag{137}$$

Zadaci

U zadacima 520 — 522 uklj. izračunaj statičke momente zadanih homogenih tjelesa ($\mu = 1$).

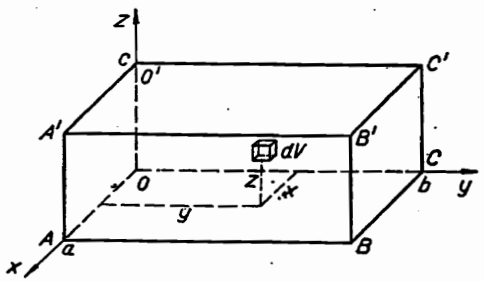
520. Pravokutnog paralelepipeda bridova a, b i c s obzirom na pobočke i osnovke.

Prema slici 163 i formulama (137) računamo:

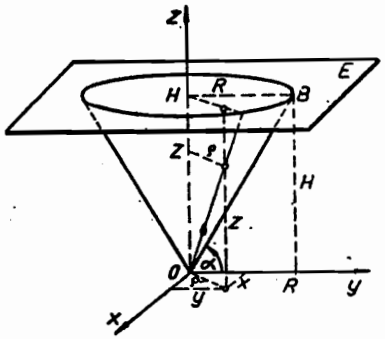
$$M_{OABC} = \iiint_V z\, dx\, dy\, dz = \int_0^c z\, dz \int_0^b dy \int_0^a dx = \underline{\frac{abc^2}{2}}.$$

Na isti način dobijemo:

$$M_{OO'A'A} = \underline{\frac{ab^2c}{2}}; \qquad M_{OCC'O'} = \underline{\frac{a^2bc}{2}}.$$



Slika 163.



Slika 164.

521. Uspravnog kružnog stošca (R, H) s obzirom na ravninu koja prolazi bazom stošca.

Prema slici 164 jednadžba izvodnice OB glasi $x = ay$, a kako je $a = \operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{R}$, $x = \frac{H}{R}y$, odnosno $y = \frac{R}{H}z$. Uvrštenje u $x^2 + y^2 = [f(z)]^2$ daje jednadžbu plašta zadanog stošca:

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2}z^2 \quad \text{ili} \quad z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Prema (137) uz prijelaz na cilindričke koordinate:

$$M_Z = \iiint_V z\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho\, d\rho \left| \frac{z^2}{2} \right|_0^{\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \int_0^R \left[\frac{H^2}{R^2}(x^2 + y^2) \right] \rho\, d\rho = \frac{\pi H^2}{R^2} \int_0^R \rho^2 \cdot \rho\, d\rho = \frac{\pi H^2}{R^2} \left| \frac{\rho^4}{4} \right|_0^R = \underline{\frac{\pi H^2 R^2}{4}}.$$

522. Tijela omeđenog elipsoidom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ i ravninom XY s obzirom na tu ravninu.

Napisavši jednadžbu elipsoida u obliku $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ računamo prema (137):

$$M_{XOY} = \iint_\sigma dx\, dy \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z\, dz = \frac{c^2}{2} \iint_\sigma \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dx\, dy =$$

$$= \text{prelazimo na eliptičke koordinate} = \frac{c^2}{2} \iint_{\sigma'} (1 - u^2 \cos^2 v - u^2 \sin^2 v)\, a\, b\, u\, du\, dv =$$

$$= \frac{abc^2}{2} \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 (1 - u^2)\, u\, du = \frac{abc^2}{2} \cdot 2\pi \left| \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} \right|_0^1 = \underline{\frac{\pi abc^2}{4}}.$$

d. ODREĐIVANJE TEŽIŠTA TJELESA

Formule

$$x_t = \frac{M_{YOZ}}{m} = \frac{1}{m} \iiint_V \mu(x, y, z)\, x\, dx\, dy\, dz$$

$$y_t = \frac{M_{XOZ}}{m} = \frac{1}{m} \iiint_V \mu(x, y, z)\, y\, dx\, dy\, dz \tag{137}$$

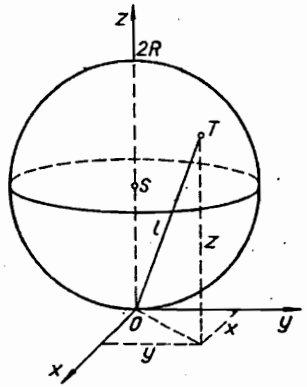
$$z_t = \frac{M_{XOY}}{m} = \frac{1}{m} \iiint_V \mu(x, y, z)\, z\, dx\, dy\, dz$$

gdje je

$$m = \iiint_V \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{136}$$

za $\mu = 1$ $m = V$.

523. Gustoća kugle $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$ u bilo kojoj tački numerički je jednaka kvadratu udaljenosti te tačke od ishodišta koordinatnog sustava. Odredi koordinate težišta kugle.



Slika 165.

Najprije računamo prema (136) masu m zadane kugle uzevši u obzir da je prema slici 165 gustoća $\mu = l^2 = x^2 + y^2 + z^2$ dok je $S(0, 0\, R)$, pa je u sfernim koordinatama $z = \rho \cos \vartheta + R$.

$$m = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \text{prelazimo na sferne koordinate} =$$

$$= \iiint\limits_V [\rho^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + (\rho \cos \vartheta + R)^2]\, \rho^2 \sin \vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \vartheta\, d\vartheta \int_0^{R} (\rho^2 + 2R\rho \cos \vartheta + R^2)\, \rho^2\, d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \sin \vartheta\, d\vartheta \left(\frac{R^5}{5} + \frac{1}{2} \cos \vartheta \cdot R^5 + \frac{R^5}{3}\right) = 2\pi R^5 \int_0^{\pi} \left(\frac{8}{15} \sin \vartheta + \frac{1}{4} \sin 2\vartheta\right) d\vartheta =$$

$$= 2\pi R^6 \left| -\frac{8}{15} \cos \vartheta - \frac{1}{8} \cos 2\vartheta \right|_0^{\pi} = \frac{32}{15} \pi R^6.$$

Budući da je zadano tijelo simetrično s obzirom na ravnine XZ i YZ, $x_t = 0$ i $y_t = 0$, pa računamo samo z_t.

Prema (137):

$$M_{XOY} = \iiint\limits_V (\rho^2 + 2R\rho \cos \vartheta + R^2)(\rho \cos \vartheta + R)\, \rho^2 \sin \vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \vartheta\, d\vartheta \left| \frac{\rho^6}{6} \cos \vartheta + \frac{2R}{5} \rho^5 \cos^2 \vartheta + \frac{R^2}{4} \rho^4 \cos \vartheta + \frac{R}{5} \rho^5 + \frac{R^2}{2} \rho^4 \cos \vartheta + \right.$$

$$\left. + \frac{R^3}{3} \rho^3 \right|_0^R = 2\pi R^6 \int_0^{\pi} \left(\frac{11}{12} \cos \vartheta + \frac{2}{5} \cos^3 \vartheta + \frac{8}{15}\right) \sin \vartheta\, d\vartheta =$$

$$= 2\pi R^6 \left| -\frac{11}{48} \cos 2\vartheta - \frac{2}{15} \cos^3 \vartheta - \frac{8}{15} \cos \vartheta \right|_0^{\pi} = \frac{40}{15} \pi R^6.$$

$$z_t = \frac{M_{XOY}}{m} = \underline{\frac{5}{4} R.}$$

524. Odredi koordinate težišta polukugle $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$ ako je gustoća razmjerna s udaljenošću tačke od središta.

$$\left[x_t = 0; \quad y_t = 0; \quad z_t = \frac{2}{5} R\right].$$

525. Odredi težište zajedničkog dijela kugala $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ i $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$ s obzirom na ravninu XY. Gustoća u svakoj tački tijela numerički je jednaka udaljenosti te tačke od ravnine XY. (Vidi sl. 149 kod zadatka 487).

Računamo prema (137) uzevši u obzir da je $x_t = 0$ i $y_t = 0$. $z_t = ?$

Prema (136):

$$m = \iiint\limits_V z\, dx\, dy\, dz = \text{uz prijelaz na cilindričke koordinate} = \iint\limits_\sigma \rho\, d\rho\, d\varphi \int_{-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + R}^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} z\, dz =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} (2R\sqrt{R^2 - \rho^2} - R^2)\, \rho\, d\rho = \pi R \left| -\frac{2}{3} \sqrt{(R^2 - \rho^2)^3} - \frac{R}{2} \rho^2 \right|_0^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\pi}{24} R^4.$$

$$M_{XOY} = \iint\limits_\sigma \rho\, d\rho\, d\varphi \int_{-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + R}^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} z^2\, dz = \frac{2}{3} \pi \int_0^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} [\sqrt{(R^2 - \rho^2)^3} - (-\sqrt{R^2 - \rho^2} + R)^3]\, \rho\, d\rho =$$

$$= \frac{2}{3}\pi \int_0^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} (2\sqrt{R^2-\rho^2)^3} - 4R^3 + 3R\rho^2 + 3R^2\sqrt{R^2-\rho^2})\,\rho\,d\rho =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left| -\frac{2}{5}\sqrt{(R^2-\rho^2)^5} - 2R^3\rho^2 + \frac{3}{4}R\rho^4 - R^2\sqrt{(R^2-\rho^2)^3}\right|_0^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} = \frac{59}{480}\pi R^5.$$

$$z_t = \frac{M_{xoy}}{m} = \underline{\frac{59}{100}R}.$$

U zadacima 526 – 534 uklj. odredi težišta homogenih tjelesa ($\mu = 1$) omeđenih zadanim plohama.

526. Troosnim elipsoidom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ i ravninama $x = 0$, $y = 0$ i $z = 0$.

Prema (137):

$$M_{yoz} = \iint_\sigma x\,dx\,dy \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz =$$

$$= c\iint_\sigma x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy = \text{prijelaz na eliptičke koordinate} =$$

$$= abc\iint_{\sigma'} a\,u\cdot\cos v\sqrt{1-u^2\cos^2 v - u^2\sin^2 v}\,u\,du\,dv =$$

$$= a^2bc\int_0^1 u^2\sqrt{1-u^2}\,du\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos v\,dv = a^2bc\left|\left(\frac{u^3}{4}-\frac{u}{8}\right)\sqrt{1-u^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8}\arcsin u\right|_0^1 \cdot \left|\sin v\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \text{(prvi integral je riješen kao posebni slučaj b) tipa III, vidi}$$

$$\text{II dio Repetitorija)} = \frac{a^2bc\pi}{16}.$$

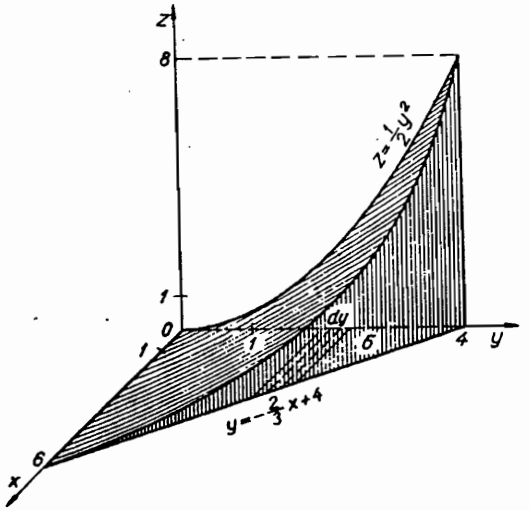
Na isti način izračunaj

$$m = V = \frac{abc\pi}{6}$$

pa je

$$\underline{x_t = \frac{3}{8}a}, \quad \text{a također} \quad \underline{y_t = \frac{3}{8}b} \quad \text{i} \quad \underline{z_t = \frac{3}{8}c}.$$

527. Valjkovitom plohom $z = \frac{y^2}{2}$ i ravninama $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $2x + 3y - 12 = 0$.



Slika 166.

Prema (137) i slici 166:

$$M_{yoz} = \iint_\sigma x\,dx\,dy\int_0^{\frac{y^2}{2}} dz = \frac{1}{2}\int_0^6 x\,dx\int_0^{-\frac{2}{3}x+4} y^2\,dy = \frac{1}{6}\int_0^6 x\left(-\frac{2}{3}x+4\right)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^6\left(-\frac{8}{27}x^4 + \frac{16}{3}x^3 - 32x^2 + 64x\right)dx = \frac{96}{5}.$$

Na isti način dobijemo:

$$m = V = \int_0^6 dx\int_0^{-\frac{2}{3}x+4} dy\int_0^{\frac{y^2}{2}} dz = 16.$$

$$x_t = \frac{M_{yoz}}{V} = \underline{\frac{6}{5}}.$$

Izračunaj također

$$\underline{y_t = \frac{12}{5}} \quad \text{i} \quad \underline{z_t = \frac{8}{5}}.$$

528. Valjkovitim plohama $y = \sqrt{x}$ i $y = 2\sqrt{x}$ i ravninama $z = 0$ i $x + z = 6$.

Prema slici 167:

$$M_{YOZ} = \int_0^6 x\,dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{-x+6} dz = \int_0^6 x(2\sqrt{x} - \sqrt{x})(-x+6)\,dx =$$

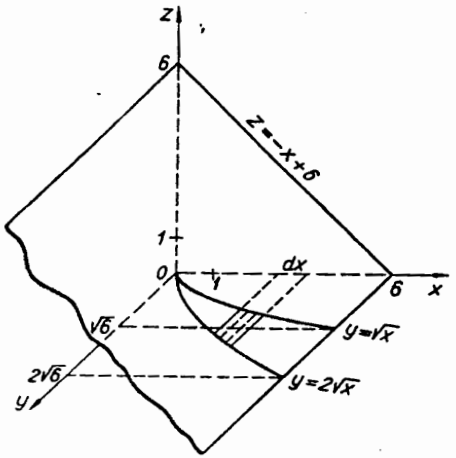
$$= \int_0^6 (-x^2\sqrt{x} + 6x\sqrt{x})\,dx = \left| -\frac{2}{7}\cdot\sqrt{x^7} + \frac{12}{5}\sqrt{x^5} \right|_0^6 = \frac{864\sqrt{6}}{35}.$$

$$m = V = \iiint_\sigma dx\,dy\,dz = \int_0^6 dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{-x+6} dz = \text{na isti način} = \frac{48\sqrt{6}}{5}.$$

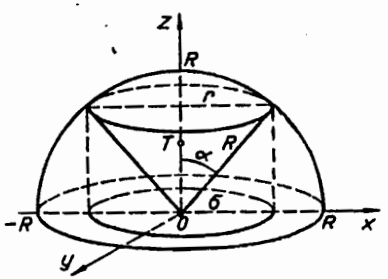
$$x_t = \frac{M_{YOZ}}{V} = \underline{\frac{18}{7}}.$$

Izračunaj na isti način y_t i z_t.

$$\left[\frac{15\sqrt{6}}{16};\quad \frac{12}{7}\right].$$



Slika 167.



Slika 168.

529. Sferom $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ i stošcem $z\,\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$ (kuglin isječak).

Iz slike 168 slijedi:

$$r = R\sin\alpha; \qquad x_t = 0, \quad y_t = 0. \quad z_t = ?$$

Prelazimo na cilindričke koordinate.

$$M_{XOY} = \iint_\sigma \rho\,d\rho\,d\varphi \int_{\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R\sin\alpha} \left(R^2 - \rho^2 - \frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}\rho^2\right)\rho\,d\rho =$$

$$= \pi\left| R^2\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} - \frac{1}{4\,\mathrm{tg}^2\alpha}\cdot\rho^4 \right|_0^{R\sin\alpha} = \frac{\pi R^4\sin^2\alpha}{4}(2 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha) = \frac{\pi}{4}R^4\sin^2\alpha.$$

Na isti način dobijemo:

$$m = V = \frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos\alpha)$$

$$z_t = \frac{3R\sin^2\alpha}{8(1-\cos\alpha)} = \frac{3R(1-\cos^2\alpha)}{8(1-\cos\alpha)} = \underline{\frac{3R}{8}(1+\cos\alpha)}.$$

530. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 z \ (a > 0)$.

Lijeva strana jednadžbe plohe, koja omeđuje zadano tijelo, pozitivna je za sve vrijednosti x, y i z, pa se tijelo nalazi u I, II, III i IV oktantima, u kojim je i z desne strane jednadžbe pozitivan. Kako su dijelovi tijela u tim oktantima jednaki, $x_t = 0$ i $y_t = 0$, računamo z_t izvršivši prijelaz na sferne koordinate. U tim koordinatama zadana jednadžba prima oblik:

$$\rho^4 = a^3\rho\cos\vartheta, \qquad \text{pa je} \qquad \rho = a\sqrt[3]{\cos\vartheta} \quad \text{(v. zadatak 509).}$$

$$M_{XOY} = \iiint_V z\,dx\,dy\,dz = \iiint_V \rho^2\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\vartheta\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta \left|\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{a\sqrt[3]{\cos\vartheta}} = \frac{1}{2}a^4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cos\vartheta\sqrt[3]{\cos^4\vartheta}\,d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^4\left| -\frac{3}{10}\sqrt[3]{\cos^{10}\vartheta} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{20}\pi a^4.$$

Na isti način dobijemo $m = V = \frac{\pi}{3}a^3$.

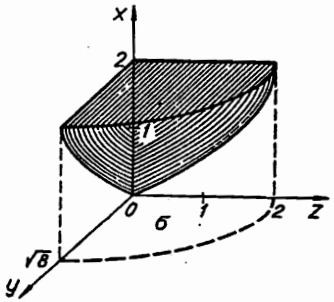
$$\underline{z_t = \frac{9}{20}a.}$$

531. Ravninama $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 4$ i $x + y + z = 8$ (krnji paralelepiped).

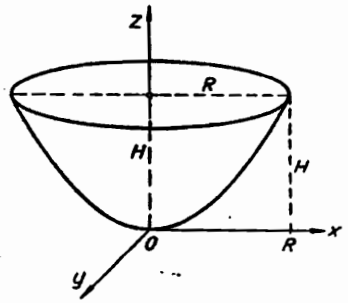
$$\left[x_t = \frac{14}{15}, \quad y_t = \frac{26}{15}, \quad z_t = \frac{8}{3}\right].$$

532. Paraboloidom $z = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2)$ i sferom $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ $(z \geqq 0)$.

$$\left[x_t = 0; \quad y_t = 0; \quad z_t = \frac{5a}{83}(6\sqrt{3} + 5)\right].$$



Slika 169.



Slika 170.

533. Paraboloidom $y^2 + 2z^2 = 4x$ i ravninom $x = 2$.

Napisavši jednadžbu paraboloida u obliku $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = x$, vidimo da je paraboloid eliptički kojemu je os simetrije os X i da je njegova projekcija u ravninu YZ za $x = 2$ elipsa $\frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 1$ s poluosima $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ i $b = 2$ (vidi sl. 169). Slijedi $y_t = 0$, $z_t = 0$; $x_t = ?$

$$M_{YOZ} = \iiint_V x\,dx\,dy\,dz = \iint_\sigma dy\,dz \int_{\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}}^{2} x\,dx = \frac{1}{2}\iint_\sigma dy\,dz\left[4 - \left(\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \text{prijelaz na eliptičke koordinate} =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{\sigma'}\left[4 - \left(\frac{8u^2\cos^2 v}{4} + \frac{4u^2\sin^2 v}{2}\right)^2\right] 4\sqrt{2}\,u\,du\,dv = 2\sqrt{2}\iint_{\sigma'}(4 - 4u^4)\,u\,du\,dv =$$

$$= 8\sqrt{2}\int_0^{2\pi} dv \int_0^1 (1 - u^4)\,u\,du = \frac{16}{3}\pi\sqrt{2}.$$

Na isti način:

$$m = V = 4\pi\sqrt{2}.$$

$$\underline{x_t = \frac{4}{3}.}$$

534. Rotacijonim paraboloidom prikazanim u slici 170.

Napisavši jednadžbu parabole u obliku $z = ax^2$, vidimo prema slici da je za $x = R$ $z = H$ pa je $H = aR^2$ te je $a = \frac{H}{R^2}$ i $z = \frac{H}{R^2}x^2$ ili $x = \sqrt{\frac{R^2}{H}z}$.

Jednadžba paraboloida prema $x^2 + y^2 = [f(z)]^2$ glasi:

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H}z \quad \text{ili} \quad z = \frac{H}{R^2}(x^2 + y^2).$$

Rezultat:

$$x_t = 0; \quad y_t = 0; \quad z_t = \frac{M_{XOY}}{V} = \frac{\frac{1}{3}\pi H^2 R^2}{\frac{1}{2}\pi R^2 H} = \underline{\frac{2}{3}H.}$$

e. ODREĐIVANJE MOMENATA TROMOSTI TJELESA

Formule

Momenti tromosti

Aksijalni:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\,\mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = I_{XOY} + I_{XOZ}$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2)\,\mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = I_{XOY} + I_{YOZ} \qquad (138)$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)\,\mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = I_{XOZ} + I_{YOZ}$$

Centrifugalni:

$$I_{xy} = \iiint_V xy\,dm; \qquad I_{xz} = \iiint_V xz\,dm; \qquad I_{yz} = \iiint_V yz\,dm. \qquad (138)'$$

Polarni:

$$I_p = I_o = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\,\mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \qquad (139)$$

$$I_o = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) \qquad (143)$$

$$I_o = I_{XOY} + I_{XOZ} + I_{YOZ} \qquad (142)$$

Planarni

$$I_{xoy} = \iiint\limits_V z^2 \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

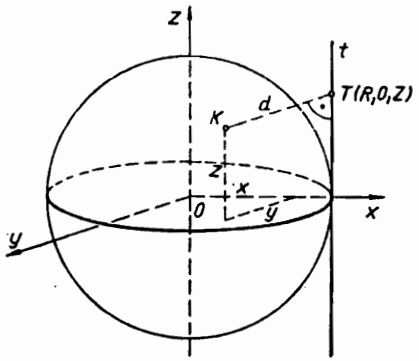
$$I_{xoz} = \iiint\limits_V y^2 \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \qquad (140)$$

$$I_{yoz} = \iiint\limits_V x^2 \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Zadaci

U zadacima **535—546** uklj. izračunaj momente tromosti zadanih homogenih tijela kojim je masa $m = V(\mu = 1)$.

535. Kugle polumjera R s obzirom na tangentu t.



Slika 171.

Odredivši prema (9) kvadrat udaljenosti d bilo koje tačke $K(x, y, z)$ kugle od tangente t (v. sliku 171)

$$d^2 = (x - R)^2 + (y - 0)^2 + (z - z)^2 = (x - R)^2 + y^2$$

računamo prema (138):

$$I_t = \iiint\limits_V [(x - R)^2 + y^2]\, dx\, dy\, dz = \text{prelazimo na sferne koordinate} =$$

$$= \iiint\limits_V (\rho^2 \sin^2\vartheta - 2R\rho \sin\vartheta \cos\varphi + R^2)\, \rho^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^R (\rho^2 \sin^2\vartheta - 2R\rho \sin\vartheta \cos\varphi + R^2)\, \rho^2\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \left| \frac{\rho^5}{5} \sin^2\vartheta - 2R\frac{\rho^4}{4} \sin\vartheta \cos\varphi + R^2 \frac{\rho^3}{3} \right|_0^R =$$

$$= R^5 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{5} \sin^3\vartheta - \frac{1}{2} \sin^2\vartheta \cos\varphi + \frac{1}{3} \sin\vartheta \right) d\vartheta =$$

$$= \frac{R^5}{30} \int_0^{2\pi} \left| 6\left(-\frac{1}{3} \sin^2\vartheta \cos\vartheta - \frac{2}{3} \cos\vartheta \right) - 15\left(\frac{\vartheta}{2} - \frac{\sin 2\vartheta}{4} \right) \cdot \cos\varphi - 10 \cos\vartheta \right|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{R^5}{30} \int_0^{2\pi} \left(8 - \frac{15\pi}{2} \cos\varphi + 20 \right) d\varphi = \frac{28}{15} \pi R^5 = \frac{4}{3} R^3 \pi \cdot \frac{7}{5} R^2 = \underline{\frac{7}{5} m R^2}.$$

536. Troosnog elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ s obzirom na svaku njegovu os.

Uzevši u obzir da je iz jednadžbe elipsoida $x = \pm a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$, dobijemo prema (138):

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \text{uz prijelaz na cilindričke, a zatim eliptičke koordinate} =$$

$$= 2 \iint\limits_\sigma (y^2 + z^2)\, dy\, dz \int_0^{a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}} dx = 2a \iint\limits_\sigma (y^2 + z^2) \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}\, dy\, dz =$$

$$= 2a \iint\limits_{\sigma'} (b^2 u^2 \cos^2 v + c^2 u^2 \sin^2 v) \cdot \sqrt{1 - u^2 \cos^2 v - u^2 \sin^2 v} \cdot bcu\, du\, dv =$$

$$= 2abc \int_0^{2\pi} (b^2 \cos^2 v + c^2 \sin^2 v)\, dv \int_0^1 u^2 \sqrt{1 - u^2}\, du =$$

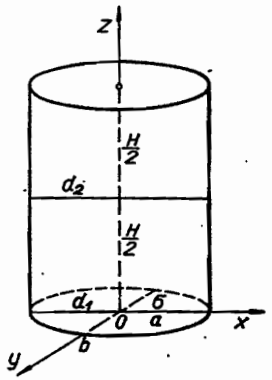
$$= 2abc \int_0^{2\pi} (b^2 \cos^2 v + c^2 \sin^2 v) \left| -\frac{1}{3}(1 - u^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}(1 - u^2)^{\frac{5}{2}} \right|_0^1 dv =$$

$$= 2\,a\,b\,c \cdot \frac{2}{15}\left| b^2\left(\frac{v}{2}+\frac{\sin 2v}{4}\right)+c^2\left(\frac{v}{2}-\frac{\sin 2v}{4}\right)\right|_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{15}\,a\,b\,c\,(b^2+c^2) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\,a\,b\,c \cdot \frac{1}{5}(b^2+c^2) = \underline{\frac{1}{5}\,m\,(b^2+c^2)}.$$

Izračunaj na isti način I_y i I_z.

$$\left[\frac{1}{5}\,m\,(a^2+c^2);\quad \frac{1}{5}\,m\,(a^2+b^2)\right].$$



Slika 172.

537. Uspravnog valjka kojemu je baza elipsa s poluosima a i b, dok je visina H:

a) s obzirom na veliku os $d_1 = 2\,a$ baze,

b) s obzirom na veliku os $d_2 = 2\,a$ srednjeg presjeka.

ad a) Prema slici 172:

$$I_{2a} = I_x = \iiint\limits_V (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz =$$

= uz prijelaz na eliptičko-cilindričke koordinate =

$$= \iiint\limits_V (b^2u^2\sin^2 v + z^2)\,a\,b\,u\,du\,dv\,dz =$$

$$= a\,b\int_0^H dz\int_0^1 u\,du\int_0^{2\pi}(b^2u^2\sin^2 v + z^2)\,dv =$$

$$= a\,b\int_0^H dz\int_0^1 u\,du\left|b^2u^2\left(\frac{v}{2}-\frac{\sin 2v}{4}\right)+z^2 v\right|_0^{2\pi} =$$

$$= a\,b\int_0^H dz\int_0^1 (b^2u^2\pi + 2\pi z^2)\,u\,du = a\,b\,\pi\int_0^H \left|b^2\frac{u^4}{4}+z^2u^2\right|_0^1 dz =$$

$$= a\,b\,\pi\int_0^H\left(\frac{b^2}{4}+z^2\right)dz = a\,b\,\pi\left(\frac{b^2H}{4}+\frac{H^3}{3}\right) = \frac{a\,b\,\pi\,H}{12}(3\,b^2+4\,H^2) =$$

$$= \underline{\frac{m}{12}(3\,b^2+4\,H^2)}.$$

ad b) Paralelnim pomakom uzduž osi Z prenesi koordinatni sustav u srednji presjek valjka.

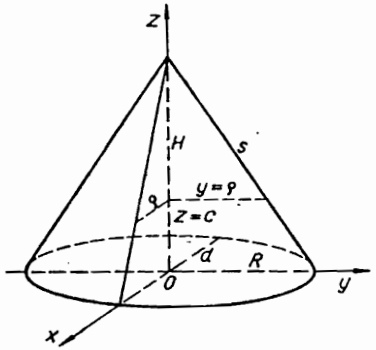
$$\left[\frac{m}{12}(3\,b^2+H^2)\right].$$

538. Uspravnog kružnog valjka (R, H) s obzirom na

a) dijametar baze,

b) dijametar srednjeg presjeka.

$$\left[\frac{m}{12}(3\,R^2+4\,H^2);\quad \frac{m}{12}(H^2+3\,R^2)\right].$$



Slika 173.

539. Uspravnog kružnog stošca polumjera baze R i visine H s obzirom na dijametar d baze.

Prema slici 173:

$$I_d = I_z = \iiint\limits_V (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \text{uz prijelaz na cilindričke koordinate} =$$

$$= \iiint\limits_V (\rho^2\sin^2\varphi + z^2)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$$

Kako se $\rho = y$ mijenja kad integriramo u smjeru osi Z (vidi sliku), moramo ρ izraziti kao funkciju od z, pa prema slici imamo:

$$s \equiv \frac{y}{R} + \frac{z}{H} = 1, \quad \text{pa je} \quad y = \rho = \frac{R}{H}(H - z).$$

Dobijemo:

$$I_s = \int_0^H dz \int_0^{\frac{R}{H}(H-z)} \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} (\rho^2 \sin^2 \varphi + z^2)\, d\varphi =$$

$$= \int_0^H dz \int_0^{\frac{R}{H}(H-z)} \rho\, d\rho \left| \rho^2 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) + z^2 \varphi \right|_0^{2\pi} =$$

$$= \pi \int_0^H dz \int_0^{\frac{R}{H}(H-z)} (\rho^3 + 2 z^2 \rho)\, d\rho = \pi \int_0^H \left| \frac{\rho^4}{4} + z^2 \rho^2 \right|_0^{\frac{R}{H}(H-z)} dz =$$

$$= \pi \int_0^H \left[\frac{1}{4} \frac{R^4}{H^4}(H - z)^4 + z^2 \frac{R^2}{H^2}(H - z)^2 \right] dz =$$

$$= \frac{\pi R^2}{H^2} \left| -\frac{1}{4} \frac{R^2}{H^2} \frac{(H - z)^5}{5} + \frac{H^2 \cdot z^3}{3} - 2H \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} \right|_0^H =$$

$$= \frac{\pi H R^2}{60}(3 R^2 + 2 H^2) = \underline{\frac{m}{20}(3 R^2 + 2 H^2)}.$$

540. Uspravnog stošca kojemu je visina H a baza elipsa s poluosima a i b, s obzirom na os X.

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \iiint_V (b^2 u^2 \sin^2 v + z^2)\, a\, b\, u\, du\, dv.$$

Pri integriranju u smjeru osi Z, tj. uz $z = c$, područje integracije σ je elipsa s promjenljivim poluosima x i y, koje moramo izraziti sa z.

Iz slike 174 slijedi:

$$s_1 \equiv \frac{y}{b} + \frac{z}{H} = 1 \quad \text{i} \quad s_2 \equiv \frac{x}{a} + \frac{z}{H} = 1,$$

pa je

$$y = \frac{b}{H}(H - z) \quad \text{i} \quad x = \frac{a}{H}(H - z).$$

Pri prijelazu na eliptičke koordinate tim izrazima moramo zamijeniti poluosi a i b.

$$I_x = \int_0^H dz \int_0^1 u\, du \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{b^2}{H^2}(H - z)^2 u^2 \sin^2 v + z^2 \right] \frac{a}{H} \cdot \frac{b}{H}(H - Z)^2 \right\} dv =$$

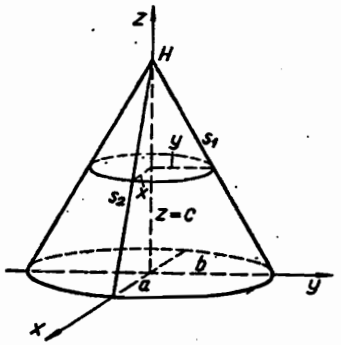
$$= \frac{a b}{H^2} \int_0^H (H - z)^2\, dz \int_0^1 u\, du \int_0^{2\pi} \left[\frac{b^2}{H^2}(H - z)^2 u^2 \sin^2 v + z^2 \right] dv =$$

$$= \frac{a b}{H^2} \int_0^H (H - z)^2\, dz \int_0^1 u\, du \left| \frac{b^2}{H^2}(H - z)^2 u^2 \left(\frac{v}{2} - \frac{\sin 2v}{4} \right) + z^2 v \right|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{a b \pi}{H^2} \int_0^H (H - z)^2\, dz \left| \frac{b^2}{H^2}(H - z)^2 \frac{u^4}{4} - z^2 u^2 \right|_0^1 = \frac{a b \pi}{H^2} \int_0^H \left[\frac{b^2 (H - z)^4}{4 H^2} + z^2 (H - z)^2 \right] dz =$$

$$= \frac{a b \pi}{H^2} \left| -\frac{b^2}{4 H^2} \cdot \frac{(H - z)^5}{5} + H^2 \frac{z^3}{3} - 2 H \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} \right|_0^H =$$

$$= \frac{\pi a b H}{60}(3 b^2 + 2 H^2) = \underline{\frac{m}{20}(3 b^2 + 2 H^2)}.$$

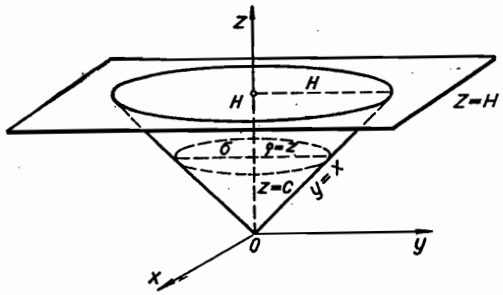


Slika 174.

541. Eliptičkog stošca $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{H^2}$ s obzirom na os X.

Nariši zadani stožac, pa ćeš vidjeti da su poluosi elipse za $z = c$: $y = \frac{b}{H} z$ i $x = \frac{a}{H} z$, daljnji postupak je isti kao u zadatku 540. Rezultat $I_x = \frac{\pi a b H}{20}(b^2 + 4 H^2)$.

542. Tijela omeđenog stošcem $z^2 = x^2 + y^2$ i ravninom $z = H$ s obzirom na koordinatne ravnine ($z \geqq 0$, $H > 0$).



Slika 174a.

Računamo prema formuli (140) i slici 174a:

$$I_{XOY} = \iiint\limits_V z^2\,dx\,dy\,dz = \text{uz prijelaz na cilindričke koordinate} = \int\limits_0^H z^2\,dz \iint\limits_\sigma \rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^H z^2\,dz \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^z \rho\,d\rho = 2\pi \int\limits_0^H z^2 \left|\frac{\rho^2}{2}\right|_0^z dz = \pi \int\limits_0^H z^4\,dz = \pi \left|\frac{z^5}{5}\right|_0^H = \underline{\pi \frac{H^5}{5}}.$$

$$I_{XOZ} = I_{YOZ} = \iiint\limits_V x^2\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^H dz \int\limits_{-z}^{z} x^2\,dx \int\limits_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} dy =$$

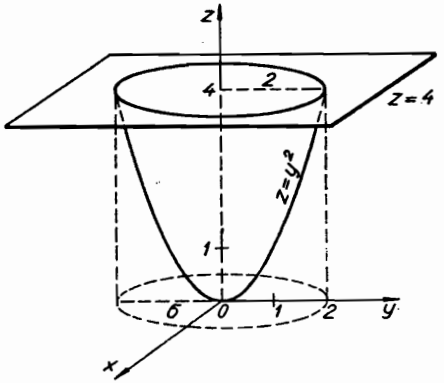
$$= 2\int\limits_0^H dz \int\limits_{-z}^{z} x^2\,dx\,|y|\Big|_0^{\sqrt{z^2-x^2}} = 2\int\limits_0^H dz \int\limits_{-z}^{z} x^2\sqrt{z^2-x^2}\,dx =$$

= prema posebnom slučaju b) tipa III (v. dio II Repetitorija) =

$$= 2\cdot 2\int\limits_0^H dz \left|\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{z^2}{8}x\right)\sqrt{z^2-x^2} + \frac{z^4}{8}\arcsin\frac{x}{z}\right|_0^z = 4\int\limits_0^H \frac{z^4}{8}\cdot\frac{\pi}{2}\,dz =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left|\frac{z^5}{5}\right|_0^H = \underline{\frac{\pi H^5}{20}}.$$

543. Tijela omeđenog parabolom $z = x^2 + y^2$ i ravninom $z = 4$ s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.



Slika 175.

Računamo prema formuli (139) i slici 175:

$$I_O = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_\sigma dx\,dy \int\limits_{x^2+y^2}^{4} (x^2 + y^2 + z^2)\,dz =$$

$$= \iint\limits_\sigma dx\,dy \left|(x^2 + y^2)\,z + \frac{z^3}{3}\right|_{x^2+y^2}^{4} = \iint\limits_\sigma dx\,dy \left[4(x^2 + y^2) + \frac{64}{3} -\right.$$

$$\left. - (x^2 + y^2)^2 - \frac{1}{3}(x^2 + y^2)^3\right] = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(4\rho^2 + \frac{64}{3} - \rho^4 - \frac{1}{3}\rho^6\right)\rho\,d\rho =$$

$$= 2\pi \left|\rho^4 + \frac{32}{3}\rho^2 - \frac{\rho^6}{6} - \frac{\rho^8}{24}\right|_0^2 = \underline{\frac{224\pi}{3}}.$$

544. Kugle polumjera 1 s obzirom na središte

$$\left[\frac{4\pi}{5}\right].$$

545. Kružnog stošca $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leqq z \leqq 2)$ s obzirom na a) os Z; b) os Y.

$$\left[\frac{16\pi}{5};\ 8\pi\right].$$

546. Piramide omeđene ravninama $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ i $z = 0$ s obzirom na ravninu XOY.

$$\left[\frac{1}{60}\right].$$

VI. NEPRAVI VIŠESTRUKI INTEGRALI

Formula

Slično nepravim jednostrukim integralima (vidi dio II § 8 Repetitorija) pod nepravim dvostrukim integralom funkcije $z = f(x, y)$ uzetim po čitavoj ravnini $X\,Y$ ili po njenom beskonačnom dijelu razumije se granična vrijednost tog integrala uzetog po konačnom dijelu σ ravnine $X\,Y$, kad taj dio σ teži u beskonačnost.

To znači:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\sigma\to\infty}\iint_{\sigma} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Kaže se da nepravi integral postoji, odnosno konvergira, ako taj limes postoji. Ako limesa nema ili je beskonačan, nepravi integral ne postoji, odnosno divergira. Na sličan način definira se nepravi dvostruki integral, ako integrand $z = f(x, y)$ teži u beskonačnost u konačnom području integracije σ ravnine $X\,Y$.

Postojanje prvog nepravog dvostrukog integrala kazuje geometrijski da valjkovitom tijelu s beskonačno velikom bazom možemo dodijeliti određeni volumen, dok postojanje drugog nepravog integrala znači geometrijski da i valjkovitom tijelu s vrhom, koji se proteže u beskonačnost, možemo dodijeliti određeni volumen.

Slično se tumače i nepravi trostruki integrali.

A. Nepravi dvostruki integrali

Zadaci

U zadacima **547 — 554** uklj. izračunaj zadane neprave integrale, odnosno dokaži da su divergentni.

547. $I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$

Izračunajmo taj integral kao pravi i to po krugu σ (sl. 176 a).

Uz prijelaz na polarne koordinate dobijemo:

$$\iint_{\sigma} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho = 2\pi\left|-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right|_0^r = -\pi(e^{-r^2}-1) =$$

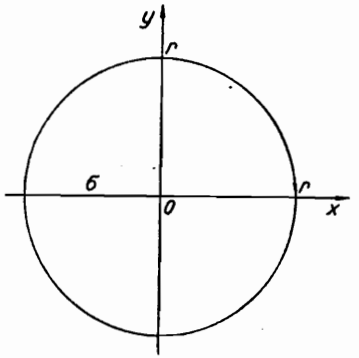
$$= \pi(1 - e^{-r^2}).$$

Sada prelazimo na limes uz $r\to\infty$:

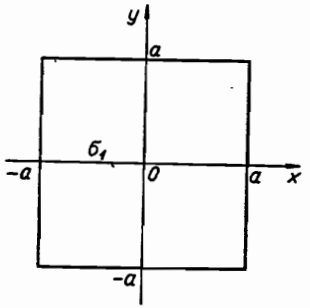
$$I = \pi\lim_{r\to\infty}(1 - e^{-r^2}) = \pi.$$

Zadani integral I konvergira i π je njegova vrijednost.

$$\underline{I = \pi.}$$



Slika 176a.



Slika 176b.

Izračunajmo još jednom isti integral I, ali kao konačno područje σ_1 uzmimo kvadrat stranice $2a$.

Prema slici 176 b imamo:

$$\iint_{\sigma_1} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\int_{-a}^{a} e^{-y^2}\,dy = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x}\,dx\right)^2$$

$$I = \lim_{a\to\infty}\left(\int_{-a}^{a} e^{-x}\,dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi.$$

Odatle slijedi Euler-Poissonov integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

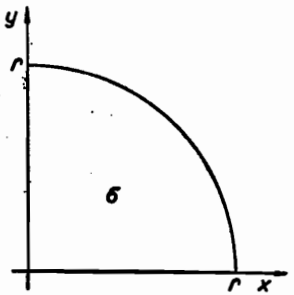
548. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx\,dy}{1 + x^2 + y^2}$.

Prema slici (176 a):

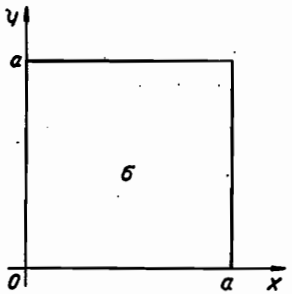
$$\iint\limits_{\sigma} \frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{1+\rho^2} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{r} \frac{\rho\,d\rho}{1+\rho^2} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \,|\, \ln(1+\rho^2) \,\Big|_0^r = \pi \ln(1+r^2).$$

$$I = \pi \lim_{r\to\infty} [\ln(1+r^2)] = \infty.$$

Zadani nepravi integral divergira, odnosno ne postoji.



Slika 177.



Slika 178.

549. $I = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} \frac{dx\,dy}{(x^2 + y^2 + a^2)^2}$.

Kako je integrand pozitivan za sve x i y, a uzet je samo za $z \geqq 0$, za konačno područje σ uzeti ćemo samo prvi kvadrant kruga, pa prema slici 177 imamo:

$$\iint\limits_{\sigma} \frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{(\rho^2+a^2)^2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{\rho\,d\rho}{(\rho^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left| \frac{1}{\rho^2+a^2} \right|_0^r = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{r^2+a^2} - \frac{1}{a^2}\right)$$

$$I = -\frac{\pi}{4} \lim_{r\to\infty} \left(\frac{1}{r^2+a^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \underline{\frac{\pi}{4a^2}}.$$

550. $I = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} (x+y)\, e^{-(x+y)}\, dx\, dy.$

Prema slici 178:

$$\iint\limits_{\sigma} (x+y)\, e^{-(x+y)}\, dx\, dy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a (x+y)\, e^{-(x+y)}\, dy =$$

$$= [\text{parcijalna integracija uz } x + y = t] =$$

$$= \int\limits_0^a dx\, [-(x+a)\, e^{-(x+a)} - e^{-(x+a)} + x\, e^{-x} + e^{-x}] =$$

$$= |(x+a)\, e^{-(x+a)} + e^{-(x+a)} + e^{-(x+a)} - x\, e^{-x} - e^{-x} - e^{-x}|_0^a =$$

$$= 2\,a\,e^{-2a} + 2\,e^{-2a} - a\,e^{-a} - 2\,e^{-a} - a\,e^{-a} - 2\,e^{-a} + 2.$$

$$I = \lim_{a\to\infty} \left(\frac{2\,a}{e^{2a}} + \frac{2}{e^{2a}} - \frac{2\,a}{e^{a}} - \frac{4}{e^{a}} + 2\right) = \underline{2.}$$

jer je npr. $\lim\limits_{a\to\infty} \frac{2\,a}{e^{2a}}$ = po L'Hospitalu (vidi I dio Repetitorija, § 15) $= 2 \lim\limits_{a\to\infty} \frac{1}{e^{2a}\cdot 2} =$

$= \lim\limits_{a\to\infty} \frac{1}{e^{2a}} = 0.$

551. $I = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} x\,y\, e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy.$

Prema slici 177 (vidi zadatak 549) uz prijelaz na polarne koordinate dobijemo:

$$\iint\limits_{\sigma_1} \rho^3 \cos\varphi \sin\varphi\, e^{-\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\, d\varphi \int\limits_0^r \rho^3 e^{-\rho^2}\, d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\left| -\frac{\cos 2\varphi}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2}\left| -\rho^2 e^{-\rho^2} - e^{-\rho^2} \right|_0^r = -\frac{1}{8}(-1-1)\left(-\frac{r^2}{e^{r^2}} - \frac{1}{e^{r^2}} + 1\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{r^2}{e^{r^2}} + \frac{1}{e^{r^2}} - 1\right).$$

$$I = -\frac{1}{4} \lim_{r\to\infty} \left(\frac{r^2}{e^{r^2}} + \frac{1}{e^{r^2}} - 1\right) = \underline{\frac{1}{4}},$$

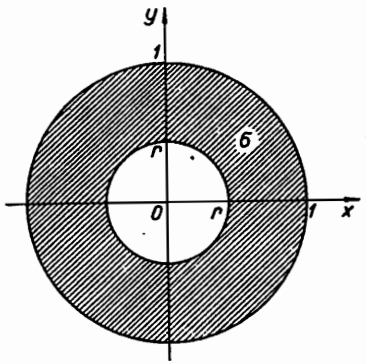
jer je prema L'Hospitalu $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{r^2}{e^{r^2}} = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{2\,r}{e^{r^2}\cdot 2\,r} = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{1}{e^{r^2}} = 0.$

552. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$.

