Dr ing. BORIS APSEN

RIJEŠENI ZADACI IZ VIŠE MATEMATIKE

UZ DRUGI DIO REPETITORIJA

ČETVRTO IZDANJE

TEHNIČKA KNJIGA
ZAGREB

Tisak: Ofset-štampa »Obod« — Cetinje

PREDGOVOR

U svojim nastojanjima da olakšam studij i primjenu više matematike u tehnici i fizici sastavio sam zbirku zadataka iz integralnog računa i diferencijalnih jednadžbi. Kao i predašnje zbirke tako i ova namijenjena je u prvom redu onim studentima koji nemaju mogućnosti pohađati sva predavanja i vježbe iz matematike, a također onim mnogobrojnim tehničkim i drugim radnicima koji bi htjeli u slobodno vrijeme da samostalno prošire svoje matematičko znanje i da uživaju u ljepoti i preciznosti ove osnovice svih nauka. Baš integralni račun i diferencijalne jednadžbe pružaju bezbroj sjajnih primjera čovječjeg uma i logike u rješavanju raznovrsnih problema iz područja tehnike i fizike.

Zbirka sadrži oko hiljadu zadataka ilustriranih mnogobrojnim slikama. Većina zadataka uzeta je iz poznatih izvrsnih zbirki ruskih autora Bermana, Djubjuka, Kaplana, Zaporošca i dr., pri čemu je veći dio zadataka detaljno obrađen, rastumačen i riješen, dok manji dio sadrži samo tekst sličnih zadataka i rezultat za samostalno rješavanje tih zadataka.

Na početku svakog tipa zadataka navedene su upute i formule prema kojima se rješavaju dotični zadaci. Formule su označene brojevima iz drugog dijela Repetitorija pa se odgovarajuće gradivo lako pronađe u Repetitoriju. Preporučam da se iza studija svakog pojedinog poglavlja Repetitorija odmah prouče i riješe pripadni zadaci iz Zbirke prethodno prepisavši na posebnom arku papira formule navedene u zbirci za dotične zadatke.

Na kraju molim drage čitaoce da mi saopće svoje primjedbe i želje i upozore me na moguće greške koje je teško izbjeći kad sam svladaš tako golemo gradivo. Onim čitaocima koji su se već odazvali mojoj molbi srdačno zahvaljujem. Moja adresa: Zagreb, Vončinina ul. 8.

B. Apsen

SADRŽAJ

PRVI DIO

(Brojevi formula odgovaraju brojevima u II dijelu Repetitorija više matematike.)

I. DIFERENCIJALI

A. POJAM DIFERENCIJALA. RAČUNANJE DIFERENCIJALA

Formule

Iz definicije derivacije $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ i limesa promjenljive slijedi da je:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\varepsilon|\cdot\Delta x$$

$$\Delta y=y'\Delta x+\varepsilon\Delta x,\ \text{gdje}\ \varepsilon\to 0\ \text{kad}\ \Delta x\to 0;$$

time je prirast funkcije rastavljen u dva dijela. Glavni dio prirasta funkcije koji je linearan s obzirom na prirast nezavisne promjenljive, zove se diferencijal funkcije.

Diferencijal se označuje slovom d:

$$dy=y'\Delta x.$$

Diferencijal nezavisne promjenljive x jednak je prirastu x, tj. $dx=\Delta x$, pa je:

$$dy=y'dx. \tag{2}$$

Diferencijal funkcije jednak je umnošku derivacije te funkcije i diferencijala nezavisne promjenljive.
Isti oblik ima diferencijal složene funkcije $y=f(u)$, gdje je $u=u(x)$

$$du=f'(u)\cdot du. \tag{14}$$

Budući da formula (14) ima isti oblik kao formula (2), kaže se da diferencijal ima svojstvo invarijantnosti.
Iz (2) slijedi

$$y'=\frac{dy}{dx}. \tag{2a}$$

Derivaciju možemo prikazati u obliku diferencijalnog kvocijenta.

Zadaci

U zadacima 1 do 15 uklj. izračunaj diferencijale zadanih funkcija.

1. $y=(x^2+4x+1)(x^2-\sqrt{x})$.

$$dy=\left[(x^2+4x+1)\left(2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)+(x^2-\sqrt{x})(2x+4)\right]dx.$$

2. $y=\dfrac{x^3+1}{x^3-1}$.

$$dy=\frac{(x^3-1)\,3x^2-(x^3+1)\,3x^2}{(x^3-1)^2}\,dx=-\frac{6x^2\,dx}{(x^3-1)^2}.$$

3. $y=\ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{4}\right)$.

$$dy=-\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)}\cdot\frac{dx}{4}=-\frac{dx}{4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)}=$$

$$=-\frac{dx}{2\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)}=-\frac{dx}{2\sin\left(\pi-\frac{x}{2}\right)}=-\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

4. $y=\ln \operatorname{arc\,tg}(\sin x)$.

$$dy=\frac{1}{\operatorname{arc\,tg}(\sin x)}\cdot\frac{1}{1+\sin^2 x}\cdot\cos x\,dx=\frac{\cos x\,dx}{(1+\sin^2 x)\operatorname{arc\,tg}(\sin x)}.$$

5. $y=\arccos(2^x)$. $\left[-\dfrac{2^x\ln 2}{\sqrt{1-2^{2x}}}dx\right]$.

6. $y=5^{\ln \operatorname{tg} x}$. $\left[5^{\ln \operatorname{tg} x}\dfrac{2\ln 5}{\sin 2x}dx\right]$.

7. $y=\ln(1+e^{10x})+\operatorname{arc\,ctg} e^{5x}$.
Odredi dy za $x=0$, $dx=0{,}1$. [0,25].

8. $d\sqrt{1+\operatorname{arc\,tg} x}$. $\left[\dfrac{dx}{2(1+x^2)\sqrt{1+\operatorname{arc\,tg} x}}\right]$.

9. $x^2+2xy-y^2=a^2$.
Budući da diferencijal ima svojstvo invarijantnosti, dobivamo prema (14):

$$2x\,dx+2x\,dy+2y\,dx-2y\,dy=0, \quad \text{ili} \quad 2(x+y)\,dx+2(x-y)\,dy=0,$$

pa je:

$$dy=-\frac{x+y}{x-y}dx.$$

10. $x^2+y^2=r^2$.

$$2x\,dx+2y\,dy=0$$

$$dy=-\frac{x}{y}dx.$$

11. $x^3+y^3-3axy=0$.

$$3x^2\,dx+3y^2\,dy-3a(x\,dy+y\,dx)=0$$

$$(x^2-ay)\,dx+(y^2-ax)\,dy=0$$

$$dy=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}dx.$$

12. $e^{x+y}=xy$.

$$e^{x+y}\,dx+e^{x+y}\,dy-x\,dy-y\,dx=0,$$

a kako je $e^{x+y}=xy$ dobivamo: $xy\,dx+xy\,dy-x\,dy-y\,dx=0$,

odatle:

$$dy=-\frac{y(x-1)}{x(y-1)}dx.$$

13. $s=1+te^t$.

$$ds-te^t\,ds-e^t\,dt=0$$

$$ds(1-te^t)=e^t\,dt$$

$$ds=\frac{e^t}{1-te^t}dt.$$

14. $e^y+xy=e$. $\left[-\dfrac{y\,dx}{e^y+x}\right]$.

15. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. $\left[dy=-\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}dx\right]$.

B. UPOTREBA DIFERENCIJALA ZA PRIBLIŽNO RAČUNANJE

Formule i upute

Iz jednakosti

$$\Delta y=y'\cdot\Delta x+\varepsilon\cdot\Delta x=dy+\varepsilon\cdot\Delta x, \text{ gdje } \varepsilon\to 0 \text{ kad } \Delta x\to 0$$

vidimo da je razlika između Δy i dy beskonačno mala veličina višeg reda s obzirom na Δx, pa za male $|\Delta x|$ možemo uzeti da je:

$$dy=\Delta y$$

tj.

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \doteq dy \doteq f'(x)\cdot\Delta x, \qquad (5)$$

pri čemu je ta jednakost to tačnija, što je $|\Delta x|$ manji.

Ta formula ima veliko praktičko značenje, jer je mnogo jednostavnije izračunati diferencijal funkcije nego njen prirast.

Smatramo li da je $|\Delta x|$ apsolutna pogreška u mjerenju x, tada $\Delta y \doteq dy$ daje apsolutnu pogrešku izračunate vrijednosti $y=f(x)$.

Zadaci

U zadacima **16** do **18** uklj. izračunaj razliku između Δy i dy.

16. $y=3x^2-x$ za $x=1$ i $\Delta x=0{,}01$.

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = [3(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x)] - (3x^2 - x).$$

Uvrštenje $x=1$ i $\Delta x=0{,}01$ daje:

$$\Delta y = 3\cdot 1{,}01^2 - 1{,}01 - 3 + 1 = 0{,}0503$$

$$dy = y'\cdot\Delta x = (6x-1)\cdot\Delta x = 5\cdot 0{,}01 = 0{,}0500.$$

Kako vidimo, razlika između Δy i dy iznosi samo $\underline{0{,}0003}$.

17. $y=2x^3-x^2$ za $x=1$ i $\Delta x=0{,}1$. [0,052].

18. $y=5x+x^2$ za $x=2$ i $\Delta x=0{,}001$. [$\Delta y=0{,}009001$; $dy=0{,}009$].

U zadacima **19** do **22** izračunaj približne vrijednosti zadanih korijena pomoću diferencijala.

19. $\sqrt[4]{17}$.

Uočimo da je $\sqrt[4]{17}$ posebna vrijednost funkcije $y=f(x)=\sqrt[4]{x}$ za $x=17$ i da je $17=16+1=x_0+\Delta x$, pa je $x_0=16$, a $\Delta x=1$. U tom slučaju možemo $\sqrt[4]{17}$ prikazati u obliku $y_0+\Delta y$, gdje je:

$$y_0 = f(x_0) = \sqrt[4]{16}, \text{ a } \Delta y \doteq dy = f'(x_0)\,\Delta x.$$

Računamo uzevši u obzir da je $f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$:

$$\sqrt[4]{17} \doteq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = \sqrt[4]{16} + \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = 2 + \frac{1}{4\cdot 8} = 2\frac{1}{32} \doteq \underline{2{,}031.}$$

20. $\sqrt[5]{31}$.

$$y=f(x)=\sqrt[5]{x};\ 31=32-1=x_0-\Delta x, \text{ pa je } x_0=32 \text{ a } \Delta x=-1, \text{ dok je}$$

$$\sqrt[5]{31} = f(x_0) + \Delta y \doteq f(x_0) + dy = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x.$$

Uzevši u obzir da je $f'(x) = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$, dobivamo:

$$\sqrt[5]{31} = \sqrt[5]{32} + \frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}}\cdot(-1) = 2 - \frac{1}{80} = 2 - 0{,}0125 = \underline{1{,}9875.}$$

21. $\sqrt[5]{215}$. [5,991].

22. $\sqrt{8{,}76}$. [2,96].

U zadacima **23** do **29** uklj. izračunaj pomoću diferencijala približne vrijednosti zadanih funkcija.

23. $\sin 29°$.

$$y=f(x)=\sin x;\quad x = \operatorname{arc} 30° - \operatorname{arc} 1° = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{360°} = \frac{\pi}{6} - 0{,}01745 = x_0 - \Delta x$$

$$\sin 29° \doteq f(x_0) - dy = f(x_0) - f'(x_0)\,\Delta x = \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6}\cdot 0{,}01745 = 0{,}5 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}01745 =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}5\cdot 1{,}73\cdot 0{,}01745 = 0{,}5(1-0{,}030) = \underline{0{,}485.}$$

24. $y=x^3-4x^2+5x+3$ za $x=1{,}03$.

$$x = 1{,}03 = 1 + 0{,}03 = x_0 + \Delta x.$$

Kako je $y'=3x^2-8x+5$, dobivamo uzevši $x_0=1$ i $\Delta x=0{,}03$:

$$y = f(x_0) + dy = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x = (1-4+5+3) + (3-8+5)\cdot 0{,}03 = \underline{5.}$$

25. $y=e^{1-x^2}$ za $x=1{,}05$.

$$x = 1 + 0{,}05 = x_0 + \Delta x.$$

Kako je $y' = -2xe^{1-x^2}$, dobivamo za $x_0=1$ i $\Delta x=0{,}05$:

$$y \doteq f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x = e^0 - 2\cdot 1\cdot e^0\cdot 0{,}05 = 1 - 0{,}1 = \underline{0{,}9.}$$

26. $\arccos 0{,}4975$.

$y=f(x)=\arccos x$, gdje je $x=0{,}4975=0{,}5-0{,}0025=x_0-\Delta x$, pa je:

$$\arccos 0{,}4975 \doteq f(x_0) + dy = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x = \arccos 0{,}5 - \frac{1}{\sqrt{1-0{,}25}}\cdot(-0{,}0025) =$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{0{,}0025}{0{,}87} = 1{,}04720 + 0{,}00287 = \underline{1{,}05007} = \underline{\operatorname{arc} 60°\,10'.}$$

27. $y=x^7-3x^4+4x^3-2$ za $x=1{,}002$. [0,0140].

28. $\operatorname{tg} 45°03'20''$. [1,0019].

29. $\arcsin 0{,}54$. [0,57].

30. Odredi pomoću diferencijala približnu vrijednost apsolutne Δy, relativne $\frac{\Delta y}{y}$ i procentualne $\frac{\Delta y}{y}\cdot 100\%$ pogreške funkcije $y=f(x)=x^2+5x$, ako je za x dobivena vrijednost $x_0=2$ s apsolutnom pogreškom $\Delta x=\pm 0{,}001$.

Računamo: $f(x_0)=f(2)=4+10=14$,

$$f'(x)=2x+5;\quad f'(2)=9$$

$$\Delta y \doteq dy=f'(x_0)\cdot\Delta x=9\cdot 0{,}001=\underline{0{,}009}.$$

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{0{,}009}{14}=\underline{0{,}0006};\quad \frac{\Delta y}{y}\cdot 100\%=\underline{0{,}06\%}.$$

31. Da se odredi površina kruga, izmjeren je polumjer r kruga s približnom procentualnom pogreškom $\frac{\Delta r}{r}\cdot 100\%=1\%$. Odredi procentualnu pogrešku izračunate površine kruga.

$$P=\pi r^2;\quad \Delta P\doteq dP=2\pi r\cdot\Delta r\,|:P=\pi r^2$$

$$\frac{\Delta P}{P}=\frac{2\pi r\cdot\Delta r}{\pi r^2}=2\frac{\Delta r}{r}$$

$$\frac{\Delta P}{P}\cdot 100\%=2\frac{\Delta r}{r}\cdot 100\%=2\cdot 1\%=\underline{2\%}.$$

32. Pokaži da će se procentualna pogreška od 1% u mjerenju polumjera kugle udvostručiti pri računanju procentualne pogreške oplošja, odnosno utrostručiti pri računanju volumena kugle.

33. Brid kocke izmjeren je na 1 mm tačno, pa je dobiveno $a=12\text{ cm}\pm 1\text{ mm}$. Izračunaj približne vrijednosti apsolutne, relativne i procentualne pogreške izračunatog volumena kocke i naznači interval u kojem leži prava vrijednost volumena.

$$V=a^3=1728\text{ cm}^3.$$

$$\Delta V\doteq dV=3a^2\cdot\Delta a=3\cdot 144\cdot 0{,}1=43{,}2\text{ cm}^3.$$

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{3a^2\Delta a}{a^3}=3\frac{\Delta a}{a}=3\cdot\frac{0{,}1}{12}=0{,}025,\quad \text{ili}\quad \frac{43{,}2}{1728}=0{,}025.\quad \frac{\Delta V}{V}\cdot 100\%=2{,}5\%.$$

$$V=1728\pm 43\text{ cm}^3;\quad 1728-43<V<1728+43,\quad 1685\text{ cm}^3<V<1771\text{ cm}^3$$

$$\underline{V=17\cdot 10^2\text{ cm}^3},$$

jer u konačnom rezultatu smijemo zadržati samo zajamčene znamenke, a posljednja pridržana znamenka može biti nesigurna za jedinicu.

34. Za kocku navedenu u pređašnjem zadatku izračunaj približnu vrijednost apsolutne, relativne i procentualne pogreške njena oplošja i naznači interval u kojem leži prava vrijednost oplošja. [14,4; 0,017; 1,7%; $8\cdot 10^2$]

C. DIFERENCIJALI VIŠEG REDA

Formule i upute

Pri prijelazu na više diferencijale uzima se za funkciju $y=f(x)$ da je $dx=\text{const}$, pa je:

$$d(dx)=0$$

$$d^2y=d(dy)=y''(x)\,dx^2. \tag{10}$$

Izraz dx^2 znači $(dx)^2$.

Iz (10) slijedi:

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2} \tag{11}$$

$$d^2y=y''(x)\,dx^2, \tag{12}$$

pa je:

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}, \tag{13}$$

n-ti diferencijal ili diferencijal n-tog reda:

$$d^ny=y^{(n)}dx^n,$$

pa je:

$$y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

Tražimo li diferencijale funkcije zadane implicitno, tj. u obliku $F(x,y)=0$, diferenciramo zadani implicitni izraz po x, pamteći da je y funkcija od x, a zatim iz tako dobivene jednakosti računamo $\frac{dy}{dx}=y'=\varphi(x,y)$. Derivirajući taj izraz po x i pamteći da je y funkcija od x, dobivamo $\frac{d^2y}{dx^2}=y''=\Psi(x,y,y')$, kamo uvrštavamo $y'=\varphi(x,y)$. Množeći obje strane jednakosti sa dx^2 dobivamo d^2y. Nastavljajući taj postupak dobit ćemo $\frac{d^3y}{dx^3}=y'''$, odnosno d^3y itd.

Zadaci

U zadacima **35** do **42** uklj. izračunaj diferencijale viših redova eksplicitno zadanih funkcija.

35. $y=\sqrt[3]{x^2}$; $d^2y=?$

$$dy=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx;\quad d^2y=-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}dx^2\quad \underline{d^2y=-\frac{2}{9}\frac{dx^2}{x\sqrt[3]{x}}}.$$

36. $y=(x+1)^3(x-1)^2$; $d^2y=?$

$$dy=[(x+1)^3\cdot 2(x-1)+(x-1)^2\cdot 3(x+1)^2]\,dx,$$

ili nakon uređenja:

$$dy=(x+1)^2(x-1)(5x-1)\,dx$$

$$d^2y=[(x+1)^2(x-1)\cdot 5+(x+1)^2(5x-1)\cdot 1+(x-1)(5x-1)\cdot 2(x+1)]\,dx^2=\text{nakon}$$

$$\text{uređenja}\ \underline{=4(x+1)(5x^2-2x-1)\,dx^2}.$$

37. $y=\sin^2 x$; $d^3 y=?$

$$dy=2\sin x\cos x\,dx=\sin 2x\,dx$$

$$d^2 y=2\cos 2x\,dx^2$$

$$\underline{d^3 y=-4\sin 2x\,dx^3.}$$

38. $y=\sin x\cdot\ln x$; $d^2 y=?$ $\left[\left(-\sin x\ln x-2\,\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right)dx^2\right]$.

39. $y=\frac{\ln x}{x}$; $d^2 y=?$ $\left[\frac{2\ln x-3}{x^3}dx^2\right]$.

40. $y=4^{-x^2}$; $d^2 y=?$ $[4^{-x^2}\cdot 2\ln 4\,(2x^2\ln 4-1)\,dx^2]$.

41. $y=x^2 e^{-x}$; $d^3 y=?$ $[-e^{-x}(x^2-6xe^{-x}+6)\,dx^3]$.

42. $y=\frac{x^4}{2-x}$; $d^4 y$ za $x=1$ i $dx=0{,}1$. $[0{,}0384]$.

U zadacima **43** do **52** uklj. izračunaj diferencijale, odnosno derivacije implicitno zadanih funkcija.

43. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $d^2 y=?$

$$\frac{2x\,dx}{a^2}+\frac{2y\,dy}{b^2}=0,\ \text{odatle}\ \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2 x}{a^2 y} \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\,\frac{y-xy'}{y^2}.$$

Uvrštenje (a) daje

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=-\frac{b^2 a^2 b^2}{a^4 y^3}\Big|\cdot dx^2$$

$$\underline{d^2 y=-\frac{b^4\,dx^2}{a^2 y^3}.}$$

44. $x^2+y^2=25$; odredi y''' u $T_1(3,4)$.

$$2x\,dx+2y\,dy=0.$$

Odatle: $$\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{x}{y} \qquad \text{(a)}$$

$$y''=-\frac{y-xy'}{y^2}=\text{prema (a)}=-\frac{y+\frac{x^2}{y}}{y^2}=-\frac{x^2+y^2}{y^3}=-\frac{25}{y^3}$$

$$y'''=-\frac{25\cdot 3y^2\cdot y'}{y^6}=(\text{prema (a)})=\frac{75x}{y^5},$$

a u tački $T_1(3,4)$: $y_1'''=\frac{75\cdot 3}{4^5}=\underline{\frac{225}{1024}}$.

45. $e^{\varphi-2}+r\varphi-3r-2=0$; $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_{\varphi=2}=?$

$$e^{\varphi-2}\,d\varphi+r\,d\varphi+\varphi\,dr-3\,dr=0,$$

ili $$(\varphi-3)\,dr+(e^{\varphi-2}+r)\,d\varphi=0\,|:d\varphi$$

$$(\varphi-3)\frac{dr}{d\varphi}=-(e^{\varphi-2}+r),$$

pa je $$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{e^{\varphi-2}+r}{3-\varphi}. \qquad \text{(a)}$$

Uvrštenje $\varphi=2$ u zadanu implicitnu funkciju daje: $1+2r-3r-2=0$, pa je $r=-1$.

Iz (a) slijedi: $$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_{\varphi=2}=\frac{e^0-1}{3-2}=\underline{0.}$$

46. $x^y=y^x$; $\frac{dx}{dy}=?$

Logaritmiranje po bazi e daje: $y\ln x=x\ln y$,

diferencirajmo: $$y\frac{1}{x}\,dx+\ln x\cdot dy=x\frac{1}{y}\,dy+\ln y\cdot dx.$$

Odatle:

$$\left(\ln y-\frac{y}{x}\right)dx=\left(\ln x-\frac{x}{y}\right)dy \quad \text{i} \quad \underline{\frac{dx}{dy}=\frac{x\,(y\ln x-x)}{y\,(x\ln y-y)}.}$$

47. $y=x+\ln y$; $\frac{d^2 y}{dx^2}$? $\frac{d^2 x}{dy^2}=?$

1) $dy=dx+\frac{dy}{y}$, ili $dy\left(1-\frac{1}{y}\right)=dx$,

pa je $$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y-1} \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=\frac{(y-1)y'-yy'}{(y-1)^2}=-\frac{y'}{(y-1)^2}.$$

Uvrštenje (a) daje: $$\frac{d^2 y}{dx^2}=-\frac{y}{(y-1)^3}=\underline{\frac{y}{(1-y)^3}}.$$

2) $dy=dx+\frac{dy}{y}\Big|:dy$

$$1=\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y},\quad \text{pa je}\quad \frac{dx}{dy}=\frac{y-1}{y}=1-\frac{1}{y}$$

$$\frac{d^2 x}{dy^2}=\underline{\frac{1}{y^2}}.$$

48. $x^2+y^2=1$; $d^2 y=?$ $d^2 x=?$ $\left[-\frac{dx^2}{y^3};\ -\frac{dy^2}{x^3}\right]$.

49. $x^2+5xy+y^2-2x+y-6=0$; $\frac{d^2y}{dx^2}$ u $T_1(1,1)$. $\left[\frac{111}{256}\right]$.

50. $y^2=2px$; $d^2y=?$ $\left[-\frac{p^2}{y^3}dx^2\right]$.

51. $y=x \operatorname{arc\,tg} y$; $y''=?$ $\left[-\frac{2y^2+2}{y^5}\right]$.

52. $x^2+y^2-4x-10y+4=0$.

Odredi $\frac{dy}{dx}$ za $x_1=6$ i prikaži grafički funkciju i tangente u zadanim tačkama.

$\left[y'_{1,2}=\pm\frac{4}{3}\text{; kružnica } r=5,\ S(2,5)\right]$.

II. DERIVIRANJE FUNKCIJA ZADANIH U PARAMETARSKOM OBLIKU. JEDNADŽBE TANGENATA I NORMALA NA KRIVULJE ZADANE PARAMETARSKI

Formule

Funkcija zadana parametarski ima oblik:

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t)\\ y&=y(t)\end{aligned}\right\} t_1\leqslant t\leqslant t_2.$$

Kako je

$$dx=x'(t)\,dt=\dot{x}\,dt$$

$$dy=y'(t)dt=\dot{y}\,dt$$

slijedi

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\varphi(t). \tag{17}$$

Formulu (17) deriviramo po x:

$$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\text{ prema (17)}=\frac{d[\varphi(t)]}{dx}=\text{ brojnik i nazivnik podijelimo sa } dt=$$

$$=\frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\varphi'(t)}{x'(t)}=\frac{\dot{\varphi}}{\dot{x}}=\varphi'(t), \tag{17a}$$

gdje je: $\varphi=\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Na sličan način dobivamo: $f'''(x)=\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{x}}$.

Pazi: tačkama se označuju derivacije po t!

U tački $T_1\,[x_1=x(t_1);\ y_1=y(t_1)]$ krivulje $\left.\begin{aligned} x&=x(t)\\ y&=y(t)\end{aligned}\right\} t_1\leqslant t\leqslant t_2$

jednadžba tangente: $$t\equiv y-y(t_1)=\frac{y'(t_1)}{x'(t_1)}[x-x(t_1)], \tag{18}$$

a jednadžba normale: $$n\equiv y-y(t_1)=-\frac{x'(t_1)}{y'(t_1)}[x-x(t_1)]. \tag{19}$$

Zadaci

U zadacima **53** do **60** uklj. izračunaj derivacije funkcija zadanih parametarski.

53. $\left.\begin{array}{l} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{array}\right\}\ \dfrac{d^2y}{dx^2}$ u $T_1\left(t_1=\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Prema (17): $y'=\dfrac{\dot y}{\dot x}=\dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\cdot\sin t}=-\operatorname{tg}^2 t\cdot\operatorname{ctg} t=-\operatorname{tg} t=\varphi(t)$.

Prema (17a): $$y''=\frac{\dot\varphi}{\dot x}=\frac{-\dfrac{1}{\cos^2 t}}{-3a\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{\underline{3a\sin t\cos^4 t}}.$$

$$\text{U } T_1\left(t_1=\frac{\pi}{6}\right):\quad y_1''=\frac{1}{3a\sin\dfrac{\pi}{6}\cos^4\dfrac{\pi}{6}}=\underline{\frac{32}{27a}}.$$

54. $\left.\begin{array}{l} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{array}\right\}\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=?$

Prema (17): $$y'=\frac{e^t\cos t+\sin t\cdot e^t}{-e^t\sin t+\cos t\cdot e^t}=\frac{\cos t+\sin t}{\cos t-\sin t}=\varphi(t).$$

Prema (17a):

$$y''=\frac{\dot\varphi}{\dot x}:\quad \dot\varphi=\frac{(\cos t-\sin t)(-\sin t+\cos t)-(\cos t+\sin t)(-\sin t-\cos t)}{(\cos t-\sin t)^2}=$$

$$=\text{ nakon uređenja }=\frac{2}{(\cos t-\sin t)^2}.$$

$$\dot x=e^t(\cos t-\sin t)$$

$$y''=\frac{\dot\varphi}{\dot x}=\underline{\frac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}}.$$

55. $\left.\begin{array}{l} x=1+e^{at} \\ y=at+e^{-at} \end{array}\right\}\ \dfrac{d^3y}{dt^3}=?$

$$y'=\frac{\dot y}{\dot x}=\frac{a-a\,e^{-at}}{a\,e^{at}}=e^{-at}-e^{-2at}=\varphi(t)$$

$$y''=\frac{\dot\varphi}{\dot x}=\frac{-a\,e^{-at}+2a\,e^{-2at}}{a\,e^{at}}=-e^{-2at}+2\,e^{-3at}$$

$$y'''=\frac{\ddot\varphi}{\dot x}=\frac{2a\,e^{-2at}-6a\,e^{-3at}}{a\,e^{at}}=\underline{2\,e^{-3at}-6\,e^{-4at}}.$$

56. $\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{t+1} \\ y=\dfrac{t}{t+1} \end{array}\right\}\ \dfrac{dy}{dx}=?$ $[-1]$

2?

57. $\left.\begin{array}{l} x=\ln t \\ y=\sin 2t \end{array}\right\}\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=?$ $[2t(\cos 2t-2t\sin 2t)]$

58. $\left.\begin{array}{l} x=e^\alpha \\ y=\arcsin\alpha \end{array}\right\}\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=?$ $\left[\dfrac{\alpha^2+\alpha-1}{e^{2\alpha}(1-\alpha^2)\sqrt{1-\alpha^2}}\right]$.

59. $\left.\begin{array}{l} x=t^2 \\ y=t^3+t \end{array}\right\}\ \dfrac{d^2y}{dx^2}$ u $T_1(t_1=1)$. $\left[\dfrac{1}{2}\right]$.

60. $\left.\begin{array}{l} x=\cos\alpha+\alpha\sin\alpha \\ y=\sin\alpha-\alpha\cos\alpha \end{array}\right\}\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=?$ $\left[\dfrac{\sec^3\alpha}{\alpha}\right]$.

U zadacima **61** i **62** konstruiraj grafove funkcija zadanih parametarski.

61. $x=t^2-2t$
$y=t^2+2t$.

Obje funkcije su neprekinute i definirane za sve t.

Odredimo ekstremne vrijednosti.

a) funkcija y: $$y'=\frac{\dot y}{\dot x}=\frac{2t+2}{2t-2}=\frac{t+1}{t-1}=\varphi(t)$$

$$y''=\frac{\dot\varphi}{\dot x}=\frac{t-1-t-1}{(t-1)^2}\cdot\frac{1}{2t-2}=-\frac{1}{(t-1)^3}.$$

$$y'=0:\quad t+1=0,\ t_1=-1.$$

$$y''(t_1)=-\frac{1}{(-2)^3}=\frac{1}{8}>0;\ y_{min}\text{ za } t_1=-1.$$

drugi izvod > 0
funkcija ima minimum

$$y_{min}=y(-1)=1-2=\underline{-1}\text{ i to za } x_1=x(-1)=1+2=\underline{3}.$$

b) funkcija x: $$\frac{dx}{dy}=\frac{\dot x}{\dot y}=\frac{t-1}{t+1}=\Psi(t)$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{\dot\Psi}{\dot x}=\frac{t+1-t+1}{(t+1)^3}=\frac{1}{(t+1)^3}\ ?$$

$$\frac{dx}{dy}=0:\quad t-1=0,\ t_2=1.$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}(1)=\frac{2}{(1+1)^2}=\frac{1}{2}>0;\ x_{min}\text{ za } t_2=1,$$

$$x_{min}=x(1)=1-2=\underline{-1}\text{ za } y_2=y(1)=1+2=\underline{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^3x}{dy^3}=\dfrac{\ddot\varphi}{\dot x}=\dfrac{3}{2(t-1)^5}\neq 0\text{ za } t_1=-1 \\ x'''=\dfrac{\ddot\Psi}{\dot y}=-\dfrac{4}{(t+1)^3}\cdot\dfrac{1}{t+1}=-\dfrac{4}{(t+1)^4}\neq 0\text{ za } t_2=1 \end{array}\right\}\ \text{Tačaka infleksije nema.}$$

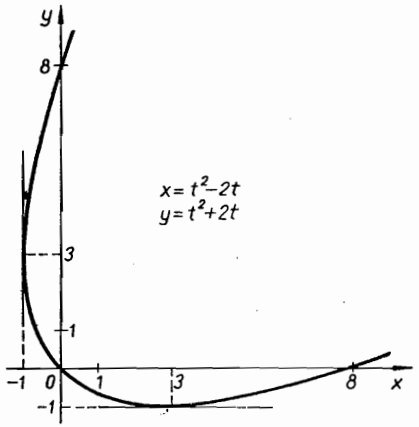
Nul-tačke:

iz $y(t)=t^2+2t=0$ slijedi: $\underline{t_3=0}$ i $\underline{t_4=-2}$,

uvrštenje u $x=t^2-2t$ daje: $\underline{x_3=0}$ i $\underline{x_4=4+4=8}$,

iz $x(t)=t^2-2t=0$ slijedi: $\underline{t_5=0}$ i $\underline{t_6=2}$,

uvrštenje u $y=t^2+2t$ daje: $\underline{y_5=0}$ i $\underline{y_6=8}$.



Slika 1

Funkcije $x(t)$ i $y(t)$ primaju vrijednosti:

$$-1\leqslant x<+\infty$$

$$-1\leqslant y<+\infty$$

$$\lim_{t\to\infty} y'=\lim_{t\to\infty}\frac{t+1}{t-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t}}=1=\operatorname{tg}45°:$$

To znači: nagib krivulje prema osi X teži prema 45°.

Vidi sl. 1.

62. $x=t^3+3t+1$

$y=t^3-3t+1.$

[(5; −1) je min. za $t_1=1$; (−3; 3) je maks. za $t_2=-1$; (1; 1) je tačke infleksije; $\lim\limits_{t\to\infty} y'=\operatorname{tg}45°$].

U zadacima **63** do **69** uklj. odredi jednadžbe tangenata i normala za zadane krivulje.

63. Kružnica $\left.\begin{matrix}x=5\cos t\\ y=5\sin t\end{matrix}\right\}$ $0\leqslant t<2\pi$ u tački $T_1\left(t_1=-\frac{\pi}{6}\right)$ kružnice. Vidi sl. 2.

Prema (18):

$$x(t_1)=5\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{2}\sqrt{3}$$

$$y(t_1)=5\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{5}{2}.$$

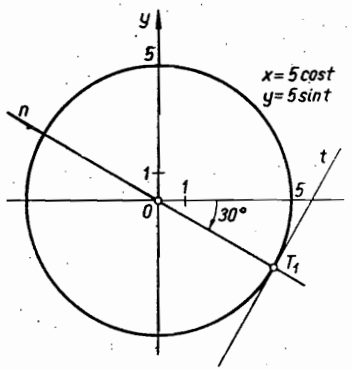
$$y'=\frac{\dot y}{\dot x}=\frac{5\cos t}{-5\sin t}=-\operatorname{ctg}t$$

$$y'(t_1)=-\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}.$$

$$t\equiv y+\frac{5}{2}=\sqrt{3}\left(x-\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$n\equiv y+\frac{5}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$\underline{t\equiv y=x\sqrt{3}-10},\quad \underline{n\equiv y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x.}$$



Slika 2

64. Cikloida $\left.\begin{matrix}x=5(t-\sin t)\\ y=5(1-\cos t)\end{matrix}\right\}$ u tački $T_1\left(t_1=\frac{\pi}{3}\right)$.

Prema (18):

$$x(t_1)=5\left(\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=5\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y(t_1)=5\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)=5\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}.$$

$$y'=\frac{\dot y}{\dot x}=\frac{5\sin t}{5(1-\cos t)};\quad y_1'=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}.$$

$$t\equiv y-\frac{5}{2}=\sqrt{3}\left[x-5\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$n\equiv y-\frac{5}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left[x-5\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right],$$

a nakon uređenja dobivamo:

$$\underline{t\equiv y=\sqrt{3}x+5(-\pi\sqrt{3}+2)},\quad \underline{n\equiv y=-\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{5\pi}{3\sqrt{3}}.}$$

Prikaži sve grafički.

65. $\begin{matrix}x=e^t\sin t\\ y=e^t\cos t\end{matrix}$ u tački $T_1\left(t_1=\frac{\pi}{6}\right)$.

Prema (18):

$$x(t_1)=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}};\quad y(t_1)=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{6}}.$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\dot y}{\dot x}=\frac{e^t(\cos t-\sin t)}{e^t(\cos t+\sin t)}=\frac{1-\operatorname{tg}t}{1+\operatorname{tg}t}$$

$$y_1'=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{(3-\sqrt{3})^2}{9-3}=2-\sqrt{3}$$

$$t\equiv y-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{6}}=(2-\sqrt{3})\left(x-\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}\right)$$

$$n\equiv y-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}-2}\left(x-\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}\right)$$

i nakon uređenja:

$$\underline{t\equiv y=(2-\sqrt{3})x-(1-\sqrt{3})e^{\frac{\pi}{6}}}$$

$$\underline{n\equiv y=-(\sqrt{3}+2)x+(1+\sqrt{3})e^{\frac{\pi}{6}}.}$$

66. Cikloida: $\begin{matrix} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{matrix}$ u $T_1\left(t_1=\frac{\pi}{2}\right)$ i sve prikaži grafički.

$$\left[y=x-\left(\frac{\pi}{2}-2\right);\quad y=-x+\frac{\pi}{2}\right].$$

67. $\begin{matrix} x=2e^t \\ y=e^{-t} \end{matrix}$ u $T_1(t_1=0)$.

$$\left[y=-\frac{x}{2}+2;\quad y=2x-3\right].$$

68. Elipsa: $\begin{matrix} x=2\sqrt{3}\cos t \\ y=2\sin t \end{matrix}$ u $T_1\left(t_1=\frac{\pi}{6}\right)$ i grafički prikaz. $[y=-x+4;\quad y=x-2]$.

69. Astroida: $\begin{matrix} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{matrix}$ u $T_1\left(t_1=\frac{\pi}{4}\right)$. $[\sqrt{2}(x+y)=a;\quad y=x]$.

70. Odredi tačke na krivulji $x=t-1$, $y=t^3-12t+1$ u kojima je tangenta paralelna: a) s osi X.

b) s pravcem $y=-9x-3$.

$$y'=\operatorname{tg}\alpha=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{3t^2-12}{1}=3t^2-12.$$

a) Za os X: $\operatorname{tg}\alpha=0$, pa je $3t^2-12=0$.

Slijedi: $t_{1,2}=\pm 2$.

Tangenta je paralelna s osi X u tačkama:

$$T_1(x_1=2-1=\underline{1};\quad y_1=8-24+1=\underline{-15})$$

$$T_2(x_2=-2-1=\underline{-3};\quad y_2=-8+24+1=\underline{17}).$$

b) Za zadani pravac $\operatorname{tg}\alpha=y'=-9$.

Slijedi: $3t^2-12=-9$, a odatle je $t_{3,4}=\pm 1$.

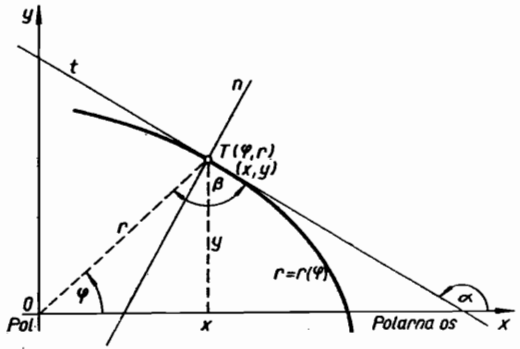
$$T_3(x_3=1-1=\underline{0};\quad y_3=1-12+1=\underline{-10})$$

$$T_4(x_4=-1-1=\underline{-2};\quad y_4=-1+12+1=\underline{12}).$$

III. POLARNE KOORDINATE. JEDNADŽBE TANGENATA I NORMALA NA KRIVULJE ZADANE U POLARNIM KOORDINATAMA

Upute

Veza između pravokutnih i polarnih koordinata tačke.



Slika 3

Prema slici 3 imamo:

$$x=r\cos\varphi$$

$$y=r\sin\varphi.$$

Obratni prijelaz od pravokutnih koordinata na polarne:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}$$

$$r=+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{x}{\cos\varphi}=\frac{y}{\sin\varphi}.$$

Odredimo y':

$$y'=\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{r+r'\operatorname{tg}\varphi}{r'-r\operatorname{tg}\varphi}, \tag{20}$$

gdje je

$$r'=\frac{dr}{d\varphi}.$$

U tački $T_1(x_1=r_1\cos\varphi_1;\quad y_1=r_1\sin\varphi_1)$ krivulje jednadžba tangente glasi:

$$y-r_1\sin\varphi_1=\frac{r_1+r_1'\operatorname{tg}\varphi_1}{r_1'-r_1\operatorname{tg}\varphi_1}(x-r_1\cos\varphi_1), \tag{21}$$

jednadžba normale: $y-r_1\sin\varphi_1=-\dfrac{r_1'-r_1\operatorname{tg}\varphi_1}{r_1+r_1'\operatorname{tg}\varphi_1}(x-r_1\cos\varphi_1)$. (21a)

Prema slici 3: $\beta=\alpha-\varphi$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{r}{r'}$. (23)

Jednadžba tangente u T_1: $t\equiv y-r_1\sin\varphi_1=\operatorname{tg}(\beta_1+\varphi_1)(x-r_1\cos\varphi_1)$, (24)

gdje se β_1 odreduje iz (23).

Zadaci

71. Zadana je kružnica $r=2R\sin\varphi$. Odredi kut β što ga tangenta zatvara s radijus-vektorom povučenim u dirilište, i kut α što ga tangenta zatvara s polarnom osi.

Računamo prema (23): $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{r}{r'}=\dfrac{2R\sin\varphi}{2R\cos\varphi}=\operatorname{tg}\varphi$ (a)

$$\underline{\beta=\varphi.}$$

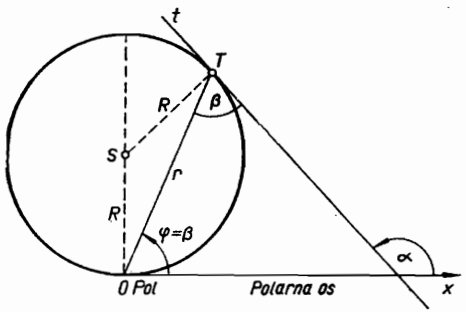
Prema (20): $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{r+r'\operatorname{tg}\varphi}{r'-r\operatorname{tg}\varphi}$.

Iz (a) slijedi: $r=r'\operatorname{tg}\varphi$, pa uvrštenje daje:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{r'\operatorname{tg}\varphi+r'\operatorname{tg}\varphi}{r'-r'\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}=\operatorname{tg}2\varphi.$$

$$\underline{\alpha=2\varphi.}$$

Vidi sl. 4.



Slika 4

72. Odredi tangens kuta α što ga tangenta na krivulju $r=\dfrac{a}{\cos^2\varphi}$ zatvara s polarnom osi u tački u kojoj je $r=2a$.

Računamo prema (20), uzevši $r=2a$ i

$$r'=\frac{2a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^4\varphi}=\frac{2a\sin\varphi}{\cos^3\varphi}. \qquad \text{(a)}$$

Iz $r=2a=\dfrac{a}{\cos^2\varphi}$ slijedi da je $\cos^2\varphi=\dfrac{1}{2}$, pa je:

$$\cos\varphi=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{i} \quad \sin\varphi=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

a odatle je: $\operatorname{tg}\varphi=1$.

Uvrštenje u (a) daje: $r'=\dfrac{2a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}=4a.$

Prema (20): $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2a+4a}{4a-2a}=\underline{3.}$

U zadacima **73** i **74** odredi tangens kuta α, što ga tangenta povučena na zadanu krivulju u polu zatvara s polarnom osi.

73. $r=\sin 3\varphi$.

U polu ($\varphi=0$; $r=0$) kut α, što ga zatvara tangenta s polarnom osi, podudara se s polarnim kutom φ, pa je $r=0$ i

$$\sin 3\varphi=0 \quad \text{i} \quad \varphi_1=0,$$

a kako je period funkcije $\sin 3\varphi$ $P=\dfrac{2\pi}{3}$, slijedi:

$$\varphi_2=\frac{2\pi}{3}=\text{arc}\,120^\circ \quad \text{i} \quad \varphi_3=\frac{2\pi}{3}\cdot 2=\text{arc}\,240^\circ.$$

Dobivamo:

$$\operatorname{tg}0=\underline{0}; \quad \operatorname{tg}120^\circ=-\underline{\sqrt{3}} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}240^\circ=\underline{\sqrt{3}}.$$

Vidi sl. 5 uz zadatak 75.

74. $r=\sin^3\varphi$. [0; skiciraj graf!]

U zadacima **75** i **76** odredi elemente krivulja zadanih u polarnim koordinatama i nariši njihove grafove.

75. $r=a\sin 3\varphi$ $(a>0)$.

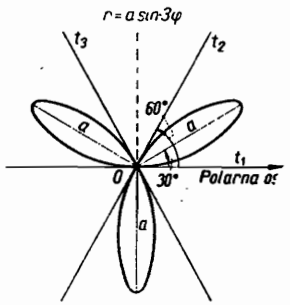
Funkcija je definirana za sve φ.

Nul-tačke: $r=0$ kad je $\sin 3\varphi=0$, tj. za

$\varphi_1=0$, $\varphi_2=\text{arc}\,120^\circ$ i $\varphi_3=\text{arc}\,240^\circ$,

jer je $P=\dfrac{2\pi}{3}$ (vidi zadatak 73).

Ekstremi: $r'=3a\cos 3\varphi$.



Slika 5

Iz $r'=0$ slijedi $\cos 3\varphi=0$, pa je:

$$3\varphi_1=\frac{\pi}{2};\quad \varphi_1=\frac{\pi}{6}=\text{arc } 30°,$$

$$3\varphi_2=\frac{\pi}{2}+\pi;\quad \varphi_2=\frac{3\pi}{6}=\text{arc } 90°,$$

$$3\varphi_3=\frac{\pi}{2}+2\pi;\quad \varphi_3=\frac{5\pi}{6}=\text{arc } 150°.$$

Uvrštenje tih vrijednosti φ u $r=a\sin 3\varphi$ daje

$$r_1=a\sin 90°=a;\quad r_2=a\sin 270°=-a \quad \text{i} \quad r_3=a\sin 450°=a\sin 90°=a.$$

Rišemo graf „ruže s tri latice" uzevši u obzir da za tačke krivulje koje leže u polu O vrijedi $\varphi=\alpha$, pa sve tangente u polu imaju jednadžbe:

$$t_1\equiv y=0;\quad t_2\equiv y=\frac{2\pi}{3}x;\quad t_3\equiv y=\frac{4\pi}{3}x.$$ Vidi sl. 5.

76. $r=a(1-\cos\varphi)$, $a>0$.

[$r_{\text{maks.}}=2a$ za $\varphi=\pi$; $r_{\text{min.}}=0$ za $\varphi=0$. Kardioidu i njenu konstrukciju vidi na sl. 50 u II dijelu Repetitorija.]

77. Krivulja je zadana u polarnim koordinatama parametarski:

$$r=a\,t^3$$
$$\varphi=b\,t^2.$$

Odredi kut što ga zatvara tangenta s radij-vektorom dirališta.

Prema (17) dobivamo općenito za $r=r(t)$, $\varphi=\varphi(t)$: $f'(\varphi)=\dfrac{r'(t)}{\varphi'(t)}=\dfrac{\dot r}{\dot\varphi}$.

Prema (23) $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{r}{r'}$ dobivamo: $$\operatorname{tg}\beta=\frac{r}{\dfrac{\dot r}{\dot\varphi}}=\frac{r\,\dot\varphi}{\dot r}. \qquad \text{(a)}$$

Za naš slučaj: $$\operatorname{tg}\beta=\frac{a\,t^3\cdot 2\,b\,t}{3\,a\,t^2}=\frac{2}{3}\,b\,t^2$$

pa je $$\beta=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{3}\,b\,t^2\right) \quad \text{ili} \quad \underline{\beta=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{3}\varphi\right)}.$$

78. Zadana je elipsa
$$x=a\cos t$$
$$y=b\sin t.$$

Prikaži r i φ kao funkcije parametra t i izračunaj tangens kuta β što ga tangenta zatvara s radij-vektorom dirališta:

$$\left.\begin{aligned}x^2&=a^2\cos^2 t\\ y^2&=b^2\sin^2 t.\end{aligned}\right|+$$

$r^2=x^2+y^2=a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t$, pa je:

$$\underline{r=\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}.} \qquad \text{(a)}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}=\frac{b\sin t}{a\cos t}=\frac{b}{a}\operatorname{tg} t,$$

pa je: $$\underline{\varphi=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} t\right).} \qquad \text{(b)}$$

$\operatorname{tg}\beta$ računamo prema $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{r\,\dot\varphi}{\dot r}$ (vidi zadatak 77).

$$\dot\varphi=\frac{ab}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}=\frac{ab}{r^2}$$

$$\dot r=\frac{(b^2-a^2)\sin 2t}{2r}$$

$$\underline{\operatorname{tg}\beta=\frac{2ab}{(b^2-a^2)\sin 2t}.}$$

IV. ZAKRIVLJENOST KRIVULJA

A. ZAKRIVLJENOST KRIVULJA ZADANIH U PRAVOKUTNIM I POPULARNIM KOORDINATAMA

Formule

a. Za krivulju $y=y(x)$ u tački T apscise x.

Zakrivljenost
$$\boxed{\frac{1}{\rho}=\frac{|y''(x)|}{[1+y'^2(x)]^{3/2}}}. \tag{26}$$

b. Za krivulju $\begin{matrix} x=x(t) \\ y=y(t) \end{matrix}$ u tački T parametra t.

Zakrivljenost
$$\frac{1}{\rho}=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}. \tag{30}$$

c. Za krivulju $r=r(\varphi)$ u tački $T\ (r,\varphi)$:

Zakrivljenost
$$\frac{1}{\rho}=\frac{|r^2+2r'^2-r\cdot r''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}. \tag{33}$$

Zadaci

U zadacima **79** do **91** uklj. izračunaj zakrivljenost i polumjer zakrivljenosti zadanih krivulja u zadanim tačkama.

Зг. мат 1531

79. $y=x^4-4x^3-18x^2$ u $O(0;0)$.

Računamo prema (26):

$$y'=4x^3-12x^2-36x, \text{ a u } O(0;0):\ y'(0)=0$$

$$y''=12x^2-24x-36, \text{ a u } O(0;0):\ y''(0)=-36,$$

zakrivljenost u $O(0;0)$: $\frac{1}{\rho_1}=\frac{36}{(1+0)^{3/2}}=\underline{36.}$

Polumjer zakrivljenosti u $O(0;0)$: $\underline{\rho_1=\frac{1}{36}}$.

80. $y=\ln\frac{1}{x}$ u $T_1(x_1=1)$.

Prema (26): $y'=-x\cdot\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x}$; a u T_1: $y_1'=-1$

$$y''=\frac{1}{x^2}, \text{ a u } T_1:\ y_1''=1$$

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{(1+1)^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}=\underline{\frac{1}{2\sqrt{2}}}.$$

$$\underline{\rho_1=2\sqrt{2}.}$$

81. $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$ u $O(0;0)$.

Kako je $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})=\operatorname{Arsh}x$, imamo odmah:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ a u } O(0;0):\ y'(0)=1.$$

$$y''=-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}, \text{ a u } O(0;0):\ y''(0)=0$$

$$\underline{\frac{1}{\rho_1}=\frac{0}{2\sqrt{2}}}=0;\quad \rho_1=\infty\text{—tačka infleksije!}$$

82. Hiperbola $y=\frac{4}{x}$ u $T_1(2;2)$. $\left[\frac{\sqrt{2}}{4};\ 2\sqrt{2}\right]$.

83. $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ u $T(x,y)$. $\left[\frac{1}{a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}}\right]$.

84. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ u vrhovima $A(a,0)$ i $B(0,b)$. $\left[\rho_A=\frac{b^2}{a};\quad \rho_B=\frac{a^2}{b}\right]$.

85. $\begin{matrix} x=3t^2 \\ y=3t-t^3 \end{matrix}$ u $T_1(t_1=1)$.

Računamo prema (30): $\dot{x}=6t$, $\ddot{x}=6$; $\dot{y}=3-3t^2$, $\ddot{y}=-6t$,

a u $T_1(t_1=1)$: $\dot{x}=6$, $\ddot{x}=6$; $\dot{y}=0$; $\ddot{y}=-6$.

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{|-6\cdot 6-0|}{(36+0)^{3/2}}=\frac{36}{216}=\underline{\frac{1}{6}};\quad \underline{\rho_1=6.}$$

86. Astroida $\begin{matrix} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{matrix}$ u $T_1\left(t_1=\frac{\pi}{6}\right)$.

$$\dot{x}=-\frac{3}{2}a\sin 2t\cos t;\quad \ddot{x}=-\frac{3}{2}a(-\sin 2t\sin t+2\cos t\cos 2t)$$

$$\dot{y}=\frac{3}{2}a\sin 2t\sin t;\quad \ddot{y}=\frac{3}{2}a(\sin 2t\cos t+2\cos 2t\sin t)$$

$$\text{u } T_1\left(t_1=\frac{\pi}{6}\right):\quad \dot{x}=-\frac{9}{8}a;\quad \ddot{x}_1=-\frac{3\sqrt{3}a}{8}.$$

$$\dot{y}_1=\frac{3\sqrt{3}a}{8};\quad \ddot{y}_1=\frac{15a}{8}.$$

Uvrštenje u (30) daje nakon uređenja:

$$\underline{\frac{1}{\rho_1}=\frac{4}{3a\sqrt{3}}};\quad \underline{\rho_1=\frac{3}{4}a\sqrt{3}.}$$

87. $\begin{matrix} x=t^2 \\ y=2t^3 \end{matrix}$ u $T_1(t_1=1)$. $\left[\frac{3}{20\sqrt{10}}\right]$.

88. $\begin{matrix} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{matrix}$ u tački parametra t.

[$\frac{1}{|at|}$; $|at|$. Vidi dalje sl. 8, koja predočuje zadanu krivulju, tj. evolventu kružnice za $a=10$ cm.]

89. $\begin{matrix} x=2a\cos t-a\cos 2t \\ y=2a\sin t-a\sin 2t \end{matrix}$ u tački parametra t. $\left[\frac{3}{8a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\right]$.

90. $r=a^{\varphi}$ u $T_1(\varphi=0;\ r=1)$.

Računamo prema (33):

$$r'=a^{\varphi}\ln a,\ \text{a u } T_1: r_1'=\ln a.$$

$$r''=a^{\varphi}\ln^2 a,\ \text{a u } T_1: r_1''=\ln^2 a.$$

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{1+2\ln^2 a-\ln^2 a}{\sqrt{(1+\ln^2 a)^3}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 a}}};\quad \underline{\rho_1=\sqrt{1+\ln^2 a}.}$$

91. $r=a\varphi^k$ u $T(\varphi, r)$. $\left[\frac{\varphi^2+k^2+k}{a\varphi^{k-1}(\varphi^2+k^2)^{3/2}}\right]$.

92. Pokaži da je polumjer zakrivljenosti lemniskate

$$r^2=a^2\cos 2\varphi$$

obratno razmjeran s pripadnim r.
[Slika 46 u II dijelu Repetitorija predočuje lemniskatu.]

B. SREDIŠTE I KRUŽNICA ZAKRIVLJENOSTI

Formule

a. Za krivulju $y=y(x)$.

Koordinate središta $S(\xi, \eta)$ kružnice zakrivljenosti u tački krivulje T apscise x:

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''};\quad \eta=y(x)+\frac{1+y'^2}{y''}. \tag{35}$$

Kružnica zakrivljenosti u tački $T(\xi, \eta)$:

$$k\equiv(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\rho^2,$$

gdje je prema (26):

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} \tag{27}$$

polumjer zakrivljenosti u tački T krivulje.

b. Za krivulju $\begin{matrix} x=x(t) \\ y=y(t) \end{matrix}$ u tački krivulje T parametra t:

$$\xi=x(t)-\frac{\dot{y}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}},\quad \eta=y(t)+\frac{\dot{x}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}. \tag{36}$$

Kružnica zakrivljenosti u tački $T(\xi, \eta)$:

$$k\equiv(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\rho^2,$$

gdje je prema (30):

$$\rho=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}. \tag{31}$$

Zadaci

U zadacima **93** do **98** uklj. odredi središte i kružnicu zakrivljenosti za zadane krivulje u zadanim tačkama tih krivulja.

93. $y=4x-x^2$ u vrhu. Vidi sl. 6.

Napišemo li zadanu jednadžbu u obliku $y=-(x-2)^2+4$ vidjet ćemo da je vrh parabole u tački $V(2, 4)$.

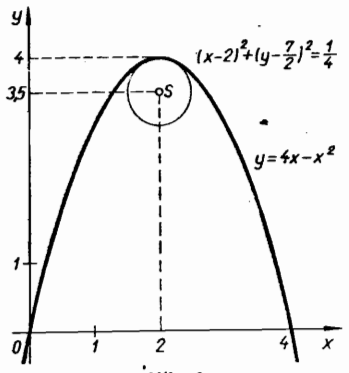
Računamo prema (35):

$$y'=4-2x,\ \text{a u } V: y_1'=0$$

$$y''=-2,\ \text{a u } V: y_1''=-2.$$

Prema (35):

$$\xi=2-\frac{0}{-2}=2;\quad \eta=4-\frac{1}{2}=3{,}5.$$



Slika 6

Prema slici:

$$\rho_1 = 4 - 3{,}5 = \frac{1}{2}$$

i (27)

$$\underline{S\left(2;\ \frac{7}{2}\right)};\quad \underline{k \equiv (x-2)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}}.$$

94. $\begin{matrix} x = t^2 \\ y = 2t^3 \end{matrix}$ u $T_1(1;\ -2)$. Uvrštenje $x_1 = 1$ i $y_1 = -2$ daje:

$1 = t^2$ i $-2 = 2t^3$, a odatle je $t_1 = -1$

Računamo prema (36): $\dot{x} = 2t$, a u T_1: $\dot{x}_1 = -2$

$\ddot{x} = 2$, a u T_1: $\ddot{x}_1 = 2$

$\dot{y} = 6t^2$, a u T_1: $\dot{y}_1 = 6$

$\ddot{y} = 12t$, a u T_1: $\ddot{y}_1 = -12$.

$$\xi = 1 - \frac{6(4+36)}{2\cdot 12 - 6\cdot 2} = -19;\quad \eta = -2 + \frac{-2\cdot 40}{12} = -8\frac{2}{3}.$$

$$\underline{S\left(-19;\ -8\frac{2}{3}\right)}.$$

Prema (31): $\rho_1 = \dfrac{40^{3/2}}{12} = \dfrac{20\sqrt{10}}{3}$, pa je $\rho_1^2 = \dfrac{4000}{9}$.

Prema (27): $\underline{k \equiv (x+19)^2 + \left(y + 8\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4000}{9}}$.

95. $y = x^2 - 6x + 10$ u $T_1(3;\ 1)$ i sve prikaži grafički. $\left[S\left(3;\ \frac{3}{2}\right);\ \rho = \frac{1}{2}\right]$.

96. $y = e^x$ u $T_1(0;\ 1)$ uz grafički prikaz. $[(x+2)^2 + (y-3)^2 = 8]$.

97. Uz grafički prikaz odredi one tačke parabole $y = \sqrt{2}x^2$ u kojima je polumjer zakrivljenosti jednak jedinici.

$$\left[T_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{8}\right)\right].$$

98. Na hiperboli $y = \dfrac{1}{x}$ odredi tačku u kojoj je zakrivljenost najveća. Grafički prikaz!

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{\ln 2}{2}\right].$$

C. EVOLUTA I EVOLVENTA

Formule

JEDNADŽBE EVOLUTE

a. Za krivulju (evolventu) $y = y(x)$:

$$\xi = x - \frac{y'(x)\,[1 + y'^2(x)]}{y''(x)}$$
$$\eta = y(x) + \frac{1 + y'^2(x)}{y''(x)}, \qquad (35)$$

gdje je x parametar.

b. Za krivulju (evolventu) $\left.\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}\right\}\ t_1 \leqq t \leqq t_2$

$$\xi = x(t) - \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$
$$\eta = y(t) + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}. \qquad (36)$$

Zadaci

U zadacima **99** do **104** uklj. odredi jednadžbe evoluta zadanih krivulja uz grafički prikaz evolvenata i evoluta.

99. $y = 1 - \dfrac{1}{2}x^2$.

Računamo prema (35):

$y' = -x;\quad y'' = -1$

$$\xi = x - \frac{-x(1+x^2)}{-1} = -x^3$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1+x^2}{-1} = -\frac{3}{2}x^2.$$

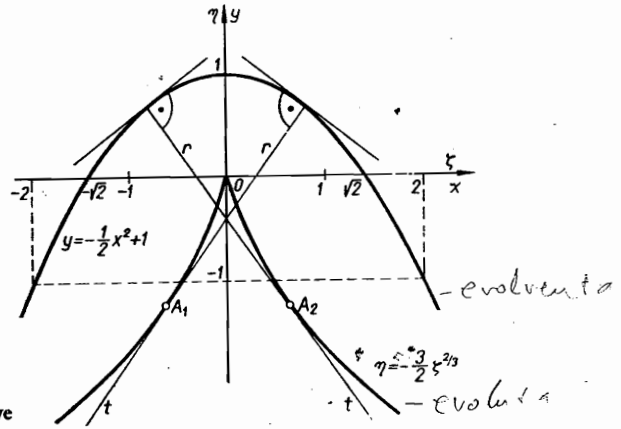
Evoluta $\equiv \begin{matrix} \xi = -x^3 \\ \eta = -\frac{3}{2}x^2. \end{matrix}$

Uklonimo parametar x: Iz prve jednadžbe imamo $x = \sqrt[3]{-\xi}$, a uvrštenje u drugu daje:

$$\eta = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\xi^2} \quad \text{ili} \quad \eta^3 = -\frac{27}{8}\xi^2;$$

odatle:

$$\underline{\eta = -\frac{3}{2}\xi^{2/3}} \quad \text{ili} \quad \underline{27\xi^2 = -8\eta^3}.$$



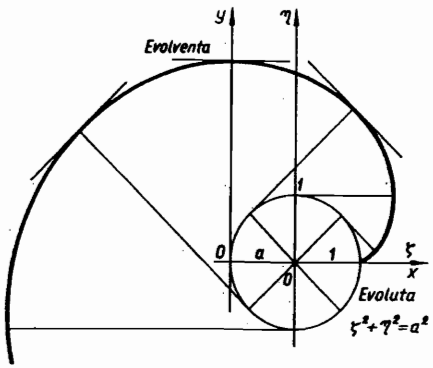
Slika 7

Evoluta zadane parabole (evolvente) jest polukubna parabola. Vidi sliku 7.

100. $x=a(\cos t+t\sin t)$

$y=a(\sin t-t\cos t)$.

Računamo prema (36):



Slika 8

$$\dot{x}=a(-\sin t+t\cos t+\sin t)=a\,t\cos t$$

$$\dot{y}=a(\cos t+t\sin t-\cos t)=a\,t\sin t$$

$$\ddot{x}=a(-t\sin t+\cos t)$$

$$\ddot{y}=a(t\cos t+\sin t)$$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=a^2t^2.$$

$$\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}=a^2t^2.$$

$$\xi=a(\cos t+t\sin t)-\frac{a\,t\sin t\cdot a^2t^2}{a^2t^2}=a\cos t$$

$$\eta=a(\sin t-t\cos t)+\frac{a\,t\cos t\cdot a^2t^2}{a^2t^2}=a\sin t$$

$$\xi^2+\eta^2=a^2,\quad \text{ili}\quad \begin{aligned}\xi&=a\cos t\\ \eta&=a\sin t\,.\end{aligned}$$

Kako vidimo, za evolutu smo dobili kružnicu polumjera a sa središtem u ishodištu O, pa zadana jednadžba predočuje evolventu kružnice, tj. razvijenu kružnicu. Vidi sl. 8.

101. Parabola $y=x^2$. $\left[\eta=\frac{1}{2}+3\left(\frac{\xi}{4}\right)^{2/3}\right]$.

102. Parabola $y^2-2x=0$ uz grafički prikaz. $[8\xi^3-27\eta^2=0]$.

103. Istostrana hiperbola $x^2-y^2=a^2$. Graf. $[\xi^{2/3}-\eta^{2/3}=(2a)^{2/3}]$.

104. Parabola $\begin{aligned}x&=3t\\ y&=t^2-6\end{aligned}$. $\left[\xi=-\frac{4}{3}t^3;\ \eta=3t^2-\frac{3}{2};\ \xi^2=\frac{16}{243}\left(\eta+\frac{3}{2}\right)^3\right]$.

DRUGI DIO – INTEGRALNI RAČUN

V. NEODREĐENI INTEGRALI

A. POJAM NEODREĐENOG INTEGRALA I NJEGOVA SVOJSTVA. OSNOVNI INTEGRALI

Upute

Ako je zadan diferencijal funkcije $F(x)$, tj. $dF(x)=f(x)\,dx$, ili derivacija funkcije $F(x)$, tj. $F'(x)=f(x)$, a tražimo samu funkciju $F(x)$, tada vršimo operaciju, koja je inverzna (obratna) od diferenciranja, a zove se **integriranje**, dok se tražena funkcija $F(x)$ zove **primitivna** funkcija s obzirom na zadanu funkciju $f(x)$.

Svaka neprekinuta funkcija $f(x)$ ima bezbroj primitivnih funkcija, koje se međusobno razlikuju samo za aditivnu konstantu C, a to znači: ako je $F'(x)=f(x)$, tj. ako je $F(x)$ primitivna funkcija s obzirom na $f(x)$, tada je i $F(x)+C$ također primitivna funkcija od $f(x)$, jer je $D_x\,(F(x)+C)=F'(x)=f(x)$.

Izraz $F(x)+C$ koji obuhvaća sve primitivne funkcije od $f(x)$ zove se neodređeni integral funkcije $f(x)$ i označuje se znakom $\int$:

$\int f(x)\,dx=F(x)+C$, jer je $d(F(x)+C)=f(x)\,dx$ ili

jer je $D_x(F(x)+C)=f(x)$.

Npr. $\int\cos x\,dx=\sin x+C$, jer je $d(\sin x+C)=\cos x\,dx$ ili jer je $D_x(\sin x+C)=\cos x$.

Iz navedenog slijedi:

1) Rezultat integriranja možemo kontrolirati tako da ga diferenciramo ili deriviramo, jer je integriranje inverzna operacija od diferenciranja, odnosno deriviranja.

2) S istog je razloga

$$\int F'(x)\,dx=F(x)+C \qquad \text{ili} \qquad \int dF(x)=F(x)+C$$

$$d\int F(x)\,dx=F(x)\,dx$$

$$D_x\int F(x)\,dx=F(x)$$

$$\int dx=x. \tag{38}$$

Brojevi formula uzeti su iz II dijela Repetitorija više matematike.

3) Svakoj formuli diferenciranja, odnosno deriviranja odgovara formula integriranja, pa možemo uz svaki diferencijal funkcije napisati pripadni integral. Tako se dobije tablica **osnovnih integrala**, koje treba znati napamet, jer se integral bilo koje funkcije rješava na taj način da se **podintegralna funkcija** ili **integrand** transformira tako dugo dok se ne raspadne u niz osnovnih integrala, što dakako ne mora uvijek biti moguće.

U tablici koja slijedi svaki integral naveden u desnom stupcu dokazan je diferencijalom navedenim u istom retku lijevog stupca.