[2π].

553. $I = \displaystyle\iint_{\sigma_1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$, gdje je σ_1 krug $x^2+y^2 \leqq 1$.

Kako je u ishodištu koordinatnog sustava, odnosno u središtu kruga integrand prekinut, jer je za $x = y = 0$ $\ln\frac{1}{0} = \ln\infty = \infty$, zadani integral je nepravi. Izrežemo iz zadanog kruga σ_1 krug $x^2+y^2 \leqq r^2$, gdje je $r < 1$, pa izračunajmo po preostalom dijelu σ pripadni pravi integral.



Slika 179.

Prema sl. 179:

$$\iint_{\sigma} \ln \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint_{\sigma'} \ln\frac{1}{\rho}\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^1 \ln\rho\cdot\rho\,d\rho =$$

$$= -2\pi\left|\frac{\rho^2}{2}\ln\rho - \frac{\rho^2}{4}\right|_r^1 = 2\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4}\right).$$

$$I = 2\pi \lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{4}+\frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4}\right) = \text{po L'Hospitalovu pravilu} = 2\pi\cdot\frac{1}{4} = \underline{\frac{\pi}{2}}.$$

Zadani integral konvergira i ima vrijednost $\frac{\pi}{2}$.

554. $I = \displaystyle\iint_{\sigma} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, gdje je σ krug $x^2+y^2 \leqq R^2$.

$$\left[\text{konvergira } I = 2\pi\left(\frac{R^2}{2}\ln R - \frac{R^2}{2}\right)\right].$$

555. Izračunaj volumen tijela koje je omeđeno plohom $z = x^2y^2e^{-(x^2+y^2)}$ i ravninom $z = 0$.

Kako zadana ploha ne siječe ravninu XY $(z = 0)$, jer je $x^2y^2e^{-(x^2+y^2)} \neq 0$ za $x \neq 0$ i $y \neq 0$, traženi volumen V tijela izražen je nepravim integralom

$$V = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^2y^2e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Uzmimo pripadni pravi integral po krugu σ polumjera r sa središtem u ishodištu O, tj. odredimo volumen V_1 valjka, kojemu je donja baza navedeni krug u ravnini XY, dok gornju bazu čini zadana ploha z:

$$V_1 = \iint_{\sigma} x^2y^2e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi\int_0^r \rho^5e^{-\rho^2}\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\,d\varphi\left|-\frac{1}{2}\rho^4e^{-\rho^2} - \rho^2e^{-\rho^2} - e^{-\rho^2}\right|_0^r =$$

$$= \frac{1}{4}\left|\frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\right|_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\frac{r^4}{e^{r^2}} - \frac{r^2}{e^{r^2}} - \frac{1}{e^{r^2}} + 1\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(-\frac{1}{2}\frac{r^4}{e^{r^2}} - \frac{r^2}{e^{r^2}} - \frac{1}{e^{r^2}} + 1\right).$$

Pomoću L'Hospitalova pravila dobijemo:

$$V = \lim_{r\to\infty} V_1 = \underline{\frac{\pi}{4}}.$$

556. Izračunaj volumen tijela koje je omeđeno plohom $z = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ i ravninom $z = 0$.

[π].

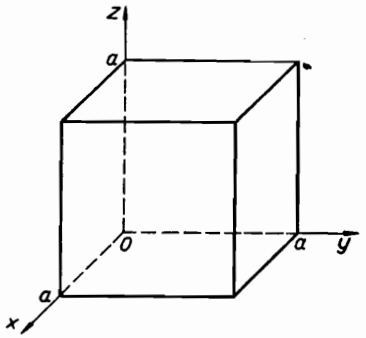
557. Izračunaj volumen tijela koje je omeđeno plohom $z = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}$ i onim dijelom ravnine $z = 0$, koji leži izvan kruga $x^2+y^2 \geqq 1$.

[$V = \pi$, v. dalje sliku 182].

B. Nepravi trostruki integrali

Zadaci

558. Izračunaj $I = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(1+x+y+z)^7}}$.



Slika 180.

Kao područje V pripadnog pravog integrala uzmimo kocku brida a (vidi sliku 180).

$$I_1 = \iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(1+x+y+z)^7}} = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a dy \int\limits_0^a \frac{dz}{\sqrt{(1+x+y+z)^7}} =$$

$$= -\frac{2}{5}\int\limits_0^a dx \int\limits_0^a dy \left| \frac{1}{\sqrt{(1+x+y+z)^5}} \right|_0^a = -\frac{2}{5}\int\limits_0^a dx \int\limits_0^a \left(\frac{1}{\sqrt{(1+x+y+a)^5}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(1+x+y)^5}} \right) dy = +\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}\int\limits_0^a dx \left| \frac{1}{\sqrt{(1+a+x+y)^3}} - \frac{1}{\sqrt{(1+x+y)^3}} \right|_0^a =$$

$$= \frac{4}{15}\int\limits_0^a \left(\frac{1}{\sqrt{(1+2a+x)^3}} - \frac{1}{\sqrt{(1+a+x)^3}} - \frac{1}{\sqrt{(1+a+x)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}} \right) dx =$$

$$= \frac{4}{15}\left| -2\left(\frac{1}{\sqrt{1+2a+x}} - \frac{1}{\sqrt{1+a+x}} - \frac{1}{\sqrt{1+a+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right) \right|_0^a =$$

$$= -\frac{8}{15}\left(\frac{1}{\sqrt{1+3a}} - \frac{3}{\sqrt{1+2a}} + \frac{3}{\sqrt{1+a}} - 1 \right).$$

$$I = \lim_{a\to\infty} I_1 = \underline{\frac{8}{15}}.$$

559. Izračunaj $\iiint\limits_V \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, gdje je V kugla polumjera R sa središtem u $O(0, 0. 0)$.

Budući da je integrand prekinut u ishodištu O, izrežemo iz zadane kugle kuglicu polumjera r ($r < R$), kako se to vidi iz slike 181, pa uzmimo pravi integral po volumenu V_1 kuglina sloja debljine $R - r$.

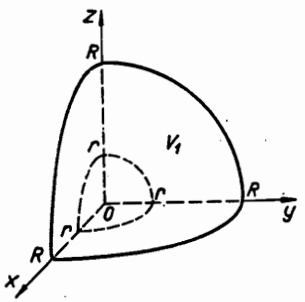
Nakon prijelaza na sferne koordinate dobijemo uzevši u obzir da je u tim koordinatama $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

$$I_1 = \iiint\limits_{V_1} \frac{\ln\rho}{\rho^2}\rho^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int\limits_r^R \ln\rho\, d\rho =$$

$$= 2\pi \left| -\cos\vartheta \right|_0^{\pi} \cdot \left| \rho\ln\rho - \rho \right|_r^R = 4\pi(R\ln R - R - r\ln r + r)$$

$$I = \lim_{r\to 0} I_1 = \underline{4\pi(R\ln R - R)},$$

jer je $\lim\limits_{r\to 0}(r\cdot\ln r) = \lim\limits_{r\to 0}\frac{\ln r}{\frac{1}{r}} = \lim\limits_{r\to 0}\frac{\frac{1}{r}}{-\frac{1}{r^2}} = -\lim\limits_{r\to 0} r = 0.$



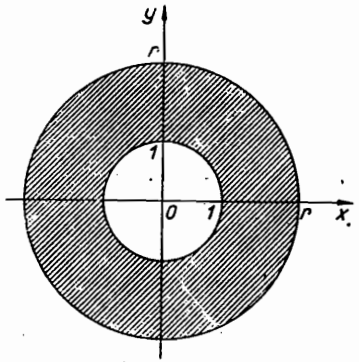
Slika 181.

560. Izračunaj $\iiint\limits_V \ln(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$.

gdje je V kugla polumjera R sa središtem u $O(0, 0, 0)$.

$$\left[\frac{8}{3}\pi R^3\left(\ln R - \frac{1}{3}\right)\right].$$

561. Izračunaj integral funkcije $u = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$ uzet po području V, koje okružuje kuglu polumjera 1.



Slika 282.

Kao konačno područje V_1 uzmimo kuglu polumjera r koja okružuje zadanu kuglu polumjera 1. (Vidi sl. 182, koja predočuje projekciju područja V_1 na ravninu $X\,Y$).

$$I_1 = \iiint\limits_{V_1} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}} = \text{uz prijelaz na sferne koordinate} =$$

$$= \iiint\limits_{V_1} \frac{\rho^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\rho\, d\varphi}{\rho^5} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_1^r \frac{d\rho}{\rho^3} = 4\pi \left| \frac{1}{-2\rho^2} \right|_1^r = -2\pi\left(\frac{1}{r^2} - 1\right).$$

$$I = -2\pi \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{r^2} - 1\right) = \underline{2\pi}.$$

VII. DERIVIRANJE I INTEGRIRANJE INTEGRALA PO PARAMETRU

Formule

Za $F(\alpha) = \displaystyle\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$

$$\frac{dF}{d\alpha} = F'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx. \tag{144}$$

Za $F(\alpha) = \displaystyle\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$

$$\frac{dF}{d\alpha} = F'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx + f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}. \tag{145}$$

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \int_a^b dx \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\,d\alpha \tag{146}$$

Zadaci

562. Odredi zakrivljenost krivulje zadane u obliku $y(x) = \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}\,d\alpha$ u tački apscise $x_1 = 1$.

Prema formuli (144) računamo y' i y'' smatrajući da je x parametar i to s obzirom na formulu $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{y''(x)}{[1+y'^2(x)]^{3/2}}$ [vidi (26) u II dijelu Repetitorija]:

$$y' = \frac{d}{dx}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}\,d\alpha = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\alpha\cos(\alpha x)}{\alpha}\,d\alpha = \left|\frac{\sin(\alpha x)}{x}\right|_{\pi}^{2\pi} = \frac{\sin 2\pi x}{x} - \frac{\sin\pi x}{x}.$$

$$y'' = \frac{x(2\pi\cos 2\pi x - \pi\cos\pi x) - (\sin 2\pi x - \sin\pi x)}{x^2}.$$

Za $x_1 = 1$ $y_1' = 0$ i $y_1'' = 2\pi + \pi = 3\pi$

$$\underline{\frac{1}{\rho} = 3\pi.}$$

563. Izračunaj $f'(x)$, ako je $f(x) = \int\limits_x^\infty e^{-xy^2}\,dy \quad (x > 0)$

Smatrajući x parametrom računamo prema (145):

$$\underline{f'(x) = -\int\limits_x^\infty y^2 e^{-xy^2}\,dy - e^{-x^3}.}$$

U zadacima **564** do **567** uklj. izračunaj zadane integrale pomoću deriviranja po parametru tj. pomoću Leibnizove formule (144).

564. $I = \int\limits_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x e^x}\,dx$, gdje je $\alpha > -1$.

Stavimo

$$I = F(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x e^x}$$

pa dobijemo:

$$F'(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{x e^{-\alpha x}}{x e^x} = \int\limits_0^\infty e^{-(\alpha+1)x}\,dx = -\left|\frac{e^{-(\alpha+1)x}}{\alpha+1}\right|_0^\infty = \frac{1}{\alpha+1};$$

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha+1}; \quad dF(\alpha) = \frac{d\alpha}{\alpha+1}$$

$$F(\alpha) = I = \int \frac{d\alpha}{\alpha+1} = \underline{\ln(\alpha+1).}$$

565. $I = \int\limits_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{x e^{x^2}}\,dx \quad (a > -1).$

$$I = F(a) = \int\limits_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{x e^{x^2}}$$

$$\frac{dF(a)}{da} = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax^2} x^2}{x e^{x^2}}\,dx = \int\limits_0^\infty x e^{-(a+1)x^2}\,dx = \text{(uz supstituciju } -a x^2 = t) =$$

$$= -\left|\frac{e^{-(a+1)x^2}}{2(a+1)}\right|_0^\infty = \frac{1}{2(a+1)}.$$

$$dF(a) = \frac{da}{2(a+1)}$$

$$F(a) = I = \underline{\frac{1}{2}\ln(a+1).}$$

566. $I = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$

Kako je $I = F(\alpha, \beta)$, računamo:

$$\frac{\partial F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = \int\limits_0^\infty \frac{-e^{-\alpha x^2}\cdot x^2}{x}\,dx = -\int\limits_0^\infty x e^{-\alpha x^2}\,dx = \text{(uz supstituciju } -\alpha x^2 = t) =$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\left|e^{-\alpha x^2}\right|_0^\infty = -\frac{1}{2\alpha}.$$

Riješimo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{\partial F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = -\frac{1}{2\alpha}.$$

Integriranje daje:

$$F(\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + C(\beta)$$

gdje je $C(\beta)$ bilo koja funkcija od β.

Da odredimo $C(\beta)$, stavimo $\alpha = \beta$. Tada je

$$I = F(\alpha,\beta) = 0,$$

pa je

$$0 = -\frac{1}{2}\ln\beta + C(\beta).$$

Odatle je

$$C(\beta) = \frac{1}{2}\ln\beta$$

i

$$I = F(\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + \frac{1}{2}\ln\beta = \underline{\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}}.$$

567. $I = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{\beta x}}{x} \sin m x \, dx.$

Kako je $I = F(\alpha, \beta)$, računamo:

$$\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = -\int\limits_0^\infty \frac{\sin m x}{x} e^{-\alpha x} \cdot x \, dx = -\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \sin m x \, dx =$$

= vidi str. 72, odn. 78 II dijela Repetitorija =

$$= \left| \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2 + m^2} [-\alpha \sin(m x) - m \cos(m x)] \right|_0^\infty = -\frac{m}{\alpha^2 + m^2}.$$

Integriranjem dobijemo:

$$F(\alpha, \beta) = -\operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{m} + C(\beta).$$

Stavimo li $\beta = \alpha$, dobijemo $I = F(\alpha, \beta) = 0$

pa je

$$0 = -\operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{m} + C(\beta) \quad \text{pa je} \quad C(\beta) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{m}.$$

$$I = F(\alpha, \beta) = \underline{\operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{m} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{m}}.$$

568. $I = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_a^b x^y \, dy \right] dx.$

Traži se vrijednost tog određenog integrala.

Računamo:

$$I = \int\limits_0^1 \left| \frac{x^y}{\ln x} \right|_a^b dx = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$$

Taj integral ne možemo izraziti u elementarnim funkcijama. Stoga prema formuli (146) izvršimo integriranje zadanog integrala pod znakom integrala:

$$I = \int\limits_a^b \left[\int\limits_0^1 x^y \, dx \right] dy = \int\limits_a^b \left| \frac{x^{y+1}}{y+1} \right|_0^1 dy = \int\limits_a^b \frac{1}{y+1} dy = |\ln(y+1)|_a^b =$$

$$= \ln(b+1) - \ln(a+1) = \ln \frac{1+b}{1+a},$$

pa je zadani integral

$$I = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \underline{\ln \frac{1+b}{1+a}}.$$

VIII. EGZAKTNI DIFERENCIJALI I NJIHOVO INTEGRIRANJE

Formule

Linearni diferencijalni izraz oblika

$$P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy,$$

gdje su $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ neprekinute funkcije s neprekinutim parcijalnim derivacijama, predočuje totalni diferencijal funkcije $U(x, y)$, tj. predočuje dU, ako je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{ili} \quad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \tag{147}$$

U tom se slučaju funkcija $U(x, y)$ određuje prema

$$U = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y) \, dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y) \, dy + C \tag{148}$$

gdje su x_0 i y_0 neke konstante.

Praktički se može pri računanju funkcije $U(x, y)$ prema formuli (148) postupati jednostavnije: granice integracije se ne uvrštavaju, a pri računanju drugog integrala izostavljaju se svi članovi s x_0.

Analogno predočuje linearni diferencijalni izraz oblika

$$P(x, y, z) \, dx + Q(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz$$

totalni diferencijal funkcije $U(x, y, z)$, tj. predočuje dU, ako je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \tag{149}$$

dok je

$$U = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y, z) \, dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z) \, dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z) \, dz + C. \tag{150}$$

Pri računanju U granice integracije se ne uvrštavaju, a pri računanju drugog i trećeg integrala izostavljaju se članovi s x_0 i y_0.

Zadaci

U zadacima **569—581** uklj. dokaži da su zadani linearni diferencijalni izrazi totalni diferencijali nekih funkcija U i odredi te funkcije.

569. $4(x^2 - y^2)(x\,dx - y\,dy)$.

Prikazavši taj izraz u obliku

$$\underbrace{4(x^3 - xy^2)}_{P}\,dx - \underbrace{4(x^2 y - y^3)}_{Q}\,dy$$

računamo prema (147):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -8xy; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -8xy.$$

Prema (148):

$$U(x, y) = 4\int_{x_0}^{x}(x^3 - xy^2)\,dx - 4\int_{y_0}^{y}(x_0^2 y - y^3)\,dy + C$$

$$U = 4\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2 y^2}{2}\right) + 4\frac{y^4}{4} + C$$

$$\underline{U = (x^2 - y^2)^2 + C.}$$

570. $\dfrac{(x + 2y)\,dx + y\,dy}{(x + y)^2}$.

Napisavši zadani izraz u obliku

$$\frac{x + 2y}{(x + y)^2}\,dx + \frac{y}{(x + y)^2}\,dy$$

računamo prema (147):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x + y)^2 \cdot 2 - (x + 2y) \cdot 2(x + y)}{(x + y)^4} = -\frac{2y}{(x + y)^3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-y \cdot 2(x + y)}{(x + y)^4} = -\frac{2y}{(x + y)^3}$$

Prema (148):

$$U = \int_{x_0}^{x}\frac{x + 2y}{(x + y)^2}\,dx + \int_{y_0}^{y}\frac{y}{(x_0 + y)^2}\,dy + C.$$

Prvi integral riješi prema tipu I (v. II dio Repetitorija) rastavljanjem u parcijalne razlomke, dok drugi integral otpada. Dobit ćeš:

$$\underline{U = -\frac{y}{x + y} + \ln|x + y| + C.}$$

571. $(2x\cos y - y^2\sin x)\,dx + (2y\cos x - x^2\sin y)\,dy$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x\sin y - 2y\sin x; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y\sin x - 2x\sin y$$

$$U = \int_{x_0}^{x}(2x\cos y - y^2\sin x)\,dx + \int_{y_0}^{y}(2y\cos x_0 - x_0^2\sin y)\,dy + C$$

$$\underline{U = x^2\cos y + y^2\cos x + C.}$$

572. $\dfrac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}\,dx + \left(\dfrac{e^y}{1 + x^2} + 1\right)dy$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xe^y}{(1 + x^2)^2}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2xe^y}{(1 + x^2)^2}$$

$$U = (1 - e^y)\int_{x_0}^{x}\frac{2x\,dx}{(1 + x^2)^2} + \int_{y_0}^{y}\left(\frac{e^y}{1 + x_0^2} + 1\right)dy + C$$

$$\underline{U = \frac{e^y - 1}{1 + x^2} + y + C.}$$

573. $x^2\,dx + y^2\,dy$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$U = \int_{x_0}^{x}x^2\,dx + \int_{y_0}^{y}y^2\,dy = \underline{\frac{x^3 + y^3}{3} + C.}$$

574. $\dfrac{(3y - x)\,dx + (y - 3x)\,dy}{(x + y)^3}$.

$$\left[\frac{x - y}{(x + y)^2} + C\right].$$

575. $e^{x-y}[(1 + x + y)\,dx + (1 - x - y)\,dy]$.

$$[e^{x-y}(x + y) + C].$$

576. $(\ln y - 2x)\,dx + \left(\dfrac{x}{y} - 2y\right)dy$.

$$[x\ln y - x^2 - y^2 = C].$$

577. $\dfrac{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}{1 + x^2y^2z^2}$.

Napišemo u obliku:

$$\underbrace{\frac{yz}{1 + x^2y^2z^2}}_{P}\,dx + \underbrace{\frac{xz}{1 + x^2y^2z^2}}_{Q}\,dy + \underbrace{\frac{xy}{1 + x^2y^2z^2}}_{R}\,dz.$$

pa računamo prema (149):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{z + x^2 y^2 z^3 - 2 x^2 y^2 z^3}{(1 + x^2 y^2 z^2)^2} = \frac{z - x^2 y^2 z^3}{(1 + x^2 y^2 z^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{z - x^2 y^2 z^3}{(1 + x^2 y^2 z^2)^2},$$

pa je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Na isti način dobijemo:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Prema (150):

$$U = \int_{x_0}^{x} \frac{y z}{1 + x^2 y^2 z^2}\, dx + \int_{y_0}^{y} \frac{x_0 z}{1 + x_0^2 y^2 z^2}\, dy + \int_{z_0}^{z} \frac{x_0 y_0}{1 + x_0^2 y_0^2 z^2}\, dz + C$$

$$U = \frac{y z}{y^2 z^2} \int \frac{dx}{\frac{1}{y^2 z^2} + x^2} + C = \frac{1}{y z} \cdot y z \operatorname{arc\,tg}(x y z) + C$$

$$\underline{U = \operatorname{arc\,tg}(x y z) + C.}$$

578. $\frac{2(z x\, dy + x y\, dz - y z\, dx)}{(x - y z)^2}$.

Napisavši u obliku

$$-\frac{2 y z}{(x - y z)^2}\, dx + \frac{2 z x}{(x - y z)^2}\, dy + \frac{2 x y}{(x - y z)^2}\, dz$$

računamo prema (149):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \text{nakon uređenja} = -2 z \frac{x + y z}{(x - y z)^2}$$

Istu vrijednost dobijemo za $\frac{\partial Q}{\partial x}$, pa je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Na isti način pokazujemo da je

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

pa prema (150) računamo

$$U = -2 \int_{x_0}^{x} \frac{y z}{(x - y z)^2}\, dx + 2 \int_{y_0}^{y} \frac{z x_0}{(x_0 - y z)^2}\, dy + 2 \int_{z_0}^{z} \frac{x_0 y_0}{(x_0 - y_0 z)^2}\, dz + C$$

$$\underline{U = \frac{2 y z}{x - y z} + C.}$$

579. $\frac{dx - 3\, dy}{z} + \frac{3 y - x + z^2}{z^2}\, dz$.

Uredimo:

$$\frac{dx}{z} - \frac{3}{z}\, dy + \left(\frac{3 y - x}{z^2} + z\right) dz.$$

Račun daje:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{1}{z^2}; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{1}{z^2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{3}{z^2}$$

$$U = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{z} - \int_{y_0}^{y} \frac{3}{z}\, dy + \int_{z_0}^{z} \left(\frac{3 y_0 - x_0}{z^2} + z\right) dz + C$$

$$U = \frac{x}{z} - \frac{3 y}{z} + \frac{z^2}{2} + C = \underline{\frac{x - 3 y}{z} + \frac{z^2}{2} + C.}$$

580. $\frac{dx + dy + dz}{x + y + z}$

$$[U = \ln|x + y + z| + C].$$

581. $\left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right) dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right) dz.$

$$\left[U = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + C\right].$$

IX. EGZAKTNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE. EULEROV MULTIPLIKATOR

Formule

Diferencijalna jednadžba toga tipa ima oblik

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

Razlikujemo dva slučaja:

1. Ako je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, tada je

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy = U(x,y) + C \tag{148}$$

pa se zadatak svodi na integriranje lijeve strane jednadžbe, da se odredi $U(x,y)$. (Riješi zadatke 569—576 uklj.).

2. Ako je $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, množimo diferencijalnu jednadžbu s Eulerovim multiplikatorom $\mu = \mu(x,y)$, da njenu lijevu stranu pretvorimo u totalni diferencijal:

$$P(x,y)\,\mu\,dx + Q(x,y)\,\mu\,dy = 0.$$

Zadatak se svodi na određivanje $\mu(x,y)$, a to je, govoreći općenito, težak problem. Međutim, Eulerov se multiplikator može lako odrediti, ako je μ funkcija samo od x, odnosno samo od y.

U tom slučaju $\mu(x)$ računamo iz

$$\frac{d\ln\mu(x)}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

a $\mu(y)$ iz

$$\frac{d\ln\mu(y)}{dy} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{152}$$

Iz (152) slijedi:

$$\mu = \mu(x), \quad \text{ako je} \quad \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = F(x)$$

dok je

$$\mu = \mu(y), \quad \text{ako je} \quad \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = F_1(y) \tag{152 a}$$

tj. ako su ti izrazi funkcije samo od x, odnosno samo od y.

Zadaci

U zadacima **582—595** uklj. izračunaj opća, odnosno partikularna rješenja zadanih diferencijalnih jednadžbi.

582. $\frac{x\,dy}{x^2+y^2} = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx.$

Napisavši tu jednadžbu u obliku

$$\left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx - \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = 0$$

vidimo, da je

$$P = \frac{y}{x^2+y^2} - 1, \quad \text{dok je} \quad Q = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

pa prema (147) računamo:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Kako je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, integriramo zadanu jednadžbu prema (148):

$$\int_{x_0}^{x}\left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx - \int_{y_0}^{y}\frac{x_0}{x_0^2+y^2}\,dy = C$$

$$y\int\frac{dx}{x^2+y^2} - x = C \quad \text{ili} \quad \frac{y}{y^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} - x = C$$

ili

$$\frac{1}{y}\cdot y\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} - x = C$$

$$\underline{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} - x = C} \quad \text{opće rješenje.}$$

583. $y' = \frac{1+x\sqrt{x^2+y^2}}{(1-\sqrt{x^2+y^2})\,y}.$

Prikazavši y' u obliku $\frac{dy}{dx}$, dobijemo

$$(1+x\sqrt{x^2+y^2})\,dx - (1-\sqrt{x^2+y^2})\,y\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Prema (148):

$$\int_{x_0}^{x} (1 + x\sqrt{x^2 + y^2})\,dx - \int_{y_0}^{y} (1 - \sqrt{x_0^2 + y^2})\,y\,dy = C$$

$$\underline{x + \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3} - \frac{y^2}{2} = C \quad \text{opće rješenje.}}$$

584. Odredi partikularno rješenje jednadžbe

$$(x + e^{\frac{x}{y}})\,dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0.$$

koje zadovoljava početne uvjete $x = 0$, $y = 2$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x}{y^2} = -\frac{x\,e^{\frac{x}{y}}}{y^2}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{x\,e^{\frac{x}{y}}}{y^2}$$

$$\int_{x_0}^{x} (x + e^{\frac{x}{y}})\,dx + \int_{y_0}^{y} e^{\frac{x_0}{y}}\left(1 - \frac{x_0}{y}\right)dy = C$$

$$\frac{x^2}{2} + y\,e^{\frac{x}{y}} = C \quad \text{opće rješenje.}$$

Za $x = 0$ i $y = 2$; $2 = C$, pa je

$$\underline{\frac{x^2}{2} + y\,e^{\frac{x}{y}} = 2 \quad \text{partikularno rješenje.}}$$

585. $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right)dy = 0.$

$$\left[\sin\frac{y}{x} - \cos\frac{x}{y} + x - \frac{1}{y} = C\right].$$

586. $\frac{2\,x\,dx}{y^3} + \frac{y^2 - 3\,x^2}{y^4}\,dy = 0.$

$$[x^2 - y^2 = C\,y^3].$$

587. $3\,x^2 e^y + (x^3 e^y - 1)\,y' = 0.$

i partikularno rješenje za $x = 0$ i $y = 1$.

$$[x^3 e^y - y = C;\ x^3 e^y - y = -1].$$

588. $(x^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1.$$

Kako je $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, lijeva strana zadane diferencijalne jednadžbe nije totalni diferencijal.

Odredimo Eulerov multiplikator μ da lijeva strana jednadžbe

$$(x^2 + y)\,\mu\,dx - x\,\mu\,dy = 0 \qquad \text{(a)}$$

postane totalni diferencijal.

Prema (152 a):

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -\frac{1}{x}(1 + 1) = -\frac{2}{x} = F(x).$$

μ je funkcija samo od x, pa prema (152) dobijemo:

$$\frac{d\ln\mu(x)}{dx} = -\frac{2}{x}\Big| \cdot dx$$

$$d\ln\mu = -\frac{2}{x}\,dx$$

$$\ln\mu = -2\ln x \quad \text{ili} \quad \ln\mu = \ln\frac{1}{x^2}$$

$$\underline{\mu = \frac{1}{x^2}.}$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$(x^2 + y) \cdot \frac{1}{x^2}\,dx - \frac{1}{x}\,dy = 0$$

Proba

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2}.$$

$$\int_{x_0}^{x} (x^2 + y)\frac{1}{x^2}\,dx - \int_{y_0}^{y} \frac{1}{x_0}\,dy = C$$

$$\underline{x - \frac{y}{x} = C \quad \text{opće rješenje.}}$$

589. $y(1 + x\,y)\,dx - x\,dy = 0$

i partikularno rješenje uz početne uvjete: $x = 2$ i $y = 1$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2\,x\,y + 1; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \quad \text{pa je} \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$\mu = ?$ $\qquad y(1 + x\,y)\,\mu\,dx - x\,\mu\,dy = 0.$ (a)

Prema (152 a):

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -\frac{1}{x}(2\,x\,y + 1 + 1) = -\frac{2}{x}(x\,y + 1) = F(x, y)$$

μ nije funkcija samo od x.

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{1}{y(1 + x\,y)}(-1 - 2\,x\,y - 1) = -\frac{2(x\,y + 1)}{y(x\,y + 1)} = -\frac{2}{y}$$

μ je funkcija samo od y.

Prema (152):

$$\frac{d \ln \mu(y)}{dy} = -\frac{2}{y}, \text{ a odatle je } \underline{\mu = \frac{1}{y^2}}.$$

Prema (a):

$$\frac{1+xy}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy = 0.$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1+xy}{y}\,dx - \int_{y_0}^{y} \frac{x_0}{y^2}\,dy = C'$$

$$\frac{1}{y}\left(x + y\frac{x^2}{2}\right) = C'$$

ili uz $C = 2C'$

$$\underline{x^2 + \frac{2x}{y} = C} \quad \text{opće rješenje.}$$

Uvrštenje $x = 2$ i $y = 1$ daje $4 + 4 = C$ pa je

$$\underline{x^2 + 2\frac{x}{y} = 8} \quad \text{partikularno rješenje.}$$

590. $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + x^2 + y^2; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\mu\,dx + (x^2 + y^2)\,\mu\,dy = 0.$$

Prema (152 a)

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2 + y^2}(2x + x^2 + y^2 - 2x) = 1.$$

Prema (152)

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = 1 \quad \text{pa je} \quad \ln \mu = x \quad \text{i} \quad \underline{\mu = e^x}.$$

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)e^x\,dx + (x^2 + y^2)\,e^x\,dy = 0.$$

$$\int_{x_0}^{x}\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)e^x\,dx + \int_{y_0}^{y}(x_0^2 + y^2)\,e^{x_0}\,dy = C$$

$$2y(xe^x - e^x) + y(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x) + \frac{y^3}{3}e^x = C.$$

Nakon uređenja dobijemo:

$$x^2ye^x + \frac{y^3}{3}e^x = C \,|\cdot e^{-x}$$

$$\underline{y\left(x^2 + \frac{1}{3}y^2\right) = Ce^{-x}} \quad \text{opće rješenje.}$$

591. $x\,dy + y\,dx + y^2(x\,dy - y\,dx) = 0$

ili

$$(y - y^3)\,dx + (x + xy^2)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 3y^2; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + y^2$$

$$(y - y^3)\,\mu\,dx + (x + xy^2)\,\mu\,dy = 0 \qquad \text{(a)}$$

Prema (152 a):

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{1}{x + xy^2}(1 - 3y^2 - 1 - y^2) = \frac{-4y^2}{x + xy^2} = F(x, y)$$

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{1}{y - y^3}(1 + y^2 - 1 + 3y^2) = \frac{4y}{1 - y^2} = F_1(y)$$

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{4y}{1 - y^2}; \qquad \ln \mu = 4\int \frac{y\,dy}{1 - y^2}$$

$$\ln \mu = -2\ln(1 - y^2) \quad \text{i} \quad \underline{\mu = \frac{1}{(1 - y^2)^2}}.$$

Prema (a):

$$\frac{y}{1 - y^2}\,dx + \frac{x(1 + y^2)}{(1 - y^2)^2}\,dy = 0$$

$$\frac{y}{1 - y^2}\int_{x_0}^{x} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{x_0(1 + y^2)}{(1 - y^2)^2}\,dy = C$$

$$\frac{xy}{1 - y^2} = C \quad \text{ili} \quad xy = C - Cy^2 \,|:C$$

$$y^2 - 1 + \frac{1}{C}xy = 0 \quad \text{ili uz} \quad \frac{1}{C} = C'$$

$$\underline{y^2 - 1 + C'xy = 0} \quad \text{opće rješenje.}$$

592. $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,dy = 0.$

$$[\mu = e^x;\ (x^2 + y^2)\,e^x = C].$$

593. $\frac{y}{x}\,dx + (y^3 - \ln x)\,dy = 0.$

i partikularno rješenje za $x = e$ i $y = 1$.

$$\left[\mu = \frac{1}{y^2};\quad \frac{\ln x}{y} + \frac{y^2}{2} = C;\quad \frac{\ln x}{y} + \frac{y^2}{2} = \frac{3}{2}\right].$$

594. $(2y + xy^2)\,dx + (x + x^2y^2)\,dy = 0.$

$$[\mu = x;\ 3x^2y + x^3y^3 = C].$$

595. $(x\cos y - y\sin y)\,dy + (x\sin y + y\cos y)\,dx = 0.$

$$[\mu = e^x;\ (x\sin y + y\cos y - \sin y)\,e^x = C].$$

X. KRIVULJE U PROSTORU

A. Jednadžbe tangente i normalne ravnine

Formule

a) Za krivulju $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ u tački $T_0(x_0, y_0, z_0)$ parametra $t = t_0$:

tangenta

$$t \equiv \frac{x - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0} \tag{156}$$

$\dot{x}_0$ znači $\frac{dx}{dt}$ u tački $t = t_0$, slično $\dot{y}_0$ i $\dot{z}_0$.

normalna ravnina

$$n.\,r. \equiv (x - x_0)\,\dot{x}_0 + (y - y_0)\,\dot{y}_0 + (z - z_0)\,\dot{z}_0 = 0. \tag{157}$$

b) Za krivulju zadanu kao presječnicu dviju ploha $F(x, y, z) = 0$ i $G(x, y, z) = 0$ u tački $T_0(x_0, y_0, z_0)$.

Iz (156) slijedi:

tangenta

$$t \equiv \frac{x - x_0}{\frac{dx}{dz}} = \frac{y - y_0}{\frac{dy}{dz}} = \frac{z - z_0}{1}. \tag{156 a}$$

Izrazimo li $\frac{dx}{dz}$ i $\frac{dy}{dz}$ pomoću parcijalnih derivacija funkcija F i G, dobijemo:

$$t \equiv \frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}. \tag{156 b}$$

normalna ravnina

$$n.\,r. \equiv \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} = 0. \tag{157 a}$$

B. Duljina luka krivulje $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$

Formule

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \tag{160 a}$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt. \tag{161}$$

Masa nehomogene krivulje

$$m = \int_{t_1}^{t_2} \mu\,[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt. \tag{162}$$

C. Jednadžba oskulacione ravnine u tački $T_0(t = t_0)$ krivulje $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$

Formula

$$o.\,r. \equiv \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{163}$$

Binormala, glavna normala, rektifikaciona ravnina, torzija i zakrivljenost za krivulju $x = x(s)$; $y = y(s)$; $z = z(s)$ u tački $T_0(x_0, y_0, z_0)$ parametra s_0

Formule

Jednadžba binormale:

$$bin. \equiv \frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix}_0} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2x}{ds^2} \end{vmatrix}_0} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} \end{vmatrix}_0} \tag{172}$$

Jednadžba glavne normale

$$g.\,n. = \frac{x - x_0}{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0}. \tag{173}$$

Jednadžba rektifikacione ravnine

$$r.\,r. \equiv (x - x_0)\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 + (y - y_0)\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0 + (z - z_0)\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0 = 0. \tag{174}$$

Torzija

$$\tau = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^2} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}_0}{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0^2} \tag{177}$$

Zakrivljenost

$$K = \frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0^2}. \tag{164 b}$$

E. Prostorna krivulja zadana u vektorskom obliku (vidi § 9, 10)

Formule

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

vektor tangente $\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$; $\vec{t}_0 = \frac{\vec{t}}{t}$

vektor binormale $\vec{b} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

vektor glavne normale $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$.

F. Primjena u kinematici (vidi § 2, 8)

Formule

vektor brzine $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{t}_0 = v\vec{t}_0$

brzina $v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

vektor akceleracije $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

tangentna komponenta $\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{t}_0$

normalna komponenta $\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}_0$.

Zadaci

U zadacima **596** do **603** uklj. napiši jednadžbe tangente i normalne ravnine za zadane prostorne krivulje u zadanim tačkama.

596. $x = at$; $y = \frac{1}{2}at^2$; $z = \frac{1}{3}at^3$ u tački $T_0(6a, 18a, 72a)$.

Da odredimo vrijednost parametra t_0, koja odgovara zadanoj tački T_0, uvrstimo koordinate tačke T_0 u parametarsku jednadžbu zadane krivulje:

$$6a = at; \quad t_0 = 6.$$

Očito je da ćemo dobiti istu vrijednost $t_0 = 6$ iz drugih koordinata tačke, pa je $x_0 = 6a$, $y_0 = 18a$ i $z_0 = 72a$.

Računamo prema (156) i (157): $\dot{x} = a$; $\dot{y} = at$; $\dot{z} = at^2$, dok je $\dot{x}_0 = a$; $\dot{y}_0 = 6a$ i $\dot{z}_0 = 36a$

$$t \equiv \frac{x - 6a}{a} = \frac{y - 18a}{6a} = \frac{z - 72a}{36a} \quad \text{ili} \quad \underline{\frac{x - 6a}{1} = \frac{y - 18a}{6} = \frac{z - 72a}{36}}.$$

$$n.r. \equiv (x - 6a)a + (y - 18a)6a + (z - 72a)36a = 0$$

ili

$$\underline{x + 6y + 36z - 2706a = 0.}$$

597. $x = a\cos t$; $y = a\sin t$; $z = \frac{k}{2\pi}t$

u tački

$$T_0\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{k}{8}\right)$$

i dokaži da tangenta u svim tačkama cilindričke spirale zatvara isti kut s osi Z.

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} = a\cos t_0; \quad \cos t_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad t_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Računamo prema (156) i (157):

$$\dot{x} = -a\sin t; \quad \dot{y} = a\cos t; \quad \dot{z} = \frac{k}{2\pi} \tag{a}$$

$$\dot{x}_0 = -\frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad \dot{y}_0 = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad \dot{z}_0 = \frac{k}{2\pi}$$

$$\underline{t \equiv \frac{x - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{-a\sqrt{2}} = \frac{y - \frac{a\sqrt{a}}{2}}{-a\sqrt{2}} = \frac{z - \frac{k}{8}}{\frac{k}{\pi}}.}$$

$$\underline{n.r. \equiv -x + y + \frac{k}{\pi a\sqrt{2}}z - \frac{k^2}{8\pi a\sqrt{2}} = 0.}$$

Prema (39)

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

gdje je γ kut što ga zatvara s osi Z pravac kojemu su a, b i c koeficijenti smjera.

Iz (a) vidimo da su koeficijenti smjera tangente u bilo kojoj tački spirale

$$-a\sin t, \quad a\cos t \quad \text{i} \quad \frac{k}{2\pi}.$$

Uvrštenje u (39) daje

$$\cos\gamma = \frac{k}{\sqrt{4\pi^2 a^2 + k^2}} = \text{const. za sve tačke spirale,}$$

pa tangente spirale čine u svim tačkama krivulje isti kut γ s osi Z.

598. $y^2 + z^2 = 25$, $x^2 + y^2 = 10$ u tački $T_0(1, 3, 4)$.

Prostorna krivulja zadana je kao presječnica dvaju kružnih valjaka polumjera $r_1 = 5$ s bazom u ravnini YZ i polumjera $r_2 = \sqrt{10}$ s bazom u ravnini XY.

Računamo prema (156 b) i (157 a) prikazavši jednadžbe ploha u implicitnom obliku:

$$F \equiv y^2 + z^2 - 25 = 0 \quad \text{i} \quad G \equiv x^2 + y^2 - 10 = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial G}{\partial z} = 0$$

a u tački $T_0(1, 3, 4)$:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = 0; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = 6; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = 8$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 = 2; \quad \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0 = 6; \quad \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_0 = 0$$

$$t \equiv \frac{x-1}{\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{y-3}{\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{z-4}{\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}$$

$$t \equiv \frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3}.$$

$$n.r. \equiv 12x - 4y + 3z - 12 = 0.$$

599. $\left.\begin{array}{l} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{array}\right|$ u tački $T_0(-2, 1, 6)$. Krivulja je zadana kao presječnica troosnog elipsoida i eliptičkog paraboloida.

Računamo prema (156 b) i (157 a) označivši prvu plohu s F a drugu s G:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 6y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 4y; \quad \frac{\partial G}{\partial z} = -1$$

dok su u tački $T_0(-2, 1, 6)$ pripadne vrijednosti:

$$-8, 6 \quad \text{i} \quad 12, \quad \text{odnosno} \quad -4, 4 \quad \text{i} \quad -1$$

$$t \equiv \frac{x+2}{27} = \frac{y-1}{28} = \frac{z-6}{4}.$$

$$n.r. \equiv 27x + 28y + 4z + 2 = 0.$$

600. $x = \frac{t^4}{4}$, $y = \frac{t^3}{3}$, $z = \frac{t^2}{2}$ u tački po volji (parametra t).

$$\left[\frac{x - \frac{t^4}{4}}{t^2} = \frac{y - \frac{t^3}{3}}{t} = \frac{z - \frac{t^2}{2}}{1}; \quad t^2 x + t y + z = \frac{t^6}{4} + \frac{t^4}{3} + \frac{t^2}{2}\right].$$

601. $x = r\cos^2 t$; $y = r\sin t\cos t$; $z = r\sin t$ u $T_0\left(t_0 = \frac{\pi}{4}\right)$.

$$\left[\frac{x - \frac{r}{2}}{2} = \frac{y - \frac{r}{2}}{0} = \frac{z - \frac{\sqrt{2}}{2}r}{-\sqrt{2}}; \quad x\sqrt{2} - z = 0\right].$$

602. $x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$; $z = 4\sin\frac{t}{2}$ u $T_0\left(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2}\right)$.

$$\left[\frac{x - \frac{\pi}{2} + 1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}. \quad x + y + \sqrt{2}z - \frac{\pi}{2} - 4 = 0\right].$$

603. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $x + z = 5$ u $T_0(2; 2\sqrt{3}; 3)$.

$$\left[\frac{x-2}{2\sqrt{3}} = \frac{y - 2\sqrt{3}}{1} = \frac{z-3}{-2\sqrt{3}}; \quad 2\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3}z = 0\right].$$

604. Na krivulji $\vec{r}(\cos t, \sin t, e^t)$, tj. $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = e^t$ odredi tačku T_0, u kojoj je tangenta paralelna s ravninom $\sqrt{3}x + y - 4 = 0$.

Prema (156) jednadžba tangente na zadanu krivulju u bilo kojoj tački T parametra t glasi:

$$t \equiv \frac{x - \cos t}{-\sin t} = \frac{y - \sin t}{\cos t} = \frac{z - e^t}{e^t}$$

jer je

$$\dot{x} = -\sin t, \quad \dot{y} = \cos t \quad \text{i} \quad \dot{z} = e^t.$$

Prema uvjetu paralelnosti pravca i ravnine (57) $aA + b\dot{B} + cC = 0$ imamo:

$$-\sin t \cdot \sqrt{3} + \cos t \cdot 1 + e^t \cdot 0 = 0.$$

Odatle je

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{pa je} \quad t = \frac{\pi}{6}$$

$$x_0 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad y_0 = \frac{1}{2}; \quad z_0 = e^{\frac{\pi}{6}}$$

$$T_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, e^{\frac{\pi}{6}}\right).$$

U zadacima **605—607** uklj. odredi jednadžbe oskulacione ravnine, glavne normale i binormale za zadane krivulje u zadanim tačkama.

605. $y^2 = x, \quad x^2 = z$ u tački $T_0(1, 1, 1)$.

Prostorna krivulja je zadana kao presječnica valjkovitih ploha, kojim su osnovice parabole u ravnini XY, odnosno XZ. Uzmemo li da je $x = t$, dobijemo parametarsku jednadžbu zadane krivulje:

$$x = t; \quad y = \sqrt{t}, \quad z = t^2.$$

Računamo prema (163):

$$\dot{x} = 1; \quad \dot{y} = \frac{1}{2\sqrt{t}}; \quad \dot{z} = 2t$$

$$\ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = -\frac{1}{4\sqrt{t^3}}; \quad \ddot{z} = 2$$

a u $T_0(1, 1, 1)$, tj. za $t_0 = 1$, jer je $t = x$

$$\dot{x}_0 = 1; \quad \dot{y}_0 = \frac{1}{2}; \quad \dot{z}_0 = 2$$

$$\ddot{x}_0 = 0; \quad \ddot{y}_0 = -\frac{1}{4}; \quad \ddot{z} = 2$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 2 \end{vmatrix} = 0$$

ili

$$o.r. \equiv \underline{6x - 8y - z + 3 = 0.}$$

Binormala je okomita na oskulacionoj ravnini, pa prema uvjetu okomitosti pravca i ravnine (58)

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}, \quad \text{odnosno} \quad a = A, \quad b = B \quad \text{i} \quad c = C$$

dobijemo:

$$\underline{bin. \equiv \frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{-1}.}$$

Jednadžbu glavne normale mogli bismo izračunati prema (173), ali mnogo jednostavnije dolazimo do te jednadžbe, ako se sjetimo da je glavna normala okomita na tangenti i na binormali.

Prema (156):

$$t \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{\frac{1}{2}} = \frac{z-1}{2}.$$

Napišemo li jednadžbu glavne normale u obliku $\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-1}{1}$ dobijemo prema uvjetu okomitosti dvaju pravaca (43):

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} gl.\,n. \perp bin.: \quad & 6a - 8b - 1 = 0 \\ gl.\,n. \perp t: \quad & a + \frac{1}{2}b + 2 = 0. \end{aligned}\right|$$

Odatle dobijemo:

$$b = -\frac{13}{11} \quad \text{i} \quad a = -\frac{31}{22},$$

pa je

$$\underline{gl.\,n. \equiv \frac{x-1}{31} = \frac{y-1}{26} = \frac{z-1}{-22}.}$$

606. $x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = t\sqrt{2}$ u tački $T_0(e, e^{-1}, \sqrt{2})$.

Iz $x = e^t = e$ slijedi $t_0 = 1$.

Prema (163):

$$\dot{x} = e^t, \quad \dot{y} = -e^{-t}, \quad \dot{z} = \sqrt{2}$$
$$\ddot{x} = e^t; \quad \ddot{y} = e^{-t}, \quad \ddot{z} = 0$$

a u $T_0(t_0 = 1)$:

$$\dot{x}_0 = e, \quad \dot{y}_0 = -e^{-1}, \quad \dot{z}_0 = \sqrt{2}$$
$$\ddot{x}_0 = e, \quad \ddot{y} = e^{-1}, \quad \ddot{z}_0 = 0$$

$$o.r. \equiv \begin{vmatrix} x-e & y-e^{-1} & z-\sqrt{2} \\ e & -e^{-1} & \sqrt{2} \\ e & e^{-1} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underline{o.r. \equiv \frac{x}{e} - ey - z\sqrt{2} + 2 = 0.}$$

Binormala je okomita na oskulacionoj ravnini, pa prema (58)

$$\underline{bin \equiv \frac{x-e}{-\frac{1}{e}} = \frac{y-e^{-1}}{e} = \frac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.}$$

Prema (156):

$$t = \frac{x-e}{e} = \frac{y-e^{-1}}{-\frac{1}{e}} = \frac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Napisavši jednadžbu glavne normale u obliku

$$\frac{x-e}{a} = \frac{y-e^{-1}}{b} = \frac{z-\sqrt{2}}{1} \qquad \text{(a)}$$

dobijemo prema (43):

$$\left.\begin{aligned} gl.\,n. \perp bin. \quad & -a \cdot e^{-1} + b \cdot e + \sqrt{2} = 0 \\ gl.\,n. \perp t: \quad & ae - be^{-1} + \sqrt{2} = 0. \end{aligned}\right|$$

Iz simetričnosti tih jednadžbi slijedi da je $a = b$, pa je

$$a(e - e^{-1}) = -\sqrt{2}.$$

Kako je $\operatorname{sh} 1 = \frac{e^1 - e^{-1}}{2}$, dobijemo $2a \operatorname{sh} 1 = -\sqrt{2}$ pa je

$$a = b = -\frac{\sqrt{2}}{2 \operatorname{sh} 1}$$

$$\frac{x - e}{-\frac{\sqrt{2}}{2 \operatorname{sh} 1}} = \frac{y - \frac{1}{e}}{-\frac{\sqrt{2}}{2 \operatorname{sh} 1}} = \frac{z - \sqrt{2}}{1}$$

ili

$$\underline{gl.\ n. \equiv \frac{x - e}{1} = \frac{y - \frac{1}{e}}{1} = \frac{z - \sqrt{2}}{-\sqrt{2} \operatorname{sh} 1}}.$$

607. $x^2 = 8z$, $y^2 = 18z$ u $T_0(-2, 1, 2)$.

$$\left[3x - 2y + 8 = 0;\ \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{0};\ \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{-13}\right].$$

U zadacima **608—613** uklj. izračunaj duljinu luka zadanih prostornih krivulja.

608. $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$ od $t = 1$ do $t = 10$.

Računamo prema (161):

$$\dot{x} = 2, \quad \dot{y} = \frac{1}{t}, \quad \dot{z} = 2t$$

$$s = \int_1^{10} \sqrt{4 + \frac{1}{t^2} + 4t^2}\, dt = \int_1^{10} \sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1} \cdot \frac{dt}{t} =$$

$$= \left(\text{uz } u = \ln t,\ t = e^u,\ du = \frac{dt}{t}, \text{ dok je za } t = 1\ u = 0, \text{ a za } t = 10\ u = \ln 10\right) =$$

$$= \int_0^{\ln 10} \sqrt{4e^{4u} + 4e^{2u} + 1}\, du = \int_0^{\ln 10} \sqrt{(2e^{2u} + 1)^2}\, du = \left| e^{2u} + u \right|_0^{\ln 10} =$$

$$= e^{2 \ln 10} + \ln 10 - 1 = e^{\ln 100} + \frac{1}{M} - 1 = 100 - 1 + \frac{1}{M} = 99 + 2{,}30 = \underline{101{,}30}.$$

609. $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ od tačke $T_1(0, 0, 0)$ do $T_2(3, 3, 2)$.

Neka je $y = t$ parametar, tada je $x = \sqrt{3t}$, a

$$z = \frac{2xy}{9} = \frac{2t\sqrt{3t}}{9}.$$

Iz $T_1(0, 0, 0)$ i $T_2(3, 3, 2)$ slijedi da je $t_1 = 0$, a $t_2 = 3$.

Prema (161):

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{t}}, \quad \dot{y} = 1, \quad \dot{z} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{t}$$

$$s = \int_0^3 \sqrt{\frac{3}{4t} + 1 + \frac{t}{3}}\, dt = \int_0^3 \sqrt{\frac{(2t+3)^2}{12t}} = \int_0^3 \frac{2t+3}{2\sqrt{3}\sqrt{t}}\, dt =$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{t} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt = \left| \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + \frac{\sqrt{3}}{2} 2\sqrt{t} \right|_0^3 = \underline{5}.$$

610. $y = \sqrt{2ax - x^2}$, $z = a \ln \frac{2a}{2a - x}$ od $T_1(0, 0, 0)$ do $T_2(x, y, z)$.

Uz $x = t$ dobijemo: $y = \sqrt{2at - t^2}$, dok je $z = a \ln \frac{2a}{2a - t}$, a $t_1 = 0$ i $t_2 = x$ su granice integracije.

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = \frac{a - t}{\sqrt{t(2a - t)}}, \quad \dot{z} = \frac{a}{2a - t}$$

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{(a-t)^2}{t(2a-t)} + \frac{a^2}{(2a-t)^2}}\, dt = a\sqrt{2a} \int_0^x \frac{dt}{(2a - t)\sqrt{t}} =$$

$$= (\text{uz supstituciju } \sqrt{t} = u \text{ i } 2a = k^2) = \underline{a \ln \frac{\sqrt{2a} + \sqrt{x}}{\sqrt{2a} - \sqrt{x}}}.$$

611. $\vec{r}(e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ od $T_1(1, 0, 1)$ do tačke T_2 parametra t.

$$[\sqrt{3}(e^t - 1)].$$

612. $z^2 = 2ax$, $9y^2 = 16xz$ od tačke $T_1(0, 0, 0)$ do $T_2\left(2a, \frac{8a}{3}, 2a\right)$

$$[4a].$$

613. $y = a \arcsin \frac{x}{a}$, $z = \frac{1}{4} a \ln \frac{a + x}{a - x}$ od $T_1(0, 0, 0)$ do $T_2\left(\frac{a}{2}, \frac{a\pi}{6}, \frac{a}{4} \ln 3\right)$.

$$\left[\frac{a}{2}\left(\frac{1}{2} \ln 3 + 1\right)\right].$$

U zadacima **614—618** uklj. odredi jednadžbe tangente, normalne ravnine, oskulacione ravnine, binormale, glavne normale i rektifikacione ravnine za zadane krivulje u zadanim tačkama.

614. $\vec{r}(t^3 - t^2 - 5,\ 3t^2 + 1,\ 2t^3 - 16)$ u tački parametra $t_0 = 2$.

$$\begin{array}{lll}
x_0 = -1, & y_0 = 13 & z_0 = 0 \\
\dot{x} = 3t^2 - 2t, & \dot{y} = 6t, & \dot{z} = 6t^2 \\
\ddot{x} = 6t - 2, & \ddot{y} = 6, & \ddot{z} = 12t \\
\dot{x}_0 = 8, & \dot{y}_0 = 12, & \dot{z}_0 = 24 \\
\ddot{x}_0 = 10, & \ddot{y}_0 = 6; & \ddot{z}_0 = 24.
\end{array}$$

Prema (156):

$$t \equiv \frac{x+1}{8} = \frac{y-13}{12} = \frac{z}{24}$$

ili

$$t \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-13}{3} = \frac{z}{6}.$$

Prema (157):

$$n.\,r. \equiv (x+1)\,2 + (y-13)\,3 + 6z = 0$$

ili

$$n.\,r. \equiv 2x + 3y + 6z - 37 = 0.$$

Prema (163):

$$o.\,r. \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-13 & z \\ 8 & 12 & 24 \\ 10 & 6 & 24 \end{vmatrix} = 0$$

ili

$$o.\,r. \equiv 6x + 2y - 3z - 20 = 0.$$

Prema uvjetu (58) okomitosti binormale

$$\frac{x+1}{a} = \frac{y-13}{b} = \frac{z}{1}$$

i oskulacione ravnine:

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{2} = \frac{1}{-3}$$

slijedi

$$a = -2 \quad \text{i} \quad b = -\frac{2}{3}$$

pa je

$$bin. \equiv \frac{x+1}{6} = \frac{y-13}{2} = \frac{z}{-3}.$$

Glavna normala

$$\frac{x+1}{a} = \frac{y-13}{b} = \frac{z}{1}$$

okomita je i na tangenti i na binormali pa je prema (43):

$$\left.\begin{aligned} 2a + 3b + 6 &= 0 \\ 6a + 2b - 3 &= 0. \end{aligned}\right|$$

Odatle dobijemo: $a = \frac{3}{2}$ i $b = -3$, pa je

$$gl.\,n. \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-13}{-6} = \frac{z}{2}.$$

Rektifikaciona ravnina okomita je na glavnoj normali, pa je prema (50) i (58):

$$A(x+1) + B(y-13) + Cz = 0$$

$$r.\,r. \equiv 3(x+1) - 6(y-13) + 2z = 0$$

ili

$$r.\,r. \equiv 3x - 6y + 2z + 81 = 0.$$

Mnogo više vremena traži računanje jednadžbe rektifikacione ravnine prema formuli (174).

615. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 2$ u tački $T_0(1, 1, 1)$. (Prikaži grafički obje plohe i njihovo sjecište).

Zadana prostorna krivulja je kružnica, u kojoj se sijeku sfera polumjera $\sqrt{3}$ i kružni valjak polumjera $\sqrt{2}$. Ta kružnica ima polumjer $\sqrt{2}$, a leži u ravnini $z = 1$ (riješi zajedno jednadžbe zadanih ploha). U parametarskom obliku jednadžba kružnice glasi:

$$x = \sqrt{2}\cos t, \qquad y = \sqrt{2}\sin t, \qquad z = 1,$$

a u tački $T_0(1, 1, 1)$

$$\cos t_0 = \sin t_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ pa je } t_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Računamo:

$$\dot{x} = -\sqrt{2}\sin t; \qquad \dot{y} = \sqrt{2}\cos t; \qquad \dot{z} = 0$$

$$\ddot{x} = -\sqrt{2}\cos t; \qquad \ddot{y} = -\sqrt{2}\sin t; \qquad \ddot{z} = 0$$

$$\dot{x}_0 = -1; \qquad \dot{y}_0 = 1; \qquad \dot{z}_0 = 0$$

$$\ddot{x}_0 = -1; \qquad \ddot{y}_0 = -1; \qquad \ddot{z}_0 = 0.$$

Prema (156):

$$t \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0} \quad \text{ili} \quad \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Prema (157):

$$n.\,r. \equiv -(x-1)\,1 + (y-1)\cdot 1 + (z-1)\cdot 0 = 0$$

$$n.\,r. \equiv x - y = 0.$$

Prema 163 nema smisla računati jednadžbu oskulacione ravnine:

$$o.\,r. \equiv z = 1$$

jer je zadana prostorna krivulja ravna, pa se oskulaciona ravnina podudara s ravninom $z = 1$ u kojoj leži krivulja.

Binormala je okomita na oskulacionoj ravnini $z = 1$, pa je paralelna s osi Z, a kako prolazi tačkom $T_0(1, 1, 1)$, njena jednadžba glasi:

$$bin. \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Glavna normala je okomita na tangenti, prolazi dakle središtem kružnice $O(0, 0, 1)$ i tačkom $T_0(1, 1, 1)$, pa je

$$gl.\,n. \equiv \begin{cases} x = y \\ z = 1 \end{cases}.$$

Ista jednadžba $x - y = 0$ slijedi iz jednadžbe normalne ravnine, jer u toj ravnini leži glavna normala.

Rektifikaciona ravnina sadrži tangentu prostorne krivulje a kako je u našem slučaju ravnina krivulje $z = 1$ paralelna s ravninom XY, jednadžba rektifikacione ravnine podudara se s jednadžbom tangente:

$$r.\,r. \equiv x + y - 2 = 0.$$

U grafički prikaz zadane prostorne krivulje umetni izračunate elemente.

616. $x = t^2,\ y = 1 - t,\ z = t^3$ u tački $T_0(1, 0, 1)$.

$$\left[\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{3};\quad 2x - y + 3z - 5 = 0;\quad 3x + 3y - z - 2 = 0;\right.$$

$$\left.\frac{x-1}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1};\quad \frac{x-1}{8} = \frac{y}{-11} = \frac{z-1}{9};\quad 8x - 11y - 9z + 1 = 0\right].$$

617. $\vec{r}(\sin t, \cos t, \operatorname{tg} t)$ u tački $T_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

$$\left[\frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{y - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{z-1}{4};\ \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 4z = 0;\ \sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y + z - 5 = 0;\right.$$

$$\frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{y - \frac{\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{z-1}{1};\quad \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{13} = \frac{y - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-3} = \frac{z-1}{-4\sqrt{2}};$$

$$\left.-13x + 3y + 4\sqrt{2}z + \sqrt{2} = 0\right].$$

618. $x = 2t + 3,\ y = 3t - 1,\ z = t^2$.

Za tu krivulju pokaži da ima u svim tačkama jednu te istu oskulacionu ravninu uz geometrijsko tumačenje te činjenice.

Znamo da oskulaciona ravnina sadrži tangentu prostorne krivulje, a okomita je na binormalu. Iz toga slijedi da jednu te istu oskulacionu ravninu u svim tačkama krivulje može imati samo ravna krivulja, za koju je oskulaciona ravnina ravnina same krivulje, pa su binormale u svim tačkama te ravne krivulje međusobno paralelne i okomite na ravnini krivulje.

Odredimo jednadžbu ravnine u kojoj leži zadana krivulja, a ta će jednadžba biti također jednadžba oskulacione ravnine te krivulje. U tu svrhu uklonimo t iz zadanih jednadžbi krivulje:

Uvrštenje $t = \sqrt{z}$ daje

$$x = 2\sqrt{z} + 3$$
$$y = 3\sqrt{z} - 1,$$

a uklonimo li $\sqrt{z}$, dobijemo

$$\underline{3x - 2y - 11 = 0.}$$

U toj ravnini leži zadana krivulja.

Prema (163) izvedimo jednadžbu oskulacione ravnine u bilo kojoj tački krivulje npr. paramatera $t_0 = 0$, tj. u $T_0(3, -1, 0)$:

$$\dot{x} = 2,\quad \dot{y} = 3,\quad \dot{z} = 2t$$
$$\ddot{x} = 0,\quad \ddot{y} = 0,\quad \ddot{z} = 2$$

$$o.r. \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dobijemo istu jednadžbu:

$$\underline{o.r. \equiv 3x - 2y - 11 = 0.}$$

619. Pokaži da je krivulja

$$x = 1 + 3t + 2t^2,\quad y = 2 - 2t + 5t^2,\quad z = 1 - t^2$$

ravna i odredi ravninu u kojoj leži.

$$[2x + 3y + 19z - 27 = 0].$$

620. Odredi polumjer zakrivljenosti krivulje

$$x = \ln\cos t,\quad y = \ln\sin t,\quad z = \sqrt{2}\,t$$

u tački parametra t i pokaži da je torzija u bilo kojoj tački zadane krivulje jednaka zakrivljenosti u toj tački.

Računamo prema (164 b), odnosno (177):

$$\frac{dx}{dt} = -\operatorname{tg} t,\quad \frac{dy}{dt} = \operatorname{ctg} t,\quad \frac{dz}{dt} = \sqrt{2}.$$

Prema (160 a):

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t + 2} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1 + \frac{1}{\sin^2 t} - 1 + 2} = \frac{2}{\sin 2t}.$$

Odatle je

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\sin 2t}{2} = \sin t \cdot \cos t$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = -\operatorname{tg} t \cdot \sin t \cdot \cos t = -\sin^2 t$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \operatorname{ctg} t \cdot \sin t \cdot \cos t = \cos^2 t$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \sqrt{2}\sin t \cdot \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right) \cdot \frac{dt}{ds} = -2\sin^2 t \cdot \cos^2 t = -\frac{1}{2}\sin^2 2t$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -2\cos^2 t \cdot \sin^2 t = -\frac{1}{2}\sin^2 2t$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \sqrt{2}\cos 2t \cdot \frac{\sin 2t}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t \cdot \cos 2t = \frac{\sqrt{2}}{4}\sin 4t$$

$$\frac{d^3x}{ds^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right) \cdot \frac{dt}{ds} = -\frac{1}{2} \cdot 2\sin 2t \cdot \cos 2t \cdot 2 \cdot \frac{\sin 2t}{2} = -\sin^2 2t \cdot \cos 2t$$

$$\frac{d^3y}{ds^3} = -2\sin 2t \cos 2t \cdot \frac{\sin 2t}{2} = -\sin^2 2t \cdot \cos 2t$$

$$\frac{d^3z}{ds^3} = \sqrt{2} \cdot \cos 4t \cdot \frac{\sin 2t}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4t \cdot \sin 2t.$$

Prema (164 b):

$$\text{Zakrivljenost } K = \frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{1}{4}\sin^4 2t + \frac{1}{4}\sin^4 2t + \frac{2}{4}\sin^2 2t\cos^2 2t} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2\sin^2 2t(\sin^2 2t + \cos^2 2t)} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t}$$

pa je

$$\underline{\rho = \frac{\sqrt{2}}{\sin 2t}}.$$

Sada računamo torziju τ prema (177):

$$\text{Nazivnik} = K^2 = \frac{1}{2}\sin^2 2t$$

$$\text{brojnik} = \begin{vmatrix} -\sin^2 t & \cos^2 t & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t \\ -\frac{1}{2}\sin^2 2t & -\frac{1}{2}\sin^2 2t & \frac{\sqrt{2}}{4}\sin 4t \\ -\sin^2 2t\cdot\cos 2t & -\sin^2 2t\cdot\cos 2t & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4t\sin 2t \end{vmatrix}$$

Nakon razvijanja determinante i uređenja dobijemo:

$$\text{brojnik} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sin^3 2t$$

$$\tau = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}\sin^3 2t}{\frac{1}{2}\sin^2 2t} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t.}$$

Isti izraz smo dobili i za zakrivljenost zadane krivulje, pa je $\underline{\tau = K}$ u svim tačkama krivulje.

621. Izračunaj zakrivljenost i torziju u bilo kojoj tački krivulje $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = a\,\mathrm{sh}\,t$, $z = a\,t$ (hiperbolna spirala).

Računamo s obzirom na (164 b) i (177):

$$\frac{dx}{dt} = a\,\mathrm{sh}\,t; \quad \frac{dy}{dt} = a\,\mathrm{ch}\,t; \quad \frac{dz}{dt} = a$$

$$\frac{ds}{dt} = \text{prema (160 a)} = \sqrt{a^2\,\mathrm{sh}^2 t + a^2\,\mathrm{ch}^2 t + a^2} = a\sqrt{\mathrm{ch}\,2t + 1} = a\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,t,$$

jer je

$$1 + \mathrm{ch}\,t = 2\,\mathrm{ch}^2\frac{t}{2},$$

odnosno

$$1 + \mathrm{ch}\,2t = 2\,\mathrm{ch}^2 t.$$

Slijedi

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{a\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,t}.$$

Sada računamo:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{a\,\mathrm{sh}\,t}{a\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,t} = \frac{\mathrm{th}\,t}{\sqrt{2}}$$

Na isti način dobijemo:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad \frac{dz}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,t}.$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right)\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}^2 t}\cdot\frac{1}{a\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,t} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}^3 t}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = 0$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = -\frac{\mathrm{sh}\,t}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}^2 t}\cdot\frac{1}{a\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,t} = -\frac{1}{2a}\frac{\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}^3 t}$$

$$\frac{d^3x}{ds^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)\frac{dt}{ds} = -\frac{3}{2\sqrt{2}\,a^2}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}^5 t}$$

$$\frac{d^3y}{ds^3} = 0$$

$$\frac{d^3z}{ds^3} = -\frac{1}{2\sqrt{2}\,a^2}\cdot\frac{\mathrm{ch}^2 t - 3\,\mathrm{sh}^2 t}{\mathrm{ch}^5 t} = -\frac{1}{2\sqrt{2}\,a^2}\cdot\frac{1 - 2\,\mathrm{sh}^2 t}{\mathrm{ch}^5 t}.$$

Prema (164 b):

$$\text{Zakrivljenost } K = \frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}^6 t}(1 + \mathrm{sh}^2 t)} = \underline{\frac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t}}.$$

Torziju τ računamo prema (177):

$$\text{brojnik} = \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{th}\,t}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,t} \\ \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}^3 t} & 0 & -\frac{1}{2a}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}^3 t} \\ -\frac{3}{2\sqrt{2}\,a^2}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}^2 t} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}\,a^2}\cdot\frac{1 - 2\,\mathrm{sh}^2 t}{\mathrm{ch}^5 t} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}\,a^3}\,\frac{1 - 2\,\mathrm{sh}^2 t}{\mathrm{ch}^6 t} - \frac{3}{4\sqrt{2}\,a^3}\cdot\frac{\mathrm{sh}^2 t}{\mathrm{ch}^6 t}\right) = -\frac{1 + \mathrm{sh}^2 t}{8a^3\,\mathrm{ch}^6 t} = -\frac{1}{8a^3\,\mathrm{ch}^6 t}.$$

$$\text{Nazivnik} = K^2 = \frac{1}{4a^2\,\mathrm{ch}^4 t}$$

$$\underline{\tau = +\frac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t} = K.}$$

622. Pokaži da su zakrivljenost i torzija cilindričke spirale $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = c\,t$ konstantne u svim tačkama krivulje.

$$\left[\frac{r}{r^2 + c^2};\ \frac{c}{r^2 + c^2}\right].$$

623. Odredi jedinične vektore tangente $\vec{t}_0$, normale $\vec{n}_0$ i binormale $\vec{b}_0$ za krivulju $y = x^2$, $z = 2x$ u tački $T_0(x_0 = 2)$. (Često se ti jedinični vektori označuju s masno štampanim grčkim slovima $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$).

Uzevši da je $x = t =$ parametar, dobijemo jednadžbu zadane krivulje u parametarskom obliku:

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = 2t$$

dok je $t_0 = x_0 = 2$ i $T_0(2, 4, 4)$.

Zadanoj krivulji odgovara radijvektor

$$\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + 2t\vec{k} \tag{a}$$

kojemu krajnja tačka opisuje krivulju zadanu kao sjecište valjkovite plohe $y = x^2$ i ravnine $z = 2x$.

Kako je prema (35)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$

možemo s obzirom na jednadžbu tangente (156) dodijeliti tangenti vektor

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{b}$$

a binormali s obzirom na jednadžbu oskulacione ravnine, na koju je binormala okomita, vektor

$$\vec{b} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{c}$$

Kako je glavna normala okomita na binormali i na tangenti, njoj odgovara vektor

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}. \tag{d}$$

Računamo za zadanu krivulju (a):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} + 2t\vec{j} + 2\vec{k}$$

i

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\vec{j}.$$

Odatle uz $t_0 = 2$ dobijemo:

prema (b):

$$\vec{t} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_0 = \vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

prema (c) i (27 a):

$$\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2(2\vec{i} - \vec{k})$$

$$\vec{b} = -4\vec{i} + 2\vec{k}$$

prema (d):

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{i} + 10\vec{j} - 16\vec{k}$$

$$\vec{t}_0 = \frac{\vec{t}}{t} = \underline{\frac{\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{21}}}; \qquad \vec{b}_0 = \frac{\vec{b}}{b} = \underline{\frac{-2\vec{i} + \vec{k}}{\sqrt{5}}}; \qquad \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{n} = \underline{\frac{-4\vec{i} + 5\vec{j} - 8\vec{k}}{\sqrt{105}}}.$$

624. Odredi $\vec{t}_0$, $\vec{b}_0$ i $\vec{n}_0$ za krivulju

$$x = 1 - \cos t; \quad y = \sin t; \quad z = t$$

u tački $T_0\left(t_0 = \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\vec{r} = (1 - \cos t)\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + \vec{k}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \cos t\vec{i} - \sin t\vec{j}.$$

Za $t_0 = \frac{\pi}{2}$ dobijemo:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_0 = \vec{i} + \vec{k}, \qquad \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_0 = -\vec{j}$$

pa je

$$\vec{t} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_0 = \vec{i} + \vec{k};$$

$$\vec{b} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{k}$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{j}$$

$$\vec{t}_0 = \frac{\vec{t}}{t} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{k})}; \qquad \vec{b}_0 = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{k})}; \qquad \vec{n}_0 = \underline{-\vec{j}}.$$

625. Odredi $\vec{t}_0$ i $\vec{n}_0$, a također kosinuse smjera tih vektora s osi Z za stožastu spiralu

$$\vec{r} = e^t(\vec{i}\cos t + \vec{j}\sin t + \vec{k}).$$

$$\left\{ \vec{t}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}[(\cos t - \sin t)\vec{i} + (\sin t + \cos t)\vec{j} + \vec{k}]; \right.$$

$$\left. \vec{n}_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sin t + \cos t)\vec{i} + (\sin t - \cos t)\vec{j}]; \quad \cos\gamma_t = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \cos\gamma_n = 0 \right\}.$$

626. Po cilindričkoj spirali

$$\vec{r} = r\cos t\,\vec{i} + r\sin t\,\vec{j} + c\,t\,\vec{k}$$

pomiče se jednoliko tačka s brzinom v. Odredi njenu akceleraciju a.

Kako je brzina v konstantna, tangencijalna komponenta akceleracije $a_t = 0$, pa treba odrediti samo normalnu komponentu $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ (vidi § 2, 8).

Računamo prema (164 b) polumjer zakrivljenosti ρ uzevši u obzir da je

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad z = c\,t$$

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin t; \quad \frac{dy}{dt} = r\cos t; \quad \frac{dz}{dt} = c.$$

Prema (160 a)

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{r^2 + c^2}, \quad \text{pa je} \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}.$$

Odatle je

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = -\frac{r\sin t}{v}; \quad \frac{dy}{ds} = \frac{r\cos t}{v}; \quad \frac{dr}{ds} = \frac{c}{v}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{r\cos t}{v^2}; \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{r\sin t}{v^2}; \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Prema (164 b)

$$\rho = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2 + c^2}{r}.$$

pa je

$$a = \frac{v^2}{\rho} = \underline{\frac{r\,v^2}{r^2 + c^2}}.$$

627. Zadana je jednadžba gibanja

$$\vec{r} = t\,\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}.$$

Odredi u momente $t_0 = 0$ i $t_1 = 1$:

a) zakrivljenost trajektorije,

b) tangencijalnu i normalnu komponente akceleracije gibanja.

ad a) Računamo prema (164 b) uzevši u obzir da je

$$x = t; \quad y = t^2 \quad \text{i} \quad z = t^3$$

$$\frac{dx}{dt} = 1; \quad \frac{dy}{dt} = 2\,t; \quad \frac{dz}{dt} = 3\,t^2.$$

Prema (160 a):

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + 4\,t^2 + 9\,t^4}, \quad \text{pa je} \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\,t^2 + 9\,t^4}}$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\,t^2 + 9\,t^4}}; \quad \frac{dy}{ds} = \frac{2\,t}{\sqrt{1 + 4\,t^2 + 9\,t^4}}; \quad \frac{dz}{ds} = \frac{3\,t^2}{\sqrt{1 + 4\,t^2 + 9\,t^4}}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{2(2\,t + 9\,t^2)}{(1 + 4\,t^2 + 9\,t^4)^2}; \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{2(1 - 18\,t^4)}{(1 + 4\,t^2 + 9\,t^4)^2}; \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{2(3\,t + 6\,t^3)}{(1 + 4\,t^2 + 9\,t^4)^2}.$$

Uvrštenje u (164 b) daje

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{2\sqrt{1 + 13\,t^2 + 54\,t^4 + 117\,t^6 + 81\,t^8}}{(1 + 4\,t^2 + 9\,t^4)^2}$$

Za $t_0 = 0$;

$$K_0 = \frac{1}{\rho_0} = \underline{2}; \qquad \rho_0 = \frac{1}{2}$$

Za $t_1 = 1$;

$$K_1 = \frac{1}{\rho_1} = \underline{\frac{1}{7}\sqrt{\frac{19}{14}}}; \qquad \rho_1 = 7\sqrt{\frac{14}{19}}.$$

ad b)

$$a_t = \frac{dv}{dt} = ?$$

Imali smo

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + 4\,t^2 + 9\,t^4}$$

pa je

$$a_t = \frac{4\,t + 18\,t^3}{\sqrt{1 + 4\,t^2 + 9\,t^4}}.$$

Za $t_0 = 0$

$$\underline{(a_t)_0 = 0;}$$

za $t_1 = 1$

$$\underline{(a_t)_1 = \frac{22}{\sqrt{14}}}.$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = ? \qquad a_n = \frac{1 + 4\,t^2 + 9\,t^4}{\rho}.$$

Za $t_0 = 0$

$$\underline{(a_n)_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2;}$$

za $t_1 = 1$

$$\underline{(a_n)_1 = 2\sqrt{\frac{19}{14}}}.$$

XI. KRIVULJNI (LINIJSKI) INTEGRALI

A. Krivuljni integrali po duljini s krivulje k

Formule

a) Krivulja je zadana jednadžbom $y = y(x)$:

$$\int_k f(x, y)\, ds = \int_a^b f[x, y(x)] \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx. \tag{183}$$

b) krivulja je zadana parametarski: $\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\} t_1 \leqq t \leqq t_2$

$$\int_k f(x, y)\, ds = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t)] \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt. \tag{182}$$

c) Krivulja je zadana u polarnim koordinatama $\rho = \rho(\varphi)$.

$$\int_k f(x, y)\, ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi. \tag{182 a}$$

d) Krivulja je prostorna, a zadana je parametarski $\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right\} t_1 \leqq t \leqq t_2$ pa s obzirom na (161)

$$\int_k f(x, y, z)\, ds = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt. \tag{182 b}$$

Krivuljni integrali uzeti po duljini krivulje ne ovise o smislu obilaženja zadane krivulje k.

Primjena.

1. Geometrijski možemo krivuljni integral $\int_k f(x, y)\, ds$ shvatiti kao površinu S plašta valjkovite plohe, kojoj su izvodnice paralelne s osi Z, kojoj je baza krivulja k, dok su duljine izvodnica određene vrijednostima integranda $z = f(x, y)$:

$$S = \int_k f(x, y)\, ds. \tag{183 a}$$

2. Smatramo li da integrand krivuljnog integrala $\int_k f(x, y)\, ds$ predočuje gustoću $\mu(x, y)$ krivulje k, tada

a) masa krivulje k:

$$m = \int_k \mu(x, y)\, ds. \tag{183 b}$$

dok je masa prostorne krivulje određena formulom (162).

b) koordinate težišta krivulje k:

$$x_t = \frac{\int_k x\, \mu(x, y)\, ds}{m}; \qquad y_t = \frac{\int_k y\, \mu(x, y)\, ds}{m}.$$

c) momenti tromosti krivulje k:

$$\text{aksijalni:} \quad I_x = \int_k y^2 \mu(x, y)\, ds; \qquad I_y = \int_k x^2 \mu(x, y)\, ds$$

$$\text{polarni:} \quad I_p = I_0 = \int_k (x^2 + y^2)\, \mu(x, y)\, ds. \tag{183 c}$$

d) površina S ravne zatvorene krivulje k:

$$S = \frac{1}{2} \oint x\, dy - y\, dx \tag{79}$$

i

$$S = \oint y\, dx \tag{80}$$

za krivulju $y = y(x)$, odnosno

$$S = \frac{1}{2} \oint r^2(\varphi)\, d\varphi \tag{81}$$

za $r = r(\varphi)$.

Posljednje tri formule vidi § 7, 1. d) dio II Repetitorija.

a. RAČUNANJE KRIVULJNIH INTEGRALA

Zadaci

U zadacima **628—643** uklj. izračunaj krivuljne integrale.

628. $\int\limits_k \frac{ds}{x-y}$, gdje je k odrezak pravca $y = \frac{1}{2}x - 2$ između tačaka $A\,(0, -2)$ i $B\,(4, 0)$.

Računamo prema (183):

Uvrštenje $y = \frac{1}{2}x - 2$ u $x - y$ daje:

$$x - y = x - \frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{2}x + 2$$

$$y' = \frac{1}{2}.$$

$$I = \int\limits_0^4 \frac{1}{\frac{1}{2}x + 2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4}}\, dx = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 2 \int\limits_0^4 \frac{dx}{x+4} = \sqrt{5}\,|\ln(x+4)|_0^4 =$$

$$= \sqrt{5}\,(\ln 8 - \ln 4) = \underline{\sqrt{5}\ln 2.}$$

629. $\int\limits_k x\,y\,ds$, gdje je k kontura pravokutnika $A\,B\,C\,D$ (vidi sl. 183).

Prema slici:

$$\begin{array}{lll} AB \equiv y = 0; & dy = 0, & ds = dx \\ BC \equiv x = 4; & dx = 0, & ds = dy \\ CD \equiv y = 2; & dy = 0, & ds = dx \\ DA \equiv x = 0; & dx = 0, & ds = dy \end{array}$$

Prema (183):

$$I = 0 + \int\limits_0^2 4\,y\,dy + \int\limits_4^0 2\,x\,dx + 0 = 4\left|\frac{y^2}{2}\right|_0^2 + 2\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^4 = \underline{24.}$$

630. $\int\limits_k y\,ds$, gdje je k luk parabole $y^2 = 4\,x$ odsječen parabolom $x^2 = 4\,y$ (sl. 184).

Odredimo sjecište parabola:

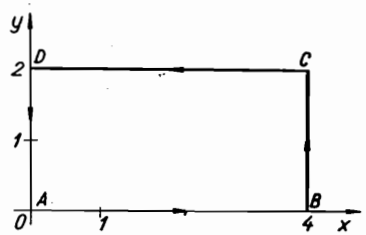
Uvrštenje $y = \frac{x^2}{4}$ u $y^2 = 4\,x$ daje:

$$\frac{x^4}{16} - 64\,x = 0, \quad \text{a odatle} \quad x_1 = 0 \quad \text{i} \quad x_2 = 4.$$

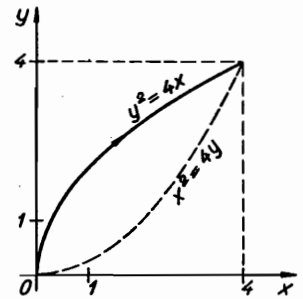
$$\text{pa su} \quad y_1 = 0 \quad \text{i} \quad y_2 = 4.$$

Iz $y = 2\sqrt{x}$ slijedi $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, pa prema (183):

$$I = 2\int\limits_0^4 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\, dx = 2\int\limits_0^4 \sqrt{1+x}\, dx = \frac{4}{3}\left|\sqrt{(1+x)^3}\right|_0^4 = \underline{\frac{4}{3}(5\sqrt{5} - 1).}$$



Slika 183.



Slika 184.

631. $\int\limits_k x\,y\,ds$, gdje je k luk elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, koji se nalazi u I kvadrantu.

Prelazimo na parametarsku jednadžbu elipse:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

i računamo prema (182):

$$\dot{x} = -a\sin t, \quad \dot{y} = b\cos t.$$

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\,b\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt = (\text{uzevši } \cos^2 t = 1 - \sin^2 t) =$$

$$= \frac{a\,b}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t\cos t\sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2}\,dt.$$

Uz supstituciju $\sin^2 t = u$ dobijemo $2\sin t\cos t = du$, pa integral dobije oblik $\int\sqrt{(a^2 - b^2)\,u + b^2}\,du$, koji lako riješimo uz supstituciju $(a^2 - b^2)\,u + b^2 = z$. Dobijemo:

$$I = \frac{a\,b}{2\,(a^2 - b^2)}\left|\frac{2}{3}\sqrt{[(a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2]^3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a\,b}{3\,(a^2 - b^2)}\,(a^3 - b^3) =$$

$$= \underline{\frac{a\,b\,(a^2 + a\,b + b^2)}{3\,(a + b)}}.$$

632. $\int\limits_k \sqrt{2y}\,ds$, gdje je k prvi luk cikloide $\begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{array}$

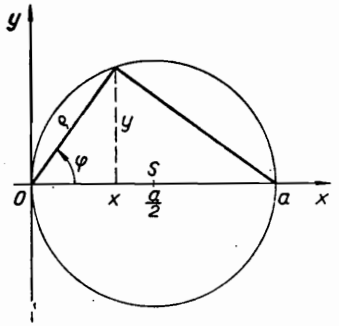
Prema (182):

$$\dot{x} = a(1 - \cos t), \qquad \dot{y} = a \sin t$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2a(1-\cos t)}\, a \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = \int\limits_0^{2\pi} 2a\sqrt{a}(1-\cos t)\, dt =$$

$$= 2a\sqrt{2}\,\Big|\, t - \sin t \,\Big|_0^{2\pi} = \underline{4\pi a\sqrt{2}.}$$

633. $\int\limits_k (x - y)\, ds$, gdje je k kružnica $x^2 + y^2 = a x$.



Slika 185.

Prelazimo na polarne koordinate: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, pa uvrštenje u $x^2 + y^2 - a x = 0$ daje jednadžbu kružnice u polarnim koordinatama:

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi - a\rho\cos\varphi = 0$$

ili

$$\rho = a\cos\varphi.$$

Prema (182 a) i slici 185 dobijemo izračunavši:

$$x = \rho\cos\varphi = a\cos^2\varphi$$

$$y = \rho\sin\varphi = a\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\rho' = -a\sin\varphi;$$

$$I = a^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a^2\left|\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\cos 2\varphi}{4}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{a^2\pi}{2}}.$$

634. $\int\limits_k \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\, ds$, gdje je k dio Arhimedove spirale $\rho = 2\varphi$ koji se nalazi u krugu polumjera R sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava (u polu).

Računamo prema (182 a) uzevši u obzir da je prema $\rho = 2\varphi$ $\rho' = 2$, dok je $\frac{y}{x} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi$. Da odredimo granice integracije, odredimo sjecište spirale $\rho = 2\varphi$ i kružnice $\rho = R$. Dobijemo $\varphi = \frac{R}{2}$.

$$I = \int\limits_0^{\frac{R}{2}} \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\varphi)\sqrt{4\varphi^2 + 4}\, d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{R}{2}} \varphi\sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}\left|\sqrt{(1+\varphi^2)^3}\right|_0^{\frac{R}{2}} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(1+\frac{R^2}{4}\right)^3} - 1\right) = \underline{\frac{1}{12}[R^2+4)^{\frac{3}{2}} - 8].}$$

635. $\int\limits_k y^2\, ds$, gdje je k prvi luk cikloide.

$$\left[\frac{256}{15}a^3\right].$$

636. $\int\limits_k (x + y)\, ds$, gdje je k desni listić lemniskate $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$.

$$[a^2\sqrt{2}].$$

637. $\int\limits_k \frac{z^2\, ds}{x^2 + y^2}$, gdje je k prvi zavoj cilindričke spirale

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = a t.$$

Računamo prema (182 b):

$$\dot{x} = -a\sin t; \qquad \dot{y} = a\cos t; \qquad \dot{z} = a$$

$$I = \int\limits_k \frac{a^2 t^2}{a^2}\sqrt{a^2 + a^2}\, dt = a\sqrt{2}\left|\frac{t^3}{3}\right|_0^{2\pi} = \underline{\frac{8}{3}a\pi^3\sqrt{2}.}$$

638. $\int\limits_k x y z\, ds$, gdje je k luk kružnice $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$, koji leži u I kvadrantu.

Kružnica je zadana kao presječnica sfere polumjera R i uspravnog kružnog valjka polumjera $\frac{R}{2}$, pa projekcija te kružnice u ravninu $X\,Y$ glasi

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{2}$$

(nariši sliku zadanih ploha i kružnice).

Računamo prema (182 b):

$$x = \frac{R}{2}\cos t; \qquad y = \frac{R}{2}\sin t; \qquad z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

$$\dot{x} = -\frac{R}{2}\sin t, \qquad \dot{y} = \frac{R}{2}\cos t, \qquad \dot{z} = 0$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2\sqrt{3}}{8}\cos t \cdot \sin t \sqrt{\frac{R^2}{4}\sin^2 t + \frac{R^2}{4}\cos^2 t}\, dt =$$

$$= \frac{R^4\sqrt{3}}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt = \frac{R^4\sqrt{3}}{32}\left| -\frac{\cos 2t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{R^4\sqrt{3}}{32}}.$$

639. $\int_k (x + y)\, ds$, gdje je k luk kružnice $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $y = x$ koji se nalazi u I kvadrantu.

Odredimo projekciju kružnice k, koja je zadana kao sjecište sfere i ravnine $y = x$, na ravninu XZ (nariši sliku!). Uvrštenje $y = x$ u jednadžbu sfere daje:

$$2x^2 + z^2 = R^2$$

ili

$$\frac{x^2}{\frac{R^2}{2}} + \frac{z^2}{R^2} = 1.$$

Presječnica k se projicira kao elipsa s poluosima $\frac{R}{\sqrt{2}}$ i R.