Osnovni integral

Diferencijali	Integrali	
$dx = 1 \cdot dx$	$\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$	(38)
$dx^n = n x^{n-1} dx$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	(47)
	Ta formula vrijedi za sve realne n, ali ne vrijedi za $n = -1$.	
$d \ln x = \frac{dx}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	(48)
	Uzima se $\ln\lvert x\rvert$, jer je funkcija $\ln x$ definirana samo za $x > 0$.	
$d \sin x = \cos x \, dx$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$	(39)
	$\int \cos(nx) \, dx = \frac{\sin(nx)}{n} + C$	(60)
$d \cos x = -\sin x \, dx$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	(40)
	$\int \sin(nx) \, dx = -\frac{\cos(nx)}{n} + C$	(59)
$d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	(41)
$d \operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	(42)
$d \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x \, dx$	$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$	(43)
$d \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x \, dx$	$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$	(44)
$d \operatorname{th} x = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$	(45)
$d \operatorname{cth} x = -\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$	(46)
$d e^x = e^x dx$	$\int e^x dx = e^x + C$	(49)
$d a^x = a^x \cdot \ln a \, dx$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	(50)
$d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	(51)
$d \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$= -\arccos x + C$	

	$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{k} + C$	(51a)
$d \operatorname{arctg} x = \frac{dx}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$	(52)
$d \operatorname{arcctg} x = -\frac{dx}{1+x^2}$	$= -\operatorname{arcctg} x + C$	
	$\int \frac{dx}{k^2+x^2} = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{x}{k} + C$	(52a)
$d \operatorname{Arsh} x = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Arsh} x + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$	(53)
	$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2+x^2}} = \ln(x + \sqrt{k^2+x^2}) + C$	(53a)
$d \operatorname{Arch} x = \frac{dx}{\pm\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{dx}{\pm\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Arch} x + C =$ $= \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) + C$	(54)
	$\int \frac{dx}{\pm\sqrt{x^2-k^2}} = \ln(x \pm \sqrt{x^2-k^2}) + C$	(54a)
$d \operatorname{Arth} x = \frac{dx}{1-x^2}$ za $\lvert x\rvert < 1$	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Arth} x + C =$ $= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ za $\lvert x\rvert < 1$	(55)
	$\int \frac{dx}{k^2-x^2} = \frac{1}{2k} \ln \left\lvert \frac{k+x}{k-x} \right\rvert + C$ za $\lvert x\rvert < \lvert k\rvert$ $= \frac{1}{2k} \ln \left\lvert \frac{x+k}{x-k} \right\rvert + C$ za $\lvert x\rvert > \lvert k\rvert$	(55a)
$d \operatorname{Arcth} x = \frac{dx}{1-x^2}$ za $\lvert x\rvert > 1$	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Arcth} x + C =$ $= \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} + C$ za $\lvert x\rvert > 1$	(56)
	$\int \frac{dx}{x^2-k^2} = \frac{1}{2k} \ln \left\lvert \frac{k-x}{k+x} \right\rvert + C$ za $\lvert x\rvert < \lvert k\rvert$ $= \frac{1}{2k} \ln \left\lvert \frac{x-k}{x+k} \right\rvert + C$ za $\lvert x\rvert > \lvert k\rvert$	(56a)
	$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$	(59a)
	$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$	(60)
	$\int e^{bx} dx = \frac{e^{bx}}{b} + C$	(61)

$$\int a^{bx}\,dx=\frac{a^{bx}}{b\ln a}+C \qquad (61)'$$

$$\int\frac{dx}{x\pm a}=\ln|x\pm a|+C \qquad (62)$$

$$\int\frac{dx}{bx\pm a}=\frac{1}{b}\ln|bx\pm a|+C \qquad (62)'$$

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C \qquad (67)$$

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C \qquad (68)$$

Tablica integrala popunjena je integralima koji nisu osnovni, jer su iz njih izvedeni, ali njihovo znanje znatno ubrzava računanje integrala. Preporuča se početniku da prepiše tu tablicu diferencijala i integrala, da se njome služi, dok ne nauči integrale napamet. Od velike je važnost znanje napamet i trigonometrijskih formula! Vidi npr. od istog autora Repetitorij elementarne matematike.

Zadaci

U zadacima **105** do **115** uklj. izračunaj zadane integrale.

105. $\int\frac{dx}{x^5}=\int x^{-5}\,dx=$ prema (47) $=\frac{x^{-4}}{-4}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^4}+C.$

Proba: $d\left(-\frac{1}{4x^4}\right)=+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{x^5}\,dx=\frac{dx}{x^5}.$

106. $\int\frac{dx}{x^3}.$ $\left[-\frac{1}{2x^2}+C\right].$

107. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^7}}=\int x^{-\frac{7}{3}}\,dx=$ prema (47) $=\frac{x^{-\frac{7}{3}+\frac{3}{3}}}{-\frac{4}{3}}=-\frac{3}{4}x^{-\frac{4}{3}}=-\frac{3}{4\sqrt[3]{x^4}}=-\frac{3}{4x\sqrt[3]{x}}+C.$

Izvrši probu!

108. $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{7x^2}}=\frac{1}{\sqrt[5]{7}}\int x^{-\frac{2}{5}}\,dx=\frac{1}{\sqrt[5]{7}}\,\frac{x^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{3\sqrt[5]{7}}\sqrt[5]{x^3}+C.$ Proba!

109. $\int\frac{dx}{\sqrt{27x^5}}.$ $\left[-\frac{2}{9\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}+C\right].$

110. $\int\cos\frac{7}{5}x\,dx=$ prema (60) $=\frac{\sin\frac{7}{5}x}{\frac{7}{5}}=\frac{5}{7}\sin\frac{7}{5}x+C.$

111. $\int\cos(-5t)\,dt.$ $\left[\frac{\sin 5t}{5}+C\right].$

112. $\int\sin(-8\varphi)\,d\varphi=-\int\sin 8\varphi\,d\varphi=$ prema (59) $=+\frac{\cos 8\varphi}{8}+C.$

113. $\int\sin\frac{3}{4}\varphi\,d\varphi.$ $\left[-\frac{4}{3}\cos\frac{3}{4}\varphi+C\right].$

114. $\int(2^x\cdot 5^x)\,dx=\int(2\cdot 5)^x\,dx=\int 10^x\,dx=$ prema (50) $=\frac{10^x}{\ln 10}=\frac{10^x}{\frac{1}{M}}=M\cdot 10^x+C,$

gdje je modul $M=\log e=0{,}43429\ldots$

115. $\int(3^x\cdot 7^x)\,dx.$ $\left[\frac{21^x}{\ln 21}+C\right].$

B. PRAVILA ZA RAČUNANJE NEODREĐENIH INTEGRALA

a. Konstanta koja množi podintegralnu funkciju stavi se uvijek ispred znaka integrala:

$$\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx. \qquad (57)$$

Zadaci

U zadacima **116** do **124** uklj. izračunaj zadane integrale i kontroliraj rezultat diferenciranjem.

116. $\int\frac{dx}{5\sqrt{7-x^2}}=$ (stavimo $7=k^2$) $=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}}=$ prema (51a) $=\frac{1}{5}\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}+C,$

jer iz $k^2=7$ slijedi da je $k=\sqrt{7}$.

117. $\int\frac{2\,dx}{\sqrt{11+x^2}}=$ (uz $11=k^2$) $=2\int\frac{dx}{\sqrt{k^2+x^2}}=$ prema (53a) $=2\ln(x+\sqrt{11+x^2})+C=$

$=\ln(x+\sqrt{11+x^2})^2+C.$

118. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-15}}=$ [prema (54a) uz $k^2=15$] $=\ln(x+\sqrt{x^2-15})+C.$

119. $\int\frac{dx}{4(5-x^2)}=$ [prema (55a) uz $k^2=5$] $=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{k+x}{k-x}\right|=\frac{1}{8\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+x}{\sqrt{5}-x}\right|+C.$

120. $\int\frac{7\,dx}{2\sqrt{16-x^2}}.$ $\left[\frac{7}{2}\arcsin\frac{x}{4}+C\right].$

121. $\int \frac{dx}{3(x^2-9)}$. $\left[\frac{1}{18}\ln\left|\frac{3-x}{3+x}\right|+C\right]$.

122. $\int 2e^{7x}\,dx = \text{prema (61)} = 2\frac{e^{7x}}{7} = \underline{\frac{2}{7}e^{7x}+C}$.

123. $\int \frac{dx}{5e^{\frac{3}{4}x}} = \frac{1}{5}\int e^{-\frac{3}{4}x}\,dx = \text{prema (61)} = \frac{1}{5}\frac{e^{-\frac{3}{4}x}}{-\frac{3}{4}} = \underline{-\frac{4}{15}\cdot\frac{1}{e^{\frac{3}{4}x}}+C}$.

124. $\int \frac{3}{4}e^{-\frac{x}{2}}\,dx$. $\left[-\frac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}}+C\right]$.

b. Integral algebarskog zbroja funkcija jednak je algebarskom zbroju integrala tih funkcija:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx. \tag{58}$$

Uputa

Kako nema formula za integriranje produkta, kvocijenta i potencije funkcija, treba sve te operacije, ukoliko je to moguće, svesti na algebarski zbroj funkcija pa integrirati član po član.

Zadaci

U zadacima **125** do **142** uklj. izračunaj zadane integrale pomoću gore navedenog prvog i drugog pravila integriranja.

125. $\int (7x^5+8x^3-5x^2+x-12)\,dx = 7\int x^5\,dx + 8\int x^3\,dx - 5\int x^2\,dx + \int x\,dx - 12\int dx =$

$= \text{prema (47)} = 7\frac{x^6}{6}+8\frac{x^4}{4}-5\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-12x = \underline{\frac{7}{6}x^6+2x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-12x+C}$.

126. $\int (13x^8-x^7+3x^5-7x^4+8x^3-x^2+3x-10)\,dx$.

[Rezultat kontroliraj deriviranjem].

127. $\int \left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x}+\frac{4}{\sqrt[4]{x^9}}\right)dx =$

$= \int x^{\frac{2}{3}}\,dx - 5\int x^{-\frac{2}{3}}\,dx + \int x^{-\frac{1}{6}}\,dx + 2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx - \int x^{-2}\,dx - 5\int \frac{dx}{x} + 4\int x^{-\frac{9}{4}}\,dx =$

$= \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - 5\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + \frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}} + 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{x^{-1}}{-1} - 5\ln|x| + 4\frac{x^{-\frac{5}{4}}}{-\frac{5}{4}} =$

$= \underline{\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - 15\sqrt[3]{x} + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 4\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 5\ln|x| - \frac{16}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}} + C}$.

128. $\int \left(5x^4-3x+\frac{\sqrt[3]{x}}{5}-\frac{8}{\sqrt{x^7}}-\frac{1}{x^3}+\frac{7}{x}-\sqrt{3}\right)dx$.

$\left[x^5-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{20}\sqrt[3]{x^4}+\frac{16}{5}\frac{1}{\sqrt{x^5}}+\frac{1}{2x^2}+7\ln|x|-x\sqrt{3}+C\right]$.

129. $\int (2x^2-3)x^3\,dx = \int (2x^5-3x^3)\,dx = 2\frac{x^6}{6}-3\frac{x^4}{4} = \underline{\frac{1}{3}x^6-\frac{3}{4}x^4+C}$.

130. $\int (x^2-3x+5)x^5\,dx$. $\left[\frac{1}{8}x^8-\frac{3}{7}x^7+\frac{5}{6}x^6+C\right]$.

131. $\int (x-1)^2 x\sqrt[4]{x}\,dx = \int (x^2-2x+1)x^{\frac{5}{4}}\,dx = \int x^{\frac{13}{4}}\,dx - 2\int x^{\frac{9}{4}}\,dx + \int x^{\frac{5}{4}}\,dx =$

$= \frac{x^{\frac{17}{4}}}{\frac{17}{4}} - 2\frac{x^{\frac{13}{4}}}{\frac{13}{4}} + \frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{17}\sqrt[4]{x^{17}} - \frac{8}{13}\sqrt[4]{x^{13}} + \frac{4}{9}\sqrt[4]{x^9} =$

$= \frac{4}{17}x^4\sqrt[4]{x} - \frac{8}{13}x^3\sqrt[4]{x} + \frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x} + C$.

132. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx$. $\left[\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x+C\right]$.

133. $\int x(x+a)(x+b)\,dx$. $\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{a+b}{3}x^3+\frac{ab}{2}x^2+C\right]$.

134. $\int (\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})^3\,dx$. $\left[\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{9}{7}x^2\sqrt[3]{x}+\frac{18}{13}x^2\sqrt[6]{x}-\frac{x^2}{2}+C\right]$.

135. $\displaystyle\int\frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\int\frac{1+3\sqrt{x}+3x+\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\int\frac{1+3x^{\frac{1}{2}}+3x+x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx=$

$\displaystyle=\int x^{-\frac{1}{3}}dx+3\int x^{\frac{1}{6}}dx+3\int x^{\frac{2}{3}}dx+\int x^{\frac{7}{6}}dx=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+3\cdot\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+$

$\displaystyle+\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}=\underline{\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{18}{7}x\sqrt[6]{x}+\frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}+C.}$

136. $\displaystyle\int\frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\,dx.$ $\left[\dfrac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}}+C\right].$

137. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$ $\left[\dfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C\right].$

138. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\,dx.$ $\left[C-\dfrac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|\right].$

139. $\displaystyle\int\frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$ $\left[\dfrac{3}{13}x^4\sqrt[3]{x}-\dfrac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x}-6\sqrt[3]{x}+C\right].$

140. $\displaystyle\int(\arcsin x+\arccos x)\,dx=$ prema formuli (70) iz I dijela Repetitorija $=$

$\displaystyle=\int\frac{\pi}{2}dx=\underline{\frac{\pi}{2}x+C.}$

141. $\displaystyle\int\frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}\,dx=\int\left[3-2\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]dx=3\int dx-2\int\left(\frac{3}{2}\right)^x dx=$ prema (38) i (50) $=$

$\displaystyle=3x-2\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\frac{3}{2}}=\underline{3x-\frac{2\cdot(1{,}5)^x}{\ln 1{,}5}+C.}$

142. $\displaystyle\int\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\,dx=$ racionaliziramo nazivnik $=\int\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}\,dx=$

$\displaystyle=\int\sqrt{x}\,dx+\int dx=\underline{\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C.}$

U zadacima 143 do 151 uklj. svedi podintegralnu funkciju na algebarski zbroj dviju ili više funkcija pomoću poznatih trigonometrijskih formula (vidi Repetitorij element. matematike. Poglavlje III (1) do (38) uklj.)

143. $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\cos^2x\cdot\sin^2x}\,dx=\int\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x\cdot\sin^2x}\,dx=\int\frac{dx}{\sin^2x}-\int\frac{dx}{\cos^2x}=\underline{C-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x.}$

144. $\displaystyle\int\operatorname{tg}^2x\,dx=\left(\text{prema }\frac{1}{\cos^2x}=1+\operatorname{tg}^2x\right)=\int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}\,dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}-\int dx=$

$\displaystyle=\underline{\operatorname{tg}x-x+C.}$

145. $\displaystyle\int\operatorname{ctg}^2x\,dx.$ $[C-\operatorname{ctg}x-x].$

146. $\displaystyle\int\frac{1+\cos^2x}{1+\cos 2x}\,dx=\int\frac{1+\cos^2x}{1+\cos^2x-\sin^2x}\,dx=\int\frac{1+\cos^2x}{1+\cos^2x-(1-\cos^2x)}\,dx=$

$\displaystyle=\int\frac{1+\cos^2x}{2\cos^2x}\,dx=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int dx\right)=\underline{\frac{1}{2}(\operatorname{tg}x+x)+C.}$

147. $\displaystyle\int 2\sin^2\frac{x}{2}\,dx.$

[Uputa: primijeni formulu za $\sin\frac{x}{2}$. Rezultat: $x-\sin x+C$].

148. $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos 2x+\sin^2x}.$ $[\operatorname{tg}x+C].$

149. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2x\cdot\cos^2x}.$

[Uputa: 1 u brojniku izrazi sa $\sin^2x+\cos^2x$. Rezultat: $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$]

150. $\displaystyle\int\operatorname{cth}^2x\,dx=\left(\text{prema }\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}=\operatorname{cth}^2x-1\right)=\int\left(1+\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}\right)dx=x+\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2x}=$

$=$ [prema (46)] $=\underline{x-\operatorname{cth}x+C.}$

151. $\displaystyle\int\operatorname{th}^2x\,dx.$ $[x-\operatorname{th}x+C].$

C. PRAVILO SUPSTITUCIJE

Uputa

To je praktički najvažnije pravilo, jer pomoću te metode računamo, tj. svodimo na osnovne, većinu integrala. Preporuča se početniku da pomno proradi sve zadatke koji slijede!

Da zadani integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{a}$$

za koji pretpostavljamo da nije osnovni, svedemo na jedan ili više osnovnih integrala, uvedimo zgodnu supstituciju

$$x=\varphi(t). \tag{b}$$

Čim smo uveli supstituciju $\varphi(t)$ nove promjenljive t moramo sa t izraziti s v e x koji ulaze u integral, a također i $\mathrm{d}x$. Ako nam to ne uspije, supstitucija ne vrijedi.

Računamo prema (b):

$$\mathrm{d}x=\varphi'(t)\cdot\mathrm{d}t \tag{c}$$

pa (b) i (c) uvrštavamo u (a):

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{58a}$$

pa dobivamo osnovni integral ili integral koji možemo rastaviti u više osnovnih integrala.

Zadaci

U zadacima **152** do **172** uklj. izračunaj zadane integrale metodom supstitucije

152. $\int \sin(nx)\,\mathrm{d}x.$

$$\text{Stavimo } nx=t. \tag{a}$$

Diferencirajući lijevu i desnu stranu te jednakosti dobivamo

$$n\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$$

pa je

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\mathrm{d}t$$

a uvrštenje u zadani integral daje osnovni integral i traženi rezultat:

$$\int \sin(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int \sin t\,\mathrm{d}t=\text{ prema (40) }=-\frac{1}{n}\cos t=$$

$$=\text{ prema (a) }=-\frac{1}{n}\cos(nx)=\underline{-\frac{\cos(nx)}{n}+C.} \tag{59}$$

153. Pokaži da je

$$\int \cos(nx)\,\mathrm{d}x=\underline{\frac{\sin(nx)}{n}+C.} \tag{60}$$

Sad možemo prema (59) i (60) neposredno pisati:

$$\int \sin 7x\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos 7x}{7}+C.$$

$$\int \sin\frac{3}{2}x\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3}\cos\frac{3}{2}x+C.$$

$$\int \cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=2\sin\frac{x}{2}+C.$$

154. $\int e^{bx}\,\mathrm{d}x.$

Stavimo: $bx=t$, a diferenciranje daje:

$$b\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t,\quad \text{pa je}\quad \mathrm{d}x=\frac{1}{b}\mathrm{d}t.$$

$$\int e^{bx}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b}\int e^{t}\,\mathrm{d}t=\text{ prema (49) }=\frac{1}{b}e^{t}=\underline{\frac{e^{bx}}{b}+C.} \tag{61}$$

Npr. prema (61) dobivamo neposredno:

$$\int e^{-\frac{3}{4}x}\,\mathrm{d}x=\frac{e^{-\frac{3}{4}x}}{-\frac{3}{4}}=-\frac{4}{3}e^{-\frac{3}{4}x}+C.$$

155. $$\int a^{bx}\,\mathrm{d}x=\left(bx=t;\ b\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t;\ \mathrm{d}x=\frac{1}{b}\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{b}\int a^{t}\,\mathrm{d}t=\text{ prema (50) }=$$

$$=\frac{1}{b}\,\frac{a^{t}}{\ln a}=\underline{\frac{1}{b\ln a}a^{bx}+C.} \tag{61}$$

Npr. prema (61):

$$\int 2^{3x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3\ln 2}2^{3x}+C.$$

$$\int 5^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\ln 5}5^{\frac{x}{2}}+C.$$

156. $$\int 10^{\sqrt{2}x}\,\mathrm{d}x=\text{ prema (61)}'=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\ln 10}10^{\sqrt{2}x}=\frac{\log e}{\sqrt{2}}10^{\sqrt{2}x}=\underline{\frac{M}{\sqrt{2}}10^{\sqrt{2}x}+C,}$$ jer je

$$\frac{1}{\ln 10}=\log e=M=0{,}43429\ldots.$$

(Vidi formulu (74) u I dijelu Repetitorija.)

157. $$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x=(\text{prema trigonom. formuli } 2\sin^2 x=1-\cos 2x)=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\text{ prema (60) }=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)=\underline{\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C.} \tag{59a}$$

158. Na isti način izvedi

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C. \qquad (60a)$$

159. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x}{2} = t;\quad \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t\right) = 2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t =$ prema (60a) $= 2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) =$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + C.$$

160. $\int \sin^2 \frac{2}{3}x\,\mathrm{d}x. = \left(\frac{2}{3}x = t;\ \mathrm{d}x = \frac{3}{2}\mathrm{d}t\right) = \frac{3}{2}\int \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right) =$ $\left[\frac{x}{2} - \frac{3}{8}\sin\frac{4}{3}x + C\right].$

$\frac{3}{4}t - \frac{3}{8}\sin 2t = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}x - \frac{3}{8}\sin\frac{4}{3}x + C$

161. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x \pm a} = (x \pm a = t;\quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}t) = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} =$ prema (48) $= \ln|t| = \ln|x \pm a| + C.$ (62)

Prema tome je npr.:

$\int \frac{\mathrm{d}x}{3-7x} = -\frac{1}{7}\int \frac{\mathrm{d}x}{x - \frac{3}{7}} = -\frac{1}{7}\ln\left|x - \frac{3}{7}\right| + C =$ ako tražimo rezultat u drugom obliku $=$

$= -\frac{1}{7}\ln\left|\frac{7x-3}{7}\right| + C = -\frac{1}{7}[\ln|7x-3| - \ln 7] + C = -\frac{1}{7}\ln|7x-3| + \frac{1}{7}\ln 7 + C =$

$= -\frac{1}{7}\ln|7x-3| + C_1$, gdje je $C_1 = \frac{1}{7}\ln 7 + C$ (konstanta po volji, jer konstanta ostaje po volji, ako joj pribrojimo neku konstantnu veličinu).

Općenito

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{bx \pm a} = \frac{1}{b}\ln|bx \pm a| + C. \qquad (62)'$$

162. $\int \frac{\mathrm{d}x}{5x-3}.$ $\left[\frac{1}{5}\ln\left|x - \frac{3}{5}\right| + C \text{ ili } \frac{1}{5}\ln|5x-3| + C\right].$

163. $\int \frac{\mathrm{d}x}{9-13x}.$ $\left[-\frac{1}{13}\ln|13x-9| + C\right].$

164. $\int \sqrt[9]{(3x-5)^5}\,\mathrm{d}x = \int (3x-5)^{\frac{5}{9}}\,\mathrm{d}x = \left(3x-5=t;\quad 3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t;\quad \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{3}\int t^{\frac{5}{9}}\,\mathrm{d}t =$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{t^{\frac{14}{9}}}{\frac{14}{9}} = \frac{3}{14}\sqrt[9]{t^{14}} = \frac{3}{14}\sqrt[9]{(3x-5)^{14}} + C.$$

165. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(5-3x)^7}} = \int (5-3x)^{-\frac{7}{2}}\,\mathrm{d}x = \left(5-3x=t;\ -3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t;\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\mathrm{d}t\right) = -\frac{1}{3}\int t^{-\frac{7}{2}}\,\mathrm{d}t =$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{t^{-\frac{5}{2}}}{-\frac{5}{2}} = \frac{2}{15}\,\frac{1}{\sqrt{t^5}} = \frac{2}{15}\,\frac{1}{\sqrt{(5-3x)^5}} + C.$$

166. $\int \sqrt[5]{(3-2x)^3}\,\mathrm{d}x.$ $\left[-\frac{5}{16}\sqrt[5]{(3-2x)^8} + C\right].$

167. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5x-2}}.$ $\left[\frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C\right].$

168. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{7+3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{7}{3}+x^2}} = \left(\text{prema (53a) uz } \frac{7}{3} = k^2\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(x + \sqrt{\frac{7}{3}+x^2}\right) + C.$

169. $\int \frac{\mathrm{d}x}{2-3x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{2}{3}-x^2} = \left(\text{prema (55a) uz } \frac{2}{3} = k^2 \text{ i } \frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\right) =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{3}}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}+x}{\sqrt{\frac{2}{3}}-x}\right| = \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right| + C = \frac{\sqrt{6}}{12}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right| + C.$$

170. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{7-9x^2}}.$ $\left[\text{prema (51a): } \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x}{\sqrt{7}}\right) + C\right].$

171. $\int \frac{\mathrm{d}x}{5+7x^2}.$ $\left[\text{prema (52a): } \frac{1}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{7}{5}}\right) + C\right].$

172. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9x^2-7}}.$ $\left[\text{prema (54a): } \frac{1}{3}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - \frac{7}{9}}\right) + C\right].$

U zadacima **173** do **196** uklj. izračunaj zadane integrale metodom supstitucije. Potrebnu supstituciju lako češ pogoditi, ako znaš napamet formule deriviranja.

173. $I=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2-1}}$.

U nazivnik ulazi član s x^2, dok člana s x nema, a u brojniku je x, pa kako je $2x$ derivacija od x^2, stavimo

$$3x^2-1=t$$

i dobivamo

$$6x\,dx=dt \quad \text{i} \quad x\,dx=\frac{1}{6}\,dt.$$

Uvrštenje u I daje:

$$I=\frac{1}{6}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{6}\,\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\sqrt{t}=\underline{\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-1}+C.}$$

174. $I=\int\frac{3^x\,dx}{1+3^{2x}}$.

Stavimo $3^x=t$, tada je $3^x\ln 3\,dx=dt$, a odatle je $3^x\,dx=\frac{dt}{\ln 3}$, dok je $3^{2x}=t^2$. Uvrštenje u I daje:

$$I=\frac{1}{\ln 3}\int\frac{dt}{1+t^2}=\text{ prema (52) }=\frac{1}{\ln 3}\operatorname{arc\,tg} t=\underline{\frac{1}{\ln 3}\operatorname{arc\,tg} 3^x+C.}$$

175. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2+a}}$. $\left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+a)^2}+C\right]$.

176. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6-2}}$. $\left[\text{Uputa: } x^3=t;\ \frac{1}{3}\ln\left(x^3+\sqrt{x^6-2}\right)+C\right]$.

177. $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln^2 x}\,dx=\Big($kako je $\frac{1}{x}$ derivacija od $\ln x$ stavimo $\ln x=t$, pa je $\frac{1}{x}\,dx=dt\Big)=\int\frac{1}{t^2}\,dt=-\frac{1}{t}=\underline{-\frac{1}{\ln|x|}+C.}$

178. $\int\frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$. $\left[\frac{2}{3}\sqrt{(\ln|x|)^3}-6\sqrt{\ln|x|}+C\right]$.

179. $\int\frac{\cos\ln x}{x}\,dx$. $[\sin\ln x+C]$.

180. $I=\int\frac{\cos^7 x}{\sqrt[5]{\sin^{11}x}}\,dx$.

Budući da je $\cos x$ derivacija od $\sin x$, stavimo $\sin x=t$ pa je $\cos x\,dx=dt$, a preostali $\cos^6 x$ u brojniku izrazimo sa sinusom.

$$I=\int\frac{\cos^6 x\cdot\cos x\,dx}{\sqrt[5]{\sin^{11}x}}=\int\frac{(1-\sin^2 x)^3\cos x\,dx}{\sqrt[5]{\sin^{11}x}}=\int\frac{(1-t^2)^3\,dt}{\sqrt[5]{t^{11}}}=\int\frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^{11/5}}\,dt=$$

$$=\int t^{-\frac{11}{5}}dt-3\int t^{-\frac{1}{5}}dt+3\int t^{\frac{9}{5}}dt-\int t^{\frac{19}{5}}dt=-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{t^6}}-\frac{15}{4}\sqrt[5]{t^4}+\frac{15}{14}\sqrt[5]{t^{14}}-\frac{5}{24}\sqrt[5]{t^{24}}=$$

$$=\underline{-\frac{5}{6}\,\frac{1}{\sqrt[5]{\sin^6 x}}-\frac{15}{4}\sqrt[5]{\sin^4 x}+\frac{15}{14}\sqrt[5]{\sin^{14}x}-\frac{5}{24}\sqrt[5]{\sin^{24}x}+C.}$$

181. $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$. $\left[\frac{1}{\cos x}+C\right]$.

182. $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{3+\sin x}}$. $[2\sqrt{3+\sin x}+C]$.

183. $\int\frac{\sin^5 x}{\cos^2 x\cdot\sqrt[4]{\cos^3 x}}\,dx$ [Rezultat kontroliraj deriviranjem].

184. $I=\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$.

U ovom je slučaju mnogo bolja supstitucija $1+2\cos x=t$, odatle je $-2\sin x\,dx=dt$ i $\sin x\,dx=-\frac{1}{2}\,dt$, pa je

$$I=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t}=\underline{C-\sqrt{1+2\cos x}}.$$

185. $\int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)^3}}=(t=\sin\varphi$, pa je $1-t^2=1-\sin^2\varphi=\cos^2\varphi$, dok je $dt=\cos\varphi\,d\varphi$, a $\varphi=$

$$=\arcsin t)=\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\cos^6\varphi}}=\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\operatorname{tg}\varphi+C=\underline{\operatorname{tg}(\arcsin t)+C}.$$

186. $\int \frac{\sqrt{(\operatorname{arc\,tg} x)^3}}{1+x^2}\,dx = \Big($kako je $d\operatorname{arc\,tg} x = \frac{dx}{1+x^2}$, supstitucija $\operatorname{arc\,tg} x = t$ pada u oči, a odatle je $\frac{dx}{1+x^2} = dt\Big) = \int t^{\frac{3}{2}}\,dt = \frac{2}{5}\sqrt{t^5} = \underline{\frac{2}{5}\sqrt{(\operatorname{arc\,tg} x)^5} + C}.$

187. $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left(\arcsin x = t,\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt,\ x = \sin t\right) = \int (t + \sin t)\,dt = \frac{t^2}{2} - \cos t =$

$= \frac{(\arcsin x)^2}{2} - \cos(\arcsin x) = \underline{\frac{(\arcsin x)^2}{2} - \sqrt{1-x^2} + C}.$

(Vidi sl. 70 u I dijelu Repetitorija!)

188. $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ $\left[\frac{(\arcsin x)^3}{3} + C\right].$

189. $\int \frac{\sqrt[5]{(\operatorname{Ar\,ch} x)^4}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx.$ $\left[\frac{5}{9}\sqrt[5]{(\operatorname{Ar\,ch} x)^9} + C\right].$

190. $\int \frac{2x+3}{x^2-5}\,dx = \int \frac{2x\,dx}{x^2-5} + 3\int \frac{dx}{x^2-5} =$ (za prvi integral stavimo $x^2-5=t$, a drugi je (56a) uz $k=\sqrt{5}$) $= \int \frac{dt}{t} + 3\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| = \ln|x^2-5| + \frac{3}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C.$

191. $\int \frac{6x^5-12x^3+24x^2-14x+1}{x^6-3x^4+8x^3-7x^2+x-5}\,dx =$ (opažamo da je u brojniku derivacija nazivnika, pa stavimo nazivnik $=t$) $= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \underline{\ln|x^6-3x^4+8x^3-7x^2+x-5| + C}.$

192. $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx =$ ($\cos x = t$; $-\sin x\,dx = dt$) $= -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x| =$

$= \underline{\ln\frac{1}{|\cos x|} + C}.$

193. $\int \operatorname{ctg} x\,dx.$ $[\ln|\sin x| + C].$

194. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left(1+x^2 = t;\ 2x\,dx = dt;\ x\,dx = \frac{1}{2}\,dt\right) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t} = \underline{\sqrt{1+x^2} + C}.$

195. $\int \frac{3x\,dx}{\sqrt[5]{(3-x^2)^{13}}}.$ $\left[\frac{2{,}4}{\sqrt[5]{(3-x^2)^5}} + C\right].$

196. $\int x^3\sqrt{a-x^2}\,dx = \Big($$\sqrt{a-x^2} = t$, tada je $x^2 = a - t^2$, a $\frac{-x\,dx}{\sqrt{a-x^2}} = dt$, dok je $x\,dx = -t\,dt\Big) =$

$= \int x^2\cdot x\cdot\sqrt{a-x^2}\,dx = -\int (a-t^2)\,t^2\,dt = -a\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} = \frac{t^3(3t^2-5a)}{15} =$

$= \frac{\sqrt{(a-x^2)^3}\,(3a-3x^2-5a)}{15} = \underline{-\frac{3x^2+2a}{15}\sqrt{(a-x^2)^3} + C}.$

U zadacima 197 do 202 uklj. izračunaj zadane integrale metodom supstitucije, a rezultate kontroliraj diferenciranjem.

197. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{3+4e^{2x}}.$ **(Supstitucija $3+4e^{2x}=t$).**

198. $\int \frac{x^4\,dx}{7-x^5}.$ **(Supstitucija $7-x^5=t$).**

199. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx.$ **(Supstitucija $\cos x = t$).**

200. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}\,dx}{\cos^2 x}.$ **(Supstitucija $e^{\operatorname{tg} x} = t$).**

201. $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ **(Supstitucija $e^{\arcsin x} = t$).**

202. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx.$ **(Supstitucija $1+\ln x = t$).**

u = ta lakši izraz v = ta lakši izraz

D. PRAVILO PARCIJALNE (DJELIMIČNE) INTEGRACIJE

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u \qquad (63)$$

Upute

Pomoću formule (63) svodimo $\int u\,\mathrm{d}v$, koji ne znamo izračunati, na $\int v\,\mathrm{d}u$, koji izračunati znamo, tj. svodimo teži $\int u\,\mathrm{d}v$ na lakši $\int v\,\mathrm{d}u$.

Metoda parcijalne integracije osobito je pogodna za računaje integrala oblika

$$\int P_n(x)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x,$$

gde je $P_n(x)$ polinom, a $f(x)$ neka transcendentna funkcija npr. e^{ax}, $\sin nx$, $\ln x$, $\arcsin x$ itd.

Zadaci

U zadacima **203** do **229** izračunaj zadane integrale načinom parcijalne integracije.

203. $I=\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

Prema (63) stavimo: $u=x$, $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$

$$\cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}v,\quad v=\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x.$$

Pri računanju v izostavljamo $+C$, jer se zadovoljavamo jednom primitivnom funkcijom, a ne tražimo njihovu cijelokupnost.

Uvrštenje u (63) daje

$$I=x\sin x-\int\sin x\,\mathrm{d}x=\underline{x\sin x+\cos x+C}.$$

204. $I=\int x\cdot 2^{-x}\,\mathrm{d}x=\left(u=x,\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x;\ 2^{-x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}v,\ v=\int 2^{-x}\,\mathrm{d}x=-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right)=$

$$=-x\cdot\frac{2^{-x}}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 2}\int 2^{-x}\,\mathrm{d}x=-\frac{x2^{-x}}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2^{-x}}{\ln 2}=\underline{-\frac{x\ln 2+1}{2^x\ln^2 2}+C}.$$

205. $\int x\sin 2x\,\mathrm{d}x$. $\qquad\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C\right]$.

206. $\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$. $\qquad[C-e^{-x}(x+1)]$.

207. $\int x\cdot 3^x\,\mathrm{d}x$. $\qquad\left[\frac{3x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C\right]$.

Pri primjeni metode parcijalne integracije treba paziti da se sa $\mathrm{d}v$ označuje ono što se da lako integrirati.

Pokažimo to u zadacima koji slijede.

208. $I=\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$.

Prema formuli (63) stavimo:

$$x=u \quad\text{i}\quad \mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}v$$

pa računamo $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$ i $v=\int\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$.