Prelazimo na parametarski oblik:

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}}\cos t; \qquad z = R\sin t, \qquad y = \sqrt{R^2 - x^2 - z^2} = \frac{R}{\sqrt{2}}\cos t = x$$

$$\dot{x} = -\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t; \qquad \dot{z} = R\cos t; \qquad \dot{y} = -\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t = \dot{x}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2R}{\sqrt{2}}\cos t \sqrt{\frac{R^2}{2}\sin^2 t + \frac{R^2}{2}\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\, dt = \frac{2R^2}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt =$$

$$= R^2\sqrt{2}\,|\sin t|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{R^2\sqrt{2}.}$$

640. $\int_k (2z - \sqrt{x^2 + y^2})\, ds$, gdje je k prvi zavoj stožaste spirale $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$.

$$\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}[(1 + 2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1]\right].$$

641. $\int_k \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}$, gdje je k prvi zavoj cilindričke spirale $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $y = b\,t$.

$$\left[\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a\,b}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\pi b}{a}\right].$$

642. $\int_k (x^2 + y^2 + z^2)\, ds$, gdje je k prvi zavoj cilindričke spirale

$$\left[\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2 + b^2}(3a^2 + 4\pi^2 b^2)\right].$$

643. $\int_k \sqrt{2y^2 + z^2}\, ds$, gdje je k kružnica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x = y$.

$$[2\pi a^2].$$

b. PRIMJENA KRIVULJNIH INTEGRALA UZETIH PO DULJINI KRIVULJE

Zadaci

U zadacima **644**–**647** uklj. izračunaj masu zadanih nehomogenih krivulja.

644. Odreska logaritamske krivulje $y = \ln x$ između tačaka apscisa x_1 i x_2, ako je gustoća μ u svakoj tački krivulje jednaka kvadratu apscise te tačke.

Računamo prema (183 b):

$$\mu = x^2; \qquad ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\, dx$$

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^2\sqrt{1 + x^2}}{x}\, dx = \frac{1}{3}\left|\sqrt{(1 + x^2)^3}\right|_{x_1}^{x_2} = \underline{\frac{1}{3}[(1 + x_2^2)^{\frac{3}{2}} - (1 + x_1^2)^{\frac{3}{2}}].}$$

645. Odreska lančanice $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ između tačaka apscisa $x_1 = 0$ i $x_2 = a$, ako je gustoća krivulje u svakoj njenoj tački obratno razmjerna s ordinatom te tačke, dok je gustoća u tački $T_0(0, 0)$ jednaka δ.

$$\mu = \frac{c}{y} = \frac{c}{a\operatorname{ch}\frac{x}{a}}, \quad \text{a u} \quad T_0(0, 0) \quad \delta = \frac{c}{a}, \quad \text{pa je} \quad c = a\delta.$$

Slijedi:

$$\mu = \frac{\delta}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}}, \qquad \text{dok je} \qquad \dot{y} = \operatorname{sh}\frac{x}{a}.$$

Prema (183 b):

$$ds = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx = \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx$$

$$m = \delta \int_0^a \frac{\operatorname{ch}\frac{x}{a}}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}}\,dx = \underline{\delta\, a.}$$

646. Prvog kvadranta elipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, ako je gustoća μ u svakoj tački elipse jednaka ordinati te tačke.

S obzirom na (182) računamo:

$$\mu = y = b\sin t; \qquad \dot{x} = -a\sin t; \qquad \dot{y} = b\cos t$$

$$ds = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}\,dt =$$

$$= a\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\cos^2 t}\,dt = a\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 t}\,dt$$

$$m = a\,b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 t}\,dt = (\text{uz supstituciju } \cos t = u) =$$

$$= -\frac{a\,b\,\varepsilon}{2}\left| -\frac{1}{\varepsilon^2}\arcsin(\varepsilon\cos t) + \cos t\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \cos^2 t}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{a\,b}{2\,\varepsilon}\arcsin\varepsilon + \frac{a\,b}{2}\sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad \text{pa uz} \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

$$\underline{m = \frac{a\,b}{2\,\varepsilon}\arcsin\varepsilon + \frac{b^2}{2}}.$$

647. Luka krivulje $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$; $z = e^t$ od tačke parametra $t = 0$ do tačke parametra t, ako je gustoća luka obratno razmjerna s kvadratom radijvektora, a u tački (1, 0, 1) jednaka je 1.

$$[(1 - e^{-t})\sqrt{3}].$$

648. Zadana je cilindrička spirala

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t; \qquad z = b\,t.$$

Odredi za prvi zavoj spirale:

a) masu, ako je gustoća u svakoj tački spirale jednaka kvadrantu radijvektora te tačke,

b) koordinate težišta uz pretpostavku da je krivulja homogena ($\mu = 1$) i to za polovicu prvog zavoja,

c) moment tromosti s obzirom na os Z ($\mu = 1$).

ad a) $\mu = x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 t^2$

$$\dot{x} = -a\sin t, \qquad \dot{y} = a\cos t, \qquad \dot{z} = b$$

$$ds = \sqrt{a^2 + b^2}\,dt$$

$$m = \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2)\sqrt{a^2 + b^2}\,dt = \underline{\sqrt{a^2 + b^2}\left(2\pi a^2 + \frac{8\pi^3}{3}b^2\right)}.$$

ad b) Računamo prema (137) uzevši u obzir da je $m = s$, jer je $\mu = 1$, pa je $dm = ds$, i da su integrali jednostruki.

$$x_t = \frac{M_y}{s} = \frac{\int_s x\,ds}{\int_s ds} = \frac{\int_s x\,ds}{s}.$$

Analogno:

$$y_t = \frac{\int_s y\,ds}{s}; \qquad z = \frac{\int_s z\,ds}{s}$$

Za polovicu prvog zavoja:

$$s_t = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\,dt = \pi\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x_t = \frac{a}{\pi\sqrt{a^2 + b^2}}\int_0^{\pi} \cos t\sqrt{a^2 + b^2}\,dt = \frac{a}{\pi}\left|\sin t\right|_0^{\pi} = \underline{0}$$

$$y_t = \frac{a}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\,dt = \frac{2\,a}{\pi}; \qquad z_t = \frac{b}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \underline{\frac{b\,\pi}{2}}.$$

ad c) Računamo prema (138) uzevši u obzir da je za $\mu = 1$ $dm = ds$, dok je integral jednostruk.

$$I_z = \int_s (x^2 + y^2)\,ds = \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)\sqrt{a^2 + b^2}\,dt =$$

$$= \underline{2\,\pi\,a^2\sqrt{a^2 + b^2}.}$$

649. Izračunaj momente tromosti s obzirom na koordinatne osi prvog zavoja cilindričke spirale:

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = \frac{h}{2\pi}t.$$

$$\left[I_x = I_y = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}, \quad I_z = a^2\sqrt{4\pi a^2 + h^2}\right].$$

U zadacima **650—655** uklj. izračunaj površine valjkastih ploha, koje se nalaze između ravnine $X\,Y$ i zadanih ploha.

650. $x^2 + y^2 = R^2;\quad z = R + \dfrac{x^2}{R}\,.$

Računamo prema (183 a):

$$S = \int\limits_k f(x, y)\,\mathrm{d}s.$$

Funkciju $z = R + \dfrac{x^2}{R}$ integriramo po luku kružnice $k \equiv x^2 + y^2 = R^2$. Najjednostavnije možemo taj zadatak riješiti prikazavši jednadžbe kružnice i plohe u parametarskom obliku:

$$x = R\cos t, \qquad y = R\sin t$$

$$\dot{x} = -R\sin t, \quad \dot{y} = R\cos t$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = R\,\mathrm{d}t$$

$$z = R + \frac{R^2\cos^2 t}{R} = R(1 + \cos^2 t)$$

$$S = R^2\int\limits_0^{2\pi}(1 + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t = R^2\left|\, t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\,\right|_0^{2\pi} = \underline{3\pi R^2}.$$

651. $y^2 = 2px;\quad z = \sqrt{2px - 4x^2}.$

Računamo prema (183 a). Imamo integrirati po paraboli $y = \sqrt{2px}$. Da odredimo granice integracije, projiciramo zadanu plohu na ravninu $X\,Y$. Uz $z = 0$ dobijemo

$$2px - 4x^2 = 0, \quad \text{pa je} \quad x_1 = 0 \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{p}{2}\,.$$

Kako je

$$y' = \frac{2p}{2\sqrt{2px}} = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}},$$

dobijemo:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2x + p}{2x}}\,.$$

Uzevši u obzir da je parabola simetrična s obzirom na os X, računamo:

$$S = 2\int\limits_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{2px - 4x^2}\cdot\sqrt{\frac{2x + p}{2x}}\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{(p - 2x)(p + 2x)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{p^2 - 4x^2}\,\mathrm{d}x = \text{prema predtipu } C \text{ (vidi dio II Repetitorija)} =$$

$$= \frac{4}{2}\left|\,\frac{p^2}{4}\arcsin\frac{2x}{p} - \frac{p}{2}\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - x^2}\,\right|_0^{\frac{p}{2}} = \underline{\frac{\pi p^2}{4}}\,.$$

652. $y^2 = \dfrac{4}{9}(x - 1)^3;\quad z = 2 - \sqrt{x}\quad (y > 0).$

Prema (183 a):

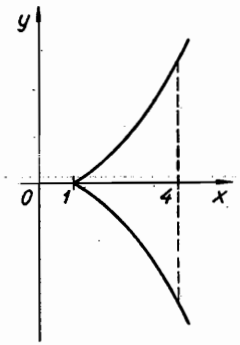
$$y = \frac{2}{3}(x - 1)^{\frac{3}{2}}, \qquad y' = \sqrt{x - 1}$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + x - 1}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

Granice integracije dobivamo prema slici 186 polukubne parabole $x = 1$ i iz $z = 0$:

$$2 - \sqrt{x} = 0, \quad \text{pa je} \quad x = 4$$

$$S = \int\limits_1^4 (2 - \sqrt{x})\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 (2\sqrt{x} - x)\,\mathrm{d}x = \left|\,2\cdot\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^2}{2}\,\right|_1^4 = \underline{\frac{11}{6}}\,.$$



Slika 186.

653. Osi dvaju kružnih valjaka istog polumjera R sijeku se pod pravim kutom. Izračunaj površinu onog dijela plašta jednog valjka, što ga isjeca drugi valjak.

Taj zadatak već smo jednom riješili pomoću dvostrukog integrala. Vidi zadatak 468 i sliku 139. Riješimo ga sada pomoću krivuljnog integrala.

Neka je os jednog valjka os Z, a drugog os Y, tada su jednadžbe valjaka $x^2 + y^2 = R^2$, odnosno $x^2 + z^2 = R^2$. Iz prve jednadžbe slijedi $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, pa je

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \quad \text{i} \quad \mathrm{d}s = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Za oktant plašta dobijemo prema (183 a) uz $z = \sqrt{R^2 - x^2}$:

$$\frac{S}{8} = R \int_0^R \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = R \mid x \mid_0^R = R^2$$

$$\underline{S = 8\, R^2.}$$

Neusporedivo brže i jednostavnije došli smo do istog rezultata.

654. Odredi površinu onog dijela plašta valjka $x^2 + y^2 = a\,x$, koji se nalazi u nutrini kugle $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

U III dijelu Repetitorija na str. 267 uz sliku 140 (vidi također sl. 116) taj je zadatak riješen pomoću dvostrukog integrala. Mnogo jednostavnije dolazimo do istog rezultata pomoću krivuljnog integrala.

Iz $x^2 + y^2 = a\,x$ slijedi $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, dok prema sl. 185 uz zadatak 633 imamo:

$$\rho = a \cos \varphi, \quad \text{pa je} \quad x = a \cos^2 \varphi \quad \text{i} \quad y = a \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

$$\rho' = -\, a \sin \varphi.$$

Prema (183 a):

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi = a\, d\varphi$$

$$z^2 = a^2 - x^2 - y^2 = a^2 \sin^2 \varphi, \quad \text{pa je} \quad z = a \sin \varphi.$$

Za gornju polovinu plašta valjka dobijemo

$$\frac{S}{2} = \int_0^\pi a^2 \sin \varphi\, d\varphi = a^2 \mid -\cos \varphi \mid_0^\pi = 2\, a^2$$

$$\underline{S = 4\, a^2.}$$

655. $x^2 + y^2 = R^2$; $2\, R\, z = x\, y$.

$[S = R^2]$.

U zadacima **656–660** uklj. izračunaj pomoću krivuljnih integrala površine ravnih likova omeđenih zadanim zatvorenim krivuljama.

656. Astroidom (hipocikloidom) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

Računamo prema (79):

$$S = \frac{1}{2} \oint x\, dy - y\, dx$$

$$dx = -\, 3\, a \cos^2 t \sin t\, dt, \qquad dy = 3\, a \sin^2 t \cos t\, dt.$$

$$S = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2 t \cos^4 t + \cos^2 t \sin^4 t)\, dt =$$

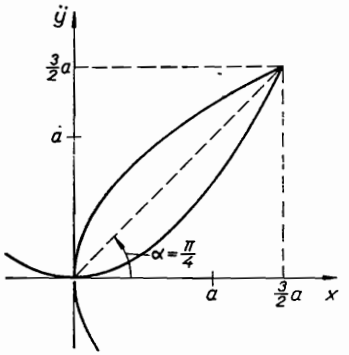
$$= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} [\sin^2 t\,(1 - \sin^2 t)^2 + (1 - \sin^2 t) \sin^4 t]\, dt =$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - 2 \sin^4 t + \sin^6 t + \sin^4 t - \sin^6 t)\, dt =$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - \sin^4 t)\, dt = \text{prema tipu VIII, dio II Repetitorija)} =$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \left| \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + \frac{1}{4} \sin^3 t \cos t - \frac{3}{8} t + \frac{3}{16} \sin 2t \right|_0^{2\pi} = \underline{\frac{3}{8} \pi a^2.}$$

657. Petljom Dekartova lišta $x^3 + y^3 - 3\, a\, x\, y = 0$.



Slika 187.

Prelazimo na parametarsku jednadžbu krivulje uzevši $y = t\, x$, pa je $t = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$ (v. sl. 187).

$$x^3 + t^3 x^3 - 3\, a\, t\, x^2 = 0 \mid : x^2$$

$$x + t^3 x - 3\, a\, t = 0, \quad \text{pa je} \quad x = \frac{3\, a\, t}{1 + t^3}, \quad y = \frac{3\, a\, t^2}{1 + t^3}.$$

Računamo $\frac{S}{2}$ prema (79) integrirajući od $t_1 = \operatorname{tg} 0 = 0$ do $t_2 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$.

$$dx = 3\, a \frac{1 - 2\, t^3}{(1 + t^3)^2}\, dt; \qquad dy = 3\, a \frac{2\, t - t^4}{(1 + t^3)^2}\, dt.$$

$$\frac{S}{2} = \frac{9}{2} a^2 \int_0^1 \frac{2\, t^2 - t^5 - t^2 + 2\, t^5}{(1 + t^3)^3}\, dt = \frac{9\, a^2}{2} \left[\int_0^1 \frac{t^2\, dt}{(1 + t^3)^3} + \int_0^1 \frac{t^5\, dt}{(1 + t^3)^3} \right] =$$

$$= (\text{uz } 1 + t^3 = u, \text{ pa je } t^3 = u - 1) = -\frac{3}{2} a^2 \left| \frac{1}{1 + t^3} \right|_0^1 = \frac{3}{4} a^2.$$

$$\underline{S = \frac{3}{2} a^2.}$$

658. Bernoullijevom lemniskatom $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

(vidi § 7, 1, b) dio II Repetitorija)

Prelazimo na polarne koordinate $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Dobijemo:

$$r^4(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2 = a^2 r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi.$$

Prema (81):

$$\frac{S}{4} = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{4}$$

$$\underline{S = a^2.}$$

659. Kardioidom $x = a(2\cos t - \cos 2t)$
$y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

$[6\pi a^2]$.

660. Petljom krivulje $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{12} = xy$.

$\left[\text{Izvrši prijelaz na parametarsku jednadžbu uzevši } y = xt^2, \text{ pa je } t = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha};\ S = \frac{1}{30}\right]$.

B. Krivuljni integrali po koordinatama

Formula

1. Po ravnoj krivulji $k \equiv y = y(x)$, odnosno $x = x(y)$

$$\int_k P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b P[x, y(x)]\,dx + \int_c^d Q[x(y), y]\,dy. \qquad (179)$$

Ako je krivulja k zadana parametarski $\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\} t_1 \leqq t \leqq t_2$

$$\int_k P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{t_1}^{t_2} \{P[x(t), y(t)]\,x'(t) + Q[x(t), y(t)]\,y'(t)\}\,dt. \qquad (180)$$

2. Po prostornoj krivulji k koja je zadana parametarski

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right\} t_1 \leqq t \leqq t_2$$

$$\int_k P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} \{P[x(t), y(t), z(t)]\,x'(t) +$$

$$+ Q[x(t), y(t), z(t)]\,y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]\,z'(t)\}\,dt. \qquad (184)$$

Primjedba. U slučaju zatvorene krivulje k obilazit ćemo krivulju u pozitivnom smislu, tj. protiv kazaljke na satu (površina lijevo!), jer krivuljni integrali po koordinatama mijenjaju svoj predznak s promjenom smisla obilaženja krivulje k.

Primjena.

Smatramo li da su funkcije P i Q, odnosno P, Q i R komponente zadane sile F, tada daje krivuljni integral po koordinatama radnju sile F uzduž krivulje k.

Radnja

$$A = \int_k X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy;$$

$$A = \int_k X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz, \qquad (184\text{ a})$$

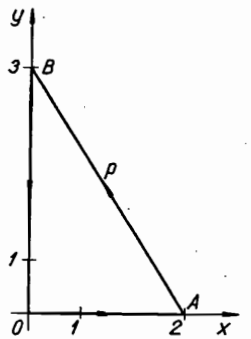
gdje je k ravna, odn. prostorna krivulja.

a. RAČUNANJE KRIVULJNIH INTEGRALA

Zadaci

U zadacima **661—672** uklj. izračunaj zadane krivuljne integrale uzete po ravnim krivuljama.

661. $\int_k x\,dy$, gdje je k kontura trokuta što ga čine koordinatne osi i pravac $p \equiv \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ u pozitivnom smislu.



Slika 188.

Računamo prema (179) i slici 188:

$$I = \int_{\overline{OA}} + \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BO}}; \qquad p \equiv x = 2\left(1 - \frac{y}{3}\right)$$

$$\int_{\overline{OA}} = 0, \text{ jer je } y = 0, \text{ pa i } dy = 0;$$

$$\int_{\overline{BO}} = 0, \text{ jer je } x = 0.$$

ostaje

$$I = 2\int_{\overline{AB}} \left(1 - \frac{y}{3}\right) dy = 2\int_0^3 \left(1 - \frac{y}{3}\right) dy = 2\left|y - \frac{y^2}{6}\right|_0^3 = \underline{3.}$$

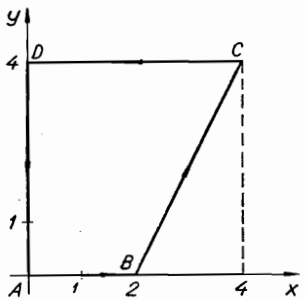
662. $\int_k x\,dy$, gdje je k kontura trokuta što ga čine koordinatne osi i pravac $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

$$\left[\frac{ab}{2}\right].$$

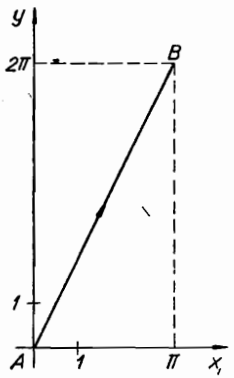
663. $\int_k (x^2 - y^2)\,dx$, gdje je k parabola $y = x^2$ od tačke (0, 0) do tačke (2, 4).

Uvrstimo li u zadani integral $y^2 = x^4$, dobijemo

$$I = \int_0^2 (x^2 - x^4)\,dx = \left|\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right|_0^2 = \underline{-\frac{56}{15}}.$$



Slika 189.



Slika 190.

664. $\int_k (x^2 + y^2)\,dy$, gdje je k kontura četverokuta $ABCD$ [$A(0, 0)$; $B(2, 0)$; $C(4, 4)$; $D(0, 4)$].

Vidi sl. 189.

$$I = \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BC}} + \int_{\overline{CD}} + \int_{\overline{DA}}$$

$$\int_{\overline{AB}} = 0, \quad \text{jer je } y = 0, \quad \text{pa je } dy = 0.$$

$$BC \equiv ? \quad y = \frac{4}{2}(x - 2) \quad \text{ili} \quad y = 2x - 4 \quad \text{pa je} \quad x = \frac{y}{2} + 2$$

$$CD \equiv y = 4, \quad dy = 0 \quad \text{pa je} \quad \int_{\overline{CD}} = 0.$$

$$DA \equiv x = 0.$$

$$I = \int_{BC} + \int_{DA} = \int_0^4 \left(\frac{y^2}{4} + 2y + 4 + y^2\right) dy + \int_4^0 y^2\,dy =$$

$$= \left|\frac{5}{12}y^3 + y^2 + 4y\right|_0^4 + \left|\frac{y^3}{3}\right|_4^0 = \underline{37\frac{1}{3}}.$$

665. $\int_{(0,0)}^{(2,2\pi)} -x\cos y\,dx + y\sin x\,dy$ uzduž odreska pravca koji spaja tačke $A(0, 0)$ i $B(\pi, 2\pi)$.

Prema slici 190:

$$AB \equiv y = 2x, \quad \text{pa je} \quad x = \frac{y}{2}.$$

Uvrstimo te vrijednosti u integral pa računamo prema (179):

$$I = -\int_0^\pi x\cos 2x\,dx + \int_0^{2\pi} y\sin\frac{y}{2}\,dy =$$

$$= -\left|x\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{4}\cos 2x\right|_0^\pi + \left|-y\cdot 2\cos\frac{y}{2} + 4\sin\frac{y}{2}\right|_0^{2\pi} = \underline{4\pi.}$$

666. $\int_k y\,dx + x\,dy$, gdje je k prvi kvadrant kružnice

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Prema (180) prelazimo na parametarsku jednadžbu zadane kružnice:

$$x = R\cos t, \quad dx = -R\sin t\,dt$$
$$y = R\sin t, \quad dy = R\cos t\,dt$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t)\,dt = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt = \frac{R^2}{2}\left|\sin 2t\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{0.}$$

667. $\displaystyle\int_k \frac{y^2\,dx - x^2\,dy}{x^2+y^2}$, gdje je k polukružnica $[S(0,0),\ r = R]$.

$$x = R\cos t; \quad dx = -R\sin t\,dt$$
$$y = R\sin t; \quad dy = R\cos t\,dt$$

$$I = \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi}(-R^3\sin^3 t - R^3\cos^3 t)\,dt = -R\int_0^{\pi}(\sin^3 t + \cos^3 t)\,dt =$$

= prema tipu VIII, v. dio II Repetitorija =

$$= -R\left|-\frac{1}{3}\sin^2 t\cos t - \frac{2}{3}\cos t + \frac{1}{3}\sin t\cos^2 t + \frac{2}{3}\sin t\right|_0^{\pi} =$$

$$= -R\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) = \underline{-\frac{4}{3}R.}$$

668. $\displaystyle\int_k \frac{x^2\,dy - y^2\,dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}$, gdje je k kvadrant astroide $\begin{matrix} x = R\cos^3 t \\ y = R\sin^3 t \end{matrix}$ od tačke $(R, 0)$ do tačke $(0, R)$

Računamo prema (180):

Za $x = R$ dobijemo $R = R\cos^3 t$, pa je $\cos^3 t = 1$ i $t_1 = 0$

Za $y = R$ dobijemo $R = R\sin^3 t$, pa je $\sin^3 t = 1$ i $t_2 = \frac{\pi}{2}$

$$dx = -3R\cos^2 t\sin t\,dt$$
$$dy = 3R\sin^2 t\cos t\,dt$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3R^3\cos^7 t\sin^2 t + 3R^3\sin^7 t\cos^2 t}{R^{\frac{5}{3}}(\cos^5 t + \sin^5 t)}\,dt = \text{nakon uređenja} =$$

$$= 3R\sqrt[3]{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{3}{4}R\sqrt[3]{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt =$$

$$= \frac{3}{4}R\sqrt[3]{R}\left|\frac{1}{2}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{3}{16}\pi R\sqrt[3]{R}.}$$

669. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,0)} 2xy\,dx + x^2\,dy$ uzduž a) $y = x$; b) $y = x^2$; c) $y = x^3$; d) $y^2 = x$.

[1 za sva četiri slučaja].

670. $\displaystyle\int_k y^2\,dx + x^2\,dy$, gdje je k gornja polovina elipse.

$$\left[-\frac{4}{3}ab^2\right].$$

671. $\displaystyle\int_{+k} \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, gdje je k kružnica $x^2 + y^2 = R^2$.

$$[-2\pi].$$

672. $\displaystyle\int_k 2xy\,dx - x^2\,dy$, gdje je k luk parabole $x = 2y^2$ od tačke $0(0,0)$ do tačke $A(2,1)$.

$$\left[\frac{12}{5}\right].$$

U zadacima **673–678** uklj. izračunaj zadane krivuljne integrale uzete po prostornim krivuljama.

673. $\displaystyle\int_k yz\,dx + z\sqrt{R^2-y^2}\,dy + xy\,dz$, gdje je k luk cilindričke spirale $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = \frac{at}{2\pi}$ od sjecišta krivulje s ravninom $z = 0$ do sjecišta s ravninom $z = a$.

Računamo prema (184):

Za $z = 0$ $\frac{at}{2\pi} = 0$, pa je $t_1 = 0$

Za $z = a$ $\frac{at}{2\pi} = a$, pa je $t_2 = 2\pi$

$$dx = -R\sin t\,dt; \quad dy = R\cos t\,dt; \quad dz = \frac{a}{2\pi}\,dt.$$

$$I = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{aR^2}{2\pi}t\sin^2 t + \frac{at}{2\pi}\sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\,R\cos t + \frac{aR^2}{2\pi}\sin t\cos t\right)dt =$$

$$= \frac{aR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(t\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)dt = \frac{aR^2}{2\pi}\left|\frac{t}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{4}\cos 2t\right|_0^{2\pi} = \underline{0.}$$

674. $\displaystyle\int_k \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$ gdje je k odrezak pravca

$$AB\,[A(1,1,1);\ B(4,4,4)].$$

Jednadžba pravca prema (41) glasi:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{3} \quad \text{ili} \quad x-1 = y-1 = z-1.$$

Odatle:

$$x = y = z; \qquad dx = dy = dz$$

$$I = \int_1^4 \frac{3\,x\,dx}{\sqrt{3x^2}} = \sqrt{3}\,|\,x\,|\,\Big|_1^4 = \underline{3\sqrt{3}}.$$

675. $\displaystyle\int_k y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, gdje je k presječnica sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$ i valjka $x^2+y^2=a\,x$ $(a>0,\ z \geqq 0)$.

Zadana krivulja k je kružnica, u kojoj se sijeku sfera i valjak $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$. Projekcija te kružnice na ravninu $X\,Y$ prikazana je na slici 185 uz zadatak 633. Prema toj slici:

$$\rho = a\cos\varphi; \quad x = a\cos^2\varphi; \quad y = a\cos\varphi\sin\varphi = \frac{a}{2}\sin 2\varphi.$$

Uvrštenje u jednadžbu sfere daje:

$$z^2 = a^2 - x^2 - y^2 = a^2 - a^2\cos^4\varphi - a^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi = a^2\sin^2\varphi$$

$$z = a\sin\varphi, \qquad dz = a\cos\varphi\,d\varphi,$$

dok je

$$dx = -\,a\sin 2\varphi\,d\varphi \quad \text{i} \quad dy = a\cos 2\varphi\,d\varphi.$$

Prema (184) smatrajući da je φ parametar:

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{a^3}{4}\sin^3 2\varphi + a^3\sin^2\varphi\cos 2\varphi + a^3\cos^4\varphi\cos\varphi \right\} d\varphi =$$

$$= 2a^3\left\{ -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\varphi\,d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi - \sin^4\varphi\right) d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi\,d\varphi \right\} =$$

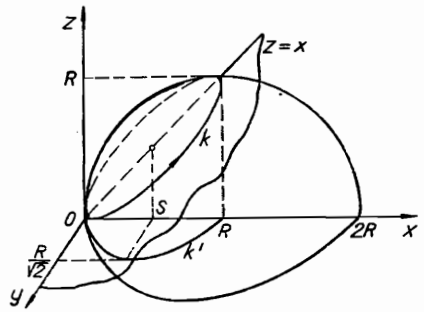
= prema tipu VIII, v. dio II Repetitorija =

$$= 2a^3\left| \left(\frac{1}{24}\sin^2 2\varphi\cos 2\varphi + \frac{1}{12}\cos 2\varphi\right) + \frac{1}{8}\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi - \frac{3}{8}\varphi + \frac{3\sin 2\varphi}{16}\right) + \frac{1}{5}\left(\cos^4\varphi\sin\varphi + \frac{4}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi + \frac{8}{3}\sin\varphi\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2a^3\left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{12} + \frac{1}{8}\,\frac{\pi}{2} - \frac{3}{8}\,\frac{\pi}{2} + \frac{8}{15}\right) = \underline{a^3\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{11}{15}\right)}.$$

676. $\displaystyle\int_k x\,y\,dx + y\,z\,dy + z\,x\,dz$, gdje je k luk kružnice $x^2+y^2+z^2 = 2\,R\,x$, $z = x$ uz $y > 0$.



Slika 191.

Kružnica k je presječnica sfere $(x-R)^2+y^2+z^2=R^2$ i ravnine $z=x$. Riješimo li zajedno te dvije jednadžbe pa uklonimo z, dobit ćemo projekciju kružnice k na ravninu $X\,Y$:

$$2x^2 - 2Rx + y^2 = 0, \quad \text{odnosno} \quad \frac{\left(x-\frac{R}{2}\right)^2}{\frac{R^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{R^2}{2}} = 1,$$

a to je elipsa sa $S\left(\frac{R}{2}, 0\right)$ i poluosima $\frac{R}{2}$ i $\frac{R}{\sqrt{2}}$ (vidi sl. 191). Računamo prema (184) izvršivši prijelaz na parametarsku jednadžbu elipse k':

$$x = \frac{R}{2}\cos t + \frac{R}{2} = z, \quad \text{jer je} \quad x = z; \quad dx = dz = -\frac{R}{2}\sin t\,dt$$

$$y = \frac{R}{\sqrt{2}}\sin t; \qquad dy = \frac{R}{\sqrt{2}}\cos t\,dt.$$

$$I = \int_\pi^0 \left[-\frac{R^3}{4\sqrt{2}}(\sin t\cos t + \sin t)\sin t + \frac{R^3}{4}(\sin t\cos t + \sin t)\cos t - \right.$$

$$-\frac{R^3}{8}(\cos^2 t + 2\cos t + 1)\sin t\Big]\,dt = -\frac{R^3}{4}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{\sin^3 t}{3} + \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right|_0^{\pi} + \right.$$

$$\left. = \left|-\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\left|-\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{\cos 2t}{2} - \cos t\right|_0^{\pi}\right] = -\frac{R^3}{4}\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{3}\right) =$$

$$= \underline{\left(\frac{1}{6} + \frac{\pi\sqrt{2}}{16}\right)R^3}.$$

677. $\int\limits_k (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, gdje je k prvi zavoj cilindričke spirale $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = b\,t$.

$[-2\pi a(a + b)]$.

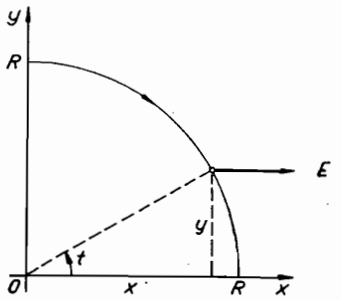
678. $\int\limits_k y\,dx + z\,dy + x\,dz$, gdje je k kružnica $x = R\cos\alpha\cos t$, $y = R\cos\alpha\sin t$; $z = R\sin\alpha$ (α je konstanta).

$[-\pi R^2\cos^2\alpha]$.

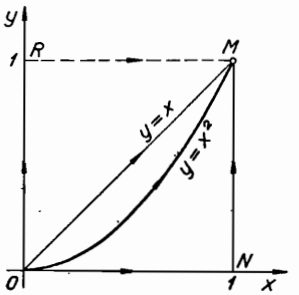
b. PRIMJENA. ODREĐIVANJE RADNJE SILE UZDUŽ KRIVULJE K

Zadaci

679. U svakoj tački ravnine djeluje na materijalnu tačku konstantna sila F, koja ima smjer osi $+X$. Odredi radnju što je vrši sila pri pomicanju tačke uzduž luka kružnice $x^2 + y^2 = R^2$ koji leži u I kvadrantu.



Slika 192.



Slika 193.

Računamo prema (184 a) uzevši u obzir da na tačku djeluje sila F. Prema slici 192 imamo za projekcije zadane sile u smjer koordinatnih osi izraze:

$$X = F; \quad Y = 0, \quad \text{jer je okomita na } F.$$

$$x = R\cos t; \qquad \dot{x} = -R\sin t\,dt.$$

$$A = \int\limits_k X\,dx + Y\,dy = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} F\cdot R\sin t\,dt = FR\,|\cos t\,|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \underline{FR}.$$

680. U svakoj tački ravnine djeluje sila F, kojoj su projekcije u koordinatne osi $X = xy$ i $Y = x + y$. Izračunaj radnju sile F pri pomicanju tačke iz ishodišta koordinatnog sustava u tačku $M(1, 1)$ i to:

a) po pravcu $y = x$;

b) po paraboli $y = x^2$;

c) po slomljenoj crti ONM i po crti ORM.

$$A = \int\limits_k xy\,dx + (x + y)\,dy.$$

Prema slici 193 imamo:

ad a) Za $y = x$;

$$X = x^2, \quad Y = 2x; \quad dy = dx$$

$$A_1 = \int\limits_0^1 (x^2 + 2x)\,dx = \left|\frac{x^3}{3} + x^2\right|_0^1 = \underline{\frac{4}{3}}.$$

ad b) Za $y = x^2$;

$$X = x^3, \quad Y = x + x^2, \quad dy = 2x\,dx$$

$$A_2 = \int\limits_0^1 [x^3 + (x + x^2)\,2x]\,dx = \left|\frac{x^4}{4} + 2\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\right|_0^1 = \underline{\frac{17}{12}}.$$

ad c) Za $\overline{ON}$ $y = 0$, pa je $dy = 0$; $X = 0$, $Y = y$.

Za $\overline{NM}$ $x = 1$, $dx = 0$; $X = y$, $Y = 1 + y$.

$$A_3 = \int\limits_0^1 (1 + y)\,dy = \left|y + \frac{y^2}{2}\right|_0^1 = \underline{\frac{3}{2}}.$$

Za $\overline{OR}$ $x = 0$, $dx = 0$; $X = 0$, $Y = y$.

Za $\overline{RM}$ $y = 1$, $dy = 0$; $X = x$, $Y = 0$.

$$A_4 = \int\limits_0^1 y\,dy + \int\limits_0^1 x\,dx = \left|\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \underline{1}.$$

681. U svakoj tački M elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ djeluje sila F, kojoj je veličina numerički jednaka udaljenosti od tačke M do središta elipse, a usmjerena je prema tom središtu. Izračunaj radnju sile F pri pomaku tačke:

a) uzduž luka elipse koji leži u I kvadrantu;

b) uzduž čitave elipse.

ad a) Prema slici 194:

$$F=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{i} \quad X=F_x=-x, \quad Y=F_y=-y.$$

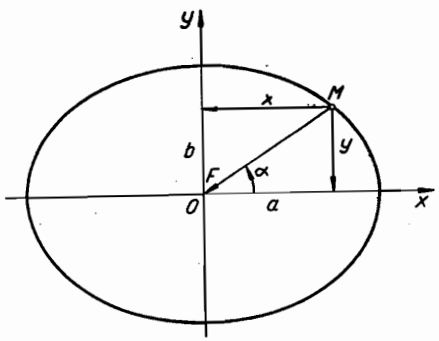
Napisavši jednadžbu elipse u obliku $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ i izračunavši $dx=-a\sin t\,dt$, $dy=b\cos t\,dt$, dobijemo

$$A=\int_k -x\,dx-y\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2\sin t\cos t-b^2\sin t\cos t)\,dt=$$

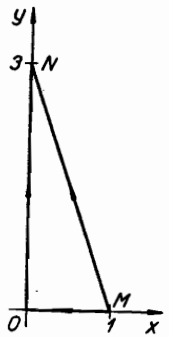
$$=\left|a^2\frac{\sin^2 t}{2}-b^2\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\underline{\frac{a^2-b^2}{2}}$$

ad b)

$$A=\left|\frac{a^2}{2}\sin^2 t-\frac{b^2}{2}\sin^2 t\right|_0^{2\pi}=\underline{0.}$$



Slika 194.



Slika 195.

682. Projekcije sile na osi koordinatnog sustava zadane su formulama $X=2xy$, $Y=x^2$. Pokaži da radnja zadane sile ovisi jedino od početne i konačne tačke puta, a ne zavisi od oblika puta i to za gibanje tačke od $M(1,0)$ do $N(0,3)$. Vidi sliku 195.

$$A=\int_k 2xy\,dx+x^2\,dy$$

1) Tačka se giblje po pravcu MN.

$$MN\equiv\frac{x}{1}+\frac{y}{3}=1, \quad \text{pa je} \quad y=-3x+3, \quad \text{a} \quad dy=-3\,dx$$

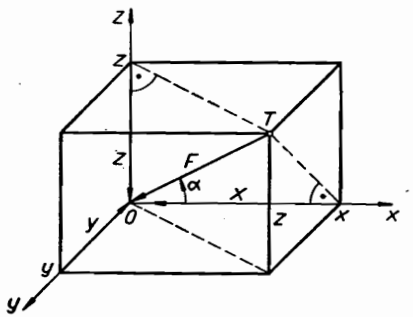
$$A=\int_0^1[2x(-3x+3)-3x^2]\,dx=\int_0^1(-9x^2+6x)\,dx=\left|-3x^3+3x^2\right|_0^1=\underline{0.}$$

2) Tačka se giblje po slomljenoj crti MON.

Za $\overline{MO}$: $y=0$, $dy=0$, pa je $X=0$ i $Y=0$ te je $\underline{A=0}$

Za $\overline{ON}$: $x=0$, $dx=0$, pa je $X=0$ i $Y=0$ te je $\underline{A=0.}$

683. Sila je po veličini obratno razmjerna s udaljenošću njena hvatišta od ravnine XOY, a usmjerena je prema ishodištu koordinatnog sustava. Izračunaj radnju pri pomicanju tačke pod djelovanjem navedene sile po pravcu $p\equiv x=at$, $y=bt$, $z=ct$ od tačke $M(a,b,c)$ do tačke $N(2a,2b,2c)$.



Slik o.

Uzevši u obzir da je prema slici 196 u bilo kojoj tački T prostora sila $F=\frac{k}{z}$, gdje k koeficijent razmjernosti, i da parametarska jednadžba pravca p glasi:

$$t=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \qquad \text{(a)}$$

pa je u tački $M(a,b,c)$ $t_1=1$, dok je u $M(2a,2b,2c)$ $t_2=2$.

Dobijemo prema slici i formulama (4) i (39):

$$X=F_x=F\cos\alpha=-\frac{k}{z}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\text{prema (a)}=-\frac{k}{ct}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Na isti način dobijemo:

$$Y=F_y=F\cos\beta=-\frac{k}{ct}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \text{i} \quad Z=F_z=-\frac{k}{ct}\cdot\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

dok je

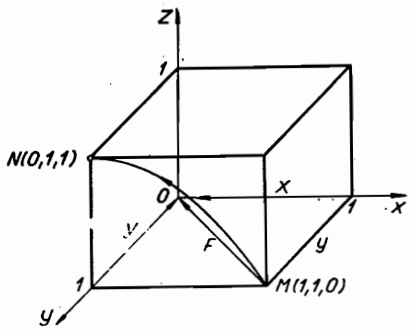
$$dx=a\,dt; \quad dy=b\,dt \quad \text{i} \quad dz=c\,dt.$$

Prema (184 a) imamo:

$$A = -\frac{k}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \int_1^2 \left(\frac{a^2}{c\,t} + \frac{b^2}{c\,t} + \frac{c^2}{c\,t}\right) dt = -\frac{k(a^2+b^2+c^2)}{c\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \int_1^2 \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{k}{c}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot \ln 2.$$

684. Sila je po veličini obratno razmjerna s udaljenošću njena hvatišta od osi Z, okomita je na toj osi i usmjerena je prema njoj. Odredi radnju te sile pri pomicanju tačke pod djelovanjem sile po kružnici $x = \cos t$, $y = 1$, $z = \sin t$ od tačke $M(1, 1, 0)$ do tačke $N(0, 1, 1)$. Vidi sl. 197.



Slika 197.

Uvrštenje koordinata tačaka M i N u jednadžbu kružnice daje $t_1 = 0$ za tačku M i $t_2 = \frac{\pi}{2}$ za tačku N, dok je sila $F = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$, gdje je k koeficijent razmjernosti.

Prema slici i (4): označivši s α kut između F i osi X:

$$X = F_x = -\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\alpha = -\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{k\,x}{x^2+y^2} = -\frac{k\cos t}{\cos^2 t+1}.$$

Na isti način dobijemo prema (184):

$$Y = F_y = -\frac{k\sin t}{\cos^2 t+1};\ Z = F_z = 0, \text{ jer je } \cos\gamma = \cos 90^0 = 0;\ dx = -\sin t\,dt,\ dy = 0.$$

$$A = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\cdot\sin t}{\cos^2 t+1}\,dt = (\text{uz } \cos^2 t + 1 = u) = -\frac{k}{2}\left|\ln(\cos^2 t+1)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{k}{2}(\ln 1 - \ln 2) = 0{,}5\,k\cdot\ln 2.$$

685. Odredi radnju sile teže pri pomicanju tačke mase m iz položaja $A(x_1, y_1, z_1)$ u položaj $B(x_2, y_2, z_2)$ (os Z usmjerena je vertikalno prema gore).

Sila teže $F = m\,g$, gdje je g akceleracija sile teže.

$X = F_x = 0$, jer je F_x okomita na os Z.

S istog je razloga $Y = F_y = 0.$ $\quad Z = F_z = -m\,g$

$$A = -m\,g\int_{z_1}^{z_2} dz = -m\,g(z_2 - z_1) = m\,g(z_1 - z_2).$$

C. Krivuljni integrali izraza koji predočuju totalne diferencijale nekih funkcija

Formule

1. Uzduž ravnih krivulja

Predočuje li integrand krivuljnog integrala totalni diferencijal neke funkcije $U(x, y)$, tj. ako je ispunjen uvjet integrabilnosti

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{147}$$

krivuljni se integral najjednostavnije računa tako da se odredi funkcija $U(x, y)$ prema

$$U = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + C \tag{148}$$

u koju se uvrste granice integracije, jer vrijednost krivuljnog integrala u slučaju totalnog diferencijala ne ovisi o putu već jedino o početnoj i konačnoj tački toga puta, ako put integriranja leži potpuno unutar nekog područja σ, a funkcije P i Q su neprekinute zajedno sa svojim prvim parcijalnim derivacijama unutar tog područja σ.

2. Uzduž prostornih krivulja

Analogno se postupa, ako je integrand krivuljnog integrala totalni diferencijal funkcije $U(x, y, z)$, tj. ako je ispunjen uvjet integrabilnosti

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};\qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x};\qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \tag{149}$$

dok se funkcija $U(x, y, z)$ izračuna prema

$$U = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz + C \tag{150}$$

pa se uvrste granice integracije.

Riješi također zadatke 569–581 uklj. navedeni u VIII poglavlju ove knjige: Egzaktni diferencijali i njihovo integriranje.

Zadaci

U zadacima **686—696** uklj. pokaži da su integrandi zadanih krivuljnih integrala totalni diferencijali i riješi te integrale.

686. $\displaystyle\int_{(3;4)}^{(5;12)} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$.

Uz pretpostavku da ishodište koordinatnog sustava ne leži na krivulji po kojoj se integrira, jer su u $O(0, 0)$ obje funkcije P i Q prekinute, računamo prema (147) i (148):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Kako je $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, integrand je dU, pa je

$$U = \int_{x_0}^{x} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{y}{x_0^2+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C$$

$$I = \frac{1}{2}\left|\ln(x^2+y^2)\right|_{(3;4)}^{(5;12)} = \frac{1}{2}\,[\ln(25+144) - \ln(9+16)] = \underline{\ln\frac{13}{5}}.$$

687. $\displaystyle\int_{(1;1)}^{(3;1)} \frac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2}$ pri čemu se pretpostavlja da put integriranja ne siječe pravac $y = -x$ (za $y = -x$ integrand je prekinut).

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2y}{(x+y)^3}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2y}{(x+y)^3}$$

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{x+2y}{(x+y)^2}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{y}{(x_0+y)^2}\,dy =$$ (prvi integral lako riješimo uz supstituciju

$x + y = t$, dok drugi integral otpada) $= \left|\ln(x+y) - \dfrac{y}{x+y}\right|_{(1;1)}^{(3;1)} = \underline{\ln 2 + \dfrac{1}{4}}$.

688. $\displaystyle\int_{+k} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, gdje je k kvadrant elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ koji leži u I kvadrantu koordinatnog sustava.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$U = \int_{x_0}^{x} \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dy + C = \sqrt{1+x^2+y^2} + C.$$

Kako je integrand totalni diferencijal pa vrijednost krivuljnog integrala ne ovisi o putu integriranja, integrirat ćemo po pravcu $AB\,[A(a; 0),\ B(0; b)]$, koji spaja krajnje tačke prvog kvadranta elipse:

$$I = \left|\sqrt{1+x^2+y^2}\right|_{(a;0)}^{(0;b)} = \underline{\sqrt{1+b^2} - \sqrt{1+a^2}}.$$

Integriraj po kvadrantu elipse ($x = a\cos t$, $y = b\sin t$), dobit ćeš isti rezultat.

689. $\displaystyle\int_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy.$

[62].

690. $\displaystyle\int_{(1;2)}^{(2;1)} \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ po putu koji ne siječe os X.

$\left[\dfrac{3}{2}\right]$.

691. $\displaystyle\int_{(0;0)}^{(1;1)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right)dy.$

$[1 + \sqrt{2}]$.

692. $\displaystyle\int_{(1;2;3)}^{(3;2;1)} yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz.$

Računamo prema (149) i (150):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = z = \frac{\partial Q}{\partial x}; \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = y = \frac{\partial R}{\partial x}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = x = \frac{\partial R}{\partial y}$$

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} yz\,dx + \int_{y_0}^{y} zx_0\,dy + \int_{z_0}^{z} x_0y_0\,dz + C = xyz + C$$

$$I = \left|xyz\right|_{(1;2;3)}^{(3;2;1)} = 6 - 6 = 0.$$

693. $\displaystyle\int_{(0;0;0)}^{(3;4;5)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Na isti način dobijemo:

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, a također $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}$. Pokaži to!

$$U = \int_{x_0}^{x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dx + \int_{y_0}^{y} \frac{y}{\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}}\, dy + \int_{z_0}^{z} \frac{z}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z^2}}\, dz + C$$

$$U = \left| \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right|_{(0;0;0)}^{(3;4;5)} = \underline{5\sqrt{2}.}$$

694. $\displaystyle\int_{(1;-1;2)}^{(2;1;3)} x\, dx - y^2\, dy + z\, dz.$

$$\left[\frac{10}{3}\right].$$

695. $\displaystyle\int_{(1;1;1)}^{(a;b;c)} y\, z\, dx + z\, x\, dy + x\, y\, dz.$

$$[a\, b\, c - 1].$$

696. $\displaystyle\int_{(1;1;1)}^{\left(x;y;\frac{1}{xy}\right)} \frac{y\, z\, dx + z\, x\, dy + x\, y\, dz}{x\, y\, z}.$

(put integriranja nalazi se u I kvadrantu).

$$[0].$$

XII. PLOŠNI INTEGRALI

A. Plošni integrali po površini S plohe

Formule

$$I = \iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_\sigma f[x, y, z(x, y)] \frac{dx\, dy}{\cos\gamma} =$$

$$= \iint_\sigma f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy \qquad (185)$$

gdje je σ projekcija plohe S na ravninu $X\,Y$, dok je γ kut, što ga normala na dS zatvara s osi $+\,Z$.

$$I = \iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_{\sigma_1} f[x(y, z), y, z] \frac{dy\, dz}{\cos\alpha} =$$

$$= \iint_{\sigma_1} f[x(y, z), y, z] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dy\, dz \qquad (185\text{ a})$$

gdje je σ_1 projekcija plohe S na ravninu $Y\,Z$, dok je α kut normale na dS s osi $+\,X$.

$$I = \iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_{\sigma_1} [x, y(x, z), z] \frac{dx\, dz}{\cos\beta} =$$

$$= \iint_{\sigma_2} f[x, y(x, y), z] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dz \qquad (185\text{ b})$$

gdje je σ_2 projekcija plohe S na ravninu $X\,Z$, dok je β kut normale na dS s osi $+\,Y$.

Pri računanju kosinusa smjera plošne normale treba uzeti u obzir predznak.

Ploha S se projicira na jednu bilo koju koordinatnu ravninu, ukoliko je ta projekcija omeđeni dio te ravnine, a ne krivulja ili pravac, pa se računa kosinus onog kuta, što ga zatvara normala na zadanu plohu s onom koordinatnom ravninom na koju smo plohu projicirali. Vrijednost plošnog integrala ne ovisi o izabranoj ravnini projekcije.

Zadaci

U zadacima **697—703** uklj. izračunaj zadane plošne integrale po površinama zadanih ploha.

697. $\iint\limits_S x\,dS$, gdje je S dio sfere $x^2+y^2+z^2=R^2$, koji se nalazi u I oktantu.

Računamo prema (185):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$$

$$\frac{1}{\cos\gamma}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{R}{z}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

Ispred drugog korijena uzeli smo predznak $+$, jer normala na sferu u I oktantu zatvara s osi $+Z$ kut $\gamma<90^0$, pa je $\cos\gamma>0$.

$$I=R\iint\limits_\sigma \frac{x\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Prelazimo na polarne koordinate:

$$x=\rho\cos\varphi;\qquad y=\rho\sin\varphi;\qquad dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\varphi$$

$$I=R\iint\limits_{\sigma'}\frac{\rho\cos\varphi\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^R\frac{\rho^2\,d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=$$

$$=R\left|\sin\varphi\right|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left|-\frac{\rho}{2}\sqrt{R^2-\rho^2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{\rho}{R}\right|_0^R=\underline{\frac{\pi R^3}{4}}.$$

698. $\iint\limits_S \frac{dS}{r^2}$, gdje je S valjak $x^2+y^2=R^2$ omeđen ravninama $z=0$ i $z=H$, dok je r udaljenost bilo koje tačke T plohe od ishodišta koordinatnog sustava.

Prema slici 198: $r^2=z^2+R^2$. Osim toga vidimo, da je projekcija plašta na ravninu XY kružnica ($\cos\gamma=\cos 90^\circ=0$!), pa moramo plašt valjka projicirati na ravninu XZ, a ta je projekcija pravokutnik baze $2R$ i visine H, dS je dakle $dx\,dz$.

Računamo prema (185 b) uzevši u obzir da je

$$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}\quad\text{pa je}\quad \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}},\quad\text{dok je}\quad \frac{\partial y}{\partial z}=0.$$

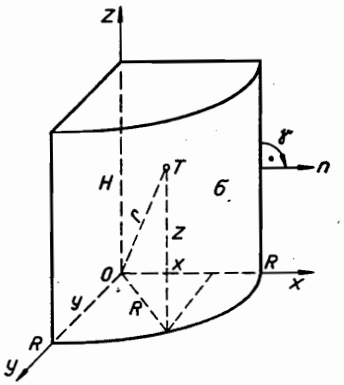
$$\frac{1}{\cos\beta}=\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Za stražnji dio plašta $\cos\beta<0$, ali za taj dio je i $y=-\sqrt{R^2-x^2}<0$.

Uzevši u obzir da moramo projicirati na ravninu XZ prednji i stražnji dio plašta valjka, dobijemo

$$I=2R\iint\limits_{\sigma_1}\frac{dx\,dz}{(R^2+z^2)\sqrt{R^2-x^2}}=2R\int\limits_0^H\frac{dz}{R^2+z^2}\int\limits_{-R}^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=$$

$$=2\left|\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{R}\right|_0^H\cdot\left|\arcsin\frac{x}{R}\right|_{-R}^R=\underline{2\pi\operatorname{arc\,tg}\frac{H}{R}}.$$



Slika 198.

699. $\iint\limits_S \frac{dS}{r}$, gdje je S dio plohe hiperbolnog paraboloida $z=xy$, što ga odsjeca valjak $x^2+y^2=R^2$, dok je r udaljenost bilo koje tačke plohe od osi Z.

Računamo prema (185) uzevši u obzir da je $r^2=x^2+y^2$.

Za $z=xy$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\quad\text{i}\quad\frac{\partial z}{\partial y}=x$$

$$\frac{1}{\cos\gamma}=\sqrt{1+x^2+y^2}$$

$$I=\iint\limits_\sigma\frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy=\iint\limits_{\sigma'}\frac{\sqrt{1+\rho^2}}{\rho}\rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho=$$

$$=\text{prema predtipu C (v. dio II Repetitorija)}=$$

$$=2\pi\left|\frac{\rho}{2}\sqrt{\rho^2+1}+\frac{1}{2}\ln(\rho+\sqrt{\rho^2+1})\right|_0^R=\underline{\pi\left[R\sqrt{R^2-1}+\ln(R+\sqrt{R^2+1})\right]}.$$

700. $\displaystyle\iint_S \frac{dS}{(1+x+z)^2}$, gdje je S dio ravnine $x+y+z=1$, koji se nalazi u I oktantu.

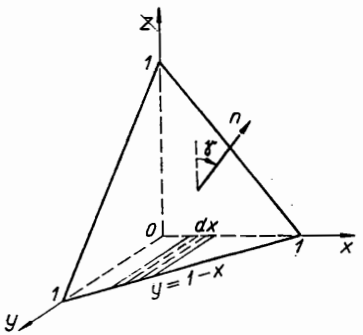
Računamo prema slici 199 i (185) uzevši u obzir da je $z = 1 - x - y$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -1; \qquad \frac{1}{\cos\gamma} = +\sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

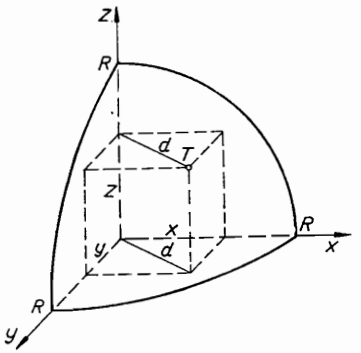
$$(1+x+z)^2 = (1+x+1-x-y)^2 = (2-y)^2$$

$$I = \sqrt{3}\iint_\sigma \frac{dx\,dy}{(2-y)^2} = \sqrt{3}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(2-y)^2} = \sqrt{3}\int_0^1 dx \left|\frac{1}{2-y}\right|_0^{1-x} =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\right) dx = \sqrt{3}\left|\ln(1+x) - \frac{x}{2}\right|_0^1 = \underline{\sqrt{3}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)}.$$



Slika 199.



Slika 200.

701. $\displaystyle\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, gdje je S plašt kružnog stošca

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{b^2} \qquad (0 < z < b).$$

Uzevši u obzir da za $z = b$ stožac se projicira na ravninu XY kao krug $x^2 + y^2 = a^2$ (prikaži grafički zadani stožac), računamo prema (185):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{b^2 x}{a^2 z}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{b^2 y}{a^2 z}; \qquad \frac{1}{\cos\gamma} = \frac{\sqrt{a^4 z^2 + b^4 x^2 + b^4 y^2}}{a^2 z}.$$

Uvrštenje

$$z^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2+y^2) \quad \text{daje} \quad \frac{1}{\cos\gamma} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

$$I = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\iint_\sigma \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\iint_{\sigma'} \rho^2\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho^2\,d\rho = \underline{\frac{2\pi a^2}{3}\sqrt{a^2+b^2}}.$$

702. $\displaystyle\iint_S y\,dS$, gdje je S polusfera $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

[0].

703. $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)\,dS$, gdje je S sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

$$\left[\frac{8}{3}\pi a^4\right].$$

704. Odredi masu sfere polumjera R, ako je plošna gustoća u svakoj tački jednaka udaljenosti te tačke od nekog čvrstog polumjera sfere.

Uzevši za taj polumjer onaj, koji leži na osi Z, dobijemo prema slici (200):

$$\text{gustoća } \mu = d = +\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{pa je} \quad dm = \sqrt{x^2+y^2}\cdot dS.$$

Prema $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ i (185):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}, \quad \text{pa je} \quad \frac{1}{\cos\gamma} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

$$m = \iint_\sigma \mu\cdot dS = R\iint_\sigma \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \text{uz prijelaz na polarne koordinate} =$$

$$= 2R\iint_{\sigma'} \frac{\rho^2\,d\rho\,d\varphi}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = \text{pri čemu smo uzeli u obzir i projekciju donje polovine sfere za}$$

$$\text{koju je } \cos\gamma < 0, \text{ ali je i } z < 0 = 2R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho^2\,d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} =$$

$$= 2R\cdot 2\pi\left|-\frac{\rho}{2}\sqrt{R^2-\rho^2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{\rho}{R}\right|_0^R = \underline{\pi^2 R^3}.$$

B. Plošni integrali po koordinatama

Formule

$$I = \iint\limits_S f(x, y, z)\, dx\, dy = \iint\limits_S f(x, y, z) \cos\gamma\, dS = \iint\limits_\sigma f[x, y, z(x, y)]\, dx\, dy \qquad (186)$$

gdje je $dx\, dy = d\sigma = dS \cdot \cos\gamma =$ orijentirani element plohe S projiciran na ravninu $X\,Y$, pa se zadana ploha projicira samo na ravninu $X\,Y$.

$$I = \iint\limits_S f(x, y, z)\, dy\, dz = \iint\limits_S f(x, y, z) \cos\alpha\, dS = \iint\limits_{\sigma_1} f[x(y, z), y, z]\, dy\, dz \qquad (189)$$

gdje je $dy\, dz = d\sigma_1 = dS \cdot \cos\alpha =$ orijentirani element plohe S projiciran na ravninu $Y\,Z$, pa se zadana ploha projicira samo na ravninu $Y\,Z$.

$$I = \iint\limits_S f(x, y, z)\, dx\, dz = \iint\limits_S f(x, y, z) \cos\beta\, dS = \iint\limits_{\sigma_2} f[x, y(x, z), z]\, dx\, dz \qquad (191)$$

gdje je $dx\, dz = d\sigma_2 = dS \cdot \cos\beta =$ orijentirani element plohe S projiciran na ravninu $X\,Z$, pa se zadana ploha projicira samo na ravninu $X\,Z$.

Sva tri plošna integrala po koordinatama računaju se uglavnom na isti način kao i plošni integrali po površini plohe, razlika se sastoji samo u tome da se

1. zadana se ploha ne projicira na bilo koju koordinatnu ravninu, već samo na onu, koja je u integralu naznačena;
2. vrijednost kosinusa smjera normale na plohu se ne računa, već se uzima u obzir samo predznak tog kosinusa smjera.

Često se računaju plošni integrali koji predočuju zbroj triju navedenih plošnih integrala uzetih od triju različitih funkcija $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z)$:

$$\iint\limits_S P(x, y, z)\, dy\, dz + Q(x, y, z)\, dx\, dz + R(x, y, z)\, dx\, dy =$$
$$= \iint\limits_S [P(x, y, z) \cos\alpha + Q(x, y, z) \cos\beta + R(x, y, z) \cos\gamma]\, dS \qquad (192)$$

pri čemu pri računanju prvog dijela tog integrala zadana se ploha projicira sama na ravninu $Y\,Z$, drugog dijela — samo na ravninu $X\,Z$ i trećeg dijela — samo na ravninu $X\,Y$.

Taj opći oblik plošnog integrala po koordinatama računa se na gore navedeni način.

Zadaci

U zadacima **705—717** uklj. izračunaj zadane plošne integrale po koordinatama.

705. $\iint\limits_S x^2 y^2 z\, dx\, dy$, gdje je S vanjska strana donje polovine sfere $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Prema slici 201:

$$\gamma > 90^0, \quad \text{pa je} \quad \cos\gamma < 0, \quad \text{dok je} \quad z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Računamo prema (186):

$$I = +\iint\limits_\sigma x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy.$$

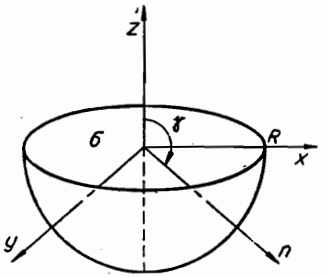
Prelazimo na polarne koordinate, jer je projekcija polusfere na ravninu $X\,Y$ krug polumjera R.

$$I = \iint\limits_{\sigma'} \rho^5 \cos^2\varphi \sin^2\varphi \sqrt{R^2 - \rho^2}\, d\rho\, d\varphi = \frac{1}{4} \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi \int\limits_0^R \rho^5 \sqrt{R^2 - \rho^2}\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \text{(drugi integral se lako rješava uz supstituciju } R^2 - \rho^2 = t) =$$

$$= \frac{1}{8} \left| \varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right|_0^{2\pi} \cdot \left| -\frac{R^4}{3} \sqrt{(R^2 - \rho^2)^3} + \frac{2R^2}{5} \sqrt{(R^2 - \rho^2)^5} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{7} \sqrt{(R^2 - \rho^2)^7} \right|_0^R = \underline{\frac{2\pi R^7}{105}}.$$



Slika 201.

706. $\iint\limits_S z\, dx\, dy$, gdje je S vanjska strana elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Računamo prema (186) uzevši u obzir da je za gornju polovinu elipsoida $\cos\gamma > 0$, jer je $\gamma < 90^0$, dok je $z > 0$, a za donju polovinu $\cos\gamma < 0$, jer je $\gamma > 90^0$, dok je $z < 0$, pa će integral imati za obje polovine elipsoida iste pozitivne vrijednosti.

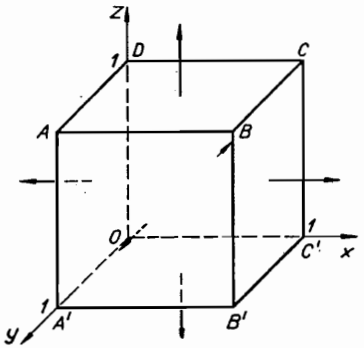
$$I = 2c \iint\limits_\sigma \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy.$$

Kako je projekcija elipsoida na ravninu XY elipsa s poluosima a i b, prelazimo na eliptičke koordinate:

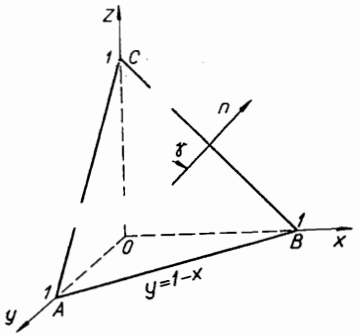
$$x = a\,u\cos v; \qquad y = b\,u\sin v; \qquad dx\,dy = a\,b\,u\,du\,dv$$

$$I = 2\,c\,a\,b\iint\limits_{\sigma'}\sqrt{1-u^2\cos^2 v-u^2\sin^2 v}\;u\,du\,dv = 2\,a\,b\,c\iint\limits_{\sigma'}\sqrt{1-u^2}\;u\,du\,dv =$$

$$= 2\,a\,b\,c\left|dv\Big|_0^{2\pi}\right| - \frac{1}{3}\sqrt{(1-u^2)^3}\Big|_0^1\Bigg| = \underline{\frac{4}{3}\pi\,a\,b\,c.}$$



Slika 202.



Slika 203.

707. $\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, gdje je S vanjska strana kocke, što je čine ravnine $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 1,\ y = 1,\ z = 1$ (v. sl. 202).

Rješavajući taj integral prema (192) moramo sve plohe kocke projicirati redom 1) na ravninu YZ, 2) na ravninu XZ i 3) na ravninu XY, pri čemu će projekcije onih pobočaka kocke, koje su okomite na ravninu projiciranja, biti jednake nuli.

$I =$ [rješavajući I član zadanog integrala projiciramo kocku na ravninu YZ i to pobočku $A'D$ $(x = 0,\ \cos\alpha = \cos 180^0 = -1)$ i pobočku $B'C$ $(x = 1,\ \cos\alpha = \cos 0 = 1)$] $=$

$= 0 + 1\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 dz +$ [za II član projiciramo na ravninu XZ i to pobočku OC $(y = 0,$ $\cos\beta = \cos 180^0 = -1)$ i $A'B$ $(y = 1,\ \cos\beta = \cos 0 = 1)$] $+ 0 + \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dz +$

$+$ [za III član projiciramo na ravninu XY i to pobočku $A'C'$ $(z = 0,\ \cos\gamma = \cos 180^0 =$

$= -1)$ i AB $(z = 1,\ \cos\gamma = 1)$] $+ 0 + \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy = 1 + 1 + 1 = \underline{3.}$

708. $\iint\limits_S x\,z\,dx\,dy + x\,y\,dy\,dz + y\,z\,dx\,dz$, gdje je S vanjska strana piramide, koja se sastoji od ravnina $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ i $x + y + z = 1$ (v. sl. 203).

Riješimo posebno svaki član zadanog integrala označivši ih redom s I_1, I_2 i I_3.

$$I_1 = \iint\limits_S x\,z\,dx\,dy = ?$$

Projicirajući sve plohe piramide na ravninu XY, vidimo prema slici, da su projekcije ploha AOC i BOC jednake nuli, da je projekcija $\triangle ABC$ trokut AOB, pri čemu je $\cos\gamma > 0$, a $z = 1 - x - y$, dok je projekcija $\triangle AOB$ sam $\triangle AOB$, pri čemu je $z = 0$, dok je $\cos\gamma < 0$.

Dobijemo:

$$I_1 = \iint\limits_{AOB} x(1-x-y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_0^{1-x}(1-x-y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 x\,dx\left|y - xy - \frac{y^2}{2}\right|_0^{1-x} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1(x - 2x^2 + x^3)\,dx = \frac{1}{2}\left|\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

$$I_2 = \iint\limits_S x\,y\,dy\,dz = ?$$

Projicirajući sve plohe piramide na ravninu YZ dobijemo: projekcije $\triangle AOB$ i $\triangle BOC$ jednake su nuli, za $\triangle AOC$ $x = 0$, dok je $\triangle AOC$ projekcija $\triangle ABC$, pri čemu je $x = 1 - y - z$, a $\cos\alpha > 0$.

$$I_2 = \iint\limits_{AOC} y(1-y-z)\,dy\,dz = \int\limits_0^1 y\,dy\int\limits_0^{1-y}(1-y-z)\,dz = \text{vidi } I_1 = \frac{1}{24}.$$

$$I_3 = \iint\limits_S y\,z\,dx\,dz.$$

Projiciranje ploha piramide na ravninu XZ daje: projekcija $\triangle AOC$ i $\triangle BOC$ jednake su nuli, dok je $\triangle BOC$ projekcija $\triangle ABC$, pri čemu je $y = 1 - x - z$, dok je $\cos\beta > 0$.

$$I_3 = \iint\limits_{BOC} z(1-x-z)\,dx\,dz = \int\limits_0^1 z\,dz\int\limits_0^{1-z}(1-z-x)\,dx = \frac{1}{24}.$$

$$\iint\limits_S = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{3}{24} = \underline{\frac{1}{8}}.$$

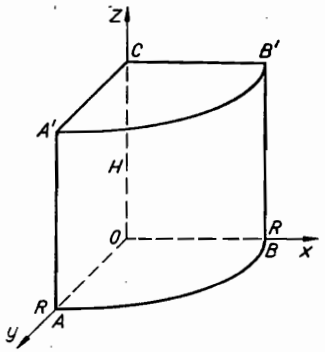
709. $\iint\limits_S y\,z\,dx\,dy + x\,z\,dy\,dz + x\,y\,dx\,dz$, gdje je S vanjska strana plohe, koja se nalazi u I oktantu, a sastoji se od valjka $x^2 + y^2 = R^2$ i ravnina $x = 0, y = 0, z = 0$ i $z = H$ (v. sl. 204).

$$I_1 = \iint\limits_S y\,z\,dx\,dy = ?$$

Projekcije sviju ploha na ravninu $X\,Y$ jednake su nuli, osim baza valjka. Za donju je bazu $z = 0$, pa je $I_1 = 0$, dok je za gornju bazu $z = H$, $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, a $\cos\gamma = \cos 0 = 1$.

$$I_1 = H \iint\limits_{AOB} y\,dx\,dy = H \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy = \frac{H}{2}\int_0^R (R^2 - x^2)\,dx = \frac{H}{2}\left| R^2 x - \frac{x^3}{3}\right|_0^R = \frac{H R^3}{3}.$$

$$I_2 = \iint\limits_S x\,z\,dy\,dz = ?$$



Slika 204.

Projekcije obiju baza na ravninu $Y\,Z$ jednake su nuli, za $A\,O\,C\,A'$ $x = 0$, pa je $I_2 = 0$, dok je za plašt: $x = \sqrt{R^2 - y^2}$, a $\cos\alpha > 0$.

$$I_2 = \iint\limits_{AOCA'} z\sqrt{R^2 - y^2}\,dy\,dz = \text{prema predtipu } C \text{ (v. dio II Repetitorija)} =$$

$$= \left|\frac{z^2}{2}\right|_0^H \cdot \frac{1}{2}\left| R^2 \arcsin\frac{y}{R} - y\sqrt{R^2 - y^2}\right|_0^R = \frac{\pi H^2 R^2}{8}.$$

$$I_3 = \iint\limits_S x\,y\,dx\,dz = ?$$

Imamo slični slučaj kao pri računanju I_2. Za $O\,B\,B'\,C$ $y = 0$, pa je $I_3 = 0$, dok je za plašt $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, a $\cos\beta > 0$.

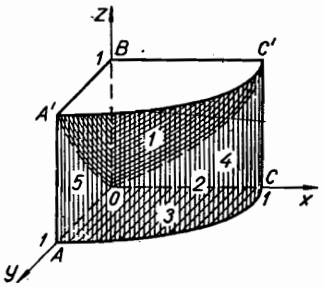
$$I_3 = \iint\limits_{OBB'C} x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx\,dz = [\text{uz supstituciju } R^2 - x^2 = t] =$$

$$= \left| z \right|_0^H \cdot \left| -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(R^2 - x^2)^3}\right|_0^R = \frac{H R^3}{3}.$$

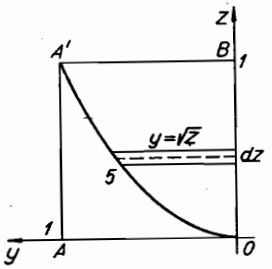
$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \underline{H R^2\left(\frac{2}{3}R + \frac{\pi H}{8}\right)}.$$

Riješi isti zadatak na drugi način i to tako da izračunaš redom vrijednosti triju integrala I_1, I_2 i I_3 za svaku pojedinu plohu koja omeđuje zadano tijelo. Moraš dobiti isti rezultat.

710. $\iint\limits_S y^2 z\,dx\,dy + x\,z\,dy\,dz + x^2 y\,dx\,dz$, gdje je S vanjska strana plohe, koja se nalazi u I oktantu, a sastoji se od rotacionog paraboloida $z = x^2 + y^2$, valjka $x^2 + y^2 = 1$ i koordinatnih ravnina (v. sl. 205a).



Slika 205 a.



Slika 205 b.

Kako se vidi iz slike, zadano je tijelo omeđeno s pet ploha: plaštevima paraboloida i valjka (1 i 2), kcji se sijeku za $z = 1$, kvadratnom kruga (3) i dijelovima ravnina $X\,Z$ i $Y\,Z$ (4 i 5).

$$I_1 = \iint\limits_S y^2 z\,dx\,dy = ?$$

Projekcije dviju bočnih ploha 4 i 5, a također plašta valjka 2 na ravninu $X\,Y$ jednake su nuli, za bazu (3) $z = 0$, pa je $I_1 = 0$, dok je projekcija plašta (1) baza $A\,O\,C$ (3), pri čemu je $z = x^2 + y^2$, a $\cos\gamma > 0$ (vanjska strana plašta!):

$$I_1 = \iint\limits_{AOC} y^2(x^2 + y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_{AOC} (x^2 y^2 + y^4)\,dx\,dy = \text{uz prijelaz na polarne koordinate} =$$

$$= \iint\limits_{AOC} \rho^4 (\cos^2\varphi \sin^2\varphi + \sin^4\varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi = \iint\limits_{AOC} \rho^5 \sin^2\varphi\, d\varphi\, d\rho =$$

$$= \left| \frac{\rho^6}{6} \right|_0^1 \cdot \left| \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{24}.$$

$$I_2 = \iint\limits_S x z\, dy\, dz = ?$$

Projekcije plohe COC' (4) i baze (3) na ravninu YZ jednake su nuli, za AOA' (5) $x = 0$, pa je $I_2 = 0$. Za plašt valjka (2) $x = \sqrt{1 - y^2}$, dok je $\cos\alpha > 0$, a za plašt paraboloida (1) $x = \sqrt{z - y^2}$, dok je $\cos\alpha < 0$, pri čemu je za $x = 0$ $y = \sqrt{z}$ (v. sl. 205 b).

$$I_2 = \iint\limits_{OBA'A} z\sqrt{1 - y^2}\, dy\, dz - \iint\limits_{OBA'O} z\sqrt{z - y^2}\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^1 z\, dz \int_0^1 \sqrt{1 - y^2}\, dy - \int_0^1 z\, dz \int_0^{\sqrt{z}} \sqrt{z - y^2}\, dy =$$ prema predtipu C (v. dio II Repetitorija) $= \left| \frac{z^2}{2} \right|_0^1 \cdot \left| \frac{1}{2}\left(\arcsin y - y\sqrt{1 - y^2}\right) \right|_0^1 - \int_0^1 z \left| \frac{1}{2} z \arcsin \frac{y}{\sqrt{z}} + \frac{y}{2}\sqrt{z - y^2} \right|_0^{\sqrt{z}} dz =$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\int_0^1 z^2\, dz = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\left| \frac{z^3}{3} \right|_0^1 = \frac{\pi}{24}.$$

$$I_3 = \iint\limits_S x^2 y\, dx\, dz = ?$$

Projekcije plohe AOA' (5) i baze (3) na ravninu XZ jednake su nuli. Za OCC' $y = 0$, pa je $I_3 = 0$. Za plašt valjka (2) $y = \sqrt{1 - x^2}$, dok je $\cos\beta > 0$, a za plašt paraboloida (1) $y = \sqrt{z - x^2}$, dok je $\cos\beta < 0$.

$$I_3 = \iint\limits_{OCC'B} x^2\sqrt{1 - x^2}\, dx\, dz - \iint\limits_{OC'BO} x^2\sqrt{z - x^2}\, dx\, dz =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^1 x^2\sqrt{1 - x^2}\, dx - \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{z}} x^2\sqrt{z - x^2}\, dx =$$ prema posebnom slučaju b) tipa III

(v. dio II Repetitorija) $= \left| \left(\frac{x^3}{4} - \frac{x}{8}\right)\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{8}\arcsin x \right|_0^1 -$

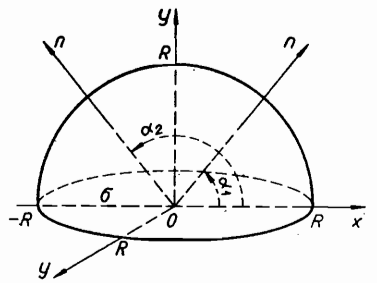
$$- \int_0^1 \left| \left(\frac{x^3}{4} - \frac{z}{8}x\right)\sqrt{z - x^2} + \frac{z^2}{8}\arcsin\frac{x}{\sqrt{z}} \right|_0^{\sqrt{z}} dz = \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{16}\left| \frac{z^3}{3} \right|_0^1 = \frac{\pi}{24}.$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \underline{\frac{\pi}{8}}.$$

Riješi isti zadatak računajući redom I_1, I_2 i I_3 za svaku pojedinu plohu zadanog tijela.

711. $\iint\limits_S x^2\, dy\, dz + y^2\, dx\, dz + z^2\, dx\, dy$, gdje je S vanjska strana polusfere

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \ (z \geq 0).$$



Slika 206.

Računamo na isti način prema slici 206:

$$I_1 = \iint\limits_S x^2\, dy\, dz = ?$$

$I_1 = 0$, jer je za desnu polovinu polusfere $\cos\alpha_1 > 0$, a za lijevu $\cos\alpha_2 < 0$, dok je $x^2 = R^2 - y^2 - z^2 > 0$, pa se integral poništava.

$$I_2 = \iint\limits_S y^2\, dx\, dz = 0$$ iz sličnih razloga.

$$I_3 = \iint\limits_S z^2\, dx\, dy \neq 0,$$ jer normale na gornjoj polusferi zatvaraju s osi Z kutove γ, koji su manji od 90, pa je $\cos\gamma > 0$ kao i z^2.

Uvrštenje $z^2 = R^2 - x^2 - y^2$ u I_3 i integriranje po krugu, u koji se projicira na ravninu $X\,Y$ polusfera daje uz prijelaz na polarne koordinate:

$$I_3 = \iint\limits_{\sigma} (R^2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_{\sigma'} (R^2 - \rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R (R^2 - \rho^2)\,\rho\,d\rho = 2\pi \left| \frac{R^2}{2}\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}.$$

$$\underline{I = \frac{\pi R^4}{2}.}$$

712. Odredi masu oplošja kocke $0 \leqq x \leqq 1;\ 0 \leqq y \leqq 1, 0 \leqq z \leqq 1$, ako je plošna gustoća u tački $M(x, y, z)$ jednaka $x\,y\,z$.

Prema slici 202 (v. zadatak 707) gustoća μ iznosi:

na plohi $A'B$: $\mu = x\,z$, jer je $y = 1$, a na OC $\mu = 0$, jer je $y = 0$,
na plohi $B'C\,(x = 1)$: $\mu = y\,z$, a na $A'D$ $(x = 0)$ $\mu = 0$,
na plohi $A\,C\,(z = 1)$: $\mu = x\,y$, a na $A'C'$ $(z = 0)$ $\mu = 0$.

Dobijemo:

$m = \iint\limits_S x\,z\,dx\,dz + y\,z\,dy\,dz + x\,y\,dx\,dy$, gdje je S površina pobočaka kocke, koje ne leže na koordinatnim ravninama

$$I_1 = \iint\limits_{OC'CD} x\,z\,dx\,dz = \int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_0^1 z\,dz = \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^1 \cdot \left| \frac{z^2}{1} \right|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Na isti način dobijemo $I_2 = I_3 = I_1 = \frac{1}{4}$.

$$\underline{m = \frac{3}{4}.}$$

713. Odredi moment tromosti homogenog plašta stošca $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 < z < h)$ s obzirom na os $Z\,(\mu = 1)$.

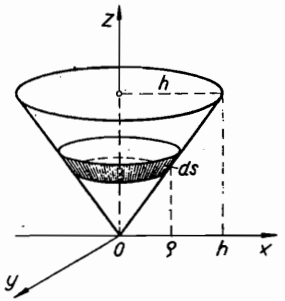
Prema slici 207:

$$I_z = \iint\limits_S \rho^2\,dS.$$

Uzevši u obzir da su visina i polumjer baza stošca jednaki pa izvodnice stošca zatvaraju s ravninom $X\,Y$ kutove od 45^0, dobijemo

$$dS = 2\,\rho\,\pi\,ds = 2\,\rho\,\pi \frac{d\rho}{\cos 45^0} = 2\sqrt{2}\,\pi\,\rho\,d\rho.$$

$$I_z = 2\sqrt{2}\,\pi \int\limits_0^h \rho^3\,d\rho = \underline{\frac{\sqrt{2}\,\pi}{2} h^4.}$$



Slika 207.

714. $\iint\limits_S z^2\,dx\,dy$, gdje je S vanjska strana elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

[0].

715. $\iint\limits_S y\,z\,dy\,dz + x\,z\,dx\,dz + x\,y\,dx\,dy$, gdje je S vanjska strana oplošja tetraedra omeđenog ravninama

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{i} \quad x + y + z = a.$$

[0].

716. $\iint\limits_S z^2\,dx\,dy + y^2\,dx\,dz + x^2\,dy\,dz$, gdje je S vanjska strana dijela sfere $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, koji leži u I oktantu.

$$\left[\frac{3}{8}\pi R^4\right].$$

717. $\iint\limits_S y\,z\,dy\,dz + x\,z\,dx\,dz + x\,y\,dx\,dy$, gdje je S vanjska strana trokuta, kojemu su stranice presječnice ravnine $x + y + z = a$ s koordinatnim ravninama.

$$\left[\frac{a^4}{8}\right].$$

VEZA IZMEĐU INTEGRALA RAZLIČITIH TIPOVA

XIII. GREENOVA FORMULA

Formule

$$\oint_{+k} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{193}$$

gdje su funkcije $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ neprekinute u području σ, koje je omeđeno krivuljom k, pri čemu se ta krivulja obilazi u pozitivnom smislu (površina lijevo).

Ako je

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{147}$$

$$\oint_{+k} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

To znači: ako je $P\,dx + Q\,dy$ totalni diferencijal, vrijednost krivuljnog integrala po bilo kojoj zatvorenoj krivulji, koja leži potpuno u području σ, jednaka je nuli, odnosno vrijednost krivuljnog integrala ne ovisi o putu integracije, već jedino o početnoj i konačnoj tački toga puta.

Zadaci

718. Zadani krivuljni integral uzet po zatvorenoj krivulji k pretvori u dvostruki integral po području σ, koje je omeđeno tom krivuljom k.

$$\oint_{+k} \underbrace{(e^{xy} + 2x\cos y)}_{P}\,dx + \underbrace{(e^{xy} - x^2\sin y)}_{Q}\,dy.$$

Prema (193):

$$\oint_{+k} = \iint_{\sigma} [(y\,e^{xy} - 2x\sin y) - (x\,e^{xy} - 2x\sin y)]\,dx\,dy = \underline{\iint_{\sigma} e^{xy}(y-x)\,dx\,dy.}$$

719. Izračunaj $\oint_{+k} (1-x^2)\,y\,dx + x(1+y^2)\,dy$, gdje je k kružnica $x^2 + y^2 = R^2$.

a) neposredno,

b) pomoću Greenove formule.

ad a) Prelazimo na parametarski oblik jednadžbe kružnice:

$$x = R\cos t, \quad dx = -R\sin t\,dt$$
$$y = R\sin t, \quad dy = R\cos t\,dt$$

$$\oint_{+k} = \int_0^{2\pi} [-(1 - R^2\cos^2 t)\,R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t\,(1 + R^2\sin^2 t)]\,dt =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \left(\cos 2t + \frac{R^2}{2}\sin^2 2t\right) dt = R^2 \left| \frac{\sin 2t}{2} + \frac{R^2}{4}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\right|_0^{2\pi} = \underline{\frac{\pi R^4}{2}}.$$

ad b) Prema (193):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + y^2; \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - x^2$$

$$\oint_{+k} = \iint_{\sigma} (1 + y^2 - 1 + x^2)\,dx\,dy = \text{uz prijelaz na polarne koordinate} =$$

$$= \iint_{\sigma'} (\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3\,d\rho = \underline{\frac{\pi R^4}{2}}.$$

720. $\oint_{+k} (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy$, gdje je krivulja

a) k elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

b) k kružnica $x^2 + y^2 = a\,x$

i to 1. neposredno i 2. pomoću Greenove formule.

ad a) $k \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

1. $x = a\cos t, \quad dx = -a\sin t\,dt,$
$y = b\sin t, \quad dy = b\cos t\,dt$

$$\oint_{+k} = \int_0^{2\pi} [-(a^2 b \sin^2 t \cos t + a^2 \sin t \cos t + a b \sin^2 t) +$$

$$+ (a b^2 \sin t \cos^2 t + a b \cos^2 t - b^2 \sin t \cos t)] \, dt =$$

$$= \left| - a^2 b \frac{\sin^3 t}{3} - a b^2 \frac{\cos^3 t}{3} - (a^2 + b^2) \frac{\sin^2 t}{2} + a b \frac{\sin 2t}{2} \right|_0^{2\pi} = \underline{0.}$$

2. Prema (193):

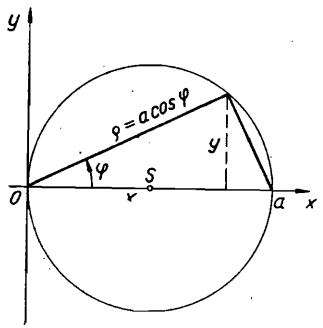
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y + 1, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = x + 1$$

$$\oint_{+k} = \iint_\sigma (y + 1 - x - 1) \, dx \, dy = \iint_\sigma (y - x) \, dx \, dy =$$

= uz prijelaz na eliptički koordinate (113 b) =

$$= \iint_{\sigma'} (b u \sin v - a u \cos v) \cdot a b u \, du \, dv =$$

$$= a b \int_0^{2\pi} (b \sin v - a \cos v) \, dv \int_0^1 u^2 \, du = a b \left| - b \cos v - a \sin v \right|_0^{2\pi} \cdot \left| \frac{u^3}{3} \right|_0^1 = \underline{0.}$$



Slika 208.

ad b) $k \equiv x^2 + y^2 = a x$ ili $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, pa je $S\left(\frac{a}{2}, 0\right)$; $r = \frac{a}{2}$

1. Prema slici 208:

$$\rho = a \cos \varphi, \quad x = a \cos^2 \varphi, \quad y = a \cos \varphi \sin \varphi$$

$$dx = -2 a \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi; \quad dy = a(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \, d\varphi$$

ili

$$dx = -a \sin 2\varphi \, d\varphi \quad \text{i} \quad dy = a \cos 2\varphi \, d\varphi$$

Uvrstimo li navedene vrijednosti za x, y, dx i dy u zadani krivuljni integral, dobit ćemo nakon uređenja i integriranja po tipu VIII (v. dio II Repetitorija) od $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ do $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\oint_{+k} = -\underline{\frac{\pi a^3}{8}}.$$

Načini to!

2. Prema (193):

Imali smo već

$$\oint_{+k} = \iint_\sigma (y - x) \, dx \, dy = \text{[uz prijelaz na polarne koordinate } x = \rho \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \varphi, \quad x = \rho \cos \varphi, \quad \rho = a \cos \varphi, \quad dx \, dy = \rho \, d\rho \, d\varphi \quad \text{(v. sl. 208)]} =$$

$$= \iint_{\sigma'} (\rho \sin \varphi - \rho \cos \varphi) \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin \varphi - \cos \varphi) \, d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \rho^2 \, d\rho =$$

$$= \frac{a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin \varphi \cos^3 \varphi - \cos^4 \varphi) \, d\varphi = \text{[prvi integral riješimo uz supstituciju}$$

$\cos \varphi = t$, a drugi po tipu VIII] =

$$= \frac{a^3}{3} \left| -\frac{\cos^4 \varphi}{4} - \left(\frac{1}{4} \sin \varphi \cos^2 \varphi + \frac{3}{8} \varphi + \frac{3}{16} \sin 2\varphi \right| \right._{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{3} \left(-\frac{3}{8} \pi\right) =$$

$$= -\underline{\frac{\pi a^3}{8}}.$$

721. Izračunaj pomoću Greenove formule razliku integrala:

$$I_1 = \int_{AmB} (x + y)^2 \, dx - (x - y)^2 \, dy$$

i

$$I_2 = \int_{AnB} (x + y)^2 \, dx - (x - y)^2 \, dy$$

gdje je $A\,m\,B$ odrezak pravca koji spaja tačke $A\,(0,0)$ i $B\,(1,1)$, dok je $A\,n\,B$ luk parabole $y = x^2$ (v. sl. 209).

$$A\,m\,B \equiv y = x, \quad dy = dx$$

$$A\,n\,B \equiv y = x^2, \quad dy = 2\,x\,dx$$

Greenova formula vrijedi za zatvorenu krivulju, pa uzmimo, da je područje

$$\sigma_1 = A\,C\,B\,m\,A \quad \text{i} \quad \sigma_2 = A\,C\,B\,n\,A.$$

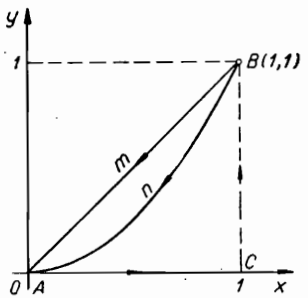
Prema (193):

$$I_1 - I_2 = \iint\limits_{ACBmA} [-2(x-y) - 2(x+y)]\,dx\,dy - \iint\limits_{ACBnA} [-2(x-y) - 2(x+y)]\,dx\,dy =$$

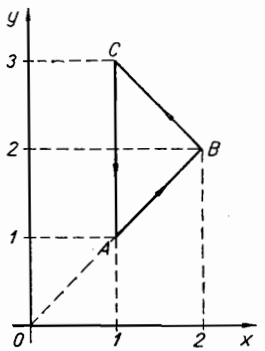
$$= -4 \iint\limits_{ACBmA} x\,dx\,dy + 4 \iint\limits_{ACBnA} x\,dx\,dy = -4 \int_1^0 x\,dx \int_0^x dy + 4 \int_1^0 x\,dx \int_0^{x^2} dy =$$

$$= 4 \left| -\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right|_1^0 = 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \underline{\frac{1}{3}}.$$

Za probu izračunaj oba integrala neposredno i odredi njihovu razliku.



Slika 209.



Slika 210.