Došli smo do težeg integrala, jer smo formalno uzeli da je $x=u$ i $\mathrm{d}v=\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$, iako postoji druga bolja mogućnost:

$$u=\mathrm{arctg}\,x,\quad \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x.$$

Sad je

$$\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},$$

dok v dobivamo bez ikakvih teškoća:

$$v=\int x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}.$$

Uvrštenje u (63) daje:

$$I=\mathrm{arctg}\,x\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}_{I_1}. \qquad (a)$$

Posebno riješimo integral, koji smo bez konstante označili s I_1 i to tako da prethodno podijelimo brojnik s nazivnikom:

$$x^2:(x^2+1)=1-\frac{1}{x^2+1}.$$

$$\frac{\pm x^2\pm 1}{-1}$$

$$I_1=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=x-\mathrm{arctg}\,x.$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$I=\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x=\underline{-\frac{x}{2}+\frac{x^2+1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x+C}.$$

Kadšto treba dva i više puta redom parcijalno integrirati.

209. $I=\int\frac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^3}\ln x\,\mathrm{d}x$.

$$u=\ln x,\ \mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x};\ \mathrm{d}v=\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x,\ v=\int x^{-3}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2x^2}.$$

Prema (63): $I=-\ln x\cdot\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3}=$

$$=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^2}=C-\frac{2\ln x+1}{4x^2}.$$

210. $I=\int e^x\cos nx\,dx=\left(u=e^x,\ du=e^x dx;\ dv=\cos nx\,dx,\right.$

$$\left.v=\frac{\sin nx}{n}\right)=e^x\cdot\frac{\sin nx}{n}-\frac{1}{n}\int\sin nx\cdot e^x dx=e^x\frac{\sin nx}{n}-\frac{1}{n}\left(-e^x\cdot\frac{\cos nx}{n}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}\underbrace{\int\cos nx\cdot e^x dx}_{I}\right)=e^x\frac{\sin nx}{n}+\frac{1}{n^2}e^x\cos nx-\frac{1}{n^2}I.$$

$$I+\frac{1}{n^2}I=e^x\frac{n\sin nx+\cos nx}{n^2},$$

a odatle je
$$I=\frac{e^x(n\sin nx+\cos nx)}{1+n^2}.$$

211. $\int x^2\sin nx\,dx=\left(u=x^2,\ du=2x\,dx;\ dv=\sin nx\,dx,\ v=-\frac{\cos nx}{n}\right)=$

$$=-x^2\cdot\frac{\cos nx}{n}+\frac{2}{n}\int x\cos nx\,dx=-\frac{x^2\cos nx}{n}+\frac{2}{n}\left[x\cdot\frac{\sin nx}{n}-\frac{1}{n}\int\sin nx\,dx\right]=$$

$$=-\frac{x^2\cos nx}{n}+\frac{2x\sin nx}{n^2}+\frac{2\cos nx}{n^3}+C.$$

(Pri računanju $\int x\cos nx\,dx$ bilo je uzeto $u=x$, $du=dx$; $dv=\cos nx\,dx$, $v=\frac{\sin nx}{n}$).

212. $\int e^x\sin nx\,dx.$ $\left[\frac{e^x(\sin nx-n\cos nx)}{1+n^2}\right].$

(vidi formule (64) i (65)).

213. $\int x\,\mathrm{Ar\,th}\,x\,dx.$ $\left[\frac{x}{2}+\frac{x^2-1}{2}\mathrm{Ar\,th}\,x+C\right].$

214. $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx.$ $\left[2\sqrt{x}\ln x-\frac{x^3}{9}+C\right].$

Često se načinom parcijalne integracije rješavaju i integrali oblika $\int f(x)\,dx$. U tom slučaju nema izlaza: uvijek je $u=f(x)$, a $dv=dx$, pa je $du=f'(x)\,dx$, dok je $v=x$. Vidi zadatke koji slijede.

215. $\int\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx=\left(u=\mathrm{arc\,tg}\,x,\ du=\frac{dx}{1+x^2};\ dv=dx,\ v=x\right)=$

$$=x\,\mathrm{arc\,tg}\,x-\int\frac{x\,dx}{1+x^2}=\left(1+x^2=t,\ 2x\,dx=dt,\ x\,dx=\frac{1}{2}dt\right)=$$

$$=x\,\mathrm{arc\,tg}\,x-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=x\,\mathrm{arc\,tg}\,x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=$$

$$=x\,\mathrm{arc\,tg}\,x-\ln\sqrt{1+x^2}+C.$$

216. $\int\ln x\,dx.$ $[x\ln x-x+C].$

217. $\int\arccos x\,dx.$ $[x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C].$

218. $\int\frac{x\,dx}{\sin^2 x}=\left(u=x,\ du=dx;\ dv=\frac{dx}{\sin^2 x},\ v=-\mathrm{ctg}\,x\right)=$

$$=-x\,\mathrm{ctg}\,x+\int\mathrm{ctg}\,x\,dx=-x\,\mathrm{ctg}\,x+\ln|\sin x|+C$$

(vidi zadatak 193).

219. $\int x\ln^2 x\,dx=\left(\ln^2 x=u,\ du=2\frac{\ln|x|}{x};\ dv=x\,dx,\ v=\frac{x^2}{2}\right)=$

$$=\ln^2|x|\cdot\frac{x^2}{2}-\int x^2\frac{\ln|x|}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln^2|x|-\int x\ln|x|\,dx=$$

$$=\left(u=\ln|x|,\ du=\frac{dx}{x};\ dv=x\,dx,\ v=\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\ln^2|x|-$$

$$-\left(\ln|x|\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}\right)=\frac{x^2}{2}\ln^2|x|-\frac{x^2}{2}\ln|x|+\frac{x^2}{4}+C.$$

220. $\int x\sin x\cos x\,dx=\int x\frac{2\sin x\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\int x\sin 2x\,dx=$

$$=\left(u=x,\ du=dx;\ dv=\sin 2x\,dx,\ v=-\frac{\cos 2x}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\cos 2x+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx\right)=-\frac{x}{4}\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C.$$

221. $\int x^2e^{3x}dx=\left(u=x^2,\ du=2x\,dx;\ dv=e^{3x}dx,\ v=\frac{e^{3x}}{3}\right)=$

$$=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{3}\int e^{3x}x\,dx=\left(x=u,\ dx=du;\ dv=e^{3x}dx,\right.$$

$$\left.v=\frac{e^{3x}}{3}\right)=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right)=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-$$

$$-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}=\frac{1}{3}e^{3x}\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right)+C.$$

Očito je da bismo morali n puta parcijalno integrirati, ako bi podintegralna funkcija glasila $x^n e^{3x}$. Isto vrijedi i za $\int x^n\sin x\,dx$ i sl. Izračunaj npr. $\int x^4\cos x\,dx$.

222. $\int x^2 a^x \, dx.$ $\left[a^x\left(\frac{x^2}{\ln a}-\frac{2x}{\ln^2 a}+\frac{2}{\ln^3 a}\right)\right].$

223. $\int (x^2-2x+5)e^{-x} \, dx.$ $[-e^{-x}(x^2+5)+C].$

224. $\int x \ln(x-1) \, dx.$ $\left[\frac{x^2-1}{2}\ln|x-1|-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+C\right].$

225. $$I=\int \cos(\ln x)\,dx=\Big(\cos(\ln x)=u,\quad du=\frac{-\sin(\ln x)}{x}\,dx;$$

$$dv=dx,\quad v=x\Big)=\cos(\ln x)\cdot x+\int x\cdot\frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx=$$

$$=\Big(\sin(\ln x)=u,\quad du=\frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx;\quad dv=dx,\ v=x\Big)=x\cos(\ln x)+$$

$$+\sin(\ln x)\cdot x-\int x\frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-I.$$

$$2I=x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]$$

$$\underline{I=\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C.}$$

226. $\int \sin(\ln x) \, dx.$ $\left[\frac{x}{2}(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))+C\right].$

227. $$I=\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}\,dx=\Big(u=e^{-x},\quad du=-e^{-x};\quad dv=\cos\frac{x}{2}\,dx,$$

$$v=2\sin\frac{x}{2}\Big)=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}+2\underbrace{\int \sin\frac{x}{2}\cdot e^{-x}\,dx}_{I_1}=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}+2I_1.$$

$I_1=\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}\,dx=$ nakon parcijalnog integriranja $=-2e^{-x}\cos\frac{x}{2}-2I$, pa je

$$I=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}-4e^{-x}\cos\frac{x}{2}-4I,$$

a odatle je

$$\underline{I=\frac{2}{5}e^{-x}\left(\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\right)+C.}$$

Da smo pri računanju I_1 stavili $u=\sin\frac{x}{2}$ i $dv=e^{-x}dx$, dobili bismo

$$I_1=-e^{-x}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}I$$

pa uvrštenje u I dalo bi beskorisni identitet $0=0$.

Kušaj izračunati načinom parcijalne integracije $\int\frac{\sin x}{x}\,dx$. Dobit ćeš identitet $0=0$. Taj se integral ne da izraziti konačnim brojem elementarnih funkcija.

228. $\int\frac{\arcsin x}{x^2}\,dx.$ $\left[\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{1}{x}\arcsin x\right].$

229. $\int\frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx.$ $\left[\frac{x\ln x}{x+1}-\ln|x+1|\right].$

E. TIPOVI NEODREĐENIH INTEGRALA

Znamo već da svaki integral računamo, tj. svodimo na jedan ili više osnovnih integrala pomoću gore navedena četiri pravila. Da se olakša i ubrza taj postupak dijelimo složene integrale u tipove, a za svaki pojedini tip pokazujemo kako se računa. Međutim, ima integrala od velike praktičke važnosti koji spadaju u te tipove, ali se mogu jednostavnije izračunati na drugi način. S toga razloga izdvojili smo te integrale i svrstali u posebna tri „predtipa".

a. Predtipovi neodređenih integrala

Predtip A

Ovamo spadaju integrali oblika

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{dx}{\text{kvadratna funkcija}}.$$

Upute

Svaki integral toga oblika svodimo na jedan od integrala navedenih u našoj tablici neodređenih integrala i to na

$$\int\frac{dx}{k^2+x^2}=\frac{1}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{k}+C, \tag{52a}$$

$$\int\frac{dx}{k^2-x^2}=\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{k+x}{k-x}\right|+C, \tag{55a}$$

$$\int\frac{dx}{x^2-k^2}=\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{k-x}{k+x}\right|+C. \tag{56a}$$

Zadaci

U zadacima **230** do **237** uklj. izračunaj integrale predtipa A.

230. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}=$

1. korak: Izlučimo koeficijent od x^2:

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+x+\frac{5}{4}}=$$

2. korak: Prva dva člana kvadratne funkcije nadopunimo na potpuni kvadrat prema poznatoj formuli

$$x^2\pm px+q=\left(x\pm\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q.$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}=$$

3. korak: Supstitucija $x+\frac{1}{2}=t$, $dx=dt$;

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

4. korak: Integriramo prema (52).

$$=\frac{1}{4}\cdot\operatorname{arctg} t=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(x+\frac{1}{2}\right)=\underline{\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}+C.}$$

231. $$\int\frac{dx}{x-x^2-2{,}5}=-\int\frac{dx}{x^2-x+\frac{5}{2}}=-\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{10}{4}}=-\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}=$$

$$=\left(x-\frac{1}{2}=t,\ dx=dt;\ \frac{9}{4}=k^2,\ k=\frac{3}{2}\right)=-\int\frac{dt}{t^2+k^2}=$$

$$=-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{3}=\underline{\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{1-2x}{3}+C.}$$

232. $$\int\frac{dx}{5x^2-7x-8}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2-\frac{7}{5}x-\frac{8}{5}}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{7}{10}\right)^2-\frac{49}{100}-\frac{8}{5}}=$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{7}{10}\right)^2-\frac{209}{100}}=\left(x-\frac{7}{10}=t,\ dx=dt;\ \frac{209}{100}=k^2,\right.$$

$k=\frac{\sqrt{209}}{10}$. Pazi! k^2 mora biti pozitivan, da ne dobijemo za k imaginarnu vrijednost, jer tražimo samo r e a l n e vrijednosti integrala$\Big)=$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2-k^2}=\text{prema (56a)}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{k-t}{k+t}\right|=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\frac{10}{\sqrt{209}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{209}}{10}-x+\frac{7}{10}}{\frac{\sqrt{209}}{10}+x-\frac{7}{10}}\right|=\underline{\frac{1}{\sqrt{209}}\ln\left|\frac{\sqrt{209}-10x+7}{\sqrt{209}+10x-7}\right|+C.}$$

233. $$\int\frac{dx}{2x^2-14x+20}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-7x+10}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+10}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}=\left(x-\frac{7}{2}=t,\ dx=dt;\ \frac{9}{4}=k^2,\ k=\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-k^2}=\text{prema (56a)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right|=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}}{x-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}}\right|=$$

$$=\underline{\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|+C.}$$

234. $$\int\frac{dx}{11x-5x^2}=-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2-\frac{11}{5}x}=-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{11}{10}\right)^2-\frac{121}{100}}=\left(x-\frac{11}{10}=t,\ dx=dt;\right.$$

$$\left.\frac{121}{100}=k^2,\ k=\frac{11}{10}\right)=-\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2-k^2}=-\frac{1}{10}\cdot\frac{10}{11}\ln\left|\frac{x-\frac{11}{10}-\frac{11}{10}}{x-\frac{11}{10}+\frac{11}{10}}\right|=$$

$$=-\frac{1}{11}\ln\left|\frac{10x-22}{10x}\right|=\underline{\ln\left|\sqrt[11]{\frac{5x}{5x-11}}\right|+C.}$$

235. $\int \frac{dx}{x^2-2x+3}$. $\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C\right]$.

236. $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$. $\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C\right]$.

237. $\int \frac{dx}{2x^2+6x-20}$. $\left[\frac{1}{14}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C\right]$.

Predtip B

Ovamo spadaju integrali oblika

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int \frac{dx}{\sqrt{\text{kvadratna funkcija}}}.$$

Uputa

Svodimo na

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{k}+C, \tag{51a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2+x^2}}=\ln(x+\sqrt{k^2+x^2})+C, \tag{53a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-k^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2-k^2})+C. \tag{54a}$$

Postupak je isti kao kod predtipa A.

Zadaci

U zadacima **238** do **244** uklj. izračunaj integrale predtipa B.

238. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+3x-7x^2}}=$

1. korak: $=\frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-\frac{3}{7}x-\frac{1}{7}\right)}}=$

Pazi! Ne smijemo izlučiti $\frac{1}{\sqrt{-7}}$, jer integral ne bi bio realan.

2. korak: $=\frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{-\left[\left(x-\frac{3}{14}\right)^2-\frac{9}{196}-\frac{1}{7}\right]}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{-\left[\left(x-\frac{3}{14}\right)^2-\frac{37}{196}\right]}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{37}{196}-\left(x-\frac{3}{14}\right)^2}}=$$

3. korak: Stavimo $\frac{37}{196}=k^2$, $k=\frac{\sqrt{37}}{14}$; $x-\frac{3}{14}=t$, $dx=dt$.

$$=\frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-t^2}}=$$

4. korak: prema (51a)

$$=\frac{1}{\sqrt{7}}\arcsin\frac{t}{k}=\frac{1}{\sqrt{7}}\arcsin\frac{x-\frac{3}{14}}{\frac{\sqrt{37}}{14}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{7}}\arcsin\frac{14x-3}{\sqrt{37}}+C.}$$

239. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-6x+5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+\frac{5}{2}}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{5}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}=\left(x-\frac{3}{2}=t,\ dx=dt;\right.$$

$$\left.\frac{1}{4}=k^2,\ k=\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+k^2}}=\text{prema (53a)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{k^2+t^2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+\frac{5}{2}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|2x-3+\sqrt{4x^2-12x+10}|-\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln 2+C}_{C'}=$$

$$=\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|2x-3+\sqrt{4x^2-12x+10}|+C'.}$$

240. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}} =$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-4}} = (x+2=t,\quad dx=dt;\quad 4=k^2,\quad k=2) =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-k^2}} = \text{prema (54a)} = \ln\left(t+\sqrt{t^2-k^2}\right) = \underline{\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x}\right)+C}.$$

241. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}.$ $\qquad [\arcsin(x-2)+C].$

242. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x}}.$ $\qquad \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x}\right)+C\right].$

243. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}.$ $\qquad \left[\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{3}}+C\right].$

244. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}.$ $\qquad \left[\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x-\frac{3}{4}}\right)+C\right].$

Predtip C

Ovamo spadaju integrali oblika

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \int \sqrt{\text{kvadratna funkcija}}\,dx.$$

Upute

Na način prikazan kod predtipova A i B najprije svodimo integrale predtipa C na jedan od oblika

$$\int \sqrt{t^2-k^2}\,dt;\quad \int \sqrt{k^2-t^2}\,dt \text{ ili } \int \sqrt{t^2+k^2}\,dt.$$

Daljnji postupak prikazan je u zadatku **245** i sl.

245. $\displaystyle I = \int \sqrt{3x^2+10x+9}\,dx =$

Zadaci

1. korak kao kod predtipova A i B:

$$= \sqrt{3}\int \sqrt{x^2+\frac{10}{3}x+3}\,dx = \sqrt{3}\int \sqrt{\left(x+\frac{5}{3}\right)^2-\frac{25}{9}+3}\,dx = \sqrt{3}\int \sqrt{\left(x+\frac{5}{3}\right)^2+\frac{2}{9}}\,dx.$$

Supstitucija:

$$\left.\begin{aligned} &x+\frac{5}{3}=t,\quad dx=dt \\ &\frac{2}{9}=k^2,\quad k=\frac{\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

$$I = \sqrt{3}\int \sqrt{t^2+k^2}\,dt.$$

Da ne vučemo kroz daljnje računanje množitelj $\sqrt{3}$, stavimo

$$\int \sqrt{t^2+k^2} = I_1,$$

pa je

$$I = \sqrt{3}\,I_1. \qquad \text{(b)}$$

2. korak: Kako osnovni integrali imaju korijen iz kvadratne funkcije uvijek u n a z i v n i k u, množimo i dijelimo podintegralnu funkciju s $\sqrt{t^2+k^2}$ pa dobivamo

$$I_1 = \int \frac{t^2+k^2}{\sqrt{t^2+k^2}}\,dt = \underbrace{\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{t^2+k^2}}}_{I_2} + k^2\underbrace{\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+k^2}}}_{I_3}.$$

$$I_1 = I_2 + k^2 I_3. \qquad \text{(c)}$$

3. korak: Integral I_2 nalazi se u našem popisu neodređenih integrala, pa računamo najprije teži integral I_2 i to načinom parcijalne integracije. U tu svrhu pišemo ga u obliku:

$$I_2 = \int t\,\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+k^2}} = \left[u=t,\quad du=dt;\quad dv=\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+k^2}},\right.$$

$$v = \int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+k^2}} = \left(t^2+k^2=z,\quad 2t\,dt=dz,\quad t\,dt=\frac{1}{2}dz\right) = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} =$$

$$= \sqrt{z} = \left.\sqrt{t^2+k^2}\right] = t\sqrt{t^2+k^2} - \underbrace{\int \sqrt{t^2+k^2}\,dt}_{I_1}.$$

Uvrštenje u (c) daje:

$$I_1 = t\sqrt{t^2+k^2} - I_1 + k^2 I_3,$$

pa je

$$I_1 = \frac{t}{2}\sqrt{t^2+k^2} + \frac{k^2}{2}I_3,$$

a prema (b)

$$I = \sqrt{3}\left(\frac{t}{2}\sqrt{t^2+k^2} + \frac{k^2}{2}I_3\right). \qquad \text{(d)}$$

4. korak: Prema (53a) imamo

$$I_3 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+k^2}} = \ln\left(t+\sqrt{t^2+k^2}\right)$$

a uvrštenje u (d) daje

$$I = \sqrt{3}\left[\frac{t}{2}\sqrt{t^2+k^2} + \frac{k^2}{2}\ln\left(t+\sqrt{t^2+k^2}\right)\right].$$

5. korak: Uvrštenje (a) u I daje

$$I=\sqrt{3}\left[\frac{3x+5}{6}\sqrt{x^2+\frac{10}{3}x+3}+\frac{1}{9}\ln\left(\frac{3x+5}{3}+\sqrt{x^2+\frac{10}{3}x+3}\right)\right]+C$$

ili:

$$I=\frac{3x+5}{6}\sqrt{3x^2+10x+9}+\frac{\sqrt{3}}{9}\ln\left(3x+5+\sqrt{3}\sqrt{3x^2+10x+9}\right)+C',$$

gdje je $C'=-\frac{\sqrt{3}}{9}\ln 3+C$.

246. Praktički su vrlo važni integrali oblika

$$I=\int\sqrt{k^2-x^2}\,dx.$$

1. korak: Otpada.

2. korak: $$I=\int\frac{k^2-x^2}{\sqrt{k^2-x^2}}\,dx=k^2\underbrace{\int\frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}}}_{I_1}-\underbrace{\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{k^2-x^2}}}_{I_2}=k^2 I_1-I_2. \qquad \text{(a)}$$

3. korak: $$I_2=\int x\frac{x\,dx}{\sqrt{k^2-x^2}}=\left[u=x,\quad du=dx;\quad dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{k^2-x^2}}\right.$$

$$v=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{k^2-x^2}}=\left(k^2-x^2=t,\quad x\,dx=-\frac{1}{2}\,dt\right)=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=$$

$$\left.=-\sqrt{k^2-x^2}\right]=-x\sqrt{k^2-x^2}+\underbrace{\int\sqrt{k^2-x^2}\,dx}_{I}.$$

Uvrštenje u (a) daje

$$I=k^2 J_1+x\sqrt{k^2-x^2}-I.$$

Pazi! I se nikad ne ukida. Ako bi se „ukidao", traži pogrešku u predznaku!

Odatle

$$I=\frac{k^2}{2}I_1+\frac{x}{2}\sqrt{k^2-x^2} \qquad \text{(b)}$$

4. korak:

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{k}$$

5. korak: Uvrštenje u (b) daje

$$I=\frac{k^2}{2}\arcsin\frac{x}{k}+\frac{x}{2}\sqrt{k^2-x^2}+C$$

ili

$$I=\frac{1}{2}\left(k^2\arcsin\frac{x}{k}+x\sqrt{k^2-x^2}\right)+C.$$

Npr. $\int\sqrt{7-x^2}\,dx$ možemo prema tom rješenju neposredno napisati

$$I=\frac{1}{2}\left(7\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}+x\sqrt{7-x^2}\right)+C.$$

Primjedba. $\int\sqrt{k^2-x^2}\,dx$ možemo riješiti jednostavnije pomoću supstitucije

$$\left.\begin{array}{ll} & x=k\sin t \\ \text{a odatle je} & \sin t=\frac{x}{k} \\ \text{a} & t=\arcsin\frac{x}{k} \\ \text{i} & dx=k\cos t\,dt. \end{array}\right| \qquad \text{(a)}$$

Uvrštenje u integral daje

$$I=\int\sqrt{k^2-x^2}\,dx=\int\sqrt{k^2-k^2\sin^2 t}\cdot k\cos t\,dt=$$

$$=k^2\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt=k^2\int\cos^2 t\,dt=\text{prema (60a)}=k^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)+C.$$

Integral je riješen u drugoj promjenljivoj t. Praktički je često od važnosti povratak na prvobitnu promjenljivu x. U tu svrhu uvrstimo u I prema (a) $t=\arcsin\frac{x}{k}$.

Dobivamo

$$I=\frac{k^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{k}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{k}\right)\right]=(\text{prema } \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha)=$$

$$=\frac{k^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{k}+\frac{1}{2}\cdot 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{k}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{k}\right)\right]=\text{prema (a)}=$$

$$=\frac{k^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{k}+\frac{x}{k}\cos\left(\arcsin\frac{x}{k}\right)\right]=\frac{k^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{k}+\frac{x}{k}\sqrt{1-\frac{x^2}{k^2}}\right]=$$

$$=\frac{k^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{k}+\frac{x}{k^2}\sqrt{k^2-x^2}\right]=\frac{k^2}{2}\arcsin\frac{x}{k}+\frac{x}{2}\sqrt{k^2-x^2}+C.$$

Kako vidimo, integriranje je jednostavno, ali je prijelaz na prvobitnu promjenljivu kompliciran.

Na isti način možemo izračunati integrale

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=a\int\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx \text{ uz supstituciju}$$

$$\frac{x}{a}=\operatorname{sh} t, \text{ jer je } \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}=\operatorname{ch} t.$$

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\,dx \text{ uz supstituciju}$$

$$\frac{x}{a}=\operatorname{ch} t, \text{ jer je } \sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1}=\operatorname{sh} t.$$

(Vidi formule (62) u I dijelu Repetitorija).

247. $I=\int\sqrt{x^2-2x-1}\,\mathrm{d}x=$

1. korak: $=\int\sqrt{(x-1)^2-2}\,\mathrm{d}x=(x-1=t,\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t;\ 2=k^2,\ k=\sqrt{2})=$

$=\int\sqrt{t^2-k^2}\,\mathrm{d}t.$ (a)

2. korak:

$$I=\int\frac{t^2-k^2}{\sqrt{t^2-k^2}}\,\mathrm{d}t=\underbrace{\int\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-k^2}}}_{I_1}-k^2\underbrace{\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-k^2}}}_{I_2}.$$

$$I=I_1-k^2I_2. \qquad \text{(b)}$$

3. korak:

$$I_1=\int t\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-k^2}}=\left[u=t,\quad \mathrm{d}u=\mathrm{d}t;\quad \mathrm{d}v=\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-k^2}},\right.$$

$$v=\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-k^2}}=\left(t^2-k^2=z,\quad 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}z\quad \text{i}\quad t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}z\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}=\sqrt{z}=\sqrt{t^2-k^2}\Big]=t\sqrt{t^2-k^2}-\underbrace{\int\sqrt{t^2-k^2}\,\mathrm{d}t}_{I}=$$

$$=t\sqrt{t^2-k^2}-I,\quad \text{pa je}\quad I_1=t\sqrt{t^2-k^2}-I.$$

Uvrštenje u (b) daje:

$$I=\frac{t}{2}\sqrt{t^2-k^2}-\frac{k^2}{2}I_2. \qquad \text{(c)}$$

4. korak: Prema (54a)

$$I_2=\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-k^2}}=\ln\left(t+\sqrt{t^2-k^2}\right).$$

Uvrštenje u (c) daje

$$I=\frac{t}{2}\sqrt{t^2-k^2}-\frac{k^2}{2}\ln\left(t+\sqrt{t^2-k^2}\right),$$

a s obzirom na (a) dobivamo

$$\underline{I=\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x-1}-\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right)+C.}$$

248. $\int\sqrt{11+12x-8x^2}\,\mathrm{d}x.$

$$\left[\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{8}\right)\sqrt{11+12x-8x^2}-\frac{31}{8\sqrt{2}}\arcsin\frac{3-4x}{\sqrt{31}}+C\right].$$

249. $\int\sqrt{4x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x.$

$$\left[\frac{4x-1}{4}\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}}+\frac{3}{16}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}}\right|+C\right].$$

52

250. $\int\sqrt{x^2+x+2}\,\mathrm{d}x.$

$$\left[\frac{2x+1}{2}\sqrt{x^2+x+2}+\frac{7}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+2}\right)+C\right].$$

251. $\int\sqrt{5-x^2}\,\mathrm{d}x.$

$$\left[\frac{5}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{x}{2}\sqrt{5-x^2}+C\right].$$

Primjedba.

Integrale predtipa C možemo računati i na drugi način. (Vidi dalje: Posebni oblici integrala tipa III, slučaj b).

b. Tipovi neodređenih integrala

U tom poglavlju navest ćemo deset tipova integrala i pokazat ćemo kako se ti integrali računaju. Treba dobro pamtiti, koji integrali spadaju u svaki pojedini tip i kako se svaki pojedini tip integrala računa. Iz toga nikako ne slijedi, da treba svaki integral, koji spada u jedan od tih tipova, baš tako računati kako je za dotični tip naznačeno. Ne, najprije kušaj riješiti svaki integral što jednostavnije bez obzira na tip u koji spada, npr. pomoću zgodne supstitucije, i tek kad to ne ide, potraži tip u koji spada, pa ga riješi kako je tamo prikazano.

TIP I

1. Integrali razlomljenih racionalnih funkcija

Upute

Ovamo spadaju integrali kvocijenta dvaju polinoma, tj. integrali oblika

$$I=\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Karakteristika toga tipa — x nigdje nije pod korijenom. U taj tip spadaju zapravo i integrali koje smo naveli u predtipu A: $\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$, izdvojili smo ih s razloga, što se mnogo jednostavnije računaju, kako je tamo prikazano, a u nekim slučajevima i ne mogu drukčije riješiti. Pri računanju integrala tipa I treba se strogo držati pojedinih koraka računanja.

Promotrimo posebno pojedine slučajeve tog važnog tipa.

I slučaj. Nultačke nazivnika integrala su realne i to jednostruke ili višestruke

Zadaci

U zadacima **252** do **263** uklj. izračunaj zadane integrale razlomljenih racionalnih funkcija kojim su nultačke nazivnika realne.

252. $I=\int\frac{4x-3}{5-7x}\,dx$

1. korak: Izluči se koeficijent najviše potencije od x u nazivniku

$$I=\frac{1}{-7}\int\frac{4x-3}{x-\frac{5}{7}}\,dx.$$

2. korak: Integrira se samo prava razlomljena racionalna funkcija, tj. funkcija u kojoj je stepen polinoma u brojniku niži od stepena polinoma u nazivniku. Ako je funkcija neprava, tada dijeljenjem brojnika s nazivnikom dobivamo polinom plus prava razlomljena funkcija. U našem je slučaju integrand neprava razlomljena racionalna funkcija, pa vršimo dijeljenje:

$$(4x+3):\left(x-\frac{5}{7}\right)=4+\frac{41}{7}\frac{1}{x-\frac{5}{7}}.$$

U našem jednostavnom slučaju možemo već integrirati:

$$I=-\frac{1}{7}\int\left(4+\frac{41}{7}\frac{1}{x-\frac{5}{7}}\right)dx=\underline{-\frac{1}{7}\left(4x+\frac{41}{7}\ln\left|x-\frac{5}{7}\right|\right)+C.}$$

253. $I=\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx.$

1. korak: Ispunjen je.

2. korak: Funkcija je neprava, pa dijelimo:

$$(x^5+x^4-8):(x^3-4x)=x^2+x+4+\frac{4(x^2+4x-2)}{x^3-4x}\text{ i integriramo:}$$

$$I=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\underbrace{\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}\,dx}_{I_1}.$$

$$I=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4I_1 \qquad \text{(a}$$

3. korak: Da izračunamo I_1 rastavimo podintegralnu funkciju u parcijalne (djelomične) razlomke.

U tu svrhu

1) Odredimo nultačke nazivnika pa ga rastavimo u linearne faktore:

Stavimo nazivnik $x^3-4x=0$, odnosno $x(x^2-4)=0$ pa su $x_1=0$, $x_2=2$ i $x_3=-2$ tražene nultačke, pa nazivnik prima oblik $x^3-4x=x(x-2)(x+2)$, a funkcija

$$\frac{x^2+4x-2}{x(x-2)(x+2)}. \qquad \text{(b)}$$

2) Prelazimo na rastavljanje integranda u parcijalne razlomke.
Svaka realna nultačka nazivnika, odnosno svaki linearni faktor nazivnika daje jedan parcijalni razlomak oblika:

$$\frac{\text{konstanta}}{\text{linearni faktor}}=\frac{A}{x\pm a}.$$

Za naš slučaj dobivamo identitet, tj. jednakost koja vrijedi za sve x:

$$\frac{x^2+4x-2}{x(x-2)(x+2)}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}. \qquad \text{(c)}$$

Da odredimo konstante A, B i C množimo obje strane identiteta s nazivnikom lijeve strane:

$$x^2+4x-2\equiv A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2). \qquad \text{(d)}$$

Budući da su u našem slučaju nultačke nazivnika realne i različite, neodređene koeficijente odredimo najjednostavnije tako da redom uvrstimo u (d) nultačke nazivnika:

$$x_1=0:\ -2=-4A;\ \underline{A=\frac{1}{2}},$$

$$x_2=2:\ 4+8-2=B\cdot2\cdot4;\ \underline{B=\frac{5}{4}},$$

$$x_3=-2:\ 4-8-2=C\cdot(-2)\cdot(-4);\ \underline{C=-\frac{3}{4}}.$$

Uvrštenje u (c) daje:

$$\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2}.$$

3. Integriramo:

$$I_1=\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{5}{4}\ln|x-2|-\frac{3}{4}\ln|x+2|$$

i uvrstimo u (a):

$$I=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|=$$

$$=\underline{\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C.}$$

254. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx.$ $\left[\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C\right].$

255. $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}\,dx.$ $\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C\right].$

256. $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\,dx.$ $\left[\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}\right|+C\right].$

257. $I=\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx.$

1. korak: Ispunjen.

2. korak: Isto.

3. korak: Rastavljanje u parcijalne razlomke.

$$x^3(x-2)^2=0, \text{ pa je } x^3=0 \text{ i } (x-2)^2=0.$$

$x_{1,2,3}=0$ trostruka realna nultačka

$x_{4,5}=2$ dvostruka realna nultačka.