722. Izračunaj $\oint\limits_{+k} 2\,(x^2 + y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy$, gdje je $k \triangle A\,B\,C$ $[A\,(1,1),\ B\,(2,2),\ C\,(1,3)]$

i to

a) pomoću Greenove formule;
b) neposredno.

Iz slike (210) slijedi:

$$A\,B \equiv y = x,$$

$$B\,C \equiv y = -x + 4,$$

$$C\,A \equiv x = 1.$$

ad a) Prema (193):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2\,(x+y); \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 4\,y$$

$$\oint\limits_{+k} = \iint\limits_{\triangle ABC} (2\,x + 2\,y - 4\,y)\,dx\,dy = 2 \int\limits_{\triangle ABC} (x-y)\,dx\,dy = 2 \int_1^2 dx \int_x^{-x+4} (x-y)\,dy =$$

$$= 2 \int_1^2 \left| x\,y - \frac{y^2}{2} \right|_x^{-x+4} dx = 2 \int_1^2 (-2\,x^2 + 8\,x - 8)\,dx = 2 \left| -\frac{2}{3}x^3 + 4\,x^2 - 8\,x \right|_1^2 =$$

$$= \underline{-\frac{4}{3}}.$$

ad b) $\oint\limits_{+k} 2\,(x^2 + y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy = I_{\overline{AB}} + I_{\overline{BC}} + I_{\overline{CA}}.$

$$I_{\overline{AB}} = [y = x,\ x = y] = \int_1^2 4\,x^2\,dx + \int_1^2 4\,y^2\,dy = \frac{8}{3} \left| y^3 \right|_1^2 = \frac{56}{3}$$

$$I_{\overline{BC}} = [y = -x + 4,\ x = 4 - y] = 2 \int_2^1 (2\,x^2 - 8\,x + 16)\,dx +$$

$$+ \int_2^3 (4 - y + y)^2\,dy = 2 \left| \frac{2}{3}x^3 - 4\,x^2 + 16\,x \right|_2^1 + 16 \left| y \right|_2^3 = -\frac{4}{3}$$

$$I_{\overline{CA}} = [x = 1,\ dx = 0] = \int_3^1 (1+y)^2\,dy = \left| y + y^2 + \frac{y^3}{3} \right|_3^1 = -\frac{56}{3}.$$

$$\underline{I = -\frac{4}{3}}.$$

723. Izračunaj $\oint\limits_{+k} \frac{dx - dy}{x + y}$, gdje je k kontura kvadrata

$$A\,B\,C\,D\ [A(1, 0),\ B(0, 1),\ C(-1, 0),\ D(0, -1)].\quad \text{(vidi sl. 211).}$$

Kako su funkcije $P = \frac{1}{x+y}$ i $Q = -\frac{1}{x+y}$ prekinute u tački $O(0,0)$ područja σ, koje je omeđeno konturom zadanog kvadrata, jer teže u beskonačnost za $x = 0$ i $y = 0$, ne smijemo primijeniti Greenovu formulu, već moramo taj krivuljni integral računati neposredno:

$$\oint\limits_{+k} \frac{dx}{x+y} - \frac{dy}{x+y} = I_{\overline{AB}} + I_{\overline{BC}} + I_{\overline{CD}} + I_{\overline{DA}}.$$

$$I_{\overline{AB}} = [y = -x + 1,\ x = 1 - y] = \int\limits_1^0 dx - \int\limits_0^1 dy = -1 - 1 = -2$$

$$I_{\overline{BC}} = [y = x + 1;\ x = y - 1] = \int\limits_0^{-1} \frac{dx}{2x+1} - \int\limits_1^0 \frac{dy}{2y-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\ln\left(x + \frac{1}{2}\right)\right|_0^{-1} - \frac{1}{2}\left|\ln\left(y - \frac{1}{2}\right)\right|_1^0 = 0$$

$$I_{\overline{CD}} = [y = -x - 1;\ x = -y - 1] = -\int\limits_{-1}^0 dx + \int\limits_0^{-1} dy = -2$$

$$I_{\overline{DA}} = [y = x - 1;\ x = y + 1] = \int\limits_0^1 \frac{dx}{2x-1} - \int\limits_{-1}^0 \frac{dy}{2y+1} = 0$$

$$I = -2 - 2 = \underline{-4.}$$

724. Zadani krivuljni integral po zatvorenoj krivulji k pretvori u dvostruki integral po području σ koje ta krivulja k omeđuje

$$\oint\limits_{+k} (1 - x^2)\,y\,dx + x(1 + y^2)\,dy.$$

$$\left[\iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2)\,dx\,dy\right].$$

725. Dokaži da je vrijednost integrala

$$\oint\limits_{+k} (2xy - y)\,dx + x^2\,dy$$

numerički jednaka površini područja σ, koje je omeđeno krivuljom k.

726. Izračunaj pomoću Greenove formule

$$\oint\limits_{+k} -x^2 y\,dx + x y^2\,dy$$

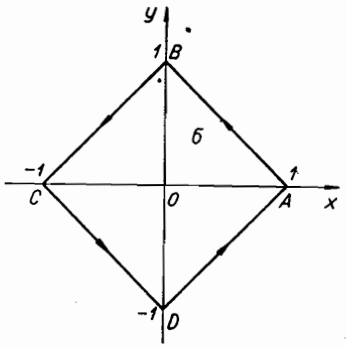
gdje je k kružnica $x^2 + y^2 = R^2$.

$$\left[\frac{\pi R^4}{2}\right].$$

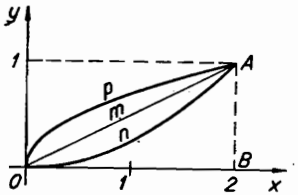
727. Izračunaj $\oint\limits_{+k} (x + y)\,dx - (x - y)\,dy$

gdje je k parabola $A\,m\,B$, koja prolazi tačkama $A(1, 0)$ i $B(2, 3)$, a os joj je os Y, i tetiva $A\,n\,B$ te parabole i to a) neposredno; b) pomoću Greenove formule.

$$\left[-\frac{1}{3}\right].$$



Slika 211.



Slika 212.

728. $\int\limits_{OA} 2xy\,dx + x^2\,dy.$

Kako je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, pokaži da ćeš za sve putove prikazane u sl. 212 od $O(0, 0)$ do $A(2, 1)$ dobiti za zadani krivuljni integral istu vrijednost [4], a za zatvorene putove $O\,B\,A\,n\,O$, $O\,B\,A\,m\,O$ itd. nulu.

(Prema slici: $O\,n\,A$ je luk parabole, kojoj je os simetrije os Y, $O\,m\,A$ je pravac, $O\,p\,A$ je luk parabole kojoj je X os simetrije).

729. Izračunaj pomoću Greenove formule

$$\oint\limits_{+k} \frac{x\,dy + y\,dx}{x^2 + y^2},\ \text{gdje je}\ k \equiv (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Zašto je rezultat 0?

XIV. STOKESOVA FORMULA

Formule

$$\oint_{+k} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS \tag{194}$$

gdje su funkcije P, Q i R neprekinute, dok su $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ kosinusi smjera normale na plohu S, koju omeđuje zatvorena krivulja k.

Smisao linearnog (uzduž k) i smisao plošnog (po S) integiranja međusobno su vezani. Ta se veza lako shvati prema preglednom pravilu koje glasi: ako se krećemo po onoj strani plohe S, po kojoj se vrši integriranje, a pomičemo se uzduž međe k te plohe i to u smislu krivuljnog integriranja, tada moramo plohu S imati na lijevo.

Kako je prema (130):

$$dS\cos\alpha = dy\,dz$$

$$dS\cos\beta = dx\,dz$$

$$dS\cos\gamma = dx\,dy$$

dobijemo drugi oblik Stokesove formule, čiju desnu stranu pišemo u obliku determinante

$$\oint_{+k} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} dy\,dz & dx\,dz & dx\,dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \tag{194 a}$$

Ako je desna strana Stokesove formule jednaka nuli, tj. ako su ispunjeni uvjeti (149),

$$\oint_k P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

a to znači, da je $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dU$, pa vrijednost krivuljnog integrala ne ovisi o putu integriranja, a jednaka je nuli po zatvorenoj krivulji.

Zadaci

U zadacima **730–732** uklj. izračunaj zadane krivuljne integrale a) pomoću Stokesove formule i b) neposredno.

730. $\oint_k (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, gdje je k elipsa zadana kao sjecište valjka $x^2 + y^2 = 1$ i ravnine $x + z = 1$ (v. sl. 213).

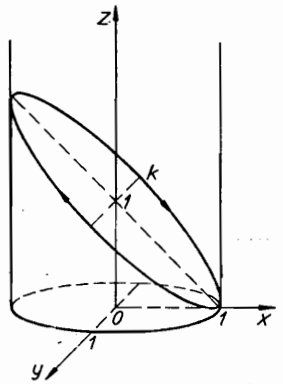
ad a) Računamo prema (194 a):

$$P = y - z, \quad Q = z - x, \quad R = x - y$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -1 - 1 = -2; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -2; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2$$

$$\oint_k = -2\iint_S dy\,dz + dx\,dz + dx\,dy =$$

$$= -2\left[\iint_S dy\,dz + \iint_S dx\,dz + \iint_S dx\,dy\right].$$



Slika 213.

Iz slike vidimo da elipsa k omeđuje plohu koja se sastoji od donjeg dijela plašta i baze valjka pa su projekcije tih ploha:

na ravninu YZ: kružnica polumjera 1, čiju jednadžbu dobijemo iz $x = 1 - z$ $x^2 + y^2 = 1 : (1 - z)^2 + y^2 = 1$, pri čemu je $\cos\alpha < 0$,

na ravninu XZ: projekcija jednaka je nuli, jer je za prednji dio $\cos\beta > 0$, a za stražnji $\cos\beta < 0$, dok su projekcije obaju dijelova iste,

na ravninu XY: projekcija je baza valjka polumjera 1, pri čemu je $\cos\gamma < 0$.

Dobijemo:

$$\oint_k = -2(-\pi + 0 - \pi) = 4\pi.$$

ad b) neposredno.

Iz slike vidimo, da se elipsa k projicira na ravninu XY kao kružnica polumjera 1. Prelazimo na parametarski oblik:

$$x = \cos t; \qquad dx = -\sin t\, dt$$

$$y = \sin t; \qquad dy = \cos t\, dt$$

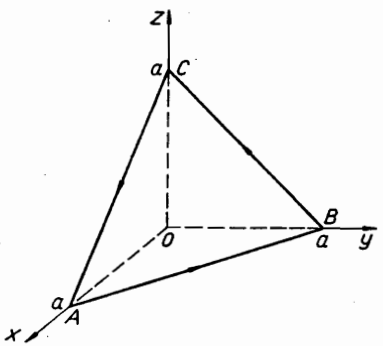
iz $z = 1 - x$ slijedi: $z = 1 - \cos t$; $\quad dt = \sin t\, dt$.

Uvrštenje u zadani krivuljni integral daje:

$$\oint_k = \int_{2\pi}^{0} [-(\sin t - 1 + \cos t)\sin t + (1 - \cos t - \cos t)\cos t +$$

$$+ (\cos t - \sin t)\sin t]\, dt = \int_{2\pi}^{0} (\sin t + \cos t - 2)\, dt =$$

$$= \Big| -\cos t + \sin t - 2t \Big|_{2\pi}^{0} = 4\pi.$$



Slika 214.

731. $\oint_{ABCA} y^2\, dx + z^2\, dy + x^2\, dz$, gdje je $ABCA$ kontura $\triangle\, ABC$ $[A(0, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(0, 0, a)]$ (v. sl. 214).

ad a) Prema (194 a):

$$P = y^2; \quad Q = z^2, \quad R = x^2$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -2z; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -2x; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2y$$

$$\oint_{ABCA} = -2 \iint_S z\, dy\, dz + x\, dx\, dz + y\, dy\, dx$$

Prema slici uzevši u obzir da je $\overline{BC} \equiv \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$, pa je $y = a - z$:

$$I_1 = \iint_{BOC} z\, dy\, dz = [y = a - z,\ \cos\alpha = \cos 0 = 1,$$ jer idemo po nutarnjem strana-

$$\text{nama ploha piramide}] = \int_0^a z\, dz \int_0^{a-z} dy = \int_0^a (az - z^2)\, dz = \left| a\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right|_0^a = \frac{a^3}{6}.$$

Na isti način dobijemo:

$$I_2 = \iint_{AOC} x\, dx\, dz = \frac{a^3}{6}; \qquad I_3 = \iint_{AOB} y\, dx\, dy = \frac{a^3}{6}.$$

$$\oint_{ABCA} = -2(I_1 + I_2 + I_3) = -a^3.$$

ad b) neposredno:

Prema slici 214:

$$AB \equiv y = a - x$$
$$BC \equiv z = a - y$$
$$CA \equiv x = a - z$$

$$\oint_{ABCA} = \int_a^0 (a - x)^2\, dx + \int_a^0 (a - y)^2\, dy + \int_a^0 (a - z)^2\, dz = -3 \left| \frac{(a - x)^3}{3} \right|_a^0 = -a^3.$$

732. $\oint_k (y + z)\, dx + (z + x)\, dy + (x + y)\, dz$, gdje je k kružnica $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $x = y$.

Prema (194 a):

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 1 - 1 = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 1 - 1 = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 1 = 0.$$

Slijedi:

$$\iint_\sigma = 0, \quad \text{odnosno} \quad \oint_k = 0,$$

tj.

$(y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz$ predočuje totalni diferencijal neke funkcije $U(x, y, z)$, pa vrijednost krivuljnog integrala po bilo kojoj zatvorenoj krivulji jednaka je nuli. Pokažimo to npr. za kružnicu k određenu s $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ i $z = 3$. Uvrštenje daje:

$$x^2 + y^2 = 16,$$

pa je

$$\begin{aligned} x &= 4\cos t, & dx &= -4\sin t\,dt \\ y &= 4\sin t, & dy &= 4\cos t\,dt \\ z &= 3, & dz &= 0. \end{aligned}$$

Uvrštenje u zadani krivuljni integral daje:

$$\oint_k = 16\int_0^{2\pi} [-\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = 16\int_0^{2\pi} \cos 2t\,dt = 8\,|\sin 2t\,|_0^{2\pi} = 0.$$

Pokaži da je $\oint = 0$ i za zadanu kružnicu k:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25; \qquad x = y.$$

XV. FORMULA GREEN-GAUS-OSTROGRADSKOG

Formule

$$\iint_S P(x, y, z)\,dy\,dz + Q(x, y, z)\,dx\,dz + R(x, y, z)\,dx\,dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz. \tag{196}$$

Drugi oblik:

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \tag{196 a}$$

gdje su $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ kosinusi smjeru vanjske normale na plohu S.

Zadaci

U zadacima **733—736** uklj. zadane plošne integrale pretvori pomoću Gaussove formule u trostruke integrale po volumenu V tijela, koje je omeđeno zadanom zatvorenom plohom S.

733. $\displaystyle\iint_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,dS.$

Računamo prema (196 a):

Kako je

$$P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \qquad Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \qquad R = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

dobijemo:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} =$$

$$= \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Na isti način dobijemo:

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \qquad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

pa je

$$\iint_S = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = 2 \iiint_V \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

734. $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, \{\cos(n, x) + \cos(n, y) + \cos(n, z)\}\, dS$ gdje je n vanjska normala za zadanu plohu S.

Prema (196 a):

$$P = Q = R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

pa je

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\iint_S = \iiint_V \frac{x + y + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dx\, dy\, dz.$$

735. $\iint_S x\, y\, dx\, dy + y\, z\, dy\, dz + z\, x\, dz\, dx.$

Kako je

$$P = y\, z, \quad Q = z\, x \quad \text{i} \quad R = x\, y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \quad \text{pa je} \quad \iint_S = 0.$$

736. $\iint_S x^2\, dy\, dz + y^2\, dx\, dz + z^2\, dx\, dy.$

$$\left[2 \iiint_V (x + y + z)\, dx\, dy\, dz\right].$$

U zadacima **737—741** uklj. izračunaj pomoću Gaussove formule zadane plošne integrale.

737. $\iint_S (x^3 \cos\alpha + y^3 \cos\beta + z^3 \cos\gamma)\, dS$, gdje je S sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Uzevši u obzir da je

$$dS \cdot \cos\alpha = dy\, dz$$
$$dS \cdot \cos\beta = dx\, dz$$
$$dS \cdot \cos\gamma = dx\, dy$$

zadani integral pišemo u obliku

$$\iint_S x^3\, dy\, dz + y^3\, dx\, dz + z^3\, dx\, dy$$

pa ga računamo prema (196):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3\, x^2; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 3\, y^2; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 3\, z^2$$

$$\iint_S = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \text{prelazimo na sferne koordinate} =$$

$$= 3 \iiint_V \rho^2 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi + \rho^2 \cos^2\vartheta)\, \rho^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= 3 \int_0^a \rho^4\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (\sin^3\vartheta + \cos^2\vartheta \cdot \sin\vartheta)\, d\vartheta =$$

$$= 3 \cdot \frac{a^5}{5} \cdot 2\pi \left| -\frac{1}{3}\sin^2\vartheta \cos\vartheta - \frac{2}{3}\cos\vartheta - \frac{\cos^3\vartheta}{3} \right|_0^{\pi} = \frac{12}{5}\pi a^5.$$

738. $\iint_S x^2\, dy\, dz + y^2\, dx\, dz + z^2\, dx\, dy$, gdje je S vanjske strane ploha kocke $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqslant y \leqslant a$ i $0 \leqslant z \leqslant a$. (Nariši zadanu kocku!)

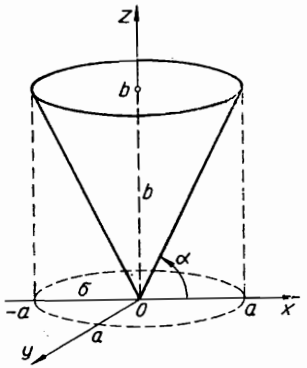
Računamo prema (196):

$$\iint_S = 2 \iiint_V (x + y + z)\, dx\, dy\, dz = 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x + y + z)\, dz =$$

$$= 2 \int_0^a dx \int_0^a \left| x z + y z + \frac{z^2}{2} \right|_0^a dy = 2 \int_0^a dx \int_0^a \left(a x + a y + \frac{a^2}{2}\right) dy =$$

$$= 2 \int_0^a \left| a x y + a \frac{y^2}{2} + \frac{a^2}{2} y \right|_0^a dx = 2 \int_0^a \left(a^2 x + \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2}\right) dx = 2 \left| a^2 \frac{x^2}{2} + a^3 x \right|_0^a = 3\, a^4.$$

739. $\iint\limits_S (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma)\, dS$, gdje je S vanjska strana potpune plohe rotacionog stošca $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ $(0 \leqq z \leqq b)$.



Slika 215.

S obzirom na pređašnji zadatak 738 i prema slici 215 dobijemo:

$$\iint\limits_S = 2 \iiint\limits_V (x + y + z)\, dx\, dy\, dz = [\text{uzevši u obzir da je } z = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 + y^2}\,] =$$

$$= 2 \iint\limits_\sigma dx\, dy \int\limits_{\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}}^{b} (x + y + z)\, dz = 2 \iint\limits_\sigma dx\, dy \left| x z + y z + \frac{z^2}{2} \right|_{\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}}^{b} =$$

$$= 2 \iint\limits_\sigma dx\, dy \left[x b + y b + \frac{b^2}{2} - \frac{b}{a} x \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{b}{a} y \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{b^2}{2 a^2}(x^2 + y^2) \right] =$$

= prelazimo na polarne koordinate =

$$= \frac{2 b}{a} \iint\limits_\sigma \left(a \rho \cos\varphi + a \rho \sin\varphi + \frac{a b}{2} - \rho^2 \cos\varphi - \rho^2 \sin\varphi - \frac{b}{2 a} \rho^2 \right) \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \frac{2 b}{a} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left| a \frac{\rho^3}{3} \cos\varphi + a \frac{\rho^3}{3} \sin\varphi + \frac{a b}{2} \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \cos\varphi - \frac{\rho^4}{4} \sin\varphi - \frac{b}{2 a} \frac{\rho^4}{4} \right|_0^a =$$

$$= \frac{a^2 b}{12} \int\limits_0^{2\pi} [2 a (\sin\varphi - \cos\varphi) + 3 b]\, d\varphi = \underline{\frac{\pi}{2} a^2 b^2}.$$

740. $\iint\limits_S x\, dy\, dz + y\, dx\, dz + z\, dx\, dy$, gdje je S vanjska strana ploha piramide određene s $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$ i $z = 0$.

$$\left[\frac{a^3}{2} \right].$$

741. $\iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\, dS$, gdje je S sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

[0, vidi zadatak 734)].

U zadacima **742—745** izračunaj pomoću Gaussove formule plošne integrale neposredno riješene u zadacima 708—710 uklj.

742. $\iint\limits_S x z\, dx\, dy + x y\, dy\, dz + y z\, dx\, dz$, gdje je S vanjska strana piramide $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $x + y + z = 1$.

(Vidi sl. 203 kod zadatka 708).

Prema (196):

Kako je

$$P = x y, \quad Q = y z \quad \text{i} \quad R = x z,$$

dobijemo:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y + z + x$$

$$\iint\limits_S = \iiint\limits_V (x + y + z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} (x + y + z)\, dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left| x z + y z + \frac{z^2}{2} \right|_0^{1-x-y} dy = \int\limits_0^1 dx \left| \frac{y}{2} - \frac{y^3}{6} - \frac{x^2}{2} y - x \frac{y^2}{2} \right|_0^{1-x} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[\frac{1-x}{2} - \frac{(1-x)^3}{6} - \frac{x^2}{2}(1-x) - \frac{x}{2}(1-x)^2 \right] dx = \underline{\frac{1}{8}}.$$

743. $\iint\limits_S y z\, dx\, dy + x z\, dy\, dz + x y\, dx\, dz$, gdje je S vanjska strana plohe $x^2 + y^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = H$.

(Vidi sl. 204 kod zadatka 709).

Prema (196):

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = z + x + y$$

$$\iint\limits_S = \iiint\limits_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \text{prelazimo na cilindričke koordinate} =$$

$$= \iiint\limits_V (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi + z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \iiint\limits_V \rho^2\,d\rho\cos\varphi\,d\varphi\,dz +$$

$$+ \iiint\limits_V \rho^2\,d\rho\sin\varphi\,d\varphi\,dz + \iiint\limits_V \rho\,d\rho\,d\varphi\,z\,dz = \left|\frac{\rho^3}{3}\right|_0^R \cdot \left|\sin\varphi\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \left|z\right|_0^H +$$

$$+ \left|\frac{\rho^3}{3}\right|_0^R \left|-\cos\varphi\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot H + \left|\frac{\rho^2}{2}\right|_0^R \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{H^2}{2} = \underline{H R^2\left(\frac{2R}{3} + \frac{\pi H}{8}\right)}.$$

744. $\iint\limits_S y^2 z\,dx\,dy + x z\,dy\,dz + x^2 y\,dx\,dz$, gdje je S vanjske strane ploha tijela omeđenog s $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 1$; $x = 0$, $y = 0$ i $z = 0$.

(Vidi sl. 205a uz zadatak 710).

$$R = y^2 z; \quad P = x z; \quad Q = x^2 y$$

Prema (196):

$$\iint\limits_S = \iiint\limits_V (z + x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz = \text{prelazimo na cilindrične koordinate} =$$

$$= \iiint\limits_V (z + \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \iiint\limits_V z\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz +$$

$$+ \iiint\limits_V \rho^3\,d\rho\,d\varphi\,dz = [\text{uzeli smo u obzir da je } z = x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2] =$$

$$= \iint\limits_{\sigma'} \rho\,d\rho\,d\varphi \left|\frac{z^2}{2}\right|_0^{\rho^2} + \iint\limits_{\sigma'} \rho^3\,d\rho\,d\varphi \left|z\right|_0^{\rho^2} = \frac{3}{2}\iint\limits_{\sigma'} \rho^5\,d\rho\,d\varphi = \frac{3}{2}\left|\frac{\rho^6}{6}\right|_0^1 \cdot \left|\varphi\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{\pi}{8}}.$$

745. $\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, gdje je S vanjska strana kocke, što je čine ravnine $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$ i $z = 1$.

(Vidi sl. 202 kod zadatka 707).

[3].

VEKTORSKA ANALIZA. ELEMENTI TEORIJE POLJA

XVI. SKALARNO POLJE

Skalarna veličina U, koja prima određene vrijednosti u svakoj tački T prostora, zove se skalarna funkcija ili skalarno polje $U = U(T) = U(x, y, z)$. Npr. polje temperature, potencijala, gustoće u nehomogenom sredstvu itd.

Polje može biti određeno i pomoću radijvektora tačke T: $U = U(\vec{r})$.

Formule

1) Za polje $U = U(T) = U(x, y, z)$

Gradijent

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

$$|\text{grad } U| = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \tag{199}$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{|\text{grad } U|}, \qquad \cos\beta = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{|\text{grad } U|}, \qquad \cos\gamma = \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{|\text{grad } U|}.$$

Derivacija u smjeru $s(\alpha, \beta, \gamma)$

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma = \text{grad } U \cdot \vec{s_0} = \frac{\partial U}{\partial \vec{s_0}} \tag{198 i (198 a)}$$

gdje je

$$\vec{s_0} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma.$$

Kut dviju ploha

$$G(x, y, z) = 0 \quad \text{i} \quad H(x, y, z) = 0.$$

$$\cos\varphi = \frac{\text{grad } G \cdot \text{grad } H}{|\text{grad } G| \cdot |\text{grad } H|}. \tag{200}$$

Nivo-plohe polja

$$U(x, y, z) = C$$

gdje je C konstanta.

2) Za ravno polje

$$z = z(T) = z(x, y).$$

Gradijent

$$\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}. \tag{201}$$

Derivacija u smjeru s (α, β)

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial \vec{s}_0} = \text{grad } z \cdot \vec{s}_0. \tag{201 a}$$

Nivo-krivulje polja

$$z(x, y) = C.$$

A. Gradijent skalarnog polja

Zadaci

U zadacima **746–750** uklj. izračunaj gradijent zadanog polja u zadanoj tački polja.

746. $U = x^2 + y^2 + z^2$ u tački $T_1(2; -2; 1)$.

Prema (199):

$$\text{grad } U = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

a u T_1:

$$(\text{grad } U)_1 = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$|(\text{grad } U)_1| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; \qquad \cos\beta = -\frac{2}{3}; \qquad \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

747. $U = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ u $T_1(2; 1; 1)$. Odredi također, u kojim je tačkama polja gradijent okomit na os Z, a u kojim je jednak nuli.

Prema (199):

$$\text{grad } U = (3x^2 - 3yz)\vec{i} + (3y^2 - 3xz)\vec{j} + (3z^2 - 3xy)\vec{k}$$

$$(\text{grad } U)_1 = 9\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$|(\text{grad } U)_1| = \sqrt{81 + 9 + 9} = 3\sqrt{11}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{11}}; \qquad \cos\beta = \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{11}}.$$

Ako je grad U okomit na os Z, $\cos\gamma = 0$, pa je

$$3z^2 - 3xy = 0$$

$$z^2 = xy,$$

grad $U \perp Z$ u tačkama plohe $\underline{z = \pm\sqrt{xy}}$.

grad $U = 0$, kad je

$$3x^2 - 3yz = 0$$

$$3y^2 - 3xz = 0$$

$$3z^2 - 3xy = 0.$$

Pomnožimo li jednadžbe redom s $\frac{x}{3}, \frac{y}{3}$ i $\frac{z}{3}$, dobit ćemo $x^3 = y^3 = z^3$, pa je grad $U = 0$ u tačkama polja, u kojim je $\underline{x = y = z}$.

748. $U = xyz$ u tački $T_1(1, 2, 3)$.

$$[6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}].$$

749. $z = 3x^2y - 3xy^3 + y^4$ u tački $T_1(1, 2)$.

$$[-12\vec{i} - \vec{j}].$$

750. $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ u tački $T(x, y, z)$ po volji.

Računamo prema (199):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Uzmemo li u obzir, da je $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ apsolutna vrijednost ili modul $|\vec{r}|$, odnosno r radijvektora $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, dobijemo $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{r}$. Na isti način:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \text{i} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

pa je

$$\text{grad } U = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k} = \frac{1}{r}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \underline{\frac{\vec{r}}{r}}.$$

751. Odredi tačku u kojoj je gradijent polja $z = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ jednak $\vec{i} - \frac{16}{9}\vec{j}$.

Računamo prema (201):

$$\text{grad } z = \frac{y}{xy + 1}\vec{i} - \frac{1}{xy^2 + y}\vec{j} = \vec{i} - \frac{16}{9}\vec{j}.$$

Slijedi:

$$\frac{y}{xy + 1} = 1; \qquad \frac{1}{y(xy + 1)} = \frac{16}{9}.$$

Iz prve jednadžbe slijedi:

$$xy + 1 = y,$$

a uvrštenje u drugu daje

$$\frac{1}{y^2} = \frac{16}{9}, \quad \text{pa je} \quad y_{1,2} = \pm\frac{3}{4},$$

dok je

$$x_1 = 1 - \frac{1}{y_1} = -\frac{1}{3}, \qquad x_2 = \frac{7}{3}.$$

Tražene tačke

$$\underline{T_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)} \quad \text{i} \quad \underline{T_2\left(\frac{7}{3}, -\frac{3}{4}\right)}.$$

752. Odredi tačke u kojim je modul gradijenta polja $z = (x^2 + y^2)^{3/2}$ jednak 2.

$$\left[\text{Tačke su na kružnici } x^2 + y^2 = \frac{2}{3}\right].$$

753. Odredi kut što ga u tački $T_1(3, 4)$ zatvaraju gradijenti polja

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{i} \quad u = x - 3y + \sqrt{3xy}.$$

$$\text{grad } z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j}.$$

$$\text{grad } u = \left(1 + \frac{3y}{2\sqrt{3xy}}\right)\vec{i} + \left(-3 + \frac{3x}{2\sqrt{3xy}}\right)\vec{j}$$

a u $T_1(3, 4)$:

$$(\text{grad } z)_1 = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$$

$$(\text{grad } u)_1 = 2\vec{i} - \frac{9}{4}\vec{j}.$$

Prema (45): $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{ab}$;

$$\cos\varphi = \frac{\frac{6}{5} - \frac{9}{5}}{1 \cdot \sqrt{4 + \frac{81}{16}}} = -\frac{12}{5\sqrt{145}} \doteq -0{,}199$$

$$\underline{\varphi = 101^0 30'.}$$

754. Odredi kut što ga zatvaraju gradijenti polja $z = \ln\dfrac{y}{x}$ u tačkama $T_1\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right)$ i $T_2(1; 1)$.

$$\left[\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}\right].$$

755. Odredi najveći uspon plohe $z = x^2 + 4y^2$ u tački $T_1(2; 1; 8)$.

Prema (201):

$$\text{grad } z = 2x\vec{i} + 8y\vec{j}$$

$$(\text{grad } z)_1 = 4\vec{i} + 8\vec{j}; \qquad |(\text{grad } z)_1| = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} \doteq 8{,}94;$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{80}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \doteq 0{,}45 \qquad \alpha \doteq 63^0.$$

To znači: idemo li iz tačke T_1 za 1 u smjeru koji zatvara kut $\alpha = 63^0$ s osi X, maksimalna promjena kote z zadane plohe iznosit će približno 8,94, pa je kut najvećeg uspona plohe

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{8{,}94}{1} = 8{,}94: \qquad \underline{\varphi \doteq 83^0 40'.}$$

756. Odredi za polje $U = 2y^2 + z^2 - xy - yz + 2x$ stacionarne tačke, tj. tačke plohe, u kojim su derivacije funkcije u svim smjerovima jednake nuli.

Prema (199):

$$\text{grad } U = (-y + 2)\vec{i} + (4y - x - z)\vec{j} + (2z - y)\vec{k}.$$

Stavimo:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -y + 2 = 0; \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 4y - x - z = 0; \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 2z - y = 0.$$

Riješimo li taj sustav jednadžbi, dobijemo:

$$y = 2, \qquad z = 1, \qquad x = 7.$$

Stacionarna tačka:

$$\underline{S(7, 2, 1).}$$

757. Odredi stacionarne tačke polja

a) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$ $\qquad [S(2, 0)]$

b) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ $\qquad [S_1(0, 0);\ S_2(1, 1)].$

758. Pokaži da tačke polja $U = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ zadovoljavaju relaciju

$$U = 2\ln 2 - \ln|\text{grad } U|^2.$$

759. Odredi gradijente zadanih polja

a) $U = \vec{r}^2$

$$\text{grad } U = \text{grad } (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})^2 = [\text{prema (15) } (\vec{a})^2 = a^2] = \text{grad } |x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}|^2 =$$

$$= \text{grad } (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2 = \text{grad } (x^2 + y^2 + z^2) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} =$$

$$= 2(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \underline{2\vec{r}.}$$

b) $U = |\vec{r}|$

$$\text{grad } U = \text{grad } r = \text{grad } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \underline{\frac{\vec{r}}{r}}.$$

760. Dokaži da je $\dfrac{d}{dt}U(x, y, z) = \text{grad } U \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, gdje su x, y i z funkcije od t, dok je $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$$\frac{d}{dt}U(x, y, z) = \frac{d}{dt}U[x(t), y(t), z(t)] = \text{prema (87)} = \underline{\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}}.$$

Prema (199) i (35):

$$\text{grad } U \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right) = \text{prema (18)} =$$

$$= \underline{\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}}.$$

B. Usmjerena derivacija

Zadaci

U zadacima **761—775** uklj. izračunaj derivaciju zadanog polja u zadanoj tački i zadanom smjeru.

761. $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ u tački $T_1(3, 1)$ u smjeru od T_1 prema tački $T_2(6, 5)$.

Računamo prema (201 a):

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial \vec{s}_0} = \vec{s}_0 \text{ grad } z.$$

Prema (8):

$$\vec{s} = \overrightarrow{T_1T_2} = (6-3)\vec{i} + (5-1)\vec{j} = 3i + 4\vec{j}$$

$$\vec{s}_0 = \frac{3\vec{i} + 4\vec{j}}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$$

$$\text{grad } z = (3x^2 - 6xy + 3y^2)\vec{i} + (-3x^2 + 6xy)\vec{j}$$

$$(\text{grad } z)_1 = 12\vec{i} - 9\vec{j}$$

a u $T_1(3, 1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}_0} = \left(\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}\right) \cdot \left(12\vec{i} - 9\vec{j}\right) = \text{prema (18)} = \frac{36}{5} - \frac{36}{5} = \underline{0}.$$

762. $z = \text{arc tg } xy$ u tački $T_1(1, 1)$ u smjeru raspolovnice prvog kvadranta.

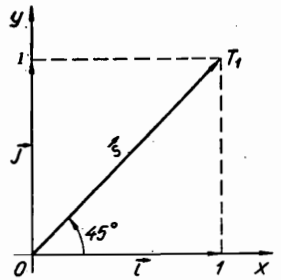
Prema (201 a) i slici 216:

$$\vec{s} = \vec{i} + \vec{j}; \qquad \vec{s}_0 = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$$

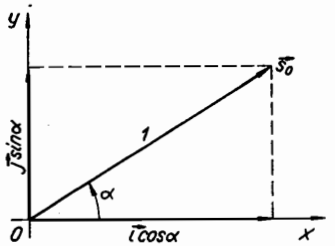
$$\text{grad } z = \frac{y}{1 + x^2y^2}\vec{i} + \frac{x}{1 + x^2y^2}\vec{j}$$

$$(\text{grad } z)_1 = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}_0} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$



Slika 216.



Slika 217.

763. $z = \ln(e^x + e^y)$ u ishodištu $O(0, 0)$ u smjeru α (sl. 217).

$$\vec{s}_0 = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j}$$

$$\text{grad } z = \frac{e^x}{e^x + e^y}\vec{i} + \frac{e^y}{e^x + e^y}\vec{j}; \qquad (\text{grad } z)_1 = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}_0} = (\cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j}) \cdot \frac{\vec{i} + \vec{j}}{2} = \underline{\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{2}}.$$

764. $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ u $T_1(2, 1)$ u smjeru od te tačke prema $O(0, 0)$.

$[-\sqrt{5}]$.

765. $z = x^2 - xy - 2y^2$ u $T_1(1, 2)$ u smjeru, koji zatvara s osi $+X$ kut $\alpha = 60°$.

$\left[-\frac{9}{2}\sqrt{3}\right]$.

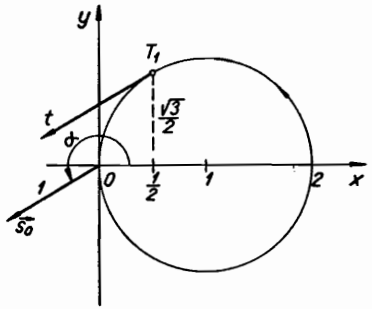
766. $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ u $T_1(1; 2)$ u smjeru od T_1 prema $T_2(4, 6)$.

[1].

767. $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ u $T_1(1, 1)$ u smjeru raspolovnice prvog koordinatnog kuta.

$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

768. $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ u tački $T_1\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ koja leži na kružnici $x^2 + y^2 - 2x = 0$ u smjeru te kružnice.



Slika 218.

Iz zadatka se razabire da se derivacija traži u smjeru tangente na kružnicu u tački T_1 kružnice:

$$y' = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1-x}{y}; \quad y_1' = \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{pa je} \quad \alpha_1 = 30^0.$$

Prema slici 218: $\alpha = \alpha_1 + 180° = 210^0$

$$\vec{s_0} = \cos 210^0 \vec{i} + \sin 210^0 \vec{j} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$\operatorname{grad} z = -\frac{y}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)x^2}\vec{i} + \frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)x}\vec{j}; \quad (\operatorname{grad} z)_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s_0}} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \underline{\frac{1}{2}}.$$

769. $z = \ln(x+y)$ u tački $T_1(1, 2)$ koja leži na paraboli u smjeru te parabole.

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{3}\right].$$

770. $U = xy^2 + z^3 - xyz$ u tački $T_1(1; 1; 2)$ u smjeru koji čini s koordinatnim osima kutove 60^0, 45^0 i 30^0.

Iz zadatka slijedi da se traži derivacija zadanog polja U u tački T_1 u smjeru jediničnog radijvektora

$$\vec{s_0} = \cos 60^0 \vec{i} + \cos 45^0 \vec{j} + \cos 60^0 \vec{k} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k},$$

pa prema (198 a) dobijemo uzevši u obzir da je

$$\operatorname{grad} U = (y^2 - yz)\vec{i} + (2xy - xz)\vec{j} + (3z^2 - xy)\vec{k},$$

pa je

$$(\operatorname{grad} U)_1 = -\vec{i} + 11\vec{k}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{s_0}} = \vec{s_0} \cdot \operatorname{grad} U = \frac{1}{2}(\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + \vec{k}) \cdot (-\vec{i} + 11\vec{k}) = \underline{5.}$$

771. $U = x^2y^2z^2$ u tački $T_1(1; -1; 3)$ u smjeru od te tačke prema tački $T_2(0; 1; 1)$.

Prema (41)

$$T_1T_2 \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2},$$

tj.

$$a = -1; \quad b = 2 \quad \text{i} \quad c = -2,$$

pa je

$$\vec{s} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}, \quad \text{dok je} \quad \vec{s_0} = \frac{-\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{3}$$

$$\operatorname{grad} U = 2xy^2z^2\vec{i} + 2yx^2z^2\vec{j} + 2zx^2y^2\vec{k}$$

$$(\operatorname{grad} U)_1 = 6(3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{s_0}} = 2(-\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) \cdot (3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = -\underline{22.}$$

772. $U = x^2 - 3yz + 5$ u tački $T_1(1; 2; -1)$ u smjeru koji čini jednake kutove sa svim koordinatnim osima.

$$\vec{s_0} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}.$$

Kako je $\alpha = \beta = \gamma$, prema (5) imamo:

$$3\cos^2\alpha = 1, \quad \text{pa je} \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\vec{s_0} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}).$$

$$\operatorname{grad} U = 2x\vec{i} - 3z\vec{j} - 3y\vec{k}; \quad (\operatorname{grad} U)_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{s_0}} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}) = -\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

773. $U = xy + yz + zx$ u tački $T_1(2, 1, 3)$ u smjeru od te tačke prema tački $T_2(5, 5, 15)$.

$$\left[\frac{68}{13}\right].$$

774. $U = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ u tački $T_1(1; 1; 1)$ u smjeru vektora $2\vec{j} - \vec{k}$.

$$\left[\frac{3}{5}\sqrt{15}\right].$$

775. $U = \ln(e^x + e^y + e^z)$ u $O(0,0,0)$ u smjeru koji čini s koordinatnim osima kutove α, β i γ.

$$\left[\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}\right].$$

776. Dokazi da je derivacija polja $U = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ u bilo kojoj tački $T(x,y,z)$ polja u smjeru od te tačke prema ishodištu koordinatnog sustava jednaka $\frac{2U}{r}$, gdje je $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Računamo prema (198a) $\frac{\partial U}{\partial r} = \vec{r}_0 \cdot \text{grad } U$

$$\vec{r}_0 = \frac{1}{r}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).$$

$$\text{grad } U = \frac{2x}{a^2}\vec{i} + \frac{2y}{b^2}\vec{j} + \frac{2z}{c^2}\vec{k}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{2}{r}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{x}{a^2}\vec{i} + \frac{y}{b^2}\vec{j} + \frac{z}{c^2}\vec{k}\right) = \frac{2}{r}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = \underline{\frac{2U}{r}}.$$

777. Dokaži da je derivacija polja $U = U(x, y, z)$ u smjeru njegova gradijenta jednaka modulu gradijenta.

Prema (198 a):

$$\frac{\partial U}{\partial \text{grad } U} = (\text{grad } U)_0 \cdot \text{grad } U = \text{prema (2)} = \frac{\text{grad } U}{|\text{grad } U|} \cdot \text{grad } U = \frac{(\text{grad } U)^2}{|\text{grad } U|} =$$

$$= \text{prema (15)} = \frac{|\text{grad } U|^2}{|\text{grad } U|} = \underline{|\text{grad } U|}.$$

Npr. za polje $U = \frac{1}{r}$, gdje je $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, tj. za

$$U = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

dobijemo:

$$\frac{\partial U}{\partial \text{grad } U} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \text{grad } \frac{1}{r}} = \left|\text{grad } \frac{1}{r}\right|.$$

Izračunajmo $\left|\text{grad } \frac{1}{r}\right|$:

$$\text{grad } \frac{1}{r} = \text{grad } \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$, slične izraze dobijemo za $\frac{\partial U}{\partial y}$ i $\frac{\partial U}{\partial z}$, pa je

$$\text{grad } \frac{1}{r} = -\frac{x\,i + y\,j + z\,k}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}.$$

$$\left|\text{grad } \frac{1}{r}\right| = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} = \underline{\frac{1}{r^2}}.$$

C. Nivo-plohe polja

Zadaci

U zadacima **778** i **779** odredi nivo-plohe zadanih polja.

778. $U = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Stavimo $U = C$ (konstanta), dobijemo

$$\arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C,$$

odatle

$$\sin C = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{ili} \quad \sin^2 C = \frac{z^2}{x^2 + y^2}$$

pa je

$$\underline{x^2 + y^2 = \frac{1}{\sin^2 C} z^2.}$$

Nivo-plohe čine familiju kružnih stožaca, kojim je os simetrije os Z, dok je vrh u ishodištu koordinatnog sustava.

779. $U = f(r)$, gdje je $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\underline{f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = C}$$

predočuje familiju sfera.

780. Odredi smjer normala na nivo-plohe polja

$$U = x^2 + y^2 + z^2.$$

Nivo-plohe zadanog polja $x^2 + y^2 + z^2 = C$ čine familiju koncentričnih sfera sa središtem u ishodištu $O(0, 0, 0)$. Kako $\text{grad } U = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} = 2\vec{r}$ stoji okomito na nivo-plohi, koja prolazi njegovom početnom tačkom, normale na nivo-plohe imaju smjer i smisao radijvektora $\vec{r}$ u bilo kojoj tački nivo-ploha.

D. Kut dviju ploha

Zadaci

U zadacima **781** i **782** odredi kut zadanih ploha u zadanim tačkama.

781. Valjka $x^2 + y^2 = R^2$ i sfere $(x - R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$ u tački $T_1\left(\frac{R}{2}; \frac{R\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

Smatrajući zadane plohe kao nivo-plohe polja

$$G = x^2 + y^2 - R^2 \quad \text{i} \quad H = (x - R)^2 + y^2 + z^2 - R^2$$

uz $G = 0$ i $H = 0$, tj. uzevši $C = 0$, računamo prema (200):

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2x; \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial G}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 2(x - R): \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = 2y; \qquad \frac{\partial H}{\partial z} = 2z$$

a u T_1:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_1 = R; \qquad \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_1 = R\sqrt{3}; \qquad \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_1 = 0$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_1 = -R; \qquad \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_1 = R\sqrt{3}; \qquad \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)_1 = 0.$$

Prema (200):

$$\cos\varphi = \frac{-R^2 + 3R^2}{\sqrt{R^2 + 3R^2}\cdot\sqrt{R^2 + 3R^2}} = \frac{2R^2}{4R^2} = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\varphi = \frac{\pi}{3}}.$$

782. $x^2 + y^2 = a^2$ i $bz = xy$ u tački $T_1(x_1, y_1 z_1)$.

Smatrajući zadane plohe kao nivo-plohe polja $G = x^2 + y^2 - a^2$ i $H = xy - bz$, dobijemo prema (200):

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2x; \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = 2y; \qquad \frac{\partial G}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = y; \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = x; \qquad \frac{\partial H}{\partial z} = -b$$

pa su u T_1;

$$\operatorname{grad} G = 2x_1\vec{i} + 2y_1\vec{j}; \qquad \operatorname{grad} H = y_1\vec{i} + x_1\vec{j} - b\vec{k}$$

Prema (19):

$$\cos\varphi = \frac{2x_1y_1 + 2y_1x_1}{2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{y_1^2 + x_1^2 + b^2}} = \underline{\frac{2bz_1}{a\sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

jer je $x_1 = \dfrac{bz_1}{y_1}$, dok je $x_1^2 + y_1^2 = a^2$.

U zadacima **783—785** uklj. pokaži da su zadane plohe ortogonalne, tj. da se sijeku pod pravim kutom u svim tačkama njihove presječnice.

783. Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, ravnina $y = x \operatorname{tg}\varphi$ i stožac $z^2 = (x^2 + y^2)\operatorname{tg}^2\psi$.

Prikazavši jednadžbe zadanih ploha u obliku skalarnih polja uz $C = 0$, računamo njihove gradijente:

$$G = x^2 + y^2 + z^2 - R^2; \qquad \operatorname{grad} G = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

$$H = x\operatorname{tg}\varphi - y; \qquad \operatorname{grad} H = \operatorname{tg}\varphi\,\vec{i} - \vec{j}$$

$$F = (x^2 + y^2)\operatorname{tg}^2\psi - z^2; \qquad \operatorname{grad} F = 2x\operatorname{tg}^2\psi\,\vec{i} + 2y\operatorname{tg}^2\psi\,\vec{j} - 2z\vec{k}.$$

Prema (200):

$$\cos\Theta_1 \text{ ploha } G \text{ i } H = \frac{2x\operatorname{tg}\varphi - 2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\cdot\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi + 1}} = 0,$$

jer je $y = x\operatorname{tg}\varphi$, pa je $\underline{\Theta_1 = \frac{\pi}{2}}$.

$$\cos\Theta_2 \text{ ploha } G \text{ i } F = \frac{4x^2\operatorname{tg}^2\psi + 4y^2\operatorname{tg}^2\psi - 4z^2}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\cdot 2\sqrt{x^2\operatorname{tg}^4\psi + y^2\operatorname{tg}^4\psi + z^2}} = 0$$

jer iz F slijedi da je $4(x^2 + y^2)\operatorname{tg}^2\psi = 4z^2$, pa je $\underline{\Theta_2 = \frac{\pi}{2}}$.

Na isti način dobijemo da je $\cos\Theta_3$ ploha H i $F = 0$ pa je $\underline{\Theta_3 = \frac{\pi}{2}}$. Zadane su plohe ortogonalne.

784. Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = ax$ i $x^2 + y^2 + z^2 = by$.

785. Stožac $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ i valjkovita ploha $\arcsin\dfrac{x}{x + y} = 0$.

XVII. VEKTORSKO POLJE

Vektorsko polje određeno je vektorskom funkcijom tačke T prostora, tj.

$$\vec{v} = \vec{v}(T) = \vec{v}(\vec{r}), \quad \text{gdje je} \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

radijvektor te tačke T.

U koordinatnom obliku:

$$\vec{v} = v_x(x, y, z)\vec{i} + v_y(x, y, z)\vec{j} + v_z(x, y, z)\vec{k},$$

gdje su v_x, v_y i v_z skalarne komponente vektora $\vec{v}$, koji je dodijeljen tački T prostora.

A. Vektorske krivulje

Formule

To su prostorne krivulje, koje imaju za tangentu u svakoj tački zadanog polja $\vec{v}$ onaj vektor $\vec{v}_1$ koji pripada dotičnoj tački polja.

U polju sila vektorske su krivulje silnice tog polja sila.

Prema (221) diferencijalna jednadžba vektorskih krivulja za polje $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ glasi:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \tag{221}$$

a to je sustav od dvije obične diferencijalne jednadžbe:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}; \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{v_z}{v_x}$$

za dvije tražene funkcije $y = y(x)$ i $z = z(x)$ (vidi § 14).

Zadaci

U zadacima **786–789** uklj. odredi vektorske krivuljé zadanih polja.

786. $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ (polje konstantna vektora).

Prema (221):

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c}. \tag{a}$$

Odatle je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{c}{a} \quad \text{ili} \quad dy = \frac{b}{a}dx \quad \text{i} \quad dz = \frac{c}{a}dx.$$

$$y = \frac{b}{a}\int dx + y_0 \quad \text{i} \quad z = \frac{c}{a}\int dx + z_0,$$

gdje su y_0 i z_0 konstante integracije.

Dobijemo:

$$y = \frac{b}{a}x + y_0 \quad \text{i} \quad z = \frac{c}{a}x + z_0.$$

Odatle:

$$\frac{y - y_0}{b} = \frac{x}{a} \quad \text{i} \quad \frac{z - z_0}{c} = \frac{x}{a}.$$

pa je

$$\frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}. \tag{b}$$

Prema (a)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b}; \quad \frac{dz}{dy} = \frac{c}{b}.$$

Nakon integracije i uređenja na gore navedeni način dobijemo

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}. \tag{c}$$

Iz (b) i (c) slijedi:

$$\underline{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_0}{c}}.$$

Vektorske krivulje su pravci paralelni s vektorom $\vec{v}$.

787. $\vec{v} = (z - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y - x)\vec{k}$.

Prema (221):

$$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{y - x}.$$

Taj sustav diferencijalnih jednadžbi riješen je u primjeru 4 (vidi § 14), pa je dobiveno

$$\underline{x + y + z = C_1;} \qquad \underline{x^2 + y^2 + z^2 = C_2.}$$

Vektorske su krivulje kružnice, koje su nastale kao presječnice sfera sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava i ravnina, koje sijeku na koordinatnim ravninama jednake odreske.

788. $\vec{v} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$ (ravno polje), gdje je ω konstanta.

Prema $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$ dobijemo:

$$\frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x} \quad \text{ili} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Iz $y\,dy = -x\,dx$ slijedi:

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{R^2}{2},$$

gdje je $\frac{R^2}{2}$ konstanta integracije.

Slijedi

$$\underline{x^2 + y^2 = R^2.}$$

Vektorske su krivulje koncentrične kružnice sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava.

789. $\vec{v} = (y + z)\vec{i} - x\vec{j} - x\vec{k}.$

$$[y = z + C_1;\ x^2 + y^2 + z^2 = C_2].$$

B. Divergencija i rotor vektorskog polja, odnosno polja sila. Solenoidalna i potencijalna polja

Formule

Za $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$:

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{202}$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{204}$$

Vektorsko se polje zove solenoidalno (cijevno), ako je $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ u svim tačkama polja.

Vektorsko je polje potencijalno, ako potječe od potencijala $U = U(x, y, z)$, tj. ako je

$$v_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Potencijalno polje je bezvrtložno, tj. $\operatorname{rot}\vec{v} = 0$ je nužni i dovoljni uvjet, da je polje $\vec{v}$ potencijalno (lamelarno). Polje sila, koje potječe od potencijala, čini konzervativni sistem sila.

Za ravno vektorsko polje:

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \tag{202'}$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{204'}$$

Zadaci

U zadacima **790—793** uklj. odredi divergenciju i rotor zadanih polja.

790. $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$

Prema (202):

$$\operatorname{div}\vec{v} = 1 + 1 + 1 = \underline{3.}$$

Prema (204):

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right) = \underline{0.}$$

Kako je $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{r}$,

$$\operatorname{div}\vec{r} = 3, \qquad \operatorname{rot}\vec{r} = 0.$$

Polje radijvektora je bezvrtložno pa je potencijalno.

791. $\vec{v} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (z^2 + x^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}.$

Prema (202):

$$\operatorname{div}\vec{v} = \underline{0.}$$

Zadano je polje solenoidalno.

Prema (204):

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & z^2 + x^2 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(2y - 2z) - \vec{j}(2x - 2z) + \vec{k}(2x - \underline{2y) = 2[(y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}].}$$

792. $\vec{v} = \operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2).$

Prema (199):

$$\vec{v} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = 2 + 2 + 2 = \underline{6.}$$

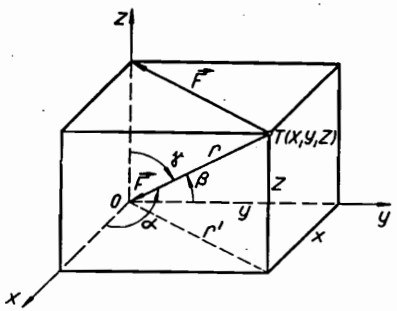
$$\operatorname{rot}\vec{v} = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \underline{0.}$$

Polje gradijenta, tj. potencijalno polje, je bezvrtložno.

793. $\vec{v} = x^2 y z \vec{i} + x y^2 z \vec{j} + x y z^2 \vec{k}.$

$$[\operatorname{div}\vec{v} = x y z; \quad \operatorname{rot}\vec{v} = x(z^2 - y^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(y^2 - x^2)\vec{k}].$$

794. Vektorsko polje čine sile $\vec{F}$, koje su obratno razmjerne s kvadratom udaljenosti njihovih hvatišta od ishodišta koordinatnog sustava O i usmjerene su prema O. Odredi divergenciju i rotor tog polja sila.



Slika 219.

Prema slici 219:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{F}_0 = -\frac{k}{r^2}\cdot\vec{r}_0 = -\frac{k}{r^2}(\cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k}) = -\frac{k}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} =$$

$$= -\frac{k}{r^2}\left(\frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}\right) = -k\left(\frac{x}{r^3}\vec{i} + \frac{y}{r^3}\vec{j} + \frac{z}{r^3}\vec{k}\right).$$

Tu je k koeficijent razmjernosti, dok je $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Računamo prema (202) uzevši u obzir da je u našem slučaju

$$v_x = -k\frac{x}{r^3}; \qquad v_y = -k\frac{y}{r^3} \quad \text{i} \quad v_z = -k\frac{z}{r^3}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -k\frac{r^3 - x\cdot 3r^2\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}{r^6} = -k\frac{r^3 - 3xr^2\cdot\frac{2x}{2r}}{r^6} = -k\frac{r^2 - 3x^2}{r^5}.$$

Na isti način dobijemo:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -k\frac{r^2 - 3y^2}{r^5}; \qquad \frac{\partial v_z}{\partial z} = -k\frac{r^2 - 3z^2}{r^5}.$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = -k\frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} = \underline{0.}$$

Zadano polje sila je solenoidalno.

Prema (204):

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = +k\frac{z\cdot 3r^2\cdot\frac{y}{r}}{r^6} - k\frac{y\cdot 3r^2\cdot\frac{z}{r}}{r^5} = k\frac{3yz - 3yz}{r^5} = 0.$$

Na isti način dobijemo:

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

pa je

$$\underline{\operatorname{rot}\vec{F} = 0.}$$

Zadano polje je i potencijalno (konzervativno) pa je harmoničko. U tačkama osi Z polje sila $\vec{F}$ nije određeno, jer je za $x = 0$ i $y = 0$ $\vec{F} = \infty$.

795. Odredi divergenciju i rotor ravnog polja sila $\vec{F}$, ako su sile određene na isti način kao u zadatku 794.

$$\left[\vec{F} = -k\frac{\vec{r}}{r^2}, \quad \operatorname{div}\vec{F} = \frac{k}{r^2}, \quad \operatorname{rot}\vec{F} = 0, \quad \text{tu je} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\right].$$

796. Polje sila čine sile $\vec{F}$, koje su obratno razmjerne s udaljenošću njihovih hvatišta od osi Z, okomite su na toj osi i usmjerene prema njoj. Odredi div $\vec{F}$ i rot $\vec{F}$.

Prema slici 219 u zadatku 794, u kojoj je r označen sa r'.

$$\vec{F} = F\cdot\vec{F}_0 = -\frac{k}{r}\cdot\vec{r}_0 = -\frac{k}{r}\left(\frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j}\right) = -k\left(\frac{x}{r^2}\vec{i} + \frac{y}{r^2}\vec{j}\right)$$

jer je $\cos\gamma = \cos 90^0 = 0$, pa je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. U tačkama na osi Z polje sila $\vec{F}$ nije određeno, jer je za $x = 0$ i $y = 0$ $\vec{F} = \infty$.

Prema (202)':

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -k\frac{r^2 - x\cdot 2r\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}{r^4} = -k\frac{r^2 - 2rx\cdot\frac{x}{r}}{r^4} = -k\frac{r^2 - 2x^2}{r^4}.$$

Na isti način:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -k\frac{r^2 - 2y^2}{r^4}.$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = -\frac{k}{r^4}[2r^2 - 2(x^2 + y^2)] = \underline{0.}$$

Zadano polje sila je solenoidalno.

Prema (204)':

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = +k\frac{y\cdot 2r\cdot\frac{x}{r}}{r^4} = k\frac{2xy}{r^4} = \frac{\partial v_x}{\partial y}; \qquad \operatorname{rot}\vec{F} = \underline{0.}$$

Polje sila je i potencijalno pa je harmoničko.

797. Odredi divergenciju polja sila $\vec{F}$, koje su obratno razmjerne s udaljenošću njihovih hvatišta od ravnine XY, a usmjerene su prema ishodištu O koordonatnog sustava.

$$\left[\vec{F} = -\frac{k}{z}\left(\frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}\right); \quad \operatorname{div}\vec{F} = -\frac{k}{z}\cdot\frac{1}{r} = -\frac{k}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right].$$

C. Određivanje potencijala konzervativnih polja. Silnice i radnja polja sila

Formule

Potencijal $U(x, y, z)$ vektornog polja $\vec{v}$, odnosno polja sila

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}:$$

$$U = \int_{T_0(x_0,y_0,z_0)}^{T(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + C = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz + C = \int_{T_0}^{T} \vec{F}\,d\vec{r} \qquad (205)'$$

pri čemu se krivuljni integral uzima po bilo kojem putu, koji polazi iz neke tačke T_0 polja, jer njegova vrijednost ne zavisi od oblika puta, već jedino od izbora početne i konačne tačke toga puta, naravno ako je polje konzervativno, tj. potencijalno (rot $\vec{v} = 0$).

Ako je polje $\vec{v}$ potencijalno, tj. potječe od potencijala U, pa je $\vec{v} = \operatorname{grad} U$, funkcija U zadovoljava Laplaceovu jednadžbu

$$\triangle U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \qquad (214\text{ a})$$

pa se zove harmonička funkcija.

Radnja sile $\vec{F}$ uzduž puta l

$$A = \int_l P\,dx + Q\,dy + R\,dz \qquad (205\text{ a})$$

Zadaci

798. Ispitaj da li imaju zadana vektorska polja potencijale pa ih odredi, ako postoje.

a) $\vec{v} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$.

Prema (204) uzevši u obzir da je

$$P = y + z; \quad Q = x + z \quad \text{i} \quad R = x + y$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 1 - 1 = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

rot $\vec{v} = 0$, polje ima potencijal, konzervativno je.

Prema (205)':

$$\text{potencijal } U = \int_{x_0}^{x}(y + z)\,dx + \int_{y_0}^{y}(x_0 + z)\,dy + \int_{z_0}^{z}(x_0 + y_0)\,dz + C =$$

$$= \underline{xy + xz + yz + C.}$$

b) $\vec{v} = (5x^2y - 4xy)\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j}$.

Prema (204)' uzevši u obzir da je

$$P = 5x^2y - 4xy \quad \text{i} \quad Q = 3x^2 - 2y$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 6x - 5x^2 + 4x = 10x - 5x^2 \neq 0.$$

Polje nema potencijala.

c) $\vec{v} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$

[Ima. $U = xyz + C$]

d) $\vec{v} = yz(2x + y + z)\vec{i} + xz(x + 2y + z)\vec{j} + xy(x + y + 2z)\vec{k}$.

[Ima. $U = xyz(x + y + z) + C$].

799. Pokaži da vektorsko polje, što ga čine konstantni vektori $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, ima potencijal i odredi ga.

Prema (204) uzevši u obzir da su $P = a$, $Q = b$ i $R = c$ konstante dobijemo rot $\vec{v} = 0$ pa je polje potencijalno.

Prema (205)':

$$U = a\int_{x_0}^{x} dx + b\int_{y_0}^{y} dy + c\int_{z_0}^{z} dz + C = \underline{ax + by + cz + C.}$$

800. Zadano je polje sila, koje su razmjerne s udaljenošću njihovih hvatišta od ishodišta O koordinatnog sustava i usmjerene su prema ishodištu O. Pokaži da je polje sila konzervativno i odredi njegov potencijal.

Iz zadatka i slike 219 (vidi zadatak 794) slijedi, da zadano polje čine sile

$$\vec{F} = -k\vec{r} = -k(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).$$

gdje je k koeficijent razmjernosti, a $\vec{r}$ radijvektor.

Prema (204):

$$\operatorname{rot}\vec{F} = -k\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0,$$

pa je polje konzervativno.

Prema (205)':

$$\text{Potencijal } U = -k \int x\,dx + y\,dy + z\,dz + C =$$

$$= -k\left[\int_{x_0}^{x} x\,dx + \int_{y_0}^{y} y\,dy + \int_{z_0}^{z} z\,dz + C\right] = \underline{-\frac{k}{2}(x^2+y^2+z^2)+C}$$

pa je $\vec{F} = \text{grad } U$.

801. U zadatku 794 pokazali smo da je polje sila

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\left(\frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}\right) = -k\frac{\vec{r}}{r^3},$$

gdje je k koeficijent razmjernosti, a $\vec{r}$ radij vektor, solenoidalno i potencijalno, jer je div $\vec{F} = 0$ i rot $\vec{F} = 0$. Odredi potencijal tog polja i pokaži da je potencijal harmonička funkcija, jer zadovoljava Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu

$$\triangle U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Prema (205)' odredimo potencijal $U(x, y, z)$: Kako je prema (15) $(\vec{r})^2 = r^2$, diferencirajući tu jednadžbu dobijemo

$$2\vec{r}\,d\vec{r} = 2r\,dr, \quad \text{pa je} \quad \vec{r}\,d\vec{r} = r\,dr \qquad \text{(a)}$$

$$U = -k\int_{T_0(x_0,y_0,z_0)}^{T(x,y,z)} \frac{\vec{r}\,d\vec{r}}{r^3} = \text{prema (a)} = -k\int_{T_0}^{T}\frac{r\,dr}{r^3} = -k\int_{T_0}^{T}\frac{dr}{r^2} = +k\left|\frac{1}{r}\right|_{T_0}^{T} =$$

$$= k\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\right), \quad \text{pa je} \quad \vec{F} = \text{grad } U.$$

Računamo:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -k\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}; \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -k\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} - \frac{3x^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}\right).$$

Slične izraze dobijemo za $\frac{\partial U}{\partial y}$ i $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, kao i za $\frac{\partial U}{\partial z}$ i $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ Izračunaj ih!

Dobijemo

$$\text{div grad } U = \triangle U =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -k\left(\frac{3}{\sqrt{(x^2+y^2+z)^3}} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}\right) = 0.$$

802. Odredi potencijal ravnog konzervativnog polja sila $\vec{F} = -k\frac{\vec{r}}{r^2}$ (prostorno navedeno je u zadatku 794 a ravno u 795) i pokaži da ne zadovoljava Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu

$$\triangle U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

803. Odredi potencijal konzervativnog polja sila $\vec{F} = -\frac{k}{r}\vec{r}_0 = -k\frac{\vec{r}}{r^2}$ navedenog u zadatku 796 i pokaži da je harmonička funkcija.

Prema (205)':

$$U = \int_{T_0}^{T} \vec{F}\,d\vec{r} = -k\int_{T_0}^{T}\frac{\vec{r}\,d\vec{r}}{r^2}.$$

Kako je prema (15) $(\vec{r})^2 = r^2$, dobijemo $2\vec{r}\,d\vec{r} = 2r\,dr$ pa je

$$U = -k\int_{T_0}^{T}\frac{r\,dr}{r^2} = -k\int_{T_0}^{T}\frac{dr}{r} = -k\,|\ln r|_{T_0}^{T} = -k[(\ln(x^2+y^2) - \ln(x_0^2+y_0^2)]$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -k\frac{x}{x^2+y^2}; \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = k\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -k\frac{y}{x^2+y^2}; \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = k\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \underline{0.}$$

U je harmonička funkcija.

804. Da li je polje sila $\vec{F} = -\frac{k}{z}\left(\frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}\right)$ za koje smo u zadatku 797 odredili divergenciju, konzervativno?

Uzevši u obzir da je

$$P = -\frac{kx}{zr}; \qquad Q = -\frac{ky}{zr}; \qquad R = -\frac{k}{r} \quad \text{i da je} \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

dobijemo prema (204):

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = +k\frac{1}{r^2}\cdot\frac{y}{r} - k\frac{y\left(z\cdot\frac{z}{r}+r\right)}{z^2r^2} = -k\frac{y}{z^2r} \neq 0$$

Polje sila nije konzervativno.

805. Da li je konzervativno polje sila, koje su razmjerne s kvadratom udaljenosti njihovih hvatišta od osi Z, a usmjerene su prema ishodištu O koordinatnog sustava.

Prema zadatku i slici 219 uz zadatak 794 dobijemo:

$$\vec{F} = -k\cdot r_1^2\vec{r}_0 = -k\cdot r_1^2\left(\frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}\right).$$

Tu je

$$r_1 = \sqrt{x^2+y^2}; \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

$$P = -k\frac{r_1^2 x}{r}; \qquad Q = -k\frac{r_1^2 y}{r}; \qquad R = -k\frac{r_1^2 z}{r}.$$

Prema (204):

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -k\frac{r\cdot z\cdot 2r_1\cdot\frac{y}{r_1} - r_1^2 z\cdot\frac{y}{r}}{r^2} - k\frac{r_1^2 y\cdot\frac{z}{r}}{r^2} \neq 0.$$

Polje sila nije konzervativno.

806. Pokaži da je polje radijvektora $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ potencijalno i odredi njegov potencijal.

$$\left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + C\right].$$

807. Odredi silnice polja sila $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$.

Prema (221):

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-2z}$$

Slijedi:

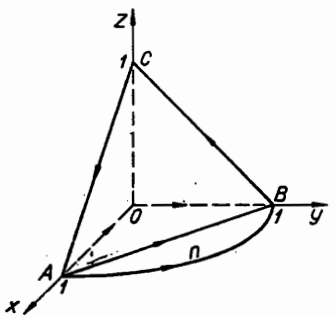
$$\ln y = \ln x + \ln C_1, \quad \text{pa je} \quad \underline{y = C_1 x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln z = \ln x + \ln C_2, \quad \text{pa je} \quad \ln\frac{1}{\sqrt{z}} = \ln(C_2 x)$$

ili

$$\frac{1}{\sqrt{z}} = C_2 x, \quad \text{a odatle je} \quad \underline{z = \frac{C_2'}{x^2}}, \quad \text{gdje je} \quad C_2' = \frac{1}{C_2^2}.$$

808. Odredi radnju polja sila $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ pri pomicanju tačke po zatvorenim putovima:



Slika 220.

a) po odresku pravca $x + z = 1$; $y = 0$ $(\overline{CA})$, po kvadrantu kružnice $x^2 + y^2 = 1$; $z = 0$ $(\widehat{AnB})$ i po odresku pravca $y + z = 1$; $x = 0$ $(\overline{BC})$. Vidi sl. 220.

b) put kao pod a) samo luk $\widehat{AnB}$ zamijeni slomljenom crtom AOB.

c) put kao pod a), zamijeni samo luk $\widehat{AnB}$ pravcem $\overline{AB}$.

ad a) Radnja $A_1 = A_{\overline{CA}} + A_{\widehat{AnB}} + A_{\overline{BC}}$.

Prema (205 a), odnosno (184):

$$A_{CA} = [y = 0, \quad dy = 0, \quad z = 1 - x, \quad dz = -dx] =$$

$$= -\int_1^0 x(1-x)\,dx = -\left|\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_1^0 = \frac{1}{6}$$

$$A_{\widehat{AnB}} = [z = 0, \ dz = 0; \ y = \sqrt{1 - x^2}] = \int_1^0 x\sqrt{1 - x^2}\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t\,dt = -\left|\frac{\cos^3 t}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

$$A_{\overline{BC}} = [x = 0, \ dx = 0, \ z = 1 - y; \ dz = -dy] = -\int_1^0 y(1-y)\,dy = \frac{1}{6}$$

$$A_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \underline{\frac{2}{3}}.$$

ad b) $A_2 = A_{\overline{CA}} + A_{\overline{AO}} + A_{\overline{OB}} + A_{\overline{BC}}$

$$A_{AO} + A_{OB} = [z = 0, \ dz = 0, \ y = 0, \ \text{odnosno } x = 0] = 0$$

$$A_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \underline{\frac{1}{3}}.$$

ad c) $A_3 = A_{\overline{CA}} + A_{\overline{AB}} + A_{\overline{BC}}$

$$A_{\overline{AB}} = [z = 0; \ dz = 0; \ y = 1 - x] = \int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{1}{6}.$$

$$A_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \underline{\frac{1}{2}}.$$

Vrijednosti dobivene za A_1, A_2 i A_3 kontroliraj prema Stokesu (194 a).

809. Odredi radnju polja sila $\vec{F} = x^2\vec{i} + y\vec{j} + \cos z\,\vec{k}$ uzduž luka $\widehat{AB}$ cilindričke spirale $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = 2t$ pri čemu je za tačku A $t = 0$, a za B $t = \frac{3}{2}\pi$.

Računamo prema (205 a) i (184):

$$dx = -a\sin t\,dt; \qquad dy = a\cos t\,dt; \qquad dz = 2\,dt$$

$$A = \int_A^B x^2\,dx + y\,dy + \cos z\,dz = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left(-a^3\cos^2 t\sin t + \frac{a^2}{2}\sin 2t + 2\cos 2t\right) dt =$$

$$= \left|a^3\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{a^2}{2}\frac{\cos 2t}{2} + \sin 2t\right|_0^{\frac{3}{2}\pi} = \underline{\frac{a^2}{6}(3 - 2a)}.$$

810. Izračunaj radnju ravnog polja sila $\vec{F} = (2a - y)\vec{i} + (y - a)\vec{j}$ uzduž prvog luka cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 0$.

$$[\pi a^2].$$

811. Izračunaj radnju polja sila $\vec{F} = -(a \cos t\, i + b \sin t\, j)$ uzduž luka elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ od tačke $A(a, 0, 0)$ do tačke $B(0, b, 0)$.

$$\left[\frac{a^2 - b^2}{2}\right].$$

D. Totalni tok i cirkulacija vektorskog polja

Formule

Ravno vektorsko polje

$$\vec{v} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}.$$

Prema formuli Green-Gauss-Ostrogradskog:

$$\text{Totalni tok } T = \iint_S \operatorname{div} \vec{v}\, dx\, dy = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{+k} v_n\, ds, \qquad (203\text{ a})$$

gdje je S dio ravnine omeđene zatvorenom krivuljom k.

Cirkulacija C prema Stokesovoj (Greenovoj) formuli.

$$C = \int_{+k} v_t\, ds = \oint_{+k} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy. \qquad (205\text{ a})'$$

Prostorno vektorsko polje

$$\vec{v} = P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz.$$

Prema formuli Green-Gauss-Ostrogradskog:

$$\text{Totalni tok } T = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v}\, dx\, dy\, dz = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint_S v_n\, dS = \iint_S P\, dy\, dz + Q\, dx\, dz + R\, dx\, dy. \qquad (203)'$$

Prema Stokesovoj formuli:

$$C = \oint_{+k} v_t\, ds = \oint_{+k} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{v})_n\, dS \qquad (205)'$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad (204)$$

a. RAVNO VEKTORSKO POLJE

Zadaci

U zadacima **812–814** odredi totalni tok T i cirkulaciju C zadanih vektorskih polja

812. $\vec{v} = a\vec{r}$, gdje je a konstantni skalar, dok je $\vec{r}$ radijvektor, uzduž bilo koje zatvorene krivulje k, koja omeđuje dio S ravnine.

Kako je

$$\vec{v} = ax\vec{i} + ay\vec{j}, \quad P = ax \quad \text{i} \quad Q = ay,$$

prema (203 a) dobijemo

$$T = \iint_S (a + a)\, dy\, dy = 2a \iint_S dx\, dy = \underline{2aS}.$$

Prema (205 a)':

$$C = \iint (0 - 0)\, dx\, dy = 0.$$

813. $\vec{v} = (x^3 - y)\vec{i} + (y^3 + x)\vec{j}$ uzduž kružnice polumjera r sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava.

Kako je

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2, \quad \text{a} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 3y^2,$$

dobijemo

$$T = \iint_S (3x^2 + 3y^2)\, dx\, dy = 3 \iint_S (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho^3\, d\rho = 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{r^4}{4} = \underline{\frac{3}{2}\pi r^4}.$$

814. $\vec{v} = x\vec{i} - y\vec{j}$ uzduž bilo koje zatvorene krivulje k.

$$[T = 0;\ C = 0].$$

815. Odredi cirkulaciju vektora $\vec{v} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$ po kružnicama:

a) $x^2 + y^2 = a^2$.

Prema (205 a)′:

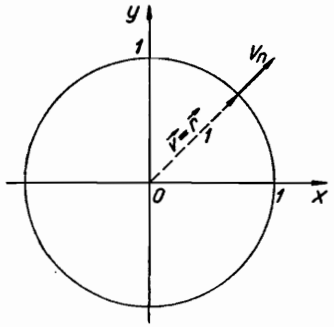
$$C = \iint_S (\omega + \omega)\, dx\, dy = 2\,\omega \iint_S dx\, dy = 2\,\omega\, S = \underline{2\,\omega\,\pi\, a^2.}$$

b) $(x - 2)^2 + y^2 = 2$.

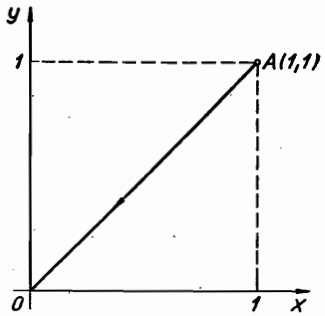
Prenesimo ishodište koordinatnog sustava u središte kružnice (2, 0):

$$\vec{v} = -\omega y \vec{i} + \omega (x + 2) \vec{j}$$

$$C = \iint_S (\omega + \omega)\, dx\, dy = 2\,\omega \cdot S = 2\,\omega \cdot \pi (\sqrt{2})^2 = \underline{4\,\omega\,\pi.}$$



Slika 221.



Slika 222.

816. Potencijal polja brzina čestica tekućine jednak je $U = \ln r$, gdje je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Odredi protoku, tj. količinu tekućine koja istječe u jedinici vremena iz zatvorene konture k, koja obuhvaća ishodište O koordinatnog sustava, a također i cirkulaciju, tj. količinu tekućine, koja u jedinici vremena teče uzduž te konture k. Kako će se promijeniti rezultat, ako ishodište O leži izvan konture k, ali ne na njoj?

Kako je zadano polje brzina potencijalno

$$\vec{v} = \operatorname{grad} U = \operatorname{grad} (\ln \sqrt{x^2 + y^2}) = \operatorname{grad} (\ln r),$$

pa je

$$P = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{r^2} \quad \text{i} \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{r^2}.$$

Prema (203 a) dobijemo izračunavši

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

protoka $\underline{T = 0.}$

Kako je zadano polje brzina potencijalno, tj. rot $\vec{v} = 0$, cirkulacija $\underline{C = 0.}$ Pokaži to!

Za protoku T dobili smo nulu, jer smo izostavili ishodište O, u kojem je $U = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \ln 0 = -\infty$, pa P i Q nisu definirani. Da pokažemo da je u O tačečni izvor, zamislimo oko tačke O kružnicu polumjera 1 i izračunajmo protoku T kroz tu kružnicu.

Prema slici 221 i formuli (203 a) dobijemo:

$$T = \oint_{+k} v_n\, ds = \int_{+k} 1 \cdot ds = \underline{2\,\pi.}$$

Očito je da je cirkulacija $C = 0$ bez obzira na to da li je izostavljeno ishodište O ili ne.

Iz navedenog slijedi da se za protoku T dobije vrijednost $2\,\pi$ samo u tom slučaju, kad ishodište O leži u nutrini konture k, leži li ono izvan konture protoka $T = 0$ i $C = 0$ u oba slučaja.

817. Potencijal polja brzina čestica tekućine glasi $U = x^3 - 3\,x\,y^2$. Izračunaj protoku T, tj. količinu tekućine koja proteče u jedinici vremena kroz odrezak pravca, koji spaja tačku $A\,(1, 1)$ s ishodištem O koordinatnog sustava.

Prema slici 222:

$$OA \equiv y = x.$$

Kako je

$$\vec{v} = \operatorname{grad} U, \qquad P = \frac{\partial U}{\partial x} = 3\,x^2 - 3\,y^2, \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y} = -6\,x\,y$$

pa je

$$\vec{v} = 3\,(x^2 - y^2)\,\vec{i} + (-6\,x\,y)\,\vec{j}.$$

$$T = \int_s P\,dx + Q\,dy = \int_s 3\,(x^2 - y^2)\,dx - 6\,x\,y\,dy = [\text{jer je } y = x] =$$

$$= 3 \int_1^0 (x^2 - x^2)\,dx - 6 \int_1^0 y^2\,dy = -6 \left| \frac{y^3}{3} \right|_1^0 = \underline{2.}$$

b. PROSTORNO VEKTORSKO POLJE

Zadaci

818. Dokaži da je tok T radijvektora $\vec{r}$ kroz bilo koju zatvorenu plohu jednak trostrukom volumenu V tijela omeđenog tom plohom.

Prema (203)′ za $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ dobijemo

$$T = \iiint_V (1 + 1 + 1)\, dx\, dx\, dz = 3 \iiint_V dx\, dy\, dz = \underline{3\,V.}$$

819. Izračunaj tok radijvektora $\vec{r}$

a) kroz plašt kružnog valjka (R, H), ako os valjka prolazi ishodištem koordinatnog sustava,

b) kroz obje baze valjka.

Rezultat kontroliraj na temelju stavka navedenog u pređašnjem zadatku 818.

ad a) Prema slici 223 i formuli (203)′ dobijemo

$$T_1 = \iint\limits_S r_n \, dS = [r_n = r \cos \varphi = R] = R \cdot S,$$

gdje je S plašt valjka, pa je

$$T_1 = R \,.\, 2 R \pi \,.\, H = \underline{2 \pi R^2 H}.$$

ad b) Za sve tačke donje baze $r_n = 0$ pa i $T = 0$, dok za gornju $r_n = H$ (vidi sliku), pa je prema (203)′:

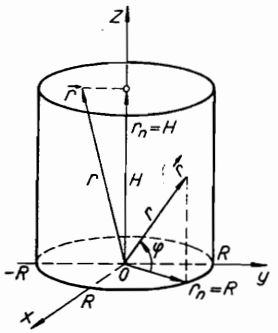
$$T_2 = \iint\limits_S H \, dS = H \cdot S = H \pi R^2.$$

Tok kroz sve plohe valjka iznosi:

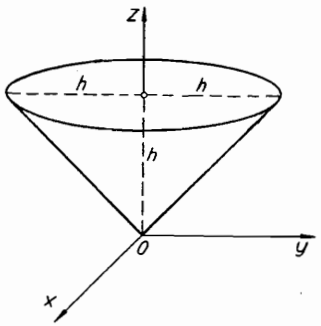
$$T = T_1 + T_2 = \underline{3 \pi R^2 H}.$$

Proba:

$$3 V = 3 \cdot \pi R^2 H = 3 \pi R^2 H.$$



Slika 223.



Slika 224.

820. Odredi tok radijvektora $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

a) kroz bazu stošca $x^2 + y^2 = z^2$, $0 < z < h$,

b) kroz plašt toga stošca

ad a) Kako je $P = x$, $Q = y$ i $R = z$, dobijemo prema (203)′ s obzirom na sliku 224:

$$T_1 = \iint\limits_S x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + z \, dx \, dy = [\text{prva su dva integrala jednaka nuli, jer}$$

se baza na ravnine YZ i XZ projicira kao odresci pravaca dužine $2h$, dok je u

$$\text{trećem integralu } z = h] = h \iint\limits_S dx \, dy = h \cdot S = h \cdot \pi h^2 = \underline{\pi h^3}.$$

ad b) Tok T_2 kroz plašt stošca odredimo najjednostavnije tako, da odredimo tok T kroz potpuno oplošje stošca pa od T oduzmemo T_1.

Prema (203)′:

$$T = \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{r} \, dx \, dy \, dz = \iiint\limits_V 3 \cdot dx \, dy \, dz = 3 V = 3 \cdot \frac{1}{3} \pi h^2 \cdot h = \pi h^3.$$

$$T_2 = T - T_1 = \underline{0}.$$

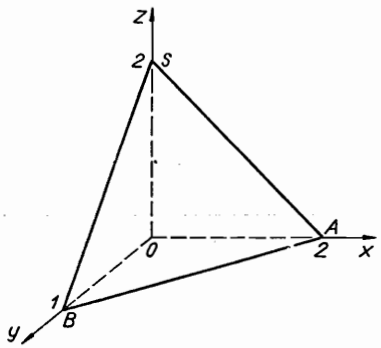
821. Izračunaj tok radijvektora $\vec{r}$ kroz plašt kružnog stošca ($R = 2$, $H = 1$), kojemu je baza u ravnini XY a os se podudara s osi Z.

[4π].

822. Odredi tok vektora $\vec{v} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ kroz oplošje piramide koja je omeđena ravninama $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$ $(a > 0)$.

[0].

823. Odredi tok vektora $\vec{v} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ kroz bočne plohe piramide kojoj je vrh $S(0, 0, 2)$, a bazu čini $\triangle OAB$ [$O(0, 0, 0)$; $A(2, 0, 0)$; $B(0, 1, 0)$]. (Sl. 225).



Slika 225.

Zadatak riješimo tako, da prema (203)′ odredimo tok vektora kroz sve plohe piramide, a od rezultata T oduzmemo tok T_1 kroz bazu.

$$T = \iiint\limits_V 0 \cdot dx \, dy \, dz = 0.$$

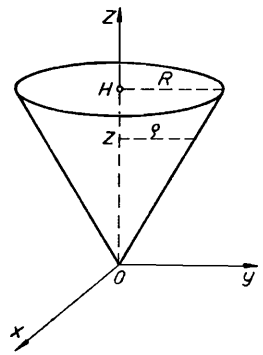
$$T_1 = [z = 0,\ dz = 0,\ \cos \gamma = \cos 180^0 = -1] = -\iint\limits_S xy \, dx \, dy =$$

$$= \left[\text{prema slici } AB \equiv \frac{x}{2} + \frac{y}{1} = 1, \text{ pa je } y = 1 - \frac{x}{2} \right] = - \int_0^2 x\,dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} y\,dy =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^2 x \left| y^2 \right|_0^{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} \int_0^2 x \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = -\frac{1}{6}.$$

$$T_2 = T - T_1 = 0 - \left(-\frac{1}{6}\right) = \underline{\frac{1}{6}}.$$

824. Odredi tok polja vektora $\vec{v} = x^3 \vec{i} + y^3 \vec{j} + z^3 \vec{k}$ kroz plašt stošca $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2$ $(0 \leqq z \leqq H)$ (Sl. 226).



Slika 226.

Kao u predašnjem zadatku 823, tok T_2 vektora kroz plašt stošca odredimo kao razliku toka T kroz potpuno oplošje stošca i toka T_1 kroz bazu.

Prema (203)′:

$$T = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= 3 \left[\iiint_V x^2\,dx\,dy\,dz + \iiint_V y^2\,dx\,dy\,dz + \iiint_V z^2\,dx\,dy\,dz \right] = 3(I' + I'' + I''').$$

Kako iz $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2$ slijedi da je $z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$,

$$I' = \iiint_V x^2\,dx\,dy\,dz = \iint_{\sigma_1} x^2\,dx\,dy \int_{\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{H} dz = \iint_{\sigma_1} x^2 \left(H - \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}\right) dx\,dy =$$

$$= \text{uz prijelaz na polarne koordinate} = \iint_{\sigma_1'} \rho^2 \cos^2\varphi \left(H - \frac{H}{R}\rho\right) \rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= H \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi \int_0^R \rho^2 \left(1 - \frac{1}{R}\rho\right) \rho\,d\rho = H\pi \frac{R^4}{20}.$$

Na isti način dobijemo:

$$I'' = \iiint_V y^2\,dx\,dy\,dz = \iint_{\sigma_1} y^2\,dx\,dy \int_{\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{H} dz = H\pi \frac{R^4}{20}.$$

$$I''' = \iiint_V z^2\,dx\,dy\,dz \int_{\sigma_1} dx\,dy \int_{\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{H} z^2\,dz = \frac{2}{10}\pi H^3 R^2.$$

$$T = 3(T' + T'' + T''') = \underline{\frac{3}{10}\pi H R^2 (R^2 + 2H^2).}$$

Kako se baza stošca projicira u ravnine YZ i XZ kao pravci, ostaje prema (203)′ samo

$$T_{\text{baza}} = T_1 = \iint_S z^3\,dx\,dy = [\text{uzevši u obzir da je } z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}] =$$

$$= \frac{H^3}{R^3} \iint_{\sigma_1'} \rho^4\,d\rho\,d\varphi = \frac{2}{5}\pi H^3 R^2.$$

$$T_{\text{plašt}} = T_2 = T - T_1 = \underline{\frac{1}{10}\pi H R^2 (3R^2 - 2H^2).}$$

825. Izračunaj tok vektora $\vec{v} = x^3 \vec{i} + y^3 \vec{j} + z^3 \vec{k}$ kroz sferu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

$$\left[\text{Izvrši prijelaz na sferne koordinate. } T = \frac{12}{5}\pi R^5 \right].$$

826. Odredi tok vektorskog polja $\vec{v} = x^2 y \vec{i} + y z \vec{j} + x z \vec{k}$ kroz onaj dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ koji se nalazi u prvom oktantu.

$$\left[\frac{3\pi}{16} \right].$$

827. Izračunaj cirkulaciju vektora $\vec{v} = x^2 y^3 \vec{i} + \vec{j} + z \vec{k}$ uzduž kružnice $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ uzevši za plohu polusferu $z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

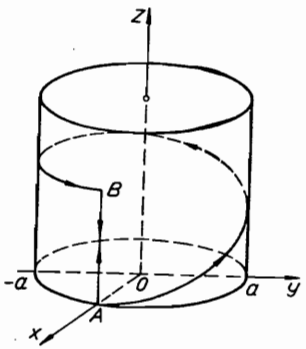
Računamo prema Stokesovoj formuli (205)′ uzevši u obzir da je $P = x^2 y^3$, $Q = 1$; $R = z$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2 y^2; \qquad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0.$$

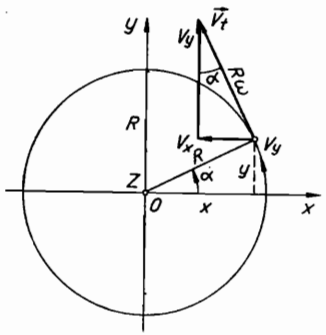
Cirkulacija $C = -3 \iint\limits_S x^2 y^2 \, dx \, dy$, gdje je S površina kruga $x^2 + y^2 = R^2$. Uz prijelaz na polarne koordinate dobijemo:

$$C = -3 \iint\limits_S \rho^2 \cos^2 \varphi \cdot \rho^2 \sin^2 \varphi \, \rho \, d\rho \, d\varphi = -\frac{3}{4} \int_0^R \rho^5 \, d\rho \int_0^{2\pi} 4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi =$$

$$= -\frac{R^6}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi \, d\varphi = -\frac{R^6}{16} \left| \varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right|_0^{2\pi} = \underline{-\frac{\pi}{8} R^6}.$$



Slika 227.



Slika 228.

828. Izračunaj cirkulaciju radijvektora $\vec{r}$ uzduž jednog zavoja $\widehat{AB}$ cilindričke spirale $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = b\,t$, gdje su A i B tačke spirale kojim odgovaraju vrijednosti parametra $t = 0$ i $t = 2\pi$. (Sl. 227).