Svaka realna nultačka nazivnika višestrukosti n daje n parcijalnih razlomaka oblika

$$\frac{A}{(x-a)^n},\ \frac{B}{(x-a)^{n-1}},\ \ldots,\ \frac{H}{(x-a)^2},\ \frac{I}{x-a}.$$

Za naš slučaj dobivamo:

$$\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\equiv\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{(x-2)^2}+\frac{E}{x-2}. \qquad \text{(a)}$$

Proba: broj konstanata $A, B, C, \ldots$, odnosno broj parcijalnih razlomaka uvijek je jednak stepenu polinoma u nazivniku

$$3+2=\underline{5}.$$

Množimo (a) s nazivnikom lijeve strane:

$$x^3-2x^2+4\equiv A(x-2)^2+Bx(x-2)^2+Cx^2(x-2)^2+Dx^3+Ex^3(x-2).$$

Budući da su nultačke nazivnika višestruke, konstante $A, B, C, \ldots$ odredimo tako da poredavši pojedine članove desne strane identiteta po padajućim potencijama promjenljive x izjednačimo koeficijente članova istih potencija x desne i lijeve strane identiteta.

$$x^3-2x^2+4\equiv Ax^2-4Ax+4A+Bx^3-4Bx^2+4Bx+Cx^4-4Cx^3+4Cx^2+Dx^3+Ex^4-2Ex^3,$$

$$x^3-2x^2+4\equiv(C+E)x^4+(B-4C+D-2E)x^3+(A-4B+4C)x^2+(-4A+4B)x+4A.$$

Slijedi:

$$C+E=0 \qquad \to E=-\frac{1}{4}.$$

$$B-4C+D-2E=1 \qquad \to D=\frac{1}{2}.$$

$$A-4B+4C=-2 \qquad \to C=\frac{1}{4}.$$

$$-4A+4B=0 \qquad \to B=1.$$

$$4A=4 \qquad \to A=1.$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-2}.$$

Integriramo:

$$I=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{4}\ln|x-2|+C=$$

$$=\underline{\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{1}{2(x-2)}+C.}$$

258. $\int\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2\frac{dx}{x}.$

$I=\int\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}\,dx.$

1. korak: Ispunjen.
2. korak: Isto.
3. korak:

$$x(x-1)^2=0$$

$$x_1=0\ ;\ x_{2,3}=1.$$

$$\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}\Big|\cdot x(x-1)^2$$

$$x^2+4x+4\equiv A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1).$$

Nakon uređenja:

$$x^2+4x+4\equiv(A+C)x^2+(-2A+B-C)x+A$$

$$A+C=1 \quad\rightarrow\quad C=-3$$

$$-2A+B-C=4 \quad\rightarrow\quad B=9$$

$$A=4$$

$$\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}=\frac{4}{x}+\frac{9}{(x-1)^2}-\frac{3}{x-1}$$

$$I=4\int\frac{dx}{x}+9\int\frac{dx}{(x-1)^2}-3\int\frac{dx}{x-1}$$

$$I=4\ln|x|-\frac{9}{x-1}-3\ln|x-1|=\underline{\ln\frac{x^4}{|x-1|^3}-\frac{9}{x-1}+C.}$$

259. $\displaystyle\int\frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx.$

1. i 2. korak su ispunjeni.

3. korak:

$$x(x+1)^3=0,\quad \text{pa je}\quad x_1=0\quad\text{i}\quad x_{2,3,4}=-1.$$

Slijedi:

$$\frac{3x+2}{x(x+1)^3}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)^3}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{x+1}\Bigg|\cdot x(x+1)^3$$

$$3x+2\equiv A(x+1)^3+Bx+Cx(x+1)+Dx(x+1)^2. \qquad \text{(a)}$$

Koeficijente A, B, C i D odredimo uvrštavajući u (a) nultačke nazivnika $x=0$ i $x=-1$

$$x=0:\ 2=A \quad\rightarrow\quad A=2$$

$$x=-1:\ -1=-B \rightarrow B=1.$$

Koeficijenti C i D ostali su neodređeni, pa ih odredimo kao u predašnjem zadatku.

Izjednačenje koeficijenata od x^3 daje

$$0=A+D=2+D,\ \text{pa je}\ D=-2.$$

a za x^2:

$$0=3A+C+2D=6+C-4,\ \text{pa je}\ C=-2$$

$$I=2\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{(x+1)^3}-2\int\frac{dx}{(x+2)^2}-2\int\frac{dx}{x+1}.$$

Uz $x+1=t$ i $dx=dt$ dobivamo:

$$I=2\ln|x|-\frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}-2\ln|x+1|=2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{4(x+1)-1}{2(x+1)^2}=$$

$$=\underline{2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+C.}$$

260. $\displaystyle\int\frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx.$ $\qquad\left[\frac{1}{x-1}+\ln\frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{|x|}+C\right].$

261. $\displaystyle\int\frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4dx.$ $\qquad\left[\frac{x}{8}-\ln|x+1|-\frac{9x^2+12x+5}{3(x+1)^3}+C\right].$

262. $\displaystyle\int\frac{3x^3+1}{(x^2-1)^3}dx.$ $\qquad\left[C-\frac{x}{(x^2-1)^2}\right].$

263. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3(x-1)^2}.$ $\qquad\left[-\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}+3\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+C\right].$

II slučaj. Nazivnik integranda ima jednostruke ili višestruke parove konjugirano kompleksnih nultačaka uz realne nultačke ili bez njih.

U zadacima 264 do 273 uklj. izračunaj integrale razlomljenih racionalnih funkcija kojima su nultačke nazivnika konjugirano kompleksne.

264. $\displaystyle\int\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx.$

1. i 2. korak su ispunjeni.

3. korak: $\quad x^4+x=0,\ x(x^3+1)=0,$ odn. $x(x+1)(x^2-x+1)=0$

$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_{3,4}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pri rastavljanju u parcijalne razlomke

Svaki par konjugirano kompleksnih nultačaka nazivnika razlomljene racionalne funkcije daje jedan parcijalni razlomak oblika

$$\frac{Kx+L}{\text{kv. funkcija, kojoj su nultačke kompleksne}}=\frac{Kx+L}{x^2+px+q},$$

gdje su K i L konstante koje treba odrediti.

Parovi konjugirano kompleksnih nultačaka mogu biti i višestruki, npr. r-struki. U tom slučaju postupamo slično kao kod višestrukih realnih nultačaka.

r-struki par konjugirano kompleksnih nultačaka $(x^2+px+q)^r$ daje r parcijalnih razlomaka oblika

$$\frac{Kx+L}{(x^2+px+q)^r},\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{r-1}},\ \ldots,\ \frac{Rx+S}{x^2+px+q}.$$

Kako vidimo, broj koeficijenata $A, B, C, \ldots; K, L, M, N, \ldots$ koje treba odrediti uvijek je jednak stepenu polinoma u nazivniku integrala.

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)(x^2-x+1)} \equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Kx+L}{x^2-x+1} \quad \Big| \cdot x(x+1)(x^2-x+1)$$

Proba: $4=1+1+2$.

$$x^3+4x^2-2x+1 \equiv A(x^3+1)+Bx(x^2-x+1)+(Kx+L)x(x+1)$$

ili nakon uređenja:

$$x^3+4x^2-2x+1 \equiv (A+B+K)x^3+(-B+K+L)x^2+(B+L)x+A$$

Slijedi:

$$A+B+K=1 \qquad B=-2$$

$$-B+K+L=4 \qquad K=2$$

$$B+L=-2 \qquad L=0$$

$$\underline{A=1.}$$

Uvrštenje u integral daje:

$$I=\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x+1}+2\int\underbrace{\frac{x\,dx}{x^2-x+1}}_{I_1}=\ln\frac{|x|}{(x+1)^2}+2I_1 \qquad \text{(a)}$$

$$I_1=\int\frac{x\,dx}{x^2-x+1}.$$

Taj integral ne možemo riješiti rastavljajući integrand u parcijalne razlomke, jer je integrand već parcijalni razlomak. Moramo ga izračunati na način koji slijedi.

Stavimo: $x^2-x+1=t$; $(2x-1)\,dx=dt$.

Da dobijemo u brojniku $(2x-1)\,dx$, pišemo x u obliku

$$x=\frac{2x-1}{2}+\frac{1}{2}$$

pa uvrštenje u I_1 daje:

$$I_1=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-1)\,dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\underbrace{\frac{dx}{x^2-x+1}}_{I_2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}+\frac{1}{2}I_2=\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{1}{2}I_2,$$

$$I_1=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{2}I_2. \qquad \text{(b)}$$

$$I_2=\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\text{prema predtipu } A=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\left(x-\frac{1}{2}=t,\ dx=dt;\right.$$

$$\left.\frac{3}{4}=k^2\right)=\int\frac{dt}{t^2+k^2}=\text{prema (52a)}=\frac{1}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{k}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Uvrštenje u (b) a zatim u (a) daje:

$$I_1=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}},$$

$$\underline{I=\ln\frac{|x|(x^2-x+1)}{(x+1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.}$$

265. $I=\int\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}\,dx.$

1. i 2. korak su ispunjeni.

3. korak: nultačke su nazivnika: $x_1=-1$, $x_{2,3,4,5}=\pm\sqrt{-1}=\pm i$.

$$\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}\Bigg|\cdot(x+1)(x^2+1)^2$$

Proba: $5=1+2\cdot2=5$

$$x^3+3\equiv A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x+1)+(Dx+E)(x+1)(x^2+1). \qquad \text{(a)}$$

Koeficijente $A, B, C, \ldots$ odredimo uvrštavajući u identitet nultačke nazivnika $x_1=-1$ i $x_{2,4}=i$ i izjednačivajući koeficijente uz x^4 i x^0, tj. članova bez x.

$$x_1=-1: 2^2=4A,\quad \underline{A=\frac{1}{2}}.$$

$$x_{2,4}=i:\ -i+3=-B+Ci+Bi+C=i(C+B)+(C-B).$$

Iz jednakosti kompleksnih brojeva slijedi

$$\begin{array}{l|l} C+B=-1 & \text{odatle:} \\ C-B=\ \ 3 & \underline{C=1,\ B=-2.} \end{array}$$

Izjednačenje koeficijenata od x^4 u (a) daje: $0=A+D=\frac{1}{2}+D$; $\underline{D=-\frac{1}{2}}$.

Izjednačenje slobodnih članova u (a) daje: $3=A+C+E=\frac{1}{2}+1+E$; $\underline{E=\frac{3}{2}}$.

Uvrštenje u I daje:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{2x-1}{(x^2+1)^2}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x-3}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}+$$

$$+\underbrace{\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}}_{I_1}-\frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\left(\text{uz } x^2+1=t,\ 2x\,dx=dt;\ x\,dx=\frac{1}{2}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\int\frac{dt}{t^2}+I_1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}+\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}x=\frac{1}{2}\ln|x+1|+$$

$$+\frac{1}{x^2+1}+I_1-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}x. \qquad \text{(b)}$$

Rekurz 18

I_1 izračunat ćemo načinom rekurzije, tj. snižavanjem eksponenta kvadratne funkcije, u našem slučaju svest ćemo

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}\ \text{na}\ \int\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arc\,tg}x.$$

$$I_1=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int\frac{(1+x^2)-x^2}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{dx}{x^2+1}-\int x\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\left[\text{uz } u=x,\ du=dx;\ dv=\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2},\ v=\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}=\right.$$

$$\left.=\left(\text{uz } x^2+1=z,\ 2x\,dx=dz,\ x\,dx=\frac{1}{2}dz\right)v=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\right]=$$

$$=\operatorname{arc\,tg}x+\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x.$$

Uvrštenje u (b) daje:

$$I=\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}x=$$

$$=\underline{\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{2+x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+2\operatorname{arc\,tg}x+C.}$$

266. $I=\int\frac{(5x^2-12)\,dx}{(x^2-6x+13)^2}$.

1. i 2. korak su ispunjeni.

3. korak: Uzevši u obzir da kvadratna funkcija u nazivniku integranda ima dvostruki par konjugirano kompleksnih nultačaka, pišemo parcijalne razlomke u obliku:

$$\frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}\equiv\frac{Ax+B}{(x^2-6x+13)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-6x+13}.$$

Množenjem sa zajedničkim nazivnikom i sređivanjem po padajućim potencijama od x dobivamo:

$$5x^2-12\equiv Cx^3+(D-6C)x^2+(A-6D+13C)x+(B+13D).$$

Odatle:

x^3 : $\underline{C=0}$.

x^2 : $D-6C=5$; $\underline{D=5}$.

x : $A-6D+13C=0$; $A-30=0$, $\underline{A=30}$.

x^0 : $B+13D=-12$; $B+65=-12$; $\underline{B=-77}$.

$$\frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}\equiv\frac{30x-77}{(x^2-6x+13)^2}+\frac{5}{x^2-6x+13}.$$

$$I=30\underbrace{\int\frac{x\,dx}{(x^2-6x+13)^2}}_{I_1}-77\underbrace{\int\frac{dx}{(x^2-6x+13)^2}}_{I_2}+5\underbrace{\int\frac{dx}{x^2-6x+13}}_{I_3}.$$

$$I=30I_1-77I_2+5I_3. \qquad \text{(a)}$$

Integrale I_1 i I_2 treba reducirati.

$$I_1=\int\frac{x\,dx}{(x^2-6x+13)^2}=\int\frac{x\,dx}{[(x-3)^2+4]^2}=(x-3=t;\ x=t+3,\ dx=dt)=$$

$$=\int\frac{(t+3)\,dt}{(t^2+4)^2}=\int\frac{t\,dt}{(t^2+4)^2}+3\underbrace{\int\frac{dt}{(t^2+4)^2}}_{I_4}=\left(t^2+4=z,\ t\,dt=\frac{1}{2}dz\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2}+3I_4=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+4}+3I_4. \qquad \text{(b)}$$

$$I_2=\int\frac{dx}{(x^2-6x+13)^2}=\int\frac{dx}{[(x-3)^2+4]^2}=\int\frac{dt}{(t^2+4)^2}=I_4. \qquad \text{(c)}$$

Uvrštenje (b) i (c) u (a) daje:

$$I=-15\frac{1}{t^2+4}+90I_4-77I_4+5I_3=-15\frac{1}{t^2+4}+13I_4+5I_3. \qquad \text{(d)}$$

$$I_3=\int\frac{dx}{x^2-6x+13}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+4}=\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{2} \qquad \text{(e)}$$

$$I_4=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+4)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{(4+t^2)-t^2}{(t^2+4)^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+4}-\frac{1}{4}\underbrace{\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(t^2+4)^2}}_{I_5}=$$

$$=\frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{2}-\frac{1}{4}I_5 \qquad \text{(f)}$$

$$I_5=\int t\frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+4)^2}=\left[u=t,\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t;\ v=\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+4)^2}=\left(t^2+4=z,\ t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{d}z\right)=\right.$$

$$\left.=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{z}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+4}\right]=-t\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+4}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+4}=\text{ prema (e) }=$$

$$=-\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{t^2+4}+\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{2}. \qquad \text{(g)}$$

(g) uvrstimo u (f):

$$I_4=\frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{2}+\frac{t}{8}\frac{1}{t^2+4}-\frac{1}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{2}=\frac{1}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{2}+\frac{t}{8}\frac{1}{t^2+4}. \qquad \text{(h)}$$

Uvrštenje (h) i (e) u (d) daje:

$$I=-15\frac{1}{t^2+4}+\frac{13}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{2}+\frac{13}{8}\cdot\frac{t}{t^2+4}+\frac{5}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{2}=$$

$$=\frac{13t-120}{8(t^2+4)}+\frac{53}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{2}.$$

Konačno uvrstimo $t=x-3$:

$$\underline{I=\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{2}+C.}$$

267. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$. $\left[-\dfrac{x}{(x^2-1)^2}+C\right]$.

268. $\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^3-1}$.

$\left[\text{Binom rastavi u faktore! } I=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\right]$.

269. $\displaystyle\int\frac{(x^4+1)\,\mathrm{d}x}{x^3-x^2+x-1}$.

$\left[\text{Neprava je! Nazivnik rastavi u faktore! } I=\dfrac{(x+1)^2}{2}+\ln\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\operatorname{arc\,tg}x+C\right]$.

270. $\displaystyle\int\frac{(x^3-3)\,\mathrm{d}x}{x^4+10x^2+25}$. [Riješi bikvadratnu jednadžbu!

$I=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+5)+\dfrac{25-3x}{10(x^2+5)}-\dfrac{3}{10\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{5}}+C$].

271. $\displaystyle\int\frac{(x^2+1)\,\mathrm{d}x}{x^3-3x^2+3x-1}$. [Nazivnik je kub binoma! $I=\ln|x-1|-\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}+C$].

272. $\displaystyle\int\frac{(x+1)^4\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^3}$. $\left[-\dfrac{5x^3+15x^2+18x+8}{8(x^2+2x+2)^2}+\dfrac{3}{8}\operatorname{arc\,tg}(x+1)+C\right]$.

273. $\displaystyle\int\frac{1-x^4}{1+x^4}\mathrm{d}x$. [Podijelivši brojnik s nazivnikom prikaži posljednji kao produkt $(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$! $I=-x+$

$+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$].

III slučaj. **Rastavljanje razlomljene racionalne funkcije u parcijalne razlomke otpada**

1) **kad je integrand već parcijalni razlomak, tj. kad integral ima oblik**

$$\int\frac{\text{linearna funkcija ili konstanta}}{(\text{kvadratna funkcija})^n}\mathrm{d}x,$$

pri čemu su nultačke kvadratne funkcije konjugirano kompleksne,

2) **kad postoji mogućnost riješiti integral jednostavnije ne rastavljajući integrand u parcijalne razlomke ili ako ne možemo egzaktno odrediti nultačke nazivnika.**

ad 1) U zadacima **274** do **291** uklj. izračunaj zadane integrale, kojima su integrandi već parcijalni razlomci.

274. $$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(a^2+x^2)-x^2}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\left[\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}-\underbrace{\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}}_{I_1}\right]=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}-I_1\right]. \qquad \text{(a)}$$

$$I_1=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}=\left[x=u,\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}u;\ \mathrm{d}v=\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2},\ v=\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}=\right.$$

$$=\left(x^2+a^2=z;\ x\,dx=\frac{1}{2}\cdot dz\right)=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+a^2}\Bigg]=-\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}=-\frac{x}{2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}.$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$I=\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+\frac{x}{2(x^2+a^2)}-\frac{1}{2a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right]=$$

$$=\underline{\frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right)+C},\ \text{pa je npr.}$$

275. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+4)^2}=\frac{1}{8}\left(\frac{x}{x^2+4}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}\right)+C.$

Izvedi to!

276. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^2-7x+13}=$

$$=[t=x^2-7x+13,\ dt=(2x-7)\,dx]=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-7)+7}{x^2-7x+13}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int\frac{(2x-7)\,dx}{x^2-7x+13}+7\int\frac{dx}{x^2-7x+13}\right]=\frac{1}{2}\left[\int\frac{dt}{t}+7\int\frac{dx}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right]=$$

$$=\left(x-\frac{7}{2}=z,\ dx=dz;\ \frac{3}{4}=k^2,\ k=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln(x^2-7x+13)+$$

$$+\frac{7}{2}\int\frac{dz}{z^2+k^2}=\underline{\frac{1}{2}\ln(x^2-7x+13)+\frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-7}{\sqrt{3}}+C.}$$

277. $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x^2)^4}.$ [Primijeni više puta postupak prikazan u zadatku 274. $I=\dfrac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3}+\dfrac{5}{16}\operatorname{arc\,tg}x+C$].

278. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^3}=\left(x^2+a^2=t,\ x\,dx=\frac{1}{2}\,dt\right)=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t^2}=\underline{-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^2}+C.}$

279. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+2x+10)^3}.$

[Prikaži nazivnik u obliku $\{(x+1)^2+9\}^3=(t^2+k^2)^3$ pa rastavi integrand u tri parcijalna razlomka. $I=\dfrac{1}{648}\left\{\dfrac{3(x+1)}{x^2+2x+10}+\dfrac{18(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+5}{3}+C\right]$.

ad 2) U zadacima **280** do **291** uklj. izračunaj zadane integrale ne rastavljajući integrand u parcijalne razlomke.

280. $\displaystyle\int\frac{x-1}{x^2-x-1}\,dx.$

Integrand nije parcijalni razlomak, jer su nultačke nazivnika realne $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. Kušajmo riješimo taj integral jednostavnije, tj. ne rastavljajući integrand u parcijalne razlomke.

$$I=\int\frac{(x-1)\,dx}{x^2-x-1}=[x^2-x-1=t,\ (2x-1)\,dx=dt]=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-1)-1}{x^2-x-1}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-1)\,dx}{x^2-x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x-1}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=\Bigg[x-\frac{1}{2}=z,$$

$$dx=dz;\ \frac{5}{4}=k^2,\ k=\frac{\sqrt{5}}{2}\Bigg]=\frac{1}{2}\ln|x^2-x-1|-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2-k^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-x-1|-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{z-k}{z+k}\right|=\underline{\frac{1}{2}\ln|x^2-x-1|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C.}$$

281. $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}=\left[u=x,\ du=dx;\ dv=\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2},\ v=\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}=\left(x^2+1=z,\right.\right.$

$$\left.\left.x\,dx=\frac{1}{2}\,dz\right)=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right]=-\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\underline{-\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.}$$

282. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^4+x^2+1}=\left(x^2=t,\ x\,dx=\frac{1}{2}\,dt\right)=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+t+1}=$ predtip A =

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\left(t+\frac{1}{2}=z,\ dt=dz,\ \frac{3}{4}=k^2,\ k=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+k^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{k}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)=\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}+C.}$$

283. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^3+2)^2} = \left(x^3+2=t,\quad 3x^2\,dx=dt,\quad x^2\,dx=\frac{1}{3}\,dt\right) =$

$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t} = \underline{-\frac{1}{3(x^3+2)}+C.}$

284. $\int \frac{x^5\,dx}{5x^3+8} = \left(\text{kako je } D_x x^3 = 3x^2,\ \text{a } x^5 = x^3\cdot x^2,\ \text{stavimo } x^3=t,\ 3x^2\,dx=dt,\ x^2\,dx=\frac{1}{3}\,dt\right) =$

$= \int \frac{x^3\cdot x^2\,dx}{5x^3+8} = \frac{1}{3}\int \frac{t\,dt}{5t+8} = \frac{1}{15}\int \frac{t\,dt}{t+\frac{8}{5}} = \left[t:\left(t+\frac{8}{5}\right) = 1-\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{t+\frac{8}{5}}\right] =$

$= \frac{1}{15}\left[\int dt - \frac{8}{5}\int \frac{dt}{t+\frac{8}{5}}\right] = \frac{1}{15}\left(t-\frac{8}{5}\ln\left|t+\frac{8}{5}\right|\right) = \frac{1}{15}\left(t-\frac{8}{5}\ln\frac{|5t+8|}{5}\right) =$

$= \frac{1}{15}\left(x^3-\frac{8}{5}\ln\frac{|5x^3+8|}{5}\right)+C = \frac{1}{15}\left(x^3-\frac{8}{5}\ln|5x^3+8|\right)+C'.$

285. $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)} =$

$=$ (kako je $4-3=1$, stavimo $x^3=t$, pa je $3x^2\,dx=dt$, a $dx=$

$= \frac{dt}{3x^2}\Big) = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{x^2\cdot x^4(x^3+1)} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{(x^3)^2(x^3+1)} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2(t+1)} =$

$=$ nakon rastavljanja u parcijalne razlomke $=$

$= \frac{1}{3}\left(\int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t+1}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{t} - \ln|t| + \ln|t+1|\right) =$

$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{t}+\ln\left|\frac{t+1}{t}\right|\right) = \underline{\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x^3}+\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right|\right)+C.}$

286. $\int \frac{dx}{x^4(x^2+1)} =$

$= \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^4(x^2+1)}\,dx = \int \frac{dx}{x^4} - \int \frac{x^2\,dx}{x^4(x^2+1)} = -\frac{1}{3x^3} - \int \frac{dx}{x^2(x^2+1)} =$

$= -\frac{1}{3x^3} - \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^2(x^2+1)}\,dx = -\frac{1}{3x^3} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x^2+1} =$

$= \underline{-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\operatorname{arc\,tg} x + C.}$

287. $\int \frac{dx}{x^6(x^3+1)}$. [Početak kao u zadatku 286, zatim rastavljanje u parcijalne razlomke. $I = -\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{2x^2}+$ $+\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$].

288. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x-5}\,dx$. [$\ln|x^2-3x-5|+C$].

289. $\int \frac{x^4\,dx}{(1-x^5)^7}$. [$\frac{1}{30(1-x^5)^6}+C$].

290. $\int \frac{x^3}{x^4-1}\,dx$. [$\frac{1}{4}\ln|x^4-1|+C$].

291. $\int \frac{dx}{x^7(x^6+1)}$. [Postupak vidi u zadatku 285, $I = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{x^6}+\ln\frac{x^6+1}{x^6}+C\right)$].

2. Integrali iracionalnih funkcija

Te integrale svodimo pomoću podesnih supstitucija na integrale racionalnih funkcija, tj. na tip I.

TIP II

Integrali iracionalnih funkcija oblika

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx;\quad \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,$$

gdje je sa R označena razlomljena racionalna funkcija.

Upute

Karakteristika toga tipa: Pod korijenom je linearna funkcija ili kvocijent linearnih funkcija.

Postupak.

1. Supstitucija: $\sqrt[n]{ax+b}=t$, odnosno $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$.

2. Odatle računamo x izrazivši ga sa t.

3. Računamo dx.

4. Ostale x izrazujemo sa t.

5. Sve to uvrštavamo u integral pa dobivamo integral racionalne funkcije od t, tj. $\int R(t)\,dt$, a to je tip I. Izvršili smo dakle racionalizaciju podintegralne funkcije.

6. Računamo $\int R(t)\,dt$ pa u rezultat uvrštavamo supstitucije navedene pod 1.

U posebnom slučaju toga tipa

$$\int R(x, \sqrt[\alpha]{(ax+b)^e}, \sqrt[\beta]{(ax+b)^f}, \sqrt[\gamma]{(ax+b)^g}, \ldots)\,dx$$

supstitucija glasi:

$$ax+b=t^\sigma,$$

gdje je σ najmanji zajednički nazivnik razlomljenih eksponenata $\frac{e}{\alpha}, \frac{f}{\beta}, \frac{g}{\gamma}, \ldots$

Zadaci

U zadacima 292 do 309 uklj. izračunaj zadane integrale.

292. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x}}$.

1. $\sqrt{1-x}=t$
2. $1-x=t^2,\ x=1-t^2$
3. $dx=-2t\,dt$
4. $x+1=1-t^2+1=-(t^2-2)$
5. $I=+2\int \frac{t\,dt}{(t^2-2)t}=2\int \frac{dt}{t^2-2}=$ prema (56a) $=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}\right|+C.$$

293. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{2x+1}}=\left(\sqrt[3]{2x+1}=t,\ 2x+1=t^3,\ x=\frac{t^3-1}{2},\ dx=\frac{3}{2}t^2\,dt,\ x^2=\frac{(t^3-1)^2}{4}\right)=$

$$=\frac{3}{8}\int\frac{(t^3-1)^2t^2\,dt}{t}=\frac{3}{8}\int(t^3-1)^2t\,dt=\frac{3}{8}\int\left(t^7-2t^4+t\right)dt=\frac{3}{8}\left(\frac{t^8}{8}-\frac{2}{5}t^5+\frac{t^2}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{8}t^2\left(\frac{t^6}{8}-\frac{2}{5}t^3+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x+1)^2}\left[\frac{1}{8}(2x+1)^2-\frac{2}{5}(2x+1)+\frac{1}{2}\right]+C.$$

Izračunaj isti integral uz supstituciju $2x+1=t$, dobit ćeš isti rezultat.

294. $\int\frac{\sqrt{1+x}}{x}dx=(\sqrt{1+x}=t,\ 1+x=t^2,\ x=t^2-1,\ dx=2t\,dt)=2\int\frac{t^2\,dt}{t^2-1}=$

$$=\left[t^2:(t^2-1)=1+\frac{1}{t^2-1}\right]=2\int dt+2\int\frac{dt}{t^2-1}=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|=$$

$$=2\sqrt{1+x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+C.$$

295. $\int\frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}dx=\left(\sqrt[3]{3x+4}=t,\ 3x+4=t^3,\ x=\frac{1}{3}(t^3-4),\ dx=t^2\,dt\right)=\int\frac{t^3\,dt}{1+t}=$

$$=\left[t^3:(t+1)=t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right]=\int t^2\,dt-\int t\,dt+\int dt-\int\frac{dt}{t+1}=\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|=$$

$$=\frac{1}{3}(3x+4)-\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+4)^2}+\sqrt[3]{3x+4}-\ln\left|\sqrt[3]{3x+4}+1\right|+C.$$

296. $\int\frac{x\,dx}{1+\sqrt{1+x}}$. $\left[(1+x)\left(\frac{2}{3}\sqrt{1+x}-1\right)+C\right]$.

297. $\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$. $[x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)+C]$.

298. $\int x\sqrt{3-x}\,dx$. $\left[\frac{2}{5}(x^2-x-6)\sqrt{3-x}+C\right]$.

299. $\int\frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t,\ \frac{1-x}{1+x}=t^2,\ \text{a odatle je } x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ \text{dok je}\right.$

$$\left.dx=-\frac{4t\,dt}{(1+t^2)^2},\ \text{a}\ 1-x=\frac{2t^2}{1+t^2}\right)=-4\int\frac{(1+t^2)^2}{4t^4}\cdot\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2}=-\int\frac{dt}{t^2}=$$

$$=\frac{1}{t}=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

300. $\int \frac{1}{(1-x)(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=t,\ \text{odatle je } x=\frac{t^2-1}{t^2+1},\ dx=\right.$

$= \frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2},\ 1-x=\frac{2}{t^2+1}$ i $\left.1+x=\frac{2t^2}{t^2+1}\right) = \frac{1}{2}\int\frac{(t^2+1)t^2dt}{t^4} = \frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt =$

$= \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} - \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\right) = \underline{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C.}$

301. $\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{(1+x)^2}.$ $\left[-\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^4}+C\right].$

302. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}.$ $\left[\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C\right].$

303. $\int\frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx.$

$\left.\begin{array}{l}\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{4}}\\ \sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\end{array}\right\} x=t^4,\quad dx=4t^3dt,\quad t=\sqrt[4]{x}.$

$I=4\int\frac{1+t}{t^4+t^2}\cdot t^3dt=4\int\frac{t^2+t}{t^2+1}dt=\left[(t^2+t):(t^2+1)=1+\frac{t-1}{t^2+1}\right]=$

$=4\left(\int dt+\int\frac{t-1}{t^2+1}dt\right)=4\left(t+\int\frac{t\,dt}{t^2+1}-\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=4\left(t+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-\operatorname{arc\,tg}t\right)=$

$=\underline{4\sqrt[4]{x}+2\ln(1+\sqrt{x})-4\operatorname{arc\,tg}\sqrt[4]{x}+C.}$

304. $\int\frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}=$

$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\\ \sqrt[5]{x^2}=x^{\frac{2}{5}}\end{array}\right\} x=t^{10},\quad dx=10t^9dt,\quad t=\sqrt[10]{x}$

$I=10\int\frac{t^9dt}{t^{10}(t^5+t^4)}=10\int\frac{dt}{t^5(t+1)}.$ (a)

Integrand rastavljamo u parcijalne razlomke. Dobivamo:

$\frac{1}{t^5(t+1)}=\frac{1}{t^5}-\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1},$

pa prema (a) imamo:

$I=-\frac{10}{4t^4}+\frac{10}{3t^3}-\frac{10}{2t^2}+\frac{10}{t}+10\ln|t|-10\ln|t+1|=$

$=\underline{-\frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+\frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}+\ln\frac{|x|}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}}+C.}$

305. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$ $[6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C].$

306. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}}.$

$\left[2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-8\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+48\sqrt[12]{x}+3\ln(1+\sqrt[12]{x})+\frac{33}{2}(\sqrt[6]{x}-\right.$

$\left.-\sqrt[12]{x}+2)-\frac{171}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{7}}+C\right].$

307. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$ $[2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x+1}+C].$

308. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}.$ $\left[6\left\{\frac{1}{9}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{1}{8}\sqrt[3]{(x+1)^4}+\frac{1}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}-\frac{1}{6}(x+1)+\right.\right.$

$\left.\left.+\frac{1}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{(x+1)^2}\right\}+C\right].$

309. $\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx=$

= brojnik i nazivnik integranda množimo s brojnikom $=\int\frac{x+1-2\sqrt{x^2-1}+x-1}{x+1-x+1}dx=$

$=\int(x-\sqrt{x^2-1})dx=\frac{x^2}{2}-\int\sqrt{x^2-1}\,dx=$ prema predtipu $\underline{C=\frac{x^2}{2}-\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+}$

$\underline{+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.}$

TIP III

Integrali iracionalnih funkcija oblika

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

tj. integral racionalne funkcije u x i drugom korijenu iz kvadratne funkcije.

Upute

Karakteristika toga tipa: U integral ulazi drugi korijen iz kvadratne funkcije. Primjedba: ovamo spadaju i integrali predtipova B i C, ali se jednostavnije rješavaju kako je tamo prikazano.

Općenito se integrali navedenog tipa rješavaju, tj. racionaliziraju pomoću Eulerovih supstitucija, pri čemu se razlikuju dva slučaja s obzirom na predznak koeficijenta od x^2 u kvadratnoj funkciji koja je pod drugim korijenom.

1. slučaj: ako je $a>0$ u $\sqrt{ax^2+bx+c}$, supstitucija glasi

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,x+t$$

gdje je t nova promjenljiva.

2. slučaj: ako je $a<0$, kvadratna se funkcija prethodno rastavi u linearne faktore pa supstitucija glasi

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=\sqrt{-a'(x_1-x)(x-x_2)}=$$
$$=t(x_1-x) \quad \text{ili} \quad =t(x-x_2)$$

gdje je t nova promjenljiva, dok je $-a'=a$.

U toj novoj promjenljivoj t treba izraziti sve x koji ulaze u integral, također dx. Time vršimo racionalizaciju integranda da se dobije $\int R(t)\,dt$, tj. tip I.

Zadaci

U zadacima **310** do **314** uklj. izračunaj zadane integrale pomoću Eulerovih supstitucija.

310. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$.

Kako je $a=1>0$, pa je $\sqrt{a}=\sqrt{1}=1$, supstitucija glasi prema 1. slučaju:

$$\sqrt{x^2-x+1}=1\cdot x+t \quad (a)$$
$$x^2-x+1=x^2+2tx+t^2,$$

a odatle je

$$x=-\frac{t^2-1}{2t+1}, \quad (b)$$

pa je

$$dx = \text{nakon uređenja} = -\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}\,dt. \quad (c)$$

Uvrštenje (b) u (a) daje nakon uređenja

$$\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t^2+t+1}{2t+1}$$

dok je

$$x-\sqrt{x^2-x+1}=-\frac{2t^2+t}{2t+1}. \quad (d)$$

Uvrštenje (c) i (d) u integral daje nakon uređenja:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{t^2+t+1}{t\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}\,dt. \quad (e)$$

Rastavljamo integrand u parcijalne razlomke:

$$\frac{t^2+t+1}{t\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}\equiv\frac{A}{t}+\frac{B}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{C}{t+\frac{1}{2}}.$$

Na poznati način (vidi tip I) dobivamo:

$$A=4,\quad B=-\frac{3}{2} \quad \text{i} \quad C=-3$$

te prema (e) imamo:

$$I=\frac{1}{2}\left(4\int\frac{dt}{t}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}-3\int\frac{dt}{t+\frac{1}{2}}\right)=$$
$$=2\ln|t|+\frac{3}{2t+1}-\frac{3}{2}\ln(2t+1)+\underbrace{\frac{3}{2}\ln 2+C'}_{C}$$

Uvrštenje $t=\sqrt{x^2-x+1}-x$ daje traženi rezultat:

$$I=2\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}-x\right|+\frac{3}{2\sqrt{x^2-x+1}-2x+1}-\frac{3}{2}\ln\left|2\sqrt{x^2-x+1}-2x+1\right|+C.$$

311. $\displaystyle\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

$a=1>0$, 1. slučaj.

$$\sqrt{x^2-1}=1\cdot x+t|^2$$
$$x^2-1=x^2+2tx+t^2$$
$$x=-\frac{1}{2}\frac{t^2+1}{t};\qquad dx=-\frac{1}{2}\frac{t^2-1}{t^2}\,dt$$
$$\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{2t}\sqrt{t^4-2t^2+1}=\frac{1}{2t}(t^2-1)$$
$$x-\sqrt{x^2-1}=-t$$
$$t=\sqrt{x^2-1}-x$$
$$I=+\frac{1}{2}\int\frac{t^2-1}{t^2}\cdot\frac{1}{t}\,dt=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t^3}\right)=\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{1}{4t^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-1}-x\right|+\frac{1}{4\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)^2}+C.$$

312. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+\sqrt{5+8x-4x^2}}.$

$a=-4<0$ — imamo slučaj 2, pa rastavljamo radikand u faktore:

$$5+8x-4x^2=-4\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=4\left(\frac{5}{2}-x\right)\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Supstitucija: $\sqrt{5+8x-4x^2}=\sqrt{4\left(\frac{5}{2}-x\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=t\left(\frac{5}{2}-x\right)\Big|^2$ (a)

$$4\left(\frac{5}{2}-x\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=t^2\left(\frac{5}{2}-x\right)^2.$$

$$4\left(x+\frac{1}{2}\right)=t^2\left(\frac{5}{2}-x\right).$$

Odatle

$$x=\frac{1}{2}\,\frac{5t^2-4}{t^2+4}, \quad \text{a} \quad dx=\frac{24\,t\,dt}{(t^2+4)^2} \tag{b}$$

Prema (a): $\sqrt{5+8x-4x^2}=t\left(\frac{5}{2}-x\right)=t\left[\frac{5}{2}-\frac{5t^2-4}{2(t^2+4)}\right]=\frac{12t}{t^2+4}$

$$3x+\sqrt{5+8x-4x^2}=\frac{3}{2}\,\frac{5t^2-4}{t^2+4}+\frac{12t}{t^2+4}=\frac{3}{2}\,\frac{5t^2+8t-4}{t^2+4}. \tag{c}$$

Uvrštenje (b) i (c) u integral daje nakon uređenja:

$$I=16\int\frac{t\,dt}{(5t^2+8t-4)(t^2+4)}=\frac{16}{5}\int\frac{t\,dt}{\left(t-\frac{2}{5}\right)(t+2)(t^2+4)}.$$

Odatle nakon rastavljanja integranda u parcijalne razlomke, dobivamo:

$$I=\frac{1}{39}\left[5\ln|5t-2|+13\ln|t+2|-\frac{125}{7}\ln(t^2+4)+12\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right]+C,$$

gdje je $t=\dfrac{2\sqrt{5+8x-4x^2}}{5-2x}$.

313. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}.$ $\qquad\left[\frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x\sqrt{15}+2\sqrt{4x^2+1}}{x\sqrt{15}-2\sqrt{4x^2+1}}\right|+C\right].$

314. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x-\sqrt{x^2-1}}.$ $\qquad\left|\frac{1}{3}\left\{x^3+\sqrt{(x^2-1)^3}\right\}+C\right|.$

Uputa

Iz navedenih primjera vidimo da primjena Eulerovih supstitucija traži mnogo složenih računa i često vodi do kompliciranih integrala racionalnih funkcija, koje ne možemo egzaktno izračunati. Stoga se preporuča, ukoliko je to moguće, da se uvedu neke druge podesnije supstitucije često trigonometrijske.

Zadaci

U zadacima **315** do **317** uklj. zamijeni Eulerove supstitucije drugim podesnijim supstitucijama.

315. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{9-x^2}}.$

Supstitucija: $x=3\sin t$; $dx=3\cos t\,dt$, pa je $\sqrt{9-x^2}=3\sqrt{1-\sin^2 t}=3\cos t$.

$$I=\int\frac{3\cos t\,dt}{(9\sin^2 t+16)\cdot 3\cos t}=\int\frac{dt}{9\sin^2 t+16(\sin^2 t+\cos^2 t)}=\int\frac{dt}{25\sin^2 t+16\cos^2 t}=$$

$$=\int\frac{dt}{\cos^2 t(25\operatorname{tg}^2 t+16)}=\left(\operatorname{tg} t=z;\ \frac{dt}{\cos^2 t}=dz\right)=\int\frac{dz}{25z^2+16}=$$

$$=\frac{1}{25}\int\frac{dz}{z^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{1}{25}\cdot\frac{5}{4}\operatorname{arctg}\frac{5}{4}z=\frac{1}{20}\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{4}\operatorname{tg} t\right)+C.$$

Da se vratimo na prvobitnu promjenljivu x, uočimo da je

$$\operatorname{tg} t=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\left(\text{prema } x=3\sin t,\ \sin t=\frac{x}{3}\right)=\frac{x}{3\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}=\frac{x}{\sqrt{9-x^2}},\ \text{pa je}$$

$$I=\frac{1}{20}\operatorname{arctg}\frac{5x}{4\sqrt{9-x^2}}+C.$$

316. $\displaystyle\int\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

Supstitucija: $x=\operatorname{ctg} t$; $dx=-\dfrac{dt}{\sin^2 t}$, $x^2+1=1+\operatorname{ctg}^2 t=\dfrac{1}{\sin^2 t}$, pa je $\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{\sin t}$

$$I=-\int\frac{(\operatorname{ctg}^2 t-\operatorname{ctg} t+1)\sin^2 t\sin t\,dt}{\sin^2 t}=-\int\left(\frac{\cos^2 t}{\sin t}-\cos t+\sin t\right)dt=$$

$$=-\int\left(\frac{1}{\sin t}-\sin t-\cos t+\sin t\right)dt=-\int\frac{dt}{\sin t}+\int\cos t\,dt=$$

$$=-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+\sin t=\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|+\sin t+C.$$

Vratimo se na x:

Kako je $\sin t=\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, bit će $\cos t=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, pa je

$$\operatorname{ctg}\frac{t}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\cos t}}=\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^2}{1+x^2-x^2}}=x+\sqrt{1+x^2}.$$

$$\underline{I=\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+\frac{1}{1+x^2}+C.}$$

Pokažimo da taj integral možemo riješiti jednostavnije podijelivši polinom u brojniku s polinomom u nazivniku:

$$\int\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx=\int\left(1-\frac{x}{x^2+1}\right)\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}-\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}=$$

$$=\left(x^2+1=t;\quad x\,dx=\frac{dt}{2}\right)=\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^{3/2}}=$$

$$\underline{=\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+\frac{1}{\sqrt{1+x}}+C.}$$

317. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2-1}}.$ $\left[\text{Supstitucija } x=\dfrac{1}{\cos t};\ \dfrac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{x\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}}\right|+C\right].$

Posebni slučajevi integrala tipa III

Posebni slučaj a) $\displaystyle\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$

Integrale toga oblika računamo tako da ih pišemo u obliku

$$I\equiv P_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}+A_n\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Metodom neodređenih koeficijenata navedenom u tipu I određujemo koeficijente polinoma $P_n(x)$ i koeficijent A_n pa preostaje izračunati jedan integral koji spada u predtip B.

Zadaci

U zadacima **318** do **324** uklj. izračunaj zadane integrale koji spadaju u posebni slučaj a).

318. $\displaystyle\int\frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}\,dx\equiv$

$$\equiv(A_2x^2+A_1x+A_0)\sqrt{x^2-4x-7}+A_3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-7}}.\qquad\text{(a)}$$

Derivirajmo po x obje strane identiteta:

$$\frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}\equiv(A_2x^2+A_1x+A_0)\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x-7}}+\sqrt{x^2-4x-7}\,(2A_2x+A_1)+$$

$$+\frac{A_3}{\sqrt{x^2-4x-7}}\ \Big|\cdot\sqrt{x^2-4x-7}.$$

Odatle nakon uređenja:

$$3x^3-8x+5\equiv3A_2x^3+(2A_1-10A_2)x^2+(-14A_2-6A_1+A_0)x+(A_3-7A_1-2A_0).$$

Slijedi:

$$3A_2=3\to\underline{A_2=1.}$$

$$2A_1-10=0\to\underline{A_1=5.}$$

$$-14-30+A_0=-8\to\underline{A_0=36.}$$

$$A_3-35-72=5\to\underline{A_3=112.}$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$I=(x^2+5x+36)\sqrt{x^2-4x-7}+112\underbrace{\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-7}}}_{I_1}.$$

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-7}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-11}}=(x-2=t;\quad dx=dt;\quad 11=k^2)=\int\frac{dx}{\sqrt{t^2-k^2}}=$$

$$=\text{prema (54a)}=\ln\left|t+\sqrt{t^2-k^2}\right|=\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x-7}\right|.$$

Uvrštenje u I daje traženi rezultat:

$$\underline{I=(x^2+5x+36)\sqrt{x^2-4x-7}+112\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x-7}\right|+C.}$$

319. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}\equiv A_0\sqrt{x^2+4x+5}+A_1\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$

Deriviranjem i množenjem ove relacije sa $\sqrt{x^2+4x+5}$ dobivamo:

$$x\equiv A_0x+(2A_0+A_1)$$

$$A_0=1;\quad 2A_0+A_1=0\to A_1=-2.$$

$$I=\sqrt{x^2+4x+5}-2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

Prema predtipu B:

$$\underline{I=\sqrt{x^2+4x+5}-2\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C.}$$

Riješiti isti zadatak na drugi način uzevši u obzir da je $d(x^2+4x+5)=(2x+4)\,dx$, pa $x\,dx$ možemo prikazati u obliku $x\,dx=\dfrac{1}{2}\,d(x^2+4x+5)-2$.

320. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} \equiv (A_1x+A_0)\sqrt{2ax-x^2}+A_2\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}\,.$

$$\frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}} \equiv (A_1x+A_0)\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}+A_1\sqrt{2ax-x^2}+\frac{A_2}{\sqrt{2ax-x^2}}\ \Big|\cdot\sqrt{2ax-x^2}$$

$$x^2 \equiv A_1ax+A_0a-A_1x^2-A_0x+2A_1ax-A_1x^2+A_2$$

ili

$$x^2 \equiv -2A_1x^2+(3A_1a-A_0)x+(A_0a+A_2)$$

$$-2A_1=1 \to A_1=-\frac{1}{2}$$

$$3A_1a-A_0=0 \to A_0=-\frac{3}{2}a$$

$$A_0a+A_2=0 \to A_2=\frac{3}{2}a^2$$

$$I=\left(-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}a\right)\sqrt{2ax-x^2}+\frac{3}{2}a^2\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=$$

$$=-\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{3}{2}a^2\arcsin\frac{x-a}{a}+C.$$

$\left(I_1=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}\right.$ riješi prema [51a]$\left.\right)$.

321. $\displaystyle\int\frac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx.$ $\quad\left[(x+2)\sqrt{x^2-2x}-3\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x}\right|+C\right].$

322. $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$ $\quad\left[\frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C\right].$

323. $\displaystyle\int\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$ $\quad\left[x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right|+C\right].$

324. $\displaystyle\int\frac{3x^3\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$ $\quad\left[(x^2-5x+20)\sqrt{x^2+4x+5}-15\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C\right].$

Posebni slučaj b)

$$\int P_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Množeći i dijeleći integrand s $\sqrt{ax^2+bx+c}$ svodimo posebni slučaj b) na slučaj a).

Primjedba: Na taj način možemo rješavati i integrale predtipa C, tj. integrale oblika $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ i to jednostavnije!

Zadaci

U zadacima **325** do **328** uklj. izračunaj zadane integrale, koji spadaju u posebni slučaj b).

325. $\displaystyle\int(2x-5)\sqrt{2+3x-x^2}\,dx=\int\frac{(2x-5)(2+3x-x^2)}{\sqrt{2+3x-x^2}}\,dx=\int\frac{-2x^3+11x^2-11x-10}{\sqrt{2+3x-x^2}}\,dx=$

$= $ imamo slučaj a) $\displaystyle\equiv(A_2x^2+A_1x+A_0)\sqrt{2+3x-x^2}+A_3\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-x^2}}\,.$

Deriviranje daje:

$$\frac{-2x^3+11x^2-11x-10}{\sqrt{2+3x-x^2}}\equiv(A_2x^2+A_1x+A_0)\frac{3-2x}{2\sqrt{2+3x-x^2}}+$$

$$+\sqrt{2+3x-x^2}(2A_2x+A_1)+\frac{A_3}{\sqrt{2+3x-x^2}}\,.$$

Nakon množenja s $2\sqrt{2+3x-x^2}$ i uređivanja dobivamo:

$$-4x^3+22x^2-22x-20\equiv-6A_2x^3+(15A_2-4A_1)x^2+(8A_2+9A_1-2A_0)x+(4A_1+2A_0).$$

Odatle slijedi:

$$A_2=\frac{2}{3};\quad A_1=-3;\quad A_0=\frac{1}{6}\quad\text{i}\quad A_3=-4.$$

$$I=\left(\frac{2}{3}x^2-3x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{2+3x-x^2}-4\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-x^2}}=$$

$$=\left(\frac{2}{3}x^2-3x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{2+3x-x^2}-4\arcsin\frac{2x-3}{\sqrt{17}}+C.$$

326. **Riješimo na taj način integral riješen u zadatku 245.**

$$\int\sqrt{3x^2+10x+9}\,dx=$$

$$=\int\frac{3x^2+10x+9}{\sqrt{3x^2+10x+9}}\,dx\equiv(A_1x+A_0)\sqrt{3x^2+10x+9}+A_2\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+10x+9}}\,.$$

Deriviramo:

$$\frac{3x^2+10x+9}{\sqrt{3x^2+10x+9}}\equiv(A_1x+A_0)\frac{3x+5}{\sqrt{3x^2+10x+9}}+\sqrt{3x^2+10x+9}\cdot A_1+$$

$$+\frac{A_2}{\sqrt{3x^2+10x+9}}\ \Big|\cdot\sqrt{3x^2+10x+9}\ \text{ i uredimo:}$$

$$3x^2+10x+9\equiv6A_1x^2+(3A_0+15A_1)x+(5A_0+9A_1+A_2).$$

Slijedi: $\quad A_1=\dfrac{1}{2};\quad A_0=\dfrac{5}{6}\quad\text{i}\quad A_2=\dfrac{1}{3}\,.$

$$I=\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}\right)\sqrt{3x^2+10x+9}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+10x+9}}=\text{ prema predtipu } B=$$

$$=\frac{3x+5}{6}\sqrt{3x^2+10x+9}+\frac{\sqrt{3}}{9}\ln\left|3x+5+\sqrt{3}\sqrt{3x^2+10x+9}\right|+C.$$

Izračunaj na taj način integrale navedene u zadacima **248** do **251** uklj.

327. $\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx.$ $\left[\frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+C\right].$

328. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$ $\left[\frac{x}{4}(x^2-2)\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C\right].$

Posebni slučaj c).

$$\int\frac{dx}{(x-k)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Tu je n prirodan broj, dok je k realna konstanta (često nula).

Pomoću supstitucije $x-k=\frac{1}{t}$ svodimo zadani integral na posebni slučaj a) ili na osnovni integral.

Zadaci

U zadacima **329** do **336** uklj. izračunaj zadane integrale koji spadaju u posebni slučaj c)

329. $$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}=\left(x-1=\frac{1}{t},\quad x=\frac{1}{t}+1=\frac{1+t}{t},\quad dx=-\frac{dt}{t^2}\right)=$$

$$=-\int\frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\sqrt{\frac{(1+t)^2}{t^2}+\frac{1+t}{t}+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{3t^2+3t+1}}=\text{ predtip } B=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}}}=\left(t+\frac{1}{2}=z,\quad dt=dz,\quad \frac{1}{12}=k^2\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+k^2}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|z+\sqrt{k^2+z^2}\right|=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{3}}\right|=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2\sqrt{3}t+\sqrt{3}+2\sqrt{3t^2+3t+1}}{2\sqrt{3}}\right|=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x+\sqrt{3}+2\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}\right|+C.$$

330. $$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\left(x^4=\frac{1}{t},\quad t=\frac{1}{x^4},\quad x=\frac{1}{\sqrt[4]{t}},\quad dx=-\frac{1}{4}\frac{dt}{t^{\frac{5}{4}}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^{\frac{5}{4}}\cdot\frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{t}}}}=-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{\sqrt{t}+1}}=\left(\sqrt{t}=u,\quad\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{dt}{2u}=du,\right.$$

$$\left.dt=2u\,du\right)=-\frac{1}{2}\int\frac{u\,du}{\sqrt{u+1}}=\left(\sqrt{u+1}=z,\quad\frac{du}{2\sqrt{u+1}}=dz,\quad du=2z\,dz\right)=$$

$$=-\int(z^2-1)\,dz=-\frac{z^3}{3}+z=-\frac{1}{3}\sqrt{(u+1)^3}+\sqrt{u+1}=$$

$$=-\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^3}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C.$$

331. $$\int\frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{4x-x^2}}=\left(x-\frac{3}{2}=\frac{1}{t};\quad dx=-\frac{1}{t^2}dt,\quad x=\frac{1}{t}+\frac{3}{2};\right.$$

$$\left.t=\frac{2}{2x-3};\quad\sqrt{4x-x^2}=\frac{\sqrt{15t^2+4t-4}}{2t}\right)=\int\frac{dt}{\sqrt{15t^2+4t-4}}=$$

$$=\text{ predtip } B=C-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|.$$

332. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}.$ $\left[\arcsin\frac{x-1}{x\sqrt{2}}+C\right].$

333. $\int\frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}.$ $\left[C-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x}\right|\right].$

334. $\int\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\,dx.$ [Podijeli brojnik i nazivnik s x pa rastavi integral u tri integrala;

$$\frac{2x-1}{4}\sqrt{x^2-x+1}+\frac{19}{8}\ln\left|2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}\right|+C\Big].$$

335. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$. $\left[-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+C\right]$.

336. $\displaystyle\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$. $\left[\text{Vidi uputu kod zadatka 334;}\quad I=\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}+C\right]$.

Posebni slučaj d).
Ako integral ima oblik

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{Q_m(x)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

rastavljajući razlomljenu racionalnu funkciju $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ u parcijalne razlomke možemo kadšto zadani integral svesti na više integrala posebnog slučaja c).

Zadaci

U zadacima **337** do **339** uklj. izračunaj zadane integrale prethodno rastavivši u parcijalne razlomke razlomljenu racionalnu funkciju integranda.

337. $\displaystyle\int \frac{(3x-5)\,dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+4}}$.

$$\frac{3x-5}{(x-1)^2}\equiv\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}\Bigg|\cdot(x-1)^2$$

$$3x-5\equiv A+Bx-B,\quad \text{pa je}\quad B=3\quad \text{i}\quad A=-2$$

$$\frac{3x-5}{(x-1)^2}=-\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}$$

$$I=-2\underbrace{\int\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+4}}}_{I_1}+3\underbrace{\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+4}}}_{I_2}=-2I_1+3I_2$$

$$I_1=\int\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+4}}=\left(x-1=\frac{1}{t},\quad x=\frac{1}{t}+1,\quad dx=-\frac{dt}{t^2},\quad t=\frac{1}{x-1};\right.$$

$$\left.\sqrt{x^2+4}=\frac{1}{t}\sqrt{1+2t+5t^2}\right)=-\int\frac{t\,dt}{\sqrt{1+2t+5t^2}}=-I_1^0$$

$$I_1^0=\int\frac{t\,dt}{\sqrt{1+2t+5t^2}}\equiv\text{prema posebnom slučaju a)}\equiv A_0\sqrt{5t^2+2t+1}+A_1\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+2t+1}}.$$

Na poznati nam način dobivamo $A_0=\frac{1}{5}$ i $A_1=-\frac{1}{5}$ pa je

$$I_1=-I_1^0=-\frac{1}{5}\sqrt{5t^2+2t+1}+\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+2t+1}}=\text{prema predtipu } B=$$

$$=-\frac{1}{5}\sqrt{5t^2+2t+1}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{5t+1+\sqrt{5}\sqrt{5t^2+2t+1}}{5}\right|,$$

a uvrštenje $t=\frac{1}{x-1}$ daje

$$I_1=-\frac{1}{5}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x-1}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+4+\sqrt{5}\sqrt{x^2+4}}{x-1}\right|.$$

$$I_2=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+4}}=\left(x-1=\frac{1}{t},\quad dx=-\frac{dt}{t^2},\quad t=\frac{1}{x-1},\quad x=\frac{t+1}{t}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{2}{5}t+\frac{1}{5}}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{5t+1+\sqrt{5}\sqrt{5t^2+2t+1}}{5}\right|,$$

a uvrštenje $t=\frac{1}{x-1}$ daje

$$I_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+4+\sqrt{5}\sqrt{x^2+4}}{x-1}\right|$$

$$I=-2I_1+3I_2=\underline{\frac{2}{5}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x-1}-\frac{17}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+4+\sqrt{5}\sqrt{x^2+4}}{x-1}\right|+C.}$$

338. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$. $\left[\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x}\right|+C\right]$.

339. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}$. $\left[-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C\right]$.

TIP IV

Binomni integrali, tj. integrali oblika

$$\int x^p (ax^q+b)^r \, dx,$$

gdje su a i b realni, a p, q i r racionalni brojevi.

Ako je r razlomak, a to pretpostavljamo, tada binomni integral možemo izraziti konačnim brojem elementarnih funkcija i to samo u tim slučajevima, ako je

1) $\dfrac{p+1}{q}$ cio broj ili nula ili 2) $\dfrac{p+1}{q}+r$ cio broj ili nula.

Ako ti uvjeti integrabilnosti nisu ispunjeni, integrand ne možemo racionalizirati, pa dakle ni integral izračunati.

Supstitucije:

za slučaj 1) $ax^q+b=t^s$

za slučaj 2) $ax^q+b=t^s x^q$ ili $ax^{-q}+b=t$.

Tu je t nova promjenljiva, s eksponent korijena binoma, odnosno nazivnik u r, koji se u oba slučaja uzima s predznakom $+$.

Primjedba: kadšto se binomni integrali dadu jednostavnije izračunati pomoću neke druge podesnije supstitucije.

Zadaci

U zadacima **340** do **355** uklj. izračunaj zadane binomne integrale.

340. $\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2}\, dx = \int x^5 (1+x^3)^{\frac{2}{3}} dx.$

Kako je $p=5$, $q=3$, $r=\dfrac{2}{3}$ i $s=3$, dobivamo:

$\dfrac{p+1}{q}=\dfrac{5+1}{3}=2=$ cio broj — imamo slučaj 1), pa supstitucija glasi: $1+x^3=t^3$,

a odatle slijedi: $x=\sqrt[3]{t^3-1}$; $t=\sqrt[3]{1+x^3}$ i $dx=\dfrac{t^2\,dt}{\sqrt[3]{(t^3-1)^2}}$

$$I=\int \sqrt[3]{(t^3-1)^5}\cdot \sqrt[3]{t^6}\cdot \frac{t^2\,dt}{\sqrt[3]{(t^3-1)^2}}=\int (t^3-1)t^4 dt=\frac{t^8}{8}-\frac{t^5}{5}.$$

Uvrštenje $t=\sqrt[3]{1+x^3}$ daje traženi rezultat:

$$\underline{I=\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C.}$$

341. $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx=\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} dx.$

$$p=-\frac{1}{2},\quad q=\frac{1}{4},\quad r=\frac{1}{3},\quad s=3.$$

$$\frac{p+1}{q}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2\rightarrow \text{cio broj, slučaj 1).}$$

$$1+x^{\frac{1}{4}}=t^3,$$

pa je $t=\sqrt[3]{1+x^{1/4}}$, $x=(t^3-1)^4$, $dx=12t^2(t^3-1)^3 dt$

$$I=12\int (t^3-1)^{-2}\cdot t\cdot t^2(t^3-1)^3 dt=12\int (t^3-1)t^3 dt=$$

$$=12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)=\underline{\frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7}-3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4}+C.}$$

342. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}=\int x^{-2}(1+x^3)^{-\frac{5}{3}} dx.$

$$p=-2,\quad q=3,\quad r=-\frac{5}{3},\quad s=3$$

$$\frac{p+1}{q}=\frac{-2+1}{3}=-\frac{1}{3}\neq \text{cio broj}$$

$$\frac{p+1}{q}+r=-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}=-2=\text{ cio broj}\rightarrow \text{slučaj 2).}$$

Supstitucija $1+x^3=t^3x^3$.

Odatle $t=\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$; $1=x^3(t^3-1)$, $x^3=\dfrac{1}{t^3-1}$; $1+x^3=\dfrac{t^3}{t^3-1}$;

$$x=\frac{1}{\sqrt[3]{t^3-1}}=(t^3-1)^{-\frac{1}{3}},\quad dx=-t^2(t^3-1)^{-\frac{4}{3}} dt.$$

Uvrštenje u integral daje:

$$I=-\int t^{-3}(t^3-1)\,dt=-\int dt+\int \frac{dt}{t^3}=-t-\frac{1}{2t^2}=-\frac{1+2t^3}{2t^2}.$$

Uvrštenje $t=\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$ daje traženi rezultat

$$\underline{I=-\frac{3x^3+2}{2x\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}+C.}$$

343. $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}\,dx=\int x^{-6}(4-x^2)^{3/2}\,dx.$

$$p=-6,\quad q=2,\quad r=\frac{3}{2},\quad s=2$$

$$\frac{p+1}{q}=\frac{-6+1}{2}=-\frac{5}{2}\neq \text{ cio broj}$$

$$\frac{p+1}{q}+r=-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=-1=\text{ cio broj}\rightarrow \text{slučaj 2).}$$

$$4-x^2=t^2x^2,\quad \text{odatle}\quad t=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x},\quad x=\frac{2}{\sqrt{t^2+1}},\quad dx=-\frac{2t\,dt}{\sqrt{(t^2+1)^3}}$$

$$I=-\int\frac{1}{4}t^4\,dt=-\frac{1}{20}t^5=-\frac{1}{20}\frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{x^5}+C.$$

Izračunaj isti integral pomoću supstitucije $x=2\sin t$.

344. $\int x\sqrt{1+x^4}\,dx=\int x(1+x^4)^{\frac{1}{2}}\,dx.$

$$p=1;\quad q=4,\quad r=\frac{1}{2},\quad s=2.$$

$$\frac{p+1}{q}=\frac{1}{2}\neq \text{ cio broj}$$

$$\frac{p+1}{q}+r=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1=\text{ cio broj}\rightarrow \text{slučaj 2).}$$

Uzmimo drugu supstituciju toga slučaja. Kako je $a=b=1$ imamo:

$$1+x^{-4}=t,\quad x=(t-1)^{-\frac{1}{4}},\quad dx=-\frac{1}{4}(t-1)^{-\frac{5}{4}}dt;\quad 1+x^4=1+(t-1)^{-1}.$$

$$I=-\frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}(t-1)^{-2}\,dt=-\frac{1}{4}\int\frac{\sqrt{t}}{(t-1)^2}\,dt.$$

Supstitucija: $\sqrt{t}=z$, pa je $t=z^2$ i $dt=2z\,dz$.

$$I=-\frac{1}{4}\int\frac{2z^2\,dz}{(z^2-1)^2}.$$

Parcijalno integriramo: $u=z$, $du=dz$; $dv=-\frac{2z\,dz}{(z^2-1)^2}$, $v=\frac{1}{z^2-1}$.

$$I=+\frac{1}{4}\left(\frac{z}{z^2-1}-\int\frac{dz}{z^2-1}\right)=\text{ prema (56a) }=\frac{1}{4}\frac{z}{z^2-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{t}}{t-1}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}-1}\right|=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1+x^{-4}}}{x^{-4}}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^{-4}}+1}{\sqrt{1+x^{-4}}-1}\right|=$$

$$=\frac{1}{4}x^2\sqrt{x^4+1}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{x^4+1}+x^2}{\sqrt{x^4+1}-x^2}\right|+C.$$

345. $\int\frac{(3-\sqrt{x})^4}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\int x^{-\frac{2}{3}}\left(3-x^{\frac{1}{2}}\right)^4dx.$

Kako je $r=4$ cio broj, a mi smo za oba slučaja 1) i 2) pretpostavili da je r razlomak ne možemo zadani integral izračunati po tipu IV!

Budući da je $r=4$ prirodan broj, razvijemo $\left(3-x^{\frac{1}{2}}\right)^4$ po binomnoj formuli.

$$I=\int x^{-\frac{2}{3}}\left(81-4\cdot 27x^{\frac{1}{2}}+\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot 9x-4\cdot 3x^{\frac{3}{2}}+x^2\right)dx=$$

$$=81\int x^{-\frac{2}{3}}dx-108\int x^{-\frac{1}{6}}dx+54\int x^{\frac{1}{3}}dx-12\int x^{\frac{5}{6}}dx+\int x^{\frac{4}{3}}dx=$$

$$=243\sqrt[3]{x}-\frac{648}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{81}{2}\sqrt[3]{x^4}-\frac{72}{11}\sqrt[6]{x^{11}}+\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}+C.$$

346. $\int x^{-2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx.$

Prikazavši zadani integral u obliku $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$, riješimo ga jednostavnije na taj način da brojnik i nazivnik pomnožimo s $\sqrt{1+x^2}$, a zatim polinom u brojniku podijelimo s polinomom u nazivniku

$$I=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx=\int\frac{1+x^2}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx=\int\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=I_1+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|. \qquad \text{(a)}$$

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\text{ posebni slučaj c) tipa III, pa stavimo } x=\frac{1}{t},\ dx=$$

$$=-\frac{dt}{t^2}\cdot\sqrt{1+x^2}=\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}.$$

$$I_1=-\int\frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}}=-\sqrt{1+t^2}=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$I=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C.$$

347. $\int x^5 \sqrt[7]{2-3x^6}\,dx$.

Zadani binomni integral možemo izračunati jednostavnije pomoću supstitucije

$$2-3x^6=t.$$

Računamo: $dt=-18x^5\,dx$ i $x^5\,dx=-\frac{dt}{18}$

$$I=-\frac{1}{18}\int \sqrt[7]{t}\,dt=-\frac{7}{144}\sqrt[7]{t^8}=\underline{-\frac{7}{144}\sqrt[7]{(2-3x^6)^8}+C}.$$

Izračunaj taj integral prema tipu IV.

348. $\int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$.

Izračunaj taj integral na dva načina:

a) kao binomni integral,

b) pomoću supstitucije $x=\sqrt{5}\sin t$. $\left[\frac{x}{5\sqrt{5-x^2}}+C\right]$.

349. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. $\left[\frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+C\right]$.

350. $\int \frac{\sqrt{4+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$. $\left[2\sqrt{(4+\sqrt[3]{x})^3}+C\right]$.

351. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$. $\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C\right]$.

352. $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx$. $\left[\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1-x^4}+x}{x^2}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1-x^4}}{x^4}+C\right]$.

353. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$. $\left[-\frac{1}{10}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}+C\right]$.

354. $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx$. $\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}+\frac{36}{13}x^2\sqrt[6]{x}+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{6}{17}x^2\sqrt[6]{x^5}+C\right]$.

355. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Taj integral riješi na četiri načina:

a) kao binomni,

b) kao posebni slučaj a) tipa III,

c) pomoću supstitucije $1-x^2=t$,

d) pomoću supstitucije $x=\sin t$. $\left[-\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}+C\right]$.

U područje integrala iracionalnih funkcija spada i

TIP V

Eliptički integrali, tj. integrali oblika

$$\int R\left(x,\sqrt{a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_4}\right)dx, \text{ odnosno}$$

$$\int R\left(x,\sqrt{a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0}\right)dx, \text{ ako je } a_4=0.$$

Tu je R oznaka racionalne funkcije.

Integrand eliptičkog integrala ne možemo racionalizirati, pa taj integral ne možemo rastaviti u konačni broj integrala elementarnih funkcija. Elementarno se eliptični integrali računaju približno tako, da se integrand rastavi u beskonačni red pa se integrira član po član. Uz pretpostavku da beskonačni red funkcija, u koji smo rastavili integrand, konvergira uniformno, suma dobivenog reda integrala jednaka je traženom integralu.

3. Integrali transcendentnih funkcija

TIP VI

a) Integrali funkcija koje su racionalne u $\sin x$ i $\cos x$, tj.

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx.$$

Ovamo spadaju integrali u koje ulaze $\sin x$, $\cos x$ i konstante, dok x sam ne ulazi.

Upute

Pomoću supstitucije

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \qquad \text{(a)}$$

svodimo zadani integral na $\int R(t)\,dt$, tj. na tip I, odnosno na predtip A.

Iz $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ dobivamo pomoću poznatih trigonometrijskih formula

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{(b)}$$

$$dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Zadaci

U zadacima **356** do **365** uklj. riješi zadane integrale racionalnih funkcija od $\sin x$ i $\cos x$.

356. $\int\frac{dx}{\sin x}=$ prema (b) $=\int\frac{2\,dt\cdot(1+t^2)}{(1+t^2)\,2t}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|=$ prema (a) $=\underline{\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C}.$ (67)

357. $\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\left(x+\frac{\pi}{2}=t,\ dx=dt\right)=\int\frac{dt}{\sin t}=$ prema (67) $=$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|=\underline{\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C}. \qquad (68)$$

358. $\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}=\int\frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(8-4\frac{2t}{1+t^2}+7\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int\frac{dt}{t^2-8t+15}=$

$=$ predtip $A=2\int\frac{dt}{(t-4)^2-1}=(t-4=z,\ dt=dz)=2\int\frac{dz}{z^2-1}=$ prema (56b) $=$

$$=\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=\ln\left|\frac{t-4-1}{t-4+1}\right|=\underline{\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C}.$$

359. $\int\frac{dx}{5+4\cos ax}.$

Supstituiramo li $\operatorname{tg}\frac{ax}{2}=z$, tada prema (b) dobivamo $\cos ax=\frac{1-z^2}{1+z^2}$, dok iz $\frac{ax}{2}=\operatorname{arc\,tg} z$ slijedi $dx=\frac{2}{a}\frac{dz}{1+z^2}$.