Da dobijemo zatvorenu krivulju k što omogućuje primjenu Stokesove formule (205)', spojimo tačke B i A pravcem, koji će biti okomit na ravnini XY. Račun daje:

$$\text{Cirkulacija } C = \oint\limits_{+k} v_t \, dt = \oint\limits_{+k} P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \oint\limits_{+k} x \, dx + y \, dy + z \, dz$$

za

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Kako je $dx = -a \sin t \, dt$, $dy = a \cos t \, dt$ i $dz = b \, dt$ dobijemo:

$$C = \int_0^{2\pi} (-a^2 \sin t \cos t + a^2 \sin t \cos t + b^2 t) \, dt = b^2 \left| \frac{t^2}{2} \right|_0^{2\pi} = \underline{2\pi^2 b^2}.$$

Kako je rot $\vec{r} = 0$ (vidi npr. zadatak 806), polje radijvektora je potencijalno, pa vrijednost krivuljnog integrala ovisi jedino o izboru početne i konačne tačke puta; moramo za cirkulaciju C dobiti po pravcu AB istu vrijednost ali s protivnim predznakom.

Kako za pravac AB $x = a$, $y = 0$, dok se z mijenja od 0 do $2\pi b$, dobijemo

$$\int\limits_{\overline{AB}} = -\int_0^{2\pi b} z \, dz = +\left| \frac{z^2}{2} \right|_{2\pi b}^{0} = -2\pi^2 b^2.$$

Do istog rezultata dolazimo i bez računa, ako uzmemo u obzir, da je u polju koje potječe od potencijala, vrijednost krivuljnog integrala po bilo kojoj zatvorenoj krivulji jednaka nuli:

$$2\pi^2 b^2 - 2\pi^2 b^2 = \underline{0}.$$

829. Čvrsto tijelo rotira oko osi Z s konstantnom kutnom brzinom ω. Izračunaj:

a) cirkulaciju C polja obodnih brzina uzduž kružnice polumjera R, kojoj je središte na osi rotacije, dok je ravnina okomita na toj osi, u smislu rotacije,

b) divergencije i rotor tog polja brzina.

ad a) Prema slici 228 i formuli (205 a):

$$v_t = v = R \cdot \omega; \quad v_x = -R\,\omega \sin \alpha; \quad v_y = R\,\omega \cos \alpha$$

a kako je

$$\sin \alpha = \frac{y}{R}, \quad \text{a} \quad \cos \alpha = \frac{x}{R},$$

dobijemo:

$$\vec{v} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}, \tag{a}$$

pa je

$$C = \oint\limits_{+k} v_t \, ds = \oint\limits_{+k} R\,\omega \, ds = R\,\omega\, s = R\,\omega \cdot 2R\pi = \underline{2\pi\,\omega R^2}.$$

Ili prema (194a), odn. (205 a)'

$$C = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy = \iint\limits_S (\omega + \omega) \, dx \, dy = 2\omega \cdot S = \underline{2\omega\pi R^2}.$$

ad b) Kako je prema (a) $P = v_x = -\omega y$, a $Q = v_y = \omega x$, dobijemo s obzirom na (202) i (204):

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \underline{0}$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \omega + \omega = \underline{2\omega}.$$

To znači: rotacija polja brzina čvrstog tijela u bilo kojoj tački tog tijela jednaka je dvostrukoj kutnoj brzini, odatle slijede izrazi »rotacija« „rotor".

830. Izračunaj divergenciju i tok sile privlačenja $\vec{F} = -\frac{m\vec{r}}{r^3}$ tačke mase m smještene u ishodištu koordinatnog sustava, kroz bilo koju zatvorenu plohu koja obuhvaća ishodište O. (Vidi u § 13, 2. i 3. izvod sile $\vec{F}$ i potencijala U polja gravitacije).

Računamo prema (202):

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Kako je

$$\vec{F} = -m\left(\frac{x}{r^3}\vec{i} + \frac{y}{r^3}\vec{j} + \frac{z}{r^3}\vec{k}\right),$$

dobijemo

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -m\,\frac{r^3 - x\cdot 3r^2\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}{r^6} = -m\,\frac{r^3 - 3rx^2}{r^6},$$

jer je $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

pa je

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}.$$

Slične izraze dobijemo za $\frac{\partial Q}{\partial y}$ i $\frac{\partial R}{\partial z}$.

$$\operatorname{div}\vec{F} = -m\,\frac{3r^3 - 3r(x^2+y^2+z^2)}{r^6} = -m\,\frac{3r^3-3r^3}{r^6} = \underline{0}.$$

Polje $\vec{F}$ je solenoidalno, pa prema Gaussovoj formuli (203)′ tok

$$T = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz = 0$$

za sve tačke prostora osim ishodišta O. Pokažimo da je u ishodištu O jedini i to tačečni izvor. Da odredimo njegovu izdašnost, zamislimo oko O sferu polumjera ρ po volji i odredimo tok sile privlačenja F kroz tu sferu.

Budući da je tačkama te sfere $F = -\frac{m\rho}{\rho^3} = -\frac{m}{\rho^2} = F_n$, jer je ρ okomit na sferi, dobijemo prema (203)′:

$$T = \iint_S F_n\,dS = -\iint_S \frac{m}{\rho^2}\,dS = -\frac{m}{\rho^2}\cdot S = -\frac{m}{\rho^2}\cdot 4\pi\rho^2 = \underline{-4\pi m.}$$

831. Izračunaj tok rotora vektorskog polja $\vec{v} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ kroz plohu rotacionog paraboloida $z = 2(1 - x^2 - y^2)$, koja je odsječena ravninom $z = 0$.

Prema Stokesovoj formuli (205 a)′ dobijemo uzevši za zatvorenu krivulju k kružnicu u kojoj ravnina XY siječe zadanu plohu paraboloida. Uvrštenje $z = 0$ daje $x^2 + y^2 = 1$.

$$T = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_S (0-1)\,dx\,dy = -S = \underline{-\pi.}$$

U zadacima **832—834** uklj. odredi pomoću Stokesove formule cirkulaciju zadanih vektorskih polja po zadanim konturama k.

832. $\vec{v} = y\vec{i} - x\vec{j}$

$k \equiv$ zatvorena krivulja što je čine os X, os Y i luk astroide $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$ $(x \geqq 0, y \geqq 0, z = 0)$ (Nariši sliku).

Kako je $\frac{\partial Q}{\partial x} = -1$, a $\frac{\partial P}{\partial y} = +1$, prema (205 a)′ dobijemo

$$C = -2\iint_S S = -2\int_0^1 y\,dx = -2\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)\,dt =$$

$$= +2\cdot 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin^3 t\cdot R\cos^2 t\cdot\sin t\,dt = 6R^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\,dt\right] = \frac{3}{16}\pi R^2.$$

(Integrali su izračunati prema tipu VIII, v. II dio Repetitorija).

833. $\vec{v} = (x - 2z)\vec{i} + (x + 3y + z)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$.

k je kontura $\triangle ABC$ $[A(1,0,0);\ B(0,1,0);\ C(0,0,1)]$.

$[-3]$.

834. $\vec{v} = y^2\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$

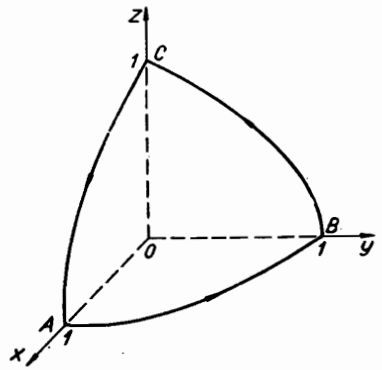
k je presječnica plohe $z = 2(1 - x^2 - y^2)$ s ravninom $z = 0$.

$[-\pi]$.

U zadacima **835—837** uklj. izračunaj cirkulacije zadanih vektorskih polja

a) po Stokesovoj formuli i

b) neposredno kao krivuljne integrale.



Slika 229.

835. $\vec{v} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j} + z^2\vec{k}$

$$k \equiv \begin{cases} x^2 + z^2 = 1 - y \\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0. \end{cases} \qquad \text{(Sl. 229).}$$

ad a) Prema (205)′:

$$C = \iint_S (\operatorname{rot}\vec{v})_n\,dS$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & -x^2 & z^2 \end{vmatrix} = \vec{k}(-2x-2y)$$

$$(\operatorname{rot} v)_n = \vec{k}(-2x-2)\cdot\vec{k} = -2(x+y),$$

pa je

$$C = -2\iint_S (x+y)\,dx\,dy = [\text{za } z=0\ y=1-x^2] = \text{prema slici 229} =$$

$$= -2\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} (x+y)\,dy = -2\int_0^1 dx \left| xy + \frac{y^2}{2} \right|_0^{1-x^2} =$$

$$= -\int_0^1 (2x - 2x^3 + 1 - 2x^2 + x^4)\,dx = \underline{-\frac{41}{30}}.$$

ad b) Prema (205)':

$$C = \oint_{+k} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Prema slici $C = \int_{\widehat{AB}} + \int_{\widehat{BC}} + \int_{\widehat{CA}}$, a kako je $P = y^2$; $Q = -x^2$; $R = z^2$, dobijemo:

$$\int_{\widehat{AB}} = [z=0,\ dz=0,\ y=1-x^2] = \int_{\widehat{AB}} y^2\,dx - x^2\,dy = [dy = -2x\,dx] =$$

$$= \int_0^1 [(1-x^2)^2 + 2x^3]\,dx = \underline{-\frac{41}{30}}.$$

$$\int_{\widehat{BC}} = [x=0,\ dx=0,\ Q=0] = \int_{\widehat{BC}} z^2\,dz = \int_0^1 z^2\,dz = \frac{1}{3}$$

$$\int_{\widehat{CA}} = [y=0,\ dy=0,\ P=0] = \int_{\widehat{CA}} z^2\,dz = \int_1^0 z^2\,dz = -\frac{1}{3}.$$

$$C = -\frac{41}{30} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \underline{-\frac{41}{30}}.$$

836. $\vec{v} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$

$$k \equiv \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$$

$[-\pi]$.

837. $\vec{v} = (z^2-x^2)\vec{i} + (x^2-y^2)\vec{j} + (y^2-z^2)\vec{k}$

$$k \equiv \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=z^2. \end{cases}$$

[0].

XVIII. OPERATORSKI RAČUN

Formule

Operator nabla ∇

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \tag{206}$$

Skalarna polja

$$U = U(x, y, z); \qquad V = V(x, y, z)$$

Vektorsko polje

$$\vec{v} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

odnosno $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$

Polje radijvektora

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\operatorname{grad} U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \tag{207}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(U + V) &= \nabla(U + V) = \nabla U + \nabla V = \operatorname{grad} U + \operatorname{grad} V \\
\operatorname{grad}(U \cdot V) &= \nabla(U \cdot V) = U\nabla V + V\nabla U = U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U \\
\operatorname{grad}(k U) &= \nabla k U = k \nabla U = k \operatorname{grad} U \\
\operatorname{grad} f(U) &= \nabla f(U) = f'_U(U)\nabla U = f'_U(U) \operatorname{grad} U
\end{aligned} \tag{208}$$

$$\operatorname{grad} r = \nabla r = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{r}_0 \tag{208 a}$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{209}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(k\vec{v}) &= \nabla(k\vec{v}) = k\nabla\vec{v} = k \operatorname{div}\vec{v} \\
\operatorname{div}(\vec{v} + \vec{t}) &= \nabla(\vec{v} + \vec{t}) = \nabla\vec{v} + \nabla\vec{t} = \operatorname{div}\vec{v} + \operatorname{div}\vec{t} \\
\operatorname{div}(U\vec{v}) &= \nabla(U \cdot \vec{v}) = U\nabla\vec{v} + \vec{v}\nabla U = U \operatorname{div}\vec{v} + \vec{v} \operatorname{grad} U
\end{aligned} \tag{210}$$

$$\operatorname{div}\vec{r} = \nabla\vec{r} = 3 \tag{210 a}$$

$$\operatorname{div}(\vec{c}\,U) = \nabla(\vec{c}\,U) = \vec{c}\,\nabla U \tag{210 b}$$

gdje je $\vec{c}$ konstantan vektor.

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \tag{211}$$

$$\operatorname{rot}(k\vec{v}) = \nabla \times (k\vec{v}) = k(\nabla \times \vec{v}) = k \operatorname{rot}\vec{v} \tag{211 c}$$

$$\operatorname{rot}(U\vec{v}) = \nabla \times (U\vec{v}) = U \operatorname{rot}\vec{v} + \operatorname{grad} U \times \vec{v} = U(\nabla \times \vec{v}) - \vec{v} \times \nabla U \tag{212}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{v} + \vec{t}) = \nabla \times (\vec{v} + \vec{t}) = \nabla \times \vec{v} + \nabla \times \vec{t} = \operatorname{rot}\vec{v} + \operatorname{rot}\vec{t} \tag{213}$$

$$\operatorname{rot}\vec{r} = \nabla \times \vec{r} = 0 \tag{213 a}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{c}\,U) = \nabla \times (\vec{c}\,U) = -\vec{c} \times \nabla U = -\vec{c} \times \operatorname{grad} U \tag{213 b}$$

$\vec{c}$ je konstantan vektor.

$$\operatorname{div}(\vec{v} \times \vec{t}) = \nabla(\vec{v} \times \vec{t}) = \vec{t}(\nabla \times \vec{v}) - \vec{v}(\nabla \times \vec{t}) = \vec{t} \operatorname{rot}\vec{v} - \vec{v} \operatorname{rot}\vec{t} \tag{213 f}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{t}) = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{t}) = \vec{v} \operatorname{div}\vec{t} - \vec{t} \operatorname{div}\vec{v} + (\vec{t}\,\nabla)\vec{v} - (\vec{v}\,\nabla)\vec{t} =$$

$$= \vec{v}(\nabla\vec{t}) - \vec{t}(\nabla\vec{v}) + t\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{t}_0} - v\frac{\partial\vec{t}}{\partial\vec{v}_0} \tag{213 g}$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial s} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{s}_0} = \vec{s}_0(\nabla\vec{v}) = (\vec{s}_0\,\nabla\vec{v}_x)\vec{i} + (\vec{s}_0\,\nabla\vec{v}_y)\vec{j} + (\vec{s}_0\,\nabla\vec{v}_z)\vec{k} =$$

$$= (\vec{s}_0 \operatorname{grad}\vec{v}_x)\vec{i} + (\vec{s}_0 \operatorname{grad}\vec{v}_y)\vec{j} + (\vec{s}_0 \operatorname{grad}\vec{v}_z)\vec{k} \tag{213 c}$$

dok je

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial\vec{s}_0} = \vec{s}_0 \operatorname{grad} U = \vec{s}_0\,\nabla U \tag{198 a}$$

Operator delta Δ

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{215}$$

$$\nabla\nabla = \nabla^2 = \Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} \tag{216}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \nabla \operatorname{grad} U = (\nabla\nabla)U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \tag{214}$$

838. Izračunaj

a) $\operatorname{grad} F(\vec{r})^2 = \nabla F(\vec{r})^2 =$ prema (208) i (15) $= F'(\vec{r})^2 \cdot \nabla r^2 = F'(\vec{r})^2 \cdot 2r\nabla r =$

$$= \text{prema (208 a)} = 2F'(\vec{r})^2 \cdot r\frac{\vec{r}}{r} = \underline{2F'(\vec{r})^2\vec{r}.}$$

b) $\operatorname{grad}[(\vec{a}\vec{r})(\vec{b}\vec{r})] = \nabla[(\vec{a}\vec{r})(\vec{b}\vec{r})] =$ prema (208) $= (\vec{a}\vec{r})\nabla(\vec{b}\vec{r}) + (\vec{b}\vec{r})\nabla(\vec{a}\vec{r}) =$

$= \text{prema (18)} = (\vec{a}\vec{r})\nabla(b_x x + b_y y + b_z z) + (\vec{b}\vec{r})\nabla(a_x x + a_y y + a_z z) =$

$= \text{prema (207)} = (\vec{a}\vec{r})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) + (\vec{b}\vec{r})(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = \underline{(\vec{a}\vec{r})\vec{b} + (\vec{b}\vec{r})\vec{a}.}$

c) $\operatorname{grad}(\vec{a}\vec{b}\vec{r}) = \nabla(\vec{a}\vec{b}\vec{r}) = \nabla(\vec{r}\vec{a}\vec{b}) =$ prema (31) i (31 a) $= \nabla\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$

$= \nabla[x(a_y b_z - a_z b_y) + y(a_z b_x - a_x b_z) + z(a_x b_y - a_y b_x)] =$ prema (207) $=$

$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} =$ prema (27) $= \underline{\vec{a} \times \vec{b}.}$

839. Izračunaj $\operatorname{div}(a\vec{r})$, gdje je a konstantan skalar.

$$\operatorname{div}(a\vec{r}) = \nabla(a\vec{r}) = \text{prema (210)} = a\nabla\vec{r} = \text{prema (209)} = a(1+1+1) = \underline{3a.}$$

840. Izračunaj

a) $\operatorname{div}\vec{b}(\vec{r}\vec{a})$ i

b) $\operatorname{div}\vec{r}(\vec{r}\vec{a})$, gdje su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ konstantni vektori.

ad a) $\nabla\vec{b}(\vec{r}\vec{a}) =$ prema (18) $= \nabla\vec{b}(x a_x + y a_y + z a_z) =$ prema (210 b) $=$

$= \vec{b}\nabla(x a_x + y a_y + z a_z) =$ prema (207) $= \vec{b}(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = \underline{\vec{b}\vec{a}.}$

ad b) $\nabla\vec{r}(\vec{r}\vec{a}) = \nabla\vec{r}(x a_x + y a_y + z a_z) =$ prema (210) $= (a_x x + a_y y + a_z z)\nabla\vec{r} +$

$+ \vec{r}\nabla(a_x x + a_y y + a_z z) =$ prema (210 a) $= 3(\vec{a}\vec{r}) + (\vec{r}\vec{a}) = \underline{4(\vec{a}\vec{r}).}$

841. Izračunaj $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{r})$, gdje je $\vec{a}$ konstantan vektor

$$\nabla(\vec{a} \times \vec{r}) = \text{prema (213 f)} = \vec{r}\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\operatorname{rot}\vec{r} = \underline{0}$$

prema (213 a) i (211).

842. Izračunaj $\operatorname{div}\vec{v}$ za $\vec{v} = \vec{r}(\vec{a}\vec{r}) - 2\vec{a}(\vec{r})^2$.

$\nabla\vec{v} =$ prema (210) $= \nabla[\vec{r}(\vec{a}\vec{r})] - 2\nabla\vec{a}(\vec{r})^2 =$ prema b) u zadatku 839 i (15) $=$

$= 4(\vec{a}\vec{r}) - 2\Delta(\vec{a}r^2) =$ (210 b) $= 4(\vec{a}\vec{r}) - 2\vec{a}\Delta r^2 =$ prema (208) $= 4(\vec{a}\vec{r}) -$

$- 2\vec{a}(2r\nabla r) =$ prema (208 a) $= 4(\vec{a}\vec{r}) - 4\vec{a}r\vec{r}_0 =$ prema (1) $= 4(\vec{a}\vec{r}) - 4(\vec{a}\vec{r}) = \underline{0.}$

843. Izračunaj $\operatorname{rot}(\varphi\vec{v})$, gdje je $\varphi = \varphi(x, y, z)$ skalarna funkcija.

$$\nabla \times (\varphi\vec{v}) = \text{prema (212)} = \underline{\varphi\operatorname{rot}\vec{v} + \operatorname{grad}\varphi \times \vec{v}.}$$

844. Izračunaj $\operatorname{rot}(r\vec{a})$, gdje je r udaljenost tačke polja od ishodišta koordinatnog sustava, dok je $\vec{a}$ konstantan vektor.

$$\nabla \times (r\vec{a}) = \text{prema (212)} = r\operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{grad} r \times \vec{a} = \text{prema (208 a)} = 0 + \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{a} = \underline{\frac{\vec{r} \times \vec{a}}{r}}.$$

845. Izračunaj $\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{r})$, gdje je $\vec{a}$ konstantan vektor.

$$\nabla \times (\vec{a} \times \vec{r}) = \text{prema (213 g)} = \vec{a}\operatorname{div}\vec{r} - \vec{r}\operatorname{div}\vec{a} + \vec{r}\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{r}_0} - a\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vec{a}_0} = 3\vec{a} - \vec{a} = \underline{2\vec{a},}$$

jer je prema (211) i (213 c)

$$\operatorname{div}\vec{a} = 0, \qquad \frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{r}} = 0 \qquad \text{i} \qquad a\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vec{a}_0} = \vec{a}.$$

846. Izračunaj divergenciju i rotor zadanog polja $\vec{v} = f(r)\vec{c}$.

$$\operatorname{div}\vec{v} = \nabla[f(r)\vec{c}] = \text{prema (210)} = f(r)\nabla\vec{c} + \vec{c}\nabla f(r) = \text{prema (209) i (208)} =$$

$$= 0 + \vec{c}f'(r)\nabla r = \vec{c}f'(r)\frac{\vec{r}}{r} = \underline{\frac{f'(r)}{r}(\vec{c}\vec{r}).}$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla \times [f(r)\vec{c}] = \text{prema (213 b)} = -\vec{c} \times \nabla f(r) = \text{prema (208)} = -\vec{c} \times f'(r)\nabla r =$$

$$= \text{prema (208 a)} = -\vec{c} \times f'(r)\frac{\vec{r}}{r} = \underline{\frac{f'(r)}{r}(\vec{r} \times \vec{c}).}$$

847. Dokaži da će prostorno centralno polje $\vec{v} = f(r)\cdot\vec{r}$ postati solenoidalno samo u tom slučaju, kad je $f(r) = \frac{k}{r^3}$, gdje je $k =$ const.

Izračunajmo $\operatorname{div}\vec{v}$:

$$\operatorname{div}\vec{v} = \nabla\vec{v} = \nabla f(r)\vec{r} = \text{prema (210)} = f(r)\operatorname{div}\vec{r} + \vec{r}\operatorname{grad} f(r) = \text{prema (210 a) i (208)} =$$

$$= 3f(r) + \vec{r}f'(r)\cdot\nabla r = \text{prema (208 a)} = 3f(r) + \vec{r}f'(r)\frac{\vec{r}}{r} = 3f(r) + rf'(r).$$

Polje je solenoidalno, ako je $\operatorname{div}\vec{v} = 0$, pa stavimo

$$3f(r) + rf'(r) = 0$$

Odatle

$$\frac{f'(r)}{f(r)} = -\frac{3}{r}$$

ili

$$\frac{df(r)}{dr} \cdot \frac{1}{f(r)} = -\frac{3}{r} \Big| \cdot dr$$

$$\frac{df(r)}{f(r)} = -3\frac{dr}{r}.$$

Integriramo:

$$\int \frac{df(r)}{f(r)} = -3\int \frac{dr}{r} + \ln C$$

$$\ln f(r) = -3\ln r + \ln C$$

$$\ln f(r) = \ln(C \cdot r^{-3})$$

$$\underline{f(r) = \frac{C}{r^3}}, \text{ gdje je } C \text{ konstanta.}$$

848. Da li je solenoidalno polje $\vec{v} = r(\vec{c} \times \vec{r})$?

Prema (210):

$$\operatorname{div}\vec{v} = r\,\nabla(\vec{c} \times \vec{r}) + (\vec{c} \times \vec{r}) \cdot \nabla r.$$

$$\vec{c} \times \vec{r} = \text{prema (213 f)} = \vec{r}\operatorname{rot}\vec{c} - \vec{c}\operatorname{rot}\vec{r} = 0,$$

jer je $\operatorname{rot}\vec{c} = 0$ i $\operatorname{rot}\vec{r} = 0$ prema (213 a).

$\underline{\operatorname{div}\vec{v} = 0, \text{ zadano polje je solenoidalno.}}$

XIX. SUSTAVI LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

Vidi § 14 u dijelu III Repetitorija.

Zadaci

849. Odredi $x(t)$ i $y(t)$ iz

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 7x & \text{(a)} \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. & \text{(b)} \end{cases}$$

Naš je zadatak da uklonimo $y(t)$ iz jednadžbi sustava tako, da dobijemo jednu diferencijalnu jednadžbu drugog reda u $x(t)$. U tu svrhu deriviramo (a) po t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} - 7\frac{dx}{dt}.$$

Odatle

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} + 7\frac{dx}{dt}. \qquad \text{(c)}$$

dok iz (a) slijedi:

$$y = \frac{dx}{dt} + 7x. \qquad \text{(d)}$$

Uvrštenje (c) i (d) u (b) daje nakon uređenja:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} + 37x = 0$$

ili

$$\ddot{x} + 12\dot{x} + 37x = 0$$

a to je linearna homogena diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima [vidi dio II Repetitorija, § 10, 3. c) formula (108)]. Karakteristična jednadžba:

$$r^2 + 12r + 37 = 0$$

$$r_{1,2} = -6 \pm i$$

$$x = C_1' e^{(-6+i)t} + C_2' e^{(-6-i)t} = \text{prema(108)} = e^{-6t}[C_1'(\cos t + i\sin t) + C_2'(\cos t - i\sin t)]$$

$$\underline{x = e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t).} \qquad \text{(e)}$$

Odatle

$$\frac{dx}{dt} = e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t - 6C_1 \cos t - 6C_2 \sin t). \qquad \text{(f)}$$

Uvrštenje (f) i (e) u (d) daje nakon uređenja

$$\underline{y = e^{-6t}[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t].}$$

850.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y & \text{(a)} \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}. & \text{(b)} \end{cases}$$

Postupamo na isti način kao u pređašnjem zadatku.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}.$$

Uvrštenje u (b) daje:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = e^t + e^{-t}$$

ili

$$\ddot{x} - x = e^t + e^{-t}.$$

Nehomogena linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima [Vidi dio II Repetitorija, § 10, 3. c) 4. II. slučaj]. Karakteristična jednadžba:

$$r^2 - 1 = 0; \qquad r_{1,2} = \pm 1$$

$$x_0 = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

$b_1 = 1 = r_1$	$b_2 = -1 = r_2$
$\eta_1 = \dfrac{t\,e^t}{P'(1)}$	$\eta_2 = \dfrac{t\,e^{-t}}{P'(-1)}$
$P(b) = b^2 - 1$	
$P'(b) = 2b$	
$P'(1) = 2$	$P'(-1) = -2$
$\eta_1 = \dfrac{t \cdot e^t}{2}$	$\eta_2 = -\dfrac{t\,e^{-t}}{2}$

$$\underline{x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{t}{2}(e^t - e^{-t}).}$$

Prema (a):

$$y = \frac{dx}{dt} = \underline{C_1 e^t - C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) + \frac{t}{2}(e^t + e^{-t}).}$$

851.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t & \text{(a)} \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}. & \text{(b)} \end{cases}$$

Prema (a):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dy}{dt} - 5\frac{dx}{dt} + e^t \qquad \text{(c)}$$

i

$$y = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} + \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}e^t. \qquad \text{(d)}$$

Uvrštenje (b) i (d) u (c) daje nakon uređenja:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 11\frac{dx}{dt} + 28x = 7e^t + 2e^{-2t}$$

ili

$$\ddot{x} + 11\dot{x} + 28x = 7e^t + 2e^{-2t}.$$

Karakteristična jednadžba:

$$r^2 + 11r + 28 = 0$$

$$r_1 = -4; \qquad r_2 = -7$$

$$x_0 = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t}$$

$b_1 = 1 \neq r_1 \neq r_2$	$b_2 = -2 \neq r \neq r_2$
$\eta_1 = \dfrac{7e^t}{P(b_1)}$	$\eta_2 = \dfrac{2e^{-2t}}{P(b_2)}$
$P(b) = b^2 + 11b + 28$	
$P(1) = 40$	$P(-2) = 10$
$\eta_1 = \dfrac{7e^t}{40}$	$\eta_2 = \dfrac{2e^{-2t}}{10}$

$$\underline{x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t} + \frac{1}{40}(7e^t + 8e^{-2t}).}$$

Odatle

$$\frac{dx}{dt} = -4C_1 e^{-4t} - 7C_2 e^{-7t} + \frac{1}{40}(7e^t - 16e^{-2t}).$$

Uvrštenje izraza za x i $\dfrac{dx}{dt}$ u (d) daje

$$\underline{y = \frac{1}{2}C_1 e^{-4t} - C_2 e^{-7t} + \frac{1}{40}(e^t + 12e^{-2t}).}$$

852.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = y - 2x. \end{cases} \qquad (a)$$

Riješimo taj zadatak na nešto drugi način.

Neka su $x = A e^{rt}$, $y = B e^{rt}$ partikularni integrali zadanog sustava, dok su A i B konstante. Ta partikularna rješenja zadovoljavaju zadani sustav, pa je

$$A r e^{rt} = A e^{rt} - 2B e^{rt}$$

$$B r e^{rt} = B e^{rt} - 2A e^{rt}$$

ili

$$e^{rt}(Ar - A + 2B) = 0$$

$$e^{rt}(Br - B + 2A) = 0$$

$e^{rt} \neq 0$, pa je

$$\left.\begin{aligned} A(r-1)+2B&=0\\ B(r-1)+2A&=0. \end{aligned}\right| \qquad \text{(b)}$$

Dobili smo sustav od dvije linearne homogene algebarske jednadžbe s dvije nepoznanice A i B. Znamo da taj sustav ima rješenja različita od očiglednih $A=0$ i $B=0$, ako je determinanta sustava jednaka nuli (vidi § 1, 4.):

$$\begin{vmatrix} r-1 & 2\\ 2 & r-1 \end{vmatrix}=0$$

pa je

$$(r-1)^2-4=0$$

ili

$$r^2-2r-3=0$$

karakteristična jednadžba.

Dobijemo

$$r_{1,2}=1\pm 2.$$

Za $r_1=3$ prema (b)

$$2A+2B=0 \quad \text{i} \quad 2B+2A=0$$

pa je

$$A=-B,$$

uzet ćemo

$$A_1=1, \quad B_1=-1$$

$$\underline{x=C_1e^{3t}+C_2e^{-t};}$$

Za $r_2=-1$ prema (b)

$$-2A+2B=0 \quad \text{i} \quad -2B+2A=0$$

pa je

$$A=B,$$

uzet ćemo

$$A_2=1; \quad B_2=1$$

$$\underline{y=-C_1e^{3t}+C_2e^{-t}.}$$

Riješi i na pređašnji način zadatak 852.

853. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+2y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=12x-y. \end{cases}$

$$[x=C_1e^{5t}+C_2e^{-5t}; \quad y=2C_1e^{5t}-3C_2e^{-5t}].$$

854. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-2y+t^2+2t\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=5x-y-4t^2+2t. \end{cases}$

$$[x=2C_1\cos 3t+2C_2\sin 3t+t^2; \quad y=(C_1-3C_2)\cos 3t+(C_2+3C_1)\sin 3t+t^2].$$

855. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}+x=e^t & \text{(a)}\\[2mm] \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{d^2y}{dt^2}=1 & \text{(b)} \end{cases}$

Prema (a):

$$\dddot{x}+\ddot{y}+\dot{x}=e^t$$

odatle je

$$\ddot{y}=-\dddot{x}-\dot{x}+e^t.$$

Uvrštenje u (b) daje:

$$\dot{x}-\dddot{x}-\dot{x}=1-e^t$$

ili

$$\dddot{x}=e^t-1.$$

Sad integriramo tri puta redom posljednju jednadžbu:

$$\ddot{x}=e^t-t+C_1$$

$$\dot{x}=e^t-\frac{t^2}{2}+C_1t+C_2 \qquad \text{(c)}$$

$$\underline{x=e^t-\frac{t^3}{6}+\frac{C_1}{2}t^2+C_2t+C_3.}$$

Računamo iz (b):

$$\ddot{y}=1-\dot{x}.$$

Uvrštenje (c) daje:

$$\ddot{y}=1-e^t+\frac{t^2}{2}-C_1t-C_2.$$

Integriramo dvaput redom:

$$\dot{y}=t-e^t+\frac{1}{6}t^3-\frac{C_1}{2}t^2-C_2t+C_3$$

$$y=\frac{t^2}{2}-e^t+\frac{1}{24}t^4-\frac{C_1}{6}t^3-\frac{C_2}{2}t^2+C_3t+C_4$$

ili

$$\underline{y=C_4+C_3t-\frac{1}{2}(C_2-1)t^2-\frac{C_1}{6}t^3+\frac{1}{24}t^4-e^t.}$$

856. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2}=x\\[2mm] \dfrac{d^2x}{dt^2}=y. \end{cases}$

$$[x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t; \quad y=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t].$$

857. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=y+5z & \text{(a)}\\[2mm] \dfrac{dz}{dx}=-y-3z. & \text{(b)} \end{cases}$

Traže se $y(x)$ i $z(x)$.

Prema (a):

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}+5\frac{dz}{dx} \qquad \text{(c)}$$

i

$$z=\frac{1}{5}\frac{dy}{dx}-\frac{y}{5}. \qquad \text{(d)}$$

Uvrštenje (b) u (c) daje:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - 5y - 15z.$$

Ovamo uvrstimo (d):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - 5y - 3\frac{dy}{dx} + 3y$$

ili

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Karakteristična jednadžba: $r^2 + 2r + 2 = 0$

$$r_{1,2} = -1 \pm i$$

$$y = C_1 e^{(-1+i)x} + C_2 e^{(-1-i)x}$$

ili

$$\underline{y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).}$$

Odatle:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x) - e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Uvrštenje u (d) daje nakon uređenja:

$$\underline{z = \frac{1}{5} e^{-x}[(C_2 - 2C_1)\cos x - (C_1 + 2C_2)\sin x].}$$

858. $$\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx} = y & \text{(a)} \\ xz\dfrac{dz}{dx} + x^2 + y^2 = 0. & \text{(b)} \end{cases}$$

Tražimo $y(x)$ i $z(x)$.

Iz (a) slijedi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \text{ili} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

pa je

$$\ln y = \ln x + \ln C_1$$

ili

$$\underline{y = C_1 x.} \qquad \text{(c)}$$

Uvrštenje $y = C_1 x$ u (b) daje:

$$xz\frac{dz}{dx} + x^2 + C_1^2 x^2 = 0,$$

a odatle je

$$z\,dz = (-x - C_1^2 x)\,dx,$$

pa je

$$\frac{z^2}{2} = -\frac{x^2}{2} - \frac{C_1^2}{2}x^2 + C_2 \quad \text{ili} \quad z^2 = -x^2 - C_1^2 x^2 + C_2$$

a kako je prema (c) $C_1 = \dfrac{y}{x}$ dobijemo:

$$\underline{x^2 + y^2 + z^2 = C_2.}$$

Geometrijski predočuju dobivena rješenja zadanog sustava diferencijalnih jednadžbi familiju prostornih krivulja, koje su zadane kao presječnice ravnina kroz ishodište okomitih na ravninu XY i familije koncentričnih sfera sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava.

859. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -3y - z & \text{(a)} \\ \dfrac{dz}{dx} = y - z. & \text{(b)} \end{cases}$$

Tražimo $y(x)$ i $z(x)$.

Prema (a):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} \qquad \text{(c)}$$

i

$$z = -\frac{dy}{dx} - 3y. \qquad \text{(d)}$$

Uvrstimo (b) i (d) u (c):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3\frac{dy}{dx} - y - \frac{dy}{dx} - 3y$$

ili

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Karakteristična jednadžba:

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$r_{1,2} = -2$$

$$y = C_1 e^{-2x} + xC_2 e^{-2x}$$

ili

$$\underline{y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}.}$$

Odatle

$$\frac{dy}{dx} = -2C_1 e^{-2x} - 2xC_2 e^{-2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Uvrštenje u (d) daje nakon uređenja:

$$\underline{z = -(C_1 + C_2 + xC_2)e^{-2x}.}$$

860. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z \\ \dfrac{dz}{dx} = -y. \end{cases}$$

$$[y = C_1 \cos x + C_2 \sin x;\ z = C_2 \cos x - C_1 \sin x].$$

861. $$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2y + 4z = e^x & \text{(a)} \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} - y - 3z = -x. & \text{(b)} \end{cases}$$

Tražimo $y(x)$ i $z(x)$.

(a) deriviramo dvaput redom:

$$y^{(4)} + 2y'' + 4z'' = e^x. \qquad \text{(c)}$$

Iz (a) i (b) uklonimo z.

Dobijemo:

$$3y'' + 4z'' + 2y = 3e^x - 4x.$$

Odatle:

$$z'' = -\frac{3}{4}y'' - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}e^x - x.$$

Uvrštenje u (c) daje:

$$y^{(4)} - y'' - 2y = 4x - 2e^x.$$

Karakteristična jednadžba:

$$r^4 - r^2 - 2 = 0$$

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{2}; \quad r_{3,4} = \pm i$$

$$y_0 = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

$$y^{(4)} - y'' - 2y = 4x$$
$$\eta_1 = a_1 x + a_0$$
$$\eta_1' = a_1; \quad \eta_1'' = 0$$
$$-2a_1 x - 2a_0 = 4x$$
$$a_1 = -2; \quad a_0 = 0$$
$$\eta_1 = -2x$$

$$y^{(4)} - y'' - 2y = -2e^x$$
$$b = 1 \neq r_1 \neq r_2 \neq \cdots$$
$$P(b) = b^4 - b^2 - 2$$
$$P(1) = 1 - 1 - 2 = -2$$
$$\eta_2 = \frac{-2e^x}{2} = -e^x$$

$$\underline{y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - 2x + e^x.} \qquad \text{(d)}$$

Da odredimo z, izračunajmo iz (d) y'' pa dobivenu za y'' vrijednost kao i (d) uvrstimo u (a). Dobijemo:

$$\underline{z = -C_1 e^{x\sqrt{2}} - C_2 e^{-x\sqrt{2}} - \frac{C_3}{4}\cos x - \frac{C_4}{4}\sin x + x - \frac{e^x}{2}.}$$

862. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 4y - z \\ \dfrac{dz}{dx} = 2z + y \end{cases}$$

$$[y = (C_1 + C_2 + C_2 x)e^{3x}; \quad z = (C_1 + C_2 x)e^{3x}].$$

863. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2y + z = \sin x & \text{(a)} \\ \dfrac{dz}{dx} - 4y - 2z = \cos x, & \text{(b)} \end{cases}$$

i odredi partikularno rješenje, tj. krivulju koja prolazi tačkom $T_1(1, 1, -2)$.

Da uklonimo y iz zadanih jednadžbi, pomnožimo prvu jednadžbu s 2 pa joj pribrojimo drugu jednadžbu.

Dobijemo:

$$2y' + z' = 2\sin x + \cos x$$

a odatle je

$$z' = -2y' + 2\sin x + \cos x$$

Iz (a) slijedi:

$$z = -y' - 2y + \sin x \qquad \text{(c)}$$

pa je

$$z' = -y'' - 2y' + \cos x \qquad \text{(d)}$$

(c) i (d) uvrstimo u (b) pa nakon uređenja dobijemo:

$$y'' = -2\sin x$$
$$y' = 2\cos x + C_1 \qquad \text{(e)}$$
$$\underline{y = 2\sin x + C_1 x + C_2}$$

Izraz za y i (e) uvrstimo u (c). Dobijemo nakon uređenja:

$$\underline{z = -C_1(2x + 1) - 2C_2 - 2\cos x - 3\sin x.}$$

U dobivena rješenja uvedimo početni uvjet $T_1(1, 1, -2)$:

$$1 = 2\sin 1 + C_1 + C_2$$
$$-2 = -3C_1 - 2C_2 - 2\cos 1 - 3\sin 1$$

Iz tih jednadžbi uklonimo C_1 i C_2

$$2 = 4\sin 1 + 2C_1 + 2C_2$$
$$-2 = -3\sin 1 - 3C_1 - 2C_2 - 2\cos 1$$

+

$$0 = \sin 1 - C_1 - 2\cos 1$$

$$C_1 = \sin 1 - 2\cos 1.$$

Uvrštenje u prvu jednadžbu daje

$$C_2 = 2\cos 1 - 3\sin 1 + 1.$$

Vrijednosti dobivene za C_1 i C_2 uvrstimo u opća rješenja sustava. Dobijemo traženo partikularno rješenje:

$$\underline{y = 2\sin x + (\sin 1 - 2\cos 1)x - 3\sin 1 + 2\cos 1 + 1}$$

$$\underline{z = -2\cos x - 3\sin x - 2(\sin 1 - 2\cos 1)x + 5\sin 1 - 2\cos 1 - 2.}$$

864. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = z + y - x & \text{(a)} \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x - y & \text{(b)} \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z. & \text{(c)} \end{cases}$$

i partikularno rješenje uz početne uvjete $\left.\begin{matrix} x = 1 \\ y = z = 0 \end{matrix}\right\}$ za $t = 0$.

(c) derviramo po t:

$$\ddot{z} = \dot{x} + \dot{y} + \dot{z}.$$

Uvrštenje (a) i (b) u $\ddot{z}$ daje:

$$\ddot{z} - \dot{z} - 2z = 0.$$

Karakteristična jednadžba:

$$r^2 - r - 2 = 0$$

$$r_1 = 2; \quad r_2 = -1$$

$$\underline{z = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}.} \qquad \text{(d)}$$

Iz (a) i (c) slijedi:

$$\dot{x} - \dot{z} = -2x$$

pa kako je

$$\dot{z} = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t},$$

dobijemo:

$$\dot{x} + 2x = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} \qquad \text{(e)}$$

a to je linearna diferencijalna jednadžba I reda, koju rješavamo prema formuli (106) II dijela Repetitorija:

$$\text{za} \quad y' + f(x)y = g(x) \qquad y = e^{-\int f(x)\,dx}\left[\int e^{\int f(x)\,dx} \cdot g(x) + C\right].$$

Kako je u našem slučaju $f(x) = 2$, a x je t, dobijemo

$$\int f(x)\,dx = \int 2\,dt = 2t,$$

pa je

$$x = e^{-2t}\left[\int e^{2t}(2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t})\,dt + C_3\right]$$

a odatle je

$$\underline{x = \frac{1}{2}C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} + C_3 e^{-2t}.} \qquad \text{(f)}$$

Iz (a) slijedi:

$$y = \dot{x} + x - z.$$

Uvrštenje (e) daje:

$$y = -x + 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} - z$$

a nakon uvrštenja (f) i (d) i uređenja imamo:

$$\underline{y = \frac{1}{3}C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} - C_3 e^{-2t}.} \qquad \text{(g)}$$

Uvedimo početne uvjete, tj. uvrstimo $x = 1$ i $y = z = 0$ za $t = 0$ u (f), (g) i (d):

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2}C_1 - C_2 + C_3 \\ 0 &= \frac{1}{2}C_1 - C_2 - C_3 \\ 0 &= C_1 + C_2. \end{aligned}\right|$$

Odatle slijedi:

$$C_1 = \frac{1}{3}, \qquad C_2 = -\frac{1}{3} \quad \text{i} \quad C_3 = \frac{1}{2}.$$

Uvrštenje u (f), (g) i (d) daje traženo partikularno rješenje:

$$\underline{x = \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}}$$

$$\underline{y = \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}}$$

$$\underline{z = \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}.}$$

865. $\left\{\begin{aligned} \dot{x} - z - y &= 0 \\ \dot{y} - z + x &= 0 \\ \dot{z} - x - y &= 0 \end{aligned}\right.$ i partikularno rješenje uz početne uvjete $\left.\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$ za $t = 0$.

$$[x = -e^{-t}; \; y = e^{-t}; \; z = 0].$$

866. $\left\{\begin{aligned} \dot{x} - 4x - y + 36t &= 0 \\ \dot{y} + 2x - y + 2e^{t} &= 0 \end{aligned}\right.$ i partikularno rješenje za $\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$ pri $t = 0$.

$$[x = 10e^{2t} - 8e^{3t} - e^{t} + 6t - 1; \; y = -20e^{2t} + 8e^{3t} + 3e^{t} + 12t + 10].$$

Znak: 7026 Sv

Izdanje:
Prof. dr ing. BORIS APSEN

RIJEŠENI ZADACI VIŠE MATEMATIKE UZ TREĆI DIO REPETITORIJA

Izdavač:
TEHNIČKA KNJIGA, izdavačko poduzeće
ZAGREB, Jurišićeva 10

Za izdavača odgovara:
Ing. KUZMAN RAŽNJEVIĆ

Uredništvo izdanja za sveučilište
Glavni urednik:
ZVONIMIR VISTRIČKA

Urednik edicije:
IVAN UREMOVIĆ

Jezična recenzija:
ZVONKO VELJAČIĆ

Korigirao:
AUTOR

Tisak:
IZDAVAČKO-ŠTAMPARSKO PREDUZEĆE »OBOD« — CETINJE

Tisak dovršen:
LISTOPADA 1970.