Uvrštenje u integral daje:

$$I=\frac{2}{a}\int\frac{dz}{(1+z^2)\left(5+4\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}=\frac{2}{a}\int\frac{dz}{z^2+9}=\text{ prema (52a) }=\frac{2}{3a}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{3}=$$

$$=\underline{\frac{2}{3a}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right)+C.}$$

360. $\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx.$

Uz $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ i prema (b) dobivamo

$$I=\int\frac{2-\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}=4\int\frac{t^2-t+1}{(1+t^2)(t^2+3)}dt.$$

Integrand rastavljamo u parcijalne razlomke.

$$\frac{t^2-t+1}{(t^2+1)(t^2+3)}\equiv\frac{At+B}{t^2+1}+\frac{Ct+D}{t^2+3}.$$

Na poznati nam način (vidi tip I) dobivamo

$A=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$, $B=0$ i $D=1$, pa je

$$I=-\int\frac{2t\,dt}{t^2+1}+\int\frac{2t+4}{t^2+3}dt=-\ln(t^2+1)+\ln(t^2+3)+4\int\frac{dt}{t^2+3}=$$

$$=\ln\left(\frac{t^2+3}{t^2+1}\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{3}}=\ln\left(1+\frac{2}{t^2+1}\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{3}}=$$

$$=\ln\left(1+\frac{2}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=\ln\left(1+2\cos^2\frac{x}{2}\right)+$$

$$+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=\underline{\ln\left(2+\cos x\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.}$$

361. $\int\frac{\sin x}{1-\sin x}dx.$ $\left[-x+\operatorname{tg}x+\frac{1}{\cos x}+C\right].$

362. $\int\frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}.$ $\left[\frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C\right].$

363. $\int \frac{dx}{5-\cos x}$. $\left[\frac{1}{2}\left\{x+\ln|\sin x+\cos x|\right\}+C\right]$.

364. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$. $\left[\frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{1}{3}\left(5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4\right)\right\}+C\right]$.

365. $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$. $\left[\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}\right|+C\right]$.

Primjedba.

Ulaze li u integrand potencije $\sin x$ i $\cos x$ primjena navedene supstitucije $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ vodi do vrlo složenih integrala tipa I koje praktički često ne možemo izračunati. U tom slučaju postupamo kako slijedi:

1) Ako je podintegralna funkcija parna u $\sin x$ i $\cos x$, tj. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, supstitucija je

$$\operatorname{tg} x = t, \text{ pa je } x = \operatorname{arc\,tg} t.$$

2) Ako je podintegralna funkcija neparna u $\sin x$, tj. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, supstitucija glasi

$$\cos x = t.$$

3) Ako je integrand neparna funkcija u $\cos x$, tj. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ supstitucija glasi

$$\sin x = t.$$

U zadacima **366** do **373** izračunaj zadane integrale uzevši u obzir gore navedenu primjedbu.

366. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

Integrand je parna funkcija, jer je $R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x} = R(\sin x, \cos x)$, pa podijelivši brojnik i nazivnik s $\cos^2 x$ stavimo $\operatorname{tg} x = t$, dok je $\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$, $\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\operatorname{tg}^2 x = 1+t^2$, pa je

$$I = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{4}{\cos^2 x}-3+5\operatorname{tg}^2 x} = \int \frac{dt}{4(1+t^2)-3+5t^2} = \int \frac{dt}{9t^2+1} =$$

$$= \text{prema (52a)} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}(3t) = \underline{\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}(3\operatorname{tg} x)+C}.$$

367. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}$.

Kako je $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, supstitucija je $\operatorname{tg} x = t$ prema slučaju 1).

$$I = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2+3\operatorname{tg} x-1} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}} = \left(t+\frac{3}{2}=z, dt=dz\right) = \int \frac{dz}{z^2-k^2} =$$

$$= \text{prema (56b)} = \frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{z-\frac{\sqrt{13}}{2}}{z+\frac{\sqrt{13}}{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{t+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}}{t+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}}\right| =$$

$$= \underline{\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x+3-\sqrt{13}}{2\operatorname{tg} x+3+\sqrt{13}}\right|+C}.$$

368. $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$.

Funkcija je neparna u $\sin x$, jer je $R(-\sin x, \cos x) = \frac{-\sin^3 x}{1+\cos^2 x} = -R(\sin x, \cos x)$, pa je prema slučaju 2) supstitucija $\cos x = t$, dok je $\sin x\, dx = -dt$.

$$I = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\int \frac{(1-t^2)dt}{1+t^2} = \text{nakon dijeljenja brojnika s nazivnikom} =$$

$$= \int\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt = t-2\operatorname{arc\,tg} t = \underline{\cos x-\operatorname{arc\,tg}(\cos x)+C}.$$

369. $\int \frac{\cos^3 x}{4\sin^2 x-1}dx$.

$R(\sin x, -\cos x) = \frac{-\cos^3 x}{4\sin^2 x-1} = -R(\sin x, \cos x)$, pa je prema slučaju 3) supstitucija $\sin x = t$, dok je $dt = \cos x\, dx$.

$$I=\int\frac{\cos^2 x\cdot\cos x}{4\sin^2 x-1}\,dx=\int\frac{(1-\sin^2 x)\cos x\,dx}{4\sin^2 x-1}=\int\frac{(1-t^2)\,dt}{4t^2-1}=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{t^2-1}{t^2-\frac{1}{4}}\,dt=-\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{3}{4}\,\frac{1}{t^2-\frac{1}{4}}\right)dt=-\frac{t}{4}+\frac{3}{16}\int\frac{dt}{t^2-\frac{1}{4}}=-\frac{t}{4}+$$

$$+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}}\right|=\underline{-\frac{1}{4}\sin x+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{2\sin x-1}{2\sin x+1}\right|+C.}$$

370. $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}.$ $\left[\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{tg}x}{b}+C\right].$

371. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}$ $[\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}x-2)+C].$

372. $\displaystyle\int\frac{(\sin x+\sin^3 x)\,dx}{\cos 2x}.$ $\left[\frac{1}{2}\cos x-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C\right].$

373. $\displaystyle\int\frac{(\cos^3 x+\cos^5 x)\,dx}{\sin^2 x+\sin^4 x}.$ $\left[\sin x-\frac{2}{\sin x}-6\operatorname{arc\,tg}(\sin x)+C\right].$

b) Integrali funkcija koje su racionalne u $\operatorname{sh}x$ i $\operatorname{ch}x$.

Upute

Integrali oblika

$$\int R(\operatorname{sh}x,\ \operatorname{ch}x)\,dx$$

računaju se pomoću supstitucije

$$\operatorname{th}\frac{x}{2}=t. \qquad \text{(a)}$$

Odatle pomoću formula (63) i (65) za hiperbolne funkcije (vidi I dio Repetitorija) dobivamo:

$$\operatorname{sh}x=\frac{2t}{1-t^2};\ \operatorname{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2};\ dx=\frac{2\,dt}{1-t^2}. \qquad \text{(b)}$$

Primijetimo da u mnogim slučajevima dolazimo brže cilju, ako hiperbolne funkcije izrazimo sa e^x i e^{-x} uz supstituciju $e^x=t$.

Zadaci

U zadacima **374** do **379** uklj. izračunaj za dane integrale.

374. $\displaystyle\int\frac{dx}{\operatorname{sh}x}=$

$$=\text{prema (b) i (a)}=\int\frac{2\,dt\,(1-t^2)}{(1-t^2)\cdot 2t}=\underline{\int\frac{dt}{t}=\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+C.}$$

375. $\displaystyle\int\frac{dx}{\operatorname{ch}x}=$

$$=\text{prelazimo na eksponencijalne funkcije}=2\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=$$

$$=\left(e^x=t;\ e^{-x}=\frac{1}{t};\ e^x\,dx=dt,\ dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t}\right)=2\int\frac{dt}{t\left(t+\frac{1}{t}\right)}=$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2\operatorname{arc\,tg}t=\underline{2\operatorname{arc\,tg}e^x+C.}$$

376. $$\int\frac{dx}{\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x}=\int\frac{dx}{\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}}=4\int\frac{dx}{e^{2x}-e^{-2x}}=\left(e^{2x}=t,\ 2e^{2x}dx=dt,\right.$$

$$\left.dx=\frac{dt}{2t},\ e^{-2x}=\frac{1}{t}\right)=4\int\frac{dt}{2t\left(t-\frac{1}{t}\right)}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|=\ln\left|\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right|=$$

$$=\text{brojnik i nazivnik pomnožimo s } e^{-x}=\ln\left|\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right|=\underline{\ln|\operatorname{th}x|+C.}$$

377. $$\int\frac{dx}{2\operatorname{sh}x+3\operatorname{ch}x}=\text{prema (a) i (b)}=2\int\frac{dt\,(1-t^2)}{(1-t^2)(4t+3+3t^2)}=2\int\frac{dt}{3t^2+4t+3}=$$

$$=\text{prema predtipu } A=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{3t+2}{\sqrt{5}}=\underline{\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{3\operatorname{th}\frac{x}{2}+2}{\sqrt{5}}+C.}$$

378. $\displaystyle\int\frac{e^x\,dx}{\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x}.$ $[x+C].$

379. $\int \frac{dx}{2+5\,\mathrm{sh}\,x}$.

Izračunaj taj integral pomoću supstitucije $\mathrm{th}\,\frac{x}{2}=t$, a za probu uz prijelaz na eksponencijalne funkcije.

TIP VII

$$\int \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$\int \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$\int \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx.$$

Pomoću trigonometrijskih formula koje slijede svodimo produkt sinusa i kosinusa na njihov zbroj, odnosno razliku

Uputa

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \qquad \text{(a)}$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \qquad \text{(b)}$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]. \qquad \text{(c)}$$

Zadaci

U zadacima 380 do 390 uklj. izračunaj zadane integrale tipa VII.

380. $\int \sin\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{3}dx=$ prema (a) $=\frac{1}{2}\int\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{3}\right)dx+$

$$+\frac{1}{2}\int\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{3}\right)dx=\frac{1}{2}\int\sin\frac{7}{12}x\,dx+\frac{1}{2}\int\sin\left(-\frac{x}{12}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{7}\cos\frac{7}{12}x+\frac{1}{2}\cdot 12\cos\frac{x}{12}=\underline{-\frac{6}{7}\cos\frac{7}{12}x+6\cos\frac{x}{12}+C.}$$

381. $\int\cos(ax+b)\cdot\cos(ax-b)\,dx=$

$$=\text{ prema (b) }=\frac{1}{2}\int\cos 2ax\,dx+\frac{1}{2}\int\cos 2b\,dx=$$

$$=\underline{\frac{1}{4a}\sin 2ax+\frac{\cos 2b}{2}x+C.}$$

382. $\int\sin\omega t\cdot\sin(\omega t+\varphi)\,dt=$

$$=\text{ prema (c) }=\frac{1}{2}\int\cos(-\varphi)\,dt-\frac{1}{2}\int\cos(2\omega t+\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\underline{\frac{\cos\varphi}{2}t-\frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t+\varphi)+C.}$$

383. $\int\sin 3x\cdot\sin^2 x\,dx=$

$$=\int\sin 3x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int\sin 3x\,dx-\frac{1}{2}\int\sin 3x\cos 2x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{4}\int\sin 5x\,dx-\frac{1}{4}\int\sin x\,dx=$$

$$=\underline{-\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{20}\cos 5x+\frac{1}{4}\cos x+C.}$$

384. $\int\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x\,dx=$

$$=\int(\sin x\cdot\sin 2x)\sin 3x\,dx=\text{ prema (c) }=\frac{1}{2}\int(\cos x-\cos 3x)\sin 3x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int(\sin 3x\cdot\cos x-\sin 3x\cdot\cos 3x)\,dx=\text{ prema (a) }=\frac{1}{4}\int(\sin 4x+\sin 2x-\sin 6x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{1}{6}\cos 6x\right)=-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x+\frac{1}{24}\cos 6x=$$

$$=\underline{\frac{1}{8}\left(\frac{\cos 6x}{3}-\frac{\cos 4x}{2}-\cos 2x\right)+C.}$$

385. $\int\cos 10x\cdot\sin 3x\,dx.$ $\left[\frac{1}{14}\cos 7x-\frac{1}{26}\cos 13x+C\right].$

386. $\int\cos 4x\cdot\cos 7x\,dx.$ $\left[\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{22}\sin 11x+C\right].$

387. $\int\sin\frac{x}{3}\cdot\sin\frac{x}{2}dx.$ $\left[3\sin\frac{x}{6}-\frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x+C\right].$

388. $\int\cos x\cdot\cos^2 3x\,dx.$ $\left[\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{28}\sin 7x+C\right].$

389. $\int\sin 3x\cdot\sin 4x\cdot\sin 5x\,dx.$ $\left[\frac{1}{48}\cos 12x-\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x+C\right].$

390. $\int \cos x \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4}\, dx.$ $\left[\frac{1}{7}\sin\frac{7}{4}x+\frac{1}{5}\sin\frac{5}{4}x+\frac{1}{3}\sin\frac{3}{4}x+\sin\frac{x}{4}+C\right].$

TIP VIII

$$I_n=\int \sin^n x\, dx, \quad I_n=\int \cos^n x\, dx$$

gdje je n cio pozitivni broj.

Upute

Integrand rastavljamo u dva faktora tako da je drugi faktor $\sin x\, dx$, odnosno $\cos x\, dx$, iza toga parcijalno integriramo, pri čemu računajući prvi integral uzimamo $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, a za drugi integral $\sin^2 x=1-\cos^2 x$. Pri računanju tih integrala zgodno je dati I indeks, koji je jednak eksponentu $\sin x$, odnosno $\cos x$. Postupajući na taj način svodimo I_n na I_{n-2}, tj. vršimo rekurziju. Postoje i rekurzione formule (69), vidi ih dalje.

Primjedba: Ako je eksponent od $\sin x$, odnosno $\cos x$ neparan računanje možemo znatno pojednostaviti pomoću supstitucije $\cos x=t$, odnosno $\sin x=t$. Vidi zadatke 394 i 400.

Zadaci

U zadacima **391** do **400** uklj. izračunaj zadane integrale tipa VIII.

391. $I_2=\int \sin^2 x\, dx=$

$$=\int \sin x\cdot\sin x\, dx=(u=\sin x;\quad du=\cos x\, dx;\quad dv=\sin x\, dx,$$

$$v=-\cos x)=-\sin x\cos x+\int \cos^2 x\, dx$$

$$I_2=-\sin x\cos x+\int dx-\underbrace{\int \sin^2 x\, dx}_{I_2}$$

$$2\, I_2=-\sin x\cos x+x;\quad I_2=-\frac{\sin x\cos x}{2}+\frac{x}{2}$$

$$\underline{I_2=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C.} \qquad (59a)$$

392. $I_2=\int \cos^2 x\, dx.$ $\left[\text{Izračunaj na isti način: } \frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C\right].$ (60a)

393. $I_4=\int \sin^4 x\, dx=$

$$=\int \sin^3 x\cdot\sin x\, dx=(\sin^3 x=u,\quad du=3\sin^2 x\cos x\, dx;\quad dv=\sin x\, dx,\quad v=-\cos x)=$$

$$=-\sin^3 x\cos x+3\int \cos^2 x\cdot\sin^2 x\, dx=-\sin^3 x\cos x+3\int(1-\sin^2 x)\sin^2 x\, dx$$

$$I_4=-\sin^3 x\cos x+3\underbrace{\int \sin^2 x\, dx}_{I_2}-3\underbrace{\int \sin^4 x\, dx}_{I_4}$$

$$I_4=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x+\frac{3}{4}I_2 \rightarrow \text{rekurzija! Sveli smo } I_4 \text{ na } I_2.$$

$$I_4=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x+\frac{3}{4}\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)=\underline{-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x+\frac{3}{8}x-\frac{3}{16}\sin 2x+C.}$$

394. $I_5=\int \sin^5 x\, dx=$

$$=\int \sin^4 x\sin x\, dx=\int(1-\cos^2 x)^2\sin x\, dx=(\cos x=t,\quad -\sin x\, dx=dt)=$$

$$=-\int(1-t^2)^2 dt=-\int dt+2\int t^2 dt-\int t^4 dt=-t+\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5=$$

$$\underline{=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C.}$$

395. $\int \cos^2 5x\, dx.$ $\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 10x}{20}+C\right].$

396. $\int \cos^3 x\, dx.$ $\left[\frac{1}{3}\sin x\cos^2 x+\frac{2}{3}\sin x+C\right].$

397. $\int \sin^3 x\, dx.$ $\left[-\frac{1}{3}\sin^2 x\cos x-\frac{2}{3}\cos x+C\right].$

398. $\int \cos^4 x\, dx.$ $\left[\frac{1}{4}\sin x\cdot\cos^3 x+\frac{3}{8}x+\frac{3}{16}\sin 2x+C\right].$

Formule rekurzije

$$\left.\begin{aligned} I_n&=\int \sin^n x\, dx=\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cdot\cos x+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\, dx.\\ I_n&=\int \cos^n x\, dx=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\cdot\sin x+\frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\, dx.\end{aligned}\right| \qquad (69)$$

399. $\int \sin^4 x\, dx.$

[Rezultat kontroliraj prema prvoj formuli (69).]

400. $\int \cos^5 x\, dx.$

[Izračunaj integral na dva načina. Rezultat kontroliraj prema drugoj formuli (69).]

TIP IX

$$I_{\mathrm{I}}=\int \operatorname{tg}^n x\,\mathrm{d}x; \qquad I_{\mathrm{II}}=\int \operatorname{ctg}^n x\,\mathrm{d}x,$$

gde je n cio pozitivan broj.

Uputa

Supstitucije

za $I_{\mathrm{I}}: \operatorname{tg} x=t$, pa je $x=\operatorname{arc\,tg} t$ i $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ (a)

za $I_{\mathrm{II}}: \operatorname{ctg} x=t$, pa je $x=\operatorname{arc\,ctg} t$ i $\mathrm{d}x=-\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. (b)

Zadaci

U zadacima **401** do **410** uklj. izračunaj zadane integrale tipa IX.

401. $\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x=$

$$=\text{prema (a)}=\int\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}t-\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=$$

$$=t-\operatorname{arc\,tg} t=\operatorname{tg} x-\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)=\underline{\operatorname{tg} x-x+C.}$$

Prema (b) na isti način dobivamo $\int \operatorname{ctg}^2 x\,\mathrm{d}x=-\operatorname{ctg} x-x+C$. Pokaži to!

402. $\int \operatorname{tg}^5 x\,\mathrm{d}x=$

$$=\text{prema (a)}=\int\frac{t^5}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\text{dijelimo brojnik s nazivnikom}=$$

$$=\int\left(t^3-t+\frac{t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+1}=\left(t^2+1=z,\quad t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}z\right)=$$

$$=\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}\ln z=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)=$$

$$=\underline{\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln|\cos x|+C.}$$

jer je $1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

403. $\int \operatorname{tg}^3 x\,\mathrm{d}x.$ $\left[\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C\right].$

404. $\int \operatorname{ctg}^3 x\,\mathrm{d}x=$

$$=\text{prema (b)}=-\int\frac{t^3}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=-\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{ctg}^2 x|=$$

$$=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\underline{-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x-\ln|\sin x|+C.}$$

405. $\int \operatorname{ctg}^7 x\,\mathrm{d}x=$

$$=\text{prema (b)}=-\int\frac{t^7}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=-\int[t^7:(t^2+1)]\,\mathrm{d}t=-\int\left(t^5-t^3+\right.$$

$$\left.+t-\frac{t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t=-\frac{t^6}{6}+\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)=$$

$$=\underline{-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^6 x+\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x-\ln|\sin x|+C.}$$

406. $\int(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)^3\,\mathrm{d}x=$

$$=\int\left(\operatorname{tg} x+\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)^3\mathrm{d}x=\int\left(\frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{tg} x}\right)^3\mathrm{d}x=\int\frac{\operatorname{tg}^6 x+3\operatorname{tg}^4 x+3\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{tg}^3 x}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int(\operatorname{tg}^3 x+3\operatorname{tg} x+3\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg}^3 x)\,\mathrm{d}x=\text{prema zadacima 403 i 404}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|-3\ln|\cos x|+3\ln|\sin x|-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x-\ln|\sin x|=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x-2\ln|\cos x|+2\ln|\sin x|=\underline{\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x)+2\ln|\operatorname{tg} x|+C.}$$

407. $\int \operatorname{tg}^2 5x\,\mathrm{d}x.$ $\left[\dfrac{1}{5}\operatorname{tg} 5x-x+C\right].$

408. $\int \operatorname{tg}^8 x\,\mathrm{d}x.$ $\left[\dfrac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x-\dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x+C\right].$

409. $\int \operatorname{ctg}^4 x\,\mathrm{d}x.$ $\left[-\dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+x+C\right].$

410. $\int \operatorname{ctg}^7 x\,dx.$ $\left[-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^6 x+\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x-\ln|\sin x|+C\right].$

TIP X

$$I_n=\int\frac{dx}{\sin^n x}\quad;\quad I_n=\int\frac{dx}{\cos^n x},$$

gdje je n cio pozitivan broj.

Uputa

Integrand rastavi u dva faktora tako, da je drugi faktor $\frac{dx}{\sin^2 x}$, odnosno $\frac{dx}{\cos^2 x}$, iza toga parcijalno integriraj, pri čemu računajući prvi I_n uzmi $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ i $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, a za drugi I_n $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ i $\sin^2 x=1-\cos^2 x$. Na taj način svodimo I_n na I_{n-2}, tj. vršimo rekurziju. Postoje i rekurzione formule (70), vidi ih dalje.

Primjedba. Ako je eksponent od $\sin x$, odnosno $\cos x$ paran, možemo integrale toga tipa mnogo brže izračunati, ako izvršimo prijelaz na funkciju kotangensa, odnosno tangensa.

Zadaci

U zadacima **411** do **418** uklj. izračunaj integrale tipa X.

411. $I_3=\int\frac{dx}{\sin^3 x}=$

$$=\int\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}=\left(u=\frac{1}{\sin x},\quad du=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx;\quad dv=\frac{dx}{\sin^2 x},\quad v=-\operatorname{ctg} x\right)=$$

$$=-\frac{1}{\sin x}\cdot\operatorname{ctg} x-\int\operatorname{ctg} x\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx=$$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}dx=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\underbrace{\int\frac{dx}{\sin^3 x}}_{I_3}+\underbrace{\int\frac{dx}{\sin x}}_{I_1}.$$

$$2I_3=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}+I_1\rightarrow\text{ rekurzija od } I_3 \text{ na } I_1!$$

$$I_3=-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}I_1=\text{prema (67)}=\underline{-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.}$$

412. $I_3=\int\frac{dx}{\cos^3 x}.$ $\left[\text{Na isti način uz (68)! } \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C\right.\right].$

413. $I_4=\int\frac{dx}{\sin^4 x}=$

$$=\int\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}=\left(u=\frac{1}{\sin^2 x},\quad du=-\frac{2\cos x\,dx}{\sin^3 x};\quad dv=\frac{dx}{\sin^2 x},\right.$$

$$\left.v=-\operatorname{ctg} x\right)=-\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}-2\int\frac{\operatorname{ctg} x\cdot\cos x}{\sin^3 x}=-\frac{\cos x}{\sin^3 x}-2\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x}dx=$$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^3 x}-2\underbrace{\int\frac{dx}{\sin^4 x}}_{I_4}+2\underbrace{\int\frac{dx}{\sin^2 x}}_{I_2}.$$

$$3I_4=-\frac{\cos x}{\sin^3 x}+2I_2\rightarrow\text{rekurzija } I_4 \text{ na } I_2!$$

$$I_4=-\frac{1}{3}\frac{\cos x}{\sin^3 x}+\frac{2}{3}I_2=\underline{-\frac{1}{3}\frac{\cos x}{\sin^3 x}-\frac{2}{3}\operatorname{ctg} x+C.}$$

Izračunajmo isti integral prelazeći na $\operatorname{ctg} x$.

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x}=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2dx=\int\left(1+\operatorname{ctg}^2 x\right)^2dx=\int\left(1+2\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg}^4 x\right)dx=$$

$$=\int dx+2\int\operatorname{ctg}^2 x\,dx+\int\operatorname{ctg}^4 x=\text{ vidi zadatke 401 i 409}=x-2\operatorname{ctg} x-2x-$$

$$-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+x=\underline{-\operatorname{ctg} x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C.}$$

414. $I_5=\int\frac{dx}{\sin^5 x}.$ $\left[-\frac{1}{4}\frac{\cos x}{\sin^4 x}-\frac{3}{8}\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C\right].$

415. $I_5=\int\frac{dx}{\cos^5 x}=$

$$=\int\frac{1}{\cos^3 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\left(u=\frac{1}{\cos^3 x},\quad du=3\frac{\sin x}{\cos^4 x}dx;\quad dv=\frac{dx}{\cos^2 x},\quad v=\operatorname{tg} x\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos^3 x}\operatorname{tg} x-3\int\operatorname{tg} x\cdot\frac{\sin x\,dx}{\cos^4 x}=\frac{\sin x}{\cos^4 x}-3\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^5 x}dx=$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^4 x}-3\underbrace{\int\frac{dx}{\cos^5 x}}_{I_5}+3\underbrace{\int\frac{dx}{\cos^3 x}}_{I_3}=\frac{\sin x}{\cos^4 x}-3I_5+3I_3.$$

$$4I_5=\frac{\sin x}{\cos^4 x}+3I_3$$

$$I_5=\frac{1}{4}\frac{\sin x}{\cos^4 x}+\frac{3}{4}I_3 \rightarrow \text{rekurzija!}$$

$$I_3=\text{ prema zadatku } 412=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\underline{I_5=\frac{1}{4}\frac{\sin x}{\cos^4 x}+\frac{3}{8}\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.}$$

416. $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^6 x}=$

$$=\text{ prelazimo na tangens }=\int\frac{dx}{(\cos^2 x)^3}=\int(1+\operatorname{tg}^2 x)^3\,dx=\left(\operatorname{tg}x=t,\ dx=\frac{dt}{t^2+1}\right)=$$

$$=\int(1+t^2)^3\frac{dt}{1+t^2}=\int(1+2t^2+t^4)\,dt=t+\frac{2}{3}t^3+\frac{t^5}{5}=\underline{\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}x+C.}$$

Formule rekurzije

$$I_n=\int\frac{dx}{\sin^n x}=-\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^{n-2}x}$$

$$I_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}=\frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x} \qquad (70)$$

417. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^7 x}$. [Rezultat kontroliraj prema prvoj formuli (70)]

418. $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^4 x}$. [Izračunaj integral na dva načina. Rezultat kontroliraj prema drugoj formuli (70)]

TIP XI

a) $\displaystyle\int\sin^m x\cdot\cos^n x\,dx$

gdje su m i n cijeli brojevi pozitivni ili negativni, pa je integrand racionalan s obzirom na funkcije sinus i kosinus.

U zadacima **419** do **445** uklj. izračunaj zadane integrale tipa XI.

1) Oba eksponenta m i n su pozitivna, pri čemu je jedan paran, a drugi neparan.

419. $\displaystyle\int\sin^2 x\cdot\cos^3 x\,dx=(\sin x=t,\ \cos x\,dx=dt)=\int\sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx=\int t^2(1-t^2)\,dt=$

$$\int t^2\,dt-\int t^4\,dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}=\underline{\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C.}$$

420. $\displaystyle\int\sin^6 ax\cdot\cos^3 ax\,dx$. $\left[\frac{1}{7a}\sin^7 ax-\frac{1}{9a}\sin^9 ax+C\right]$.

421. $\displaystyle\int\sin^3 x\cdot\cos^4 x\,dx$. $\left[\cos x=t;\ -\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+C\right]$.

422. $\displaystyle\int\sin^4 x\cdot\cos^3 x\,dx$. $\left[\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+C\right]$.

2) Jedan eksponent (m ili n) je pozitivan i neparan, a drugi je negativan.

423. $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx=$

$$=(\sin x=t,\ \cos x\,dx=dt)=\int\frac{(1-\sin^2 x)\cos x\,dx}{\sin^4 x}=\int\frac{(1-t^2)\,dt}{t^4}=\int\frac{dt}{t^4}-\int\frac{dt}{t^2}=$$

$$=-\frac{1}{3}\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}=\underline{-\frac{1}{3}\frac{1}{\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}+C.}$$

424. $\displaystyle\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$. $\left[\cos x=t;\ \frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C\right]$.

425. $\displaystyle\int\frac{\cos^5 x}{\sin x}\,dx$. $\left[\ln|\sin x|-\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^4 x+C\right]$.

3) Jedan eksponent (m ili n) je pozitivan i paran, a drugi je negativan.

426. $\displaystyle\int\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx=\int\frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^2 x}\,dx=\int\frac{1-2\cos^2 x+\cos^4 x}{\cos^2 x}\,dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-2\int dx+$

$$+\int\cos^2 x\,dx=\operatorname{tg}x-2x+\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}=\underline{\operatorname{tg}x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{3}{2}x+C.}$$

427. $\displaystyle\int\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x}\,dx=\int\frac{dx}{\sin^4 x}-\int\frac{dx}{\sin^2 x}=$ prema zadatku 413 =

$$= -\frac{1}{3}\frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{2}{3}\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} x = -\frac{1}{3}\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} + \frac{1}{3}\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg} x\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\operatorname{ctg} x \cdot \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \underline{-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C.}$$

428. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx.$ $\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \cos x + C\right].$

4) Oba eksponenta m i n su jednaka, pozitivna i neparna.

429. $\int \sin^5 x\cdot\cos^5 x\,dx = \int \sin^5 x\cdot\cos^4 x\cdot\cos x\,dx = \int \sin^5 x\,(1-\sin^2 x)^2\cos x\,dx = (\sin x = t,$

$\cos x\,dx = dt) = \int t^5(1-t^2)^2\,dt = \frac{1}{6}t^6 - \frac{1}{4}t^8 + \frac{1}{10}t^{10} =$

$$= \underline{\frac{1}{6}\sin^6 x - \frac{1}{4}\sin^8 x + \frac{1}{10}\sin^{10} x + C.}$$

430. $\int \sin^3 x\cdot\cos^3 x\,dx.$ $\left[\frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + C\right].$

5) Oba eksponenta m i n su jednaka, pozitivna i parna.

431. $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\,dx = \left(2x = t, dx = \frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{8}\int \sin^2 t\,dt =$

$= \text{prema (59a)} = \frac{1}{8}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right) = \underline{\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C.}$

432. $\int \sin^2\frac{x}{4}\cdot\cos^2\frac{x}{4}\,dx.$ $\left[\frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\sin x + C\right].$

433. $\int \sin^4 x\cdot\cos^4 x\,dx.$ $\left[\text{Uzmi u obzir zadatak 393; } \frac{1}{32}\left(-\frac{1}{4}\sin^3 2x\cos 2x + \frac{3}{4}x - \frac{3}{16}\sin 4x\right) + C\right].$

6) Oba eksponenta m i n su jednaka, negativna, parna ili neparna.

434. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cdot\cos^4 x} =$

$= 16\int \frac{dx}{16\sin^4 x\cos^4 x} = 16\int \frac{dx}{(\sin 2x)^4} = \left(2x = t,\quad dx = \frac{1}{2}dt\right) = 8\int \frac{dt}{\sin^4 t} =$

$= \text{prema zadatku 413} = 8\left(-\frac{1}{3}\frac{\cos t}{\sin^3 t} - \frac{2}{3}\operatorname{ctg} t\right) = -\frac{8}{3}\frac{\cos 2x}{\sin^3 2x} - \frac{16}{3}\operatorname{ctg} 2x + C =$

$$= \underline{-8\operatorname{ctg} 2x - \frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x + C.}$$

435. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos^3 x}.$ $\left[\text{Izračunaj na isti način uzevši u obzir zadatak 411; } 4\left(-\frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} 2x|\right) + C\right].$

7) Oba eksponenta m i n su različita, pozitivna i parna.

436. $\int \sin^2 x\cdot\cos^4 x\,dx =$

$= \int (\sin x\cdot\cos x)^2\cos^2 x\,dx = (\text{prema } \sin 2x = 2\sin x\cos x \text{ i } 1+\cos 2x = 2\cos^2 x) =$

$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)\,dx = \left(2x = t,\quad dx = \frac{1}{2}dt;\ \sin 2x = z,\ 2\cos 2x\,dx = dz\right) =$

$= \frac{1}{16}\int \sin^2 t\,dt + \frac{1}{16}\int z^2\,dz = \frac{1}{16}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right) + \frac{1}{16}\frac{z^3}{3} = \underline{\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.}$

437. Izračunaj isti integral uzevši $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ i $\cos^4 x = \frac{(1+\cos 2x)^2}{4}$. $\left[\frac{x}{16} + \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin 6x}{132} + C\right].$

438. $\int \sin^4 x\cdot\cos^2 x\,dx.$ $\left[\frac{x}{16} - \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin 6x}{192} + C\right].$

8) Oba eksponenta m i n su različita, negativna i parna.

439. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^4 x} =$

$= \left(\text{prema } \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg}^2 x} \text{ i } \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x\right) =$

$= \int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}\cdot(1+\operatorname{tg}^2 x)\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^2}{\operatorname{tg}^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + 2 + \operatorname{tg}^2 x\right)\frac{dx}{\cos^2 x} =$

$= \left(\operatorname{tg} x = t;\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt\right) = \int \frac{dt}{t^2} + 2\int dt + \int t^2\,dt = \underline{-\frac{1}{\operatorname{tg} x} + 2\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.}$

440. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^6 x}$. $\left[-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - 4\operatorname{ctg} x + 6\operatorname{tg} x + \frac{4}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C\right]$

9) Oba eksponenta m i n su različita, negativna i neparna.

441. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x} =$

$= $ (brojnik i nazivnik množimo sa $\sin x$) $= \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x \cdot \cos^3 x} = \int \frac{\sin x\, dx}{(1-\cos^2 x)\cos^3 x} =$

$= (\cos x = t,\ -\sin x\, dx = dt) = \int \frac{dt}{t^3(t^2-1)} = $ (nakon rastavljanja podintegralne funkcije u parcijalne razlomke) $= -\int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{t^2} - \ln|t| +$

$+ \frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{2}\ln|t-1| = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 x} + \ln\left|\frac{\sqrt{\cos^2 x - 1}}{\cos x}\right| + C.$

442. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos x} =$

$= \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^5 x \cos x}{\cos^2 x}} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\sin^4 x \cdot \operatorname{tg} x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x}\cdot(1+\operatorname{ctg}^2 x)^2 \operatorname{ctg} x =$

$= \int \frac{dx}{\cos^2 x}\left(1 + \frac{2}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{tg}^4 x}\right)\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \left(\operatorname{tg} x = t,\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt\right) = \int\left(\frac{1}{t} + \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t^5}\right)dt =$

$= \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}^4 x} + C = \ln|\operatorname{tg} x| - \operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x + C.$

443. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$. $\left[\ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C\right]$.

10) Oba eksponenta m i n su negativna, pri čemu je jedan eksponent (m ili n) paran, a drugi neparan.

444. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \sin 2x} =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)} =$

$= (\sin x = t,\ \cos x\, dx = dt) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2(1+t)(1-t)} = $ nakon rastavljanja u parcijalne razlomke $= \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{2}\ln|1-t|\right) =$

$= -\frac{1}{2\sin x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C.$

445. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^2 x}$. $\left[\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C\right]$.

b) Integrali funkcija koje su iracionalne s obzirom na trigonometrijske funkcije

Zadaci

U zadacima **446** do **457** uklj. izračunaj zadane integrale toga tipa.

446. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\, dx = $ (kako je eksponent od $\sin x$ neparan, stavimo $\cos x = t$, pa je $\sin x\, dx = -dt$) $= \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x\, dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} = -\int \frac{(1-t^2)\, dt}{\sqrt[3]{t^4}} = -\int t^{-\frac{4}{3}}\, dt + \int t^{\frac{2}{3}}\, dt =$

$= -\frac{t^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} + \frac{t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x} + C.$

447. $\int \sqrt[5]{\sin^3 x} \cdot \cos^5 x\, dx =$

(budući da je eksponent od $\cos x$ neparan, stavimo $\sin x = t$, pa je $\cos x\, dx = dt$) $=$

$= \int \sqrt[5]{\sin^3 x} \cdot \cos^4 x \cos x\, dx = \int t^{\frac{3}{5}}\left(1-t^2\right)^2 dt = \int\left(t^{\frac{3}{5}} - 2t^{\frac{13}{5}} + t^{\frac{23}{5}}\right)dt =$

$= \frac{5}{8}\sqrt[5]{\sin^8 x} - \frac{5}{9}\sqrt[5]{\sin^{18} x} + \frac{5}{28}\sqrt[5]{\sin^{28} x} + C.$

448. $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos x \sqrt[3]{\cos^2 x}}$. $\left[\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x} + C\right]$.

449. $\int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cdot \cos^3 x\, dx$. $\left[\frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x} - \frac{3}{11}\sqrt[3]{\sin^{11} x} + C\right]$.

450. $\int \sqrt[7]{\sin^5 x \cdot \cos^3 x}\, dx.$ $\left[\frac{7}{12}\sqrt[7]{\sin^{12} x} - \frac{7}{26}\sqrt[7]{\sin^{26} x} + C\right].$

451. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}\, dx.$ $\left[\frac{5}{12}\sqrt[5]{\cos^2 x}\left(\cos^2 x - 6\right) + C\right].$

452. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}} =$

$= \left(\text{kako je zbroj eksponenata } -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -2 = \text{cio negativan paran broj, svodimo na}\right.$

$\left.\operatorname{tg} x = t, \text{ pa je } \frac{dx}{\cos^2 x} = dt\right) = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\sqrt[4]{\operatorname{tg}^3 x}} = \int \frac{dt}{\sqrt[4]{t^3}} = \underline{4\sqrt[4]{\operatorname{tg} x} + C.}$

453. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \sin x}} =$

$= \left(\text{opet je } -\frac{7}{2} - \frac{1}{2} = -4 \text{ cio negativan paran broj pa integrand svodimo na } \operatorname{tg} x = t,\right.$

$\left. dt = \frac{dx}{\cos^2 x}\right) = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\sqrt{\cos^4 x \operatorname{tg} x}} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x}} =$

$= \int \frac{dt}{\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}} = \int \frac{1+t^2}{\sqrt{t}}\, dt = 2\sqrt{t} + \frac{2}{5}\sqrt{t^5} = \underline{2\sqrt{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{5}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x} + C.}$

454. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}.$ $[2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C].$

455. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cdot \cos x}\, dx =$

$= \int \frac{\cos \cdot x \sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cdot \cos^2 x}\, dx = \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}\, dx =$

$\left(\operatorname{tg} x = t;\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x}\right) = \int \frac{\sqrt{t}}{t}\, dt = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \underline{2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C.}$

456. $\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 1}}.$ $[\ln|\operatorname{tg} x + 2 + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 1}\,|].$

457. $\int \frac{1+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}\, dx.$ $\left[-\operatorname{ctg} x - \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{ctg}^3 x} + C\right].$

VI. ODREĐENI INTEGRALI

A. POJAM ODREĐENOG INTEGRALA I NJEGOVO GEOMETRIJSKO ZNAČENJE

Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija u intervalu $[a, b]$. Razdijelimo taj interval bilo kako tačkama $x_0=a, x_1, x_2, \ldots, x_n=b$ na n podintervala duljine $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ $(\Delta x_i = -x_i - x_{i-1})$ i u svakom od njih odaberimo na bilo koji način po jednu tačku, neka nadalje tako odabrane tačke imaju apscise $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

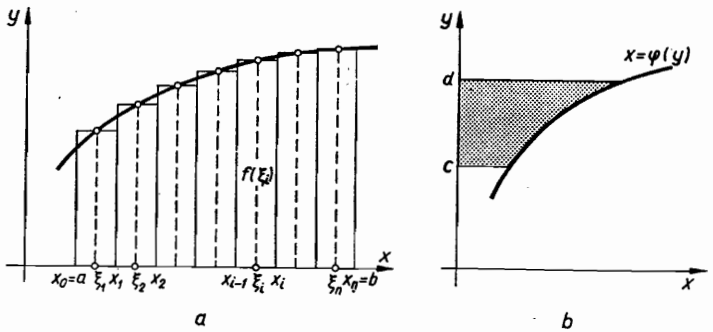
zove se tada integralna suma funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

Kako je interval $[a, b]$ moguće na bezbroj raznih načina razbiti na n podintervala, a u ovima opet na proizvoljan broj načina odabrati tačke $\xi_1 \ldots, \xi_n$, to odatle slijedi da integralna suma funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ nije jednoznačno određena. No pokazuje se da sve integralne sume jedne te iste funkcije $f(x)$ na istom intervalu $[a\ b,]$ imaju istu graničnu vrijednost kada $n \to \infty$ i kada duljina najvećeg od svih podintervala teži k nuli. Taj se zajednički limes zove određenim integralom funkcije $f(x)$ na intervalu $[a,b]$.

Oznaka $\int_a^b f(x)\,dx$. Po definiciji je dakle

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Iz slike 9a. se vidi da izraz $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ dosta dobro aproksimira poršinu lika omeđenog krivuljom $y=f(x)$, osi apscisa i pravcima $x=a$ i $x=b$. Ta je aproksimacija to bolja



Slika 9

što je broj n podintervala veći. Zato se i površina S_a^b tog lika definira sa

$$S_a^b = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ovom je relacijom dano geometrijsko značenje određenog integrala. Površina omeđena krivuljom $x=\varphi(y)$, osi ordinata i pravcima $y=c$ i $y=d$ dana je relacijom:

$$S_c^d = \int_c^d \varphi(y)\,dy.$$

Vidi sl. 9b.

B. PRAVILA ZA ODREĐENE INTEGRALE

1. Ako u određenom integralu zamijenimo granice integral mijenja predznak

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{74}$$

2. Integral kome su obje granice integracije jednake, jednak je nuli

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Vidi se iz slike 9.

3. Određeni integral zbroja, odnosno razlike funkcija jednak je zbroju, odnosno razlici integrala tih funkcija

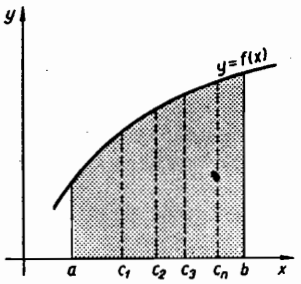
$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx. \tag{74a}$$

4. Konstanta koja množi određeni integral stavi se ispred znaka integrala

$$\int_a^b k f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx.$$

5. Određeni integral možemo rastaviti u više određenih integrala istog integranda i obratno: zbroj od više određenih integrala istog integranda možemo svesti na jedan određeni integral tog integranda. Vidi sl. 10.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx.$$



Slika 10

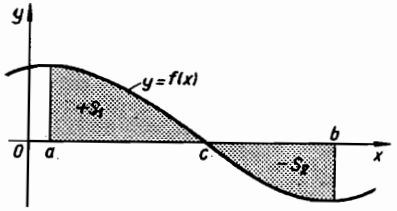
Pročitaj tu formulu i od desna na lijevo!

6. Ako je podintegralna funkcija u čitavom intervalu integracije $[a, b]$ ili na nekom dijelu tog intervala negativna, tj. graf funkcije nalazi se potpuno ili djelomično ispod osi x, tada površina, koju određuju taj negativni dio krivulje i os x ulazi u rezultat integriranja s predznakom minus.

To znači: Određeni integral daje algebarski zbroj površina, pa je prema slici 11:

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_1 - S_2.$$

Tražimo li zbroj apsolutnih vrijednosti površina, postupamo tako da za dijelove površine koje leže ispod osi x, stavimo ispred znaka integrala predznak minus ili integriramo od desna na lijevo.



Slika 11

Postupamo dakle prema slici 11 kako slijedi:

$$S=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^b f(x)\,dx=S_1+S_2$$

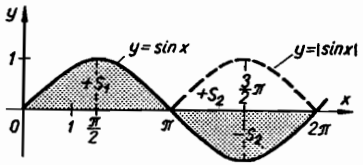
ili

$$S=\int_a^c f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=S_1+S_2.$$

Navedimo primjere.

Prema slici 12:

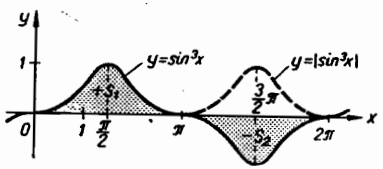
$$\int_0^{2\pi}\sin x\,dx=S_1-S_2=0,\quad \text{jer je}\quad S_1=|S_2|,$$



Slika 12

dok se zbroj apsolutnih vrijednosti površina računa ovako:

$$S=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx=4 \text{ kvadratne jedinice.}$$



Slika 13

Vidi dalje zadatak 458.

Također prema slici 13:

$$\int_0^{2\pi}\sin^3 x\,dx=S_1-S_2=0,\quad \text{jer je}\quad S_1=|S_2|,$$

dok je

$$S=S_1+S_2=2\int_0^{\pi}\sin^3 x\,dx=\frac{8}{3}\ \text{kv. jedinica.}$$

Vidi zadatak 459.

Ali

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx\neq 0,\quad \text{jer je}\quad \sin^2 x\geqslant 0.$$

Općenito:

$$\int_0^{2\pi}\sin^{2n+1}x\,dx=0,\quad \text{dok je}\quad \int_0^{2\pi}\sin^{2n}x\,dx\neq 0.$$

Slične formule imamo za $\cos x$. Napiši ih.

C. RAČUNANJE ODREĐENIH INTEGRALA

a. Opći slučajevi

Određeni integral računa se tako da se izračuna pripadni neodređeni integral u koji se uvrsti najprije gornja granica, zatim se napiše minus pa se uvrsti donja granica

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big|F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a). \tag{73}$$

To je Newton-Leibnizova formula.

Zadaci

U zadacima **458** do **467** izračunaj zadane određene integrale.

458. $\int_0^{2\pi}|\sin x|\,dx=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2\Big|-\cos x\Big|_0^{\pi}=-2\Big|\cos x\Big|_0^{\pi}=$

$=-2(\cos\pi-\cos 0)=-2(-1-1)=\underline{4}.$

459. $\int_0^{2\pi}|\sin^3 x|\,dx=2\int_0^{\pi}\sin^3 x\,dx=$ prema zadatku 390 $=$

$=2\left|-\frac{1}{3}\sin^2 x\cos x-\frac{2}{3}\cos x\right|_0^{\pi}=2\left(0+\frac{2}{3}-0+\frac{2}{3}\right)=\underline{\frac{8}{3}}.$

460. $\int_{-2}^{3}5x^3\,dx=5\int_{-2}^{3}x^3\,dx=\frac{5}{4}\Big|x^4\Big|_{-2}^{3}=\frac{5}{4}[3^4-(-2)^4]=\frac{5}{4}(81-16)=\frac{5}{4}\cdot 65=\frac{325}{4}=\underline{81\frac{1}{4}}.$

461. $\int_0^4\left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx=\int_0^4 dx+\int_0^4 e^{\frac{x}{4}}\,dx=\Big|x+4e^{\frac{x}{4}}\Big|_0^4=4+4e-4=\underline{4e}.$

462. $\int_{-1}^{2}(x^3-6x^2+2x-3)\,dx=\left|\frac{x^4}{4}-2x^3+x^2-3x\right|_{-1}^{2}=4-16+4-6-$

$-\left(\frac{1}{4}+2+1+3\right)=-14-6\frac{1}{4}=\underline{-20\frac{1}{4}}.$

463. $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(x+2)^2+1}=\Big|\operatorname{arc\,tg}(x+2)\Big|_{-2}^{-1}=\operatorname{arc\,tg}1-\operatorname{arc\,tg}0=\underline{\frac{\pi}{4}}.$

464. $\int_2^3 3x^2\,dx.$ [19].

465. $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}$ $\left[\frac{5}{2}(1-\sqrt[5]{4})\right].$

466. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx.$ $\left[\frac{7}{4}\right].$

467. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}.$ $\left[\frac{\pi}{2}\right].$

b. Zamjena promjenljive u određenom integralu

Upute

Ako računanje pripadnog neodređenog integrala traži zamjenu promjenljive, tj. supstituciju, obično se vraćamo na prvobitnu promjenljivu da zaštedimo trud i vrijeme na preračunavanje granica integracije. Međutim ako ostajemo kod nove promjenljive, moramo izvršiti to preračunavanje.

Funkcijska veza između prvobitne i nove promjenljive (supstitucije) mora biti neprekinuta, jednoznačna i monotona.

Zadaci

U zadacima **468** do **473** uklj. izračunaj zadane integrale pomoću supstitucija uz povratak na prvobitnu promjenljivu.

468. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}.$

Stavimo $11+5x=t$, $x=\frac{t-11}{5}$, $dx=\frac{1}{5}dt$, pa je

$$I=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{t^2}=-\frac{1}{10}\frac{1}{(11+5x)^2}=$$

$$=-\frac{1}{10}\left|\frac{1}{(11+5x)^2}\right|_{-2}^{-1}=-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{36}-1\right)=\frac{1}{10}\cdot\frac{35}{36}=\underline{\frac{7}{72}}.$$

469. $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x\,dx.$

Stavimo $e^x-1=t$, $e^x\,dx=dt$.

$$I=\int t^4\,dt=\frac{t^5}{5}=\frac{1}{5}(e^x-1)^5=\frac{1}{5}\left|(e^x-1)^5\right|_0^1=\frac{1}{5}[(e-1)^5-(1-1)^5]=\underline{\frac{1}{5}(e-1)^5}.$$

470. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

$$1+\ln x=t,\quad \frac{dx}{x}=dt$$

$$I=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}=2\sqrt{1+\ln x}$$

$$=2\left|\sqrt{1+\ln x}\right|_1^{e^3}=2(\sqrt{1+\ln e^3}-\sqrt{1})=2(\sqrt{1+3\ln e}-1)=\underline{2}.$$

471. $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}.$ $[-5(\sqrt[5]{16}-1)].$

472. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$ $\left[\frac{\pi}{6}\right].$

473. $\int_1^e \frac{1+\log x}{x}\,dx.$ $\left[1+\frac{1}{2}M\right].$

U zadacima **474** do **483** uklj. izračunaj zadane integrale metodom supstitucije uz preračunavanje granica integriranja.

474. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}.$

Prema tipu VI stavimo: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, pa za $x=0$ je $t=\operatorname{tg}0=0$, a za $x=\frac{\pi}{2}$, $t=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$. Primijetimo da je u integralu $0\leqslant t\leqslant 1$ funkcija $x=2\operatorname{arctg}t$ neprekinuta, jednoznačna i monotona, pa je gore navedenim uvjetima zadovoljeno.

$$I=\int_0^1 \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int_0^1 \frac{dt}{2+2t}=\Big|\ln(t+1)\Big|_0^1=\underline{\ln 2.}$$

475. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}.$

Supstitucija: $e^x=t$, pa je $e^x\,dx=dt$ i $dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t}$. Za $x=\ln 2$, $t=e^{\ln 2}=2$, a za $x=$ $=\ln 3$ $t=e^{\ln 3}=3$.

$$I=\int_2^3 \frac{dt}{t\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\int_2^3 \frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|_2^3=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1/2}{1/3}=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}=\underline{\frac{1}{2}\ln 1{,}5.}$$

476. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)\,dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}.$

$$x=2\sin t,\quad dx=2\cos t\,dt$$

$$\text{za } x=1\quad \sin t=\frac{1}{2},\quad \text{pa je}\quad t=\frac{\pi}{6}$$

$$\text{za } x=\sqrt{3}\quad \sin t=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \text{pa je}\quad t=\frac{\pi}{3}$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(8\sin^3 t+1)\,2\cos t\,dt}{4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}}=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin t\,dt+\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{\sin^2 t}=$$

$$=-2\Big|\cos t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{4}\Big|\operatorname{ctg} t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=-2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\right)=$$

$$=\frac{7\sqrt{3}}{6}-1=\underline{\frac{7}{2\sqrt{3}}-1}.$$

477. $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx.$ [Stavi $t=\sqrt{e^x-1}$; $4-\pi$].

478. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}.$ [Supstitucija: $\sqrt{x^2+1}=t$; 3].

479. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx.$ $\left[\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right].$

480. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}.$ $\left[\frac{\pi\sqrt{3}}{9}\right].$

481. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}.$ [0].

482. $\displaystyle\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx.$ [379].

483. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\sin x}}.$ $\left[\text{Prema tipu XI b.; } \frac{3}{32}(7\sqrt[3]{4}-12)\right].$

c. Primjena formule parcijalne integracije pri računanju određenih integrala

Uputa

Traži li računanje pripadnog neodređenog integrala primjenu formule parcijalne integracije, tu formulu upotrebljavamo u obliku

$$\int_a^b u\,dv=\Big|uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du=u(b)\cdot v(b)-u(a)\cdot v(a)-\int_a^b v\,du. \qquad (63)$$

Zadaci

U zadacima **484** do **492** uklj. izračunaj zadane integrale načinom parcijalne integracije.

484. $\int_0^3 x \operatorname{arc\,tg} x \, dx =$

$\left(\text{Stavimo: } \operatorname{arc\,tg} x = u,\ du = \frac{dx}{1+x^2};\ dv = x\,dx,\ v = \frac{x^2}{2}.\right)$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arc\,tg} x \Big|_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \frac{9}{2}\operatorname{arc\,tg} 3 - \frac{1}{2}\int_0^3 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{9}{2}\operatorname{arc\,tg} 3 - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arc\,tg} x)\Big|_0^3 = \frac{9}{2}\operatorname{arc\,tg} 3 - \frac{1}{2}(3 - \operatorname{arc\,tg} 3) = \underline{5 \operatorname{arc\,tg} 3 - \frac{3}{2}}.$$

485. $\int_0^{\frac{\pi}{2a}} (x+3)\sin ax \, dx =$

$\left(\text{Stavimo: } u = x+3,\ du = dx;\ dv = \sin ax\,dx,\ v = -\frac{\cos ax}{a}.\right)$

$$= -\frac{x+3}{a}\cos ax \Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} + \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2a}} \cos ax\,dx = -\frac{1}{a}\left[\left(\frac{\pi}{2a}+3\right)\cdot 0 - 3\right] + \frac{1}{a^2}\Big|\sin ax\Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} = \underline{\frac{3}{a} + \frac{1}{a^2}}.$$

486. $\int_1^2 x \log_2 x \, dx =$

$\left(\text{Stavimo: } u = \log_2 x,\ du = \frac{dx}{x}\cdot\log_2 e = \frac{dx}{x\ln 2};\ dv = x\,dx,\ v = \frac{x^2}{2}\right)$

$$= \log_2 x \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 - \frac{1}{2\ln 2}\int_1^2 x^2 \cdot \frac{dx}{x} = 2\log_2 2 - \frac{1}{2\ln 2}\cdot\left|\frac{x^2}{2}\right|_1^2 = 2 - \frac{1}{4\ln 2}(4-1) = 2 - \underline{\frac{3}{4\ln 2}}.$$

487. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x \, dx.$

Stavimo: $u = e^{2x}$, $du = 2e^{2x}\,dx$; $dv = \cos x\,dx$, $v = \sin x$.

$$I = e^{2x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x\,dx = e^{\pi} - 2\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x\,dx}_{I_1}.$$

$$I = e^{\pi} - 2I_1 \qquad \text{(a)}$$

$$I_1 = (u = e^{2x},\ du = 2e^{2x}\,dx;\ dv = \sin x\,dx,\ v = -\cos x) =$$

$$= -e^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx}_{I} = 1 + 2I.$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$I = e^{\pi} - 2 - 4I,$$

pa je:

$$\underline{I = \frac{e^{\pi} - 2}{5}}.$$

488. $\int_1^e \ln x \, dx.$ [1].

489. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \, dx.$ $\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right].$

490. $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx.$ $\left[\frac{e^{\pi}+1}{2}\right].$

491. $\int_0^{\pi} x^3 \sin x \, dx.$ $[\pi^3 - 6\pi].$

492. $\int_1^e \ln^3 x \, dx.$ $[6 - 2e].$

D. TEOREM SREDNJE VRIJEDNOSTI INTEGRALNOG RAČUNA

Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$ i neka je $m \leqslant f(x) \leqslant M$, tada u intervalu $[a, b]$ postoji tačka c takva da je

minimum maksimum

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant (b-a) f(c), \qquad (72)$$

gde je $m \leqslant f(c) \leqslant M$.

$f(c)$ se zove srednja vrijednost funkcije $f(x)$ u intervalu $[a, b]$.

Iz gornje relacije odmah slijedi i ova procjena određenog integrala:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Iz (72) slijedi:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (72a)$$

SREDNJA VRIJEDNOST FUNKCIJE

Zadaci

U zadacima **493** do **498** uklj. izračunaj srednje vrijednosti zadanih funkcija u zadanim intervalima.

493. $f(x)=x^2$ u intervalu $0\leqslant x\leqslant 1$.

Prema (72a): $$f(c)=\frac{1}{1-0}\int_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\underline{\frac{1}{3}}.$$

494. $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ u intervalu [1, 4].

$$f(c)=\frac{1}{4-1}\int_1^4\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{1}{3}\left|\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}\right|_1^4=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\cdot 8+4\right)-\left(\frac{2}{3}+2\right)\right]=\underline{\frac{20}{9}}.$$

495. $y=\sin^2 x$ u intervalu $[0, \pi]$.

$$f(x_c)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\frac{1}{\pi}\left|\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right|_0^\pi=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\underline{\frac{1}{2}}.$$

496. $f(x)=\dfrac{2}{e^x+1}$ u intervalu [0, 2].

$$\left[\ln\frac{4}{1+e^x}\right].$$

497. $y=a+b\sin x$ za $-\pi\leqslant x<\pi$. $[a]$.

498. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$ u intervalu [1; 1,5].

$$\left[2\ln\frac{6}{5}\doteq 0.365\right].$$

E. PRIMJENA ODREĐENIH INTEGRALA

a. Računanje površina ravnih likova

1. Jednadžbe krivulja su zadane u pravokutnim koordinatama

a) U eksplicitnom obliku $y=f(x)$, odnosno $x=\varphi(y)$.

Upute

Ako je zadani lik omeđen krivuljom $y=f(x)$, osi X i pravcima $x=a$ i $x=b$, tada ga dijelimo u elemente, tj. u krivocrtne trapeze kojima su osnovice paralelne s osi Y. Vidi sl. 14. Smatrajući da je svaki element pravokutnik visine y i baze dx, dobivamo prema slici da je njegova površina

$$dS=y\cdot dx.$$

Kako tih elemenata ima beskonačno mnogo, a površina svakog elementa teži nuli, dobivamo prema (71):

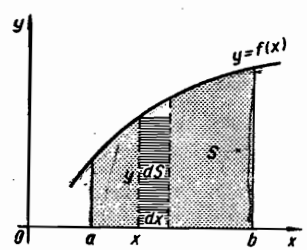
$$\underline{\text{Površina}}\qquad S=\int_a^b y\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ako je lik omeđen lukom krivulje $x=\varphi(y)$, osi Y i pravcima $y=c$ i $y=d$, tada ga dijelimo u elemente, tj. krivocrtne trapeze kojim su osnovice paralelne s osi X. Vidi sl. 15. Prema toj slici površina dS svakog elementa iznosi

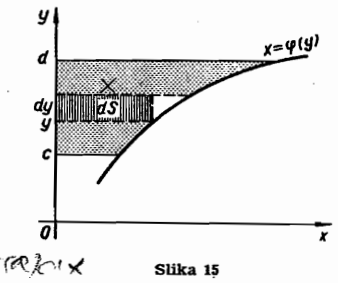
$$dS=x\cdot dy.$$

Integrirajući sad uzduž osi Y dobivamo

$$S=\int_c^d x\,dy=\int_c^d \varphi(y)\,dy.$$



Slika 14



Slika 15

Zadaci

U zadacima 499 do 515 uklj. izračunaj površine zadanih ravnih likova.

499. Lik je omeđen parabolom $y=2x-\dfrac{1}{4}x^2$ i pravcem $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}$. Vidi sl. 16.

Da grafički prikažemo zadani lik, odredimo vrh V, nultačke parabole i sjecišta A i B pravca i parabole.

Dobivamo: $V(4; 4)$; $x_1=0$, $x_2=8$; $A\left(1; \dfrac{7}{4}\right)$ i $B(6; 3)$.

Traženu površinu S odredimo kao razliku površina

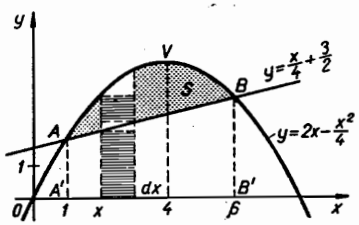
$$S_1 = A'AVBB' \quad \text{i} \quad S_2 = A'ABB'.$$

Prema $S = \int_a^b y\,dx$ dobivamo:

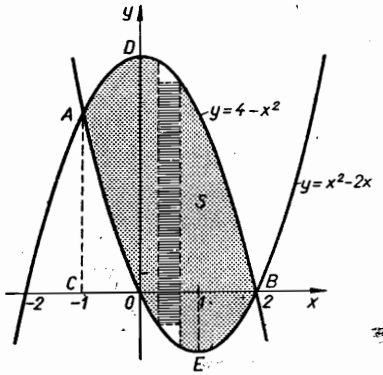
$$S = S_1 - S_2 = \int_1^6 \left(2x - \frac{1}{4}x^2\right) dx - \int_1^6 \left(\frac{x}{4} + \frac{3}{2}\right) dx = \int_1^6 \left(2x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{x}{4} - \frac{3}{2}\right) dx =$$

$$= \int_1^6 \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{3}{2}\right) dx = \left| -\frac{1}{4}\frac{x^3}{3} + \frac{7}{4}\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x \right|_1^6 =$$

$$= -18 + \frac{63}{2} - 9 + \frac{1}{12} - \frac{7}{8} + \frac{3}{2} = 5\frac{5}{24} \text{ kv. jedinica.}$$



Slika 16



Slika 17

500. Lik je omeđen parabolama $y=4-x^2$ i $y=x^2-2x$. Vidi sl. 17.

Prikazavši jednadžbe parabola u obliku $y=(2+x)(2-x)$ i $y=x(x-2)$ lako narišemo zadani lik, a riješivši zajedno jednadžbe parabola nalazimo i njihova sjecišta $A(-1;3)$ i $B(2;0)$. Prema slici 17 površina S zadanog lika jednaka je algebarskom zbroju površina:

$$S = CBDA + OEB - COA.$$

Površina OEB leži ispod osi X; da je dobijemo s predznakom $+$ moramo integrirati s desna na lijevo, tj. od B do O.

$$S = \int_{-1}^{2} (4-x^2)\,dx + \int_2^0 (x^2-2x)\,dx - \int_{-1}^{0} (x^2-2x)\,dx =$$

$$= \left| 4x - \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^{2} + \left| \frac{x^3}{3} - x^2 \right|_2^0 - \left| \frac{x^3}{3} - x^2 \right|_{-1}^{0} = 9 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 9.$$

Taj zadatak možemo riješiti jednostavnije i to pomoću diferencijala. dS je pravokutnik kome je visina razlika ordinata y_2 i y_1 a osnovica dx (vidi sl. 17).

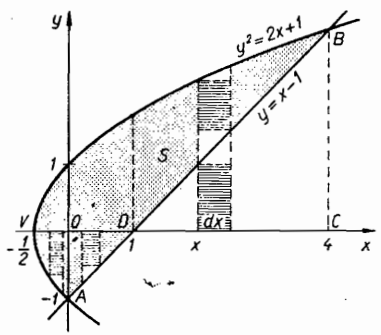
$$dS = (y_2 - y_1)\,dx = (4 - x^2 - x^2 + 2x)\,dx = (-2x^2 + 2x + 4)\,dx$$

$$S = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,dx = \left| -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right|_{-1}^{2} = -6 + 15 = 9.$$

501. Lik je omeđen parabolom $y^2 = 2x+1$ i pravcem $y = x-1$. Prikazavši jednadžbu parabole u obliku $(y-0)^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$, vidimo da je vrh parabole $V\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ i da je $2p = 2$, pa rišemo sliku 18.

Zatim riješimo zajedno jednadžbe parabole i pravca pa odredimo njihova sjecišta $A(0;-1)$ i $B(4;3)$.

Prema slici 18 vidimo da je tražena površina



Slika 18

$$S = VCBV - DCB + OVA + ODA =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{4} \sqrt{2x+1}\,dx - \int_1^4 (x-1)\,dx + \int_0^{-\frac{1}{2}} \left(-\sqrt{2x+1}\right) dx + \int_1^0 (x-1)\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left| \sqrt{(2x+1)^3} \right|_{-\frac{1}{2}}^{4} - \left| \frac{x^2}{2} - x \right|_1^4 + \frac{1}{3}\left| -\sqrt{(2x+1)^3} \right|_0^{-\frac{1}{2}} + \left| \frac{x^2}{2} - x \right|_1^0 =$$

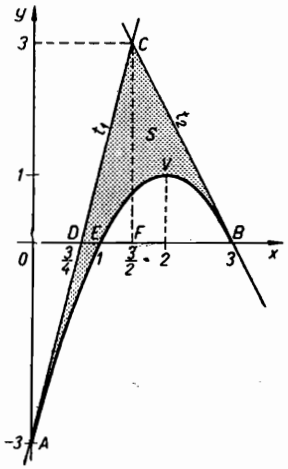
$$= \frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{9}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{32}{6} = 5\frac{1}{3}.$$

502. Lik je omeđen parabolom $y = -x^2 + 4x - 3$ i tangentama u tačkama $A(0;-3)$ i $B(3;0)$ parabole. Vidi sl. 19.

Iz $y' = -2x + 4 = 0$ slijedi $x_V = 2$, a uvrštenje u y daje $y_V = 1$, pa je $V(2, 1)$, dok iz $y = 0$ slijede nultačke $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$.
Pomoću formule (90) iz I dijela Repetitorija:

$$t \equiv y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1)$$

dobivamo za diralište $A(0;\ -3)$: $y'(0)=4$, pa je $t_1 \equiv y=4x-3$,
a za dirište $B(3;\ 0)$ $y'(3)=-2$, pa je $t_2 \equiv y=-2x+6$.



Slika 19

t_1 siječe os X u tački $D\left(\frac{3}{4},\ 0\right)$, a t_2 – u $B\,(3,\ 0)$.

t_1 i t_2 sijeku se u $C\left(\frac{3}{2},\ 3\right)$. Vidi sliku.

Traženu površinu S zadanog lika dobivamo kao algebarski zbroj površina:

$$S=DFC+FBC-EBV+OEA-ODA$$

pri čemu uzimamo u obzir da površine ispod osi X ulaze u rezultat integriranja s predznakom minus.

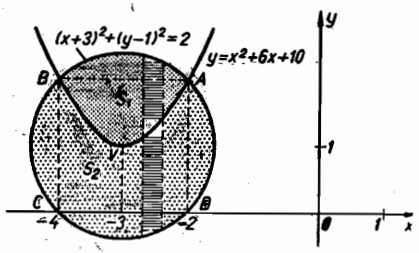
Računamo:

$$S=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}}(4x-3)\,dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}(-2x+6)\,dx-\int_{1}^{3}(-x^2+4x-3)\,dx+\int_{1}^{0}(-x^2+4x-3)\,dx+$$

$$+\int_{0}^{\frac{3}{4}}(4x-3)\,dx=\left|2x^2-3x\right|_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}}+\left|-x^2+6x\right|_{\frac{3}{2}}^{3}-\left|-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right|_{1}^{3}+$$

$$+\left|-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right|_{1}^{0}+\left|2x^2-3x\right|_{0}^{\frac{3}{4}}=\underline{\frac{9}{8}}.$$

503. Odredi površine S_1 i S_2 likova omeđenih kružnicom $x^2+y^2+6x-2y+8=0$ i parabolom $y=x^2+6x+10$. Vidi sl. 20.



Slika 20

Napisavši zadane jednadžbe u obliku

$(x+3)^2+(y-1)^2=2$ i $y=(x+3)^2+1$ i odredivši njihova sjecišta $A\,(-2,\ 2)$ i $B(-4,\ 2)$, računamo površine S_1 i S_2 prethodno narisavši sliku 20.

Iz te slike vidimo da je lik $CDAB$ kvadrat stranice 2 i da su četiri segmenta kruga uz taj kvadrat sukladni.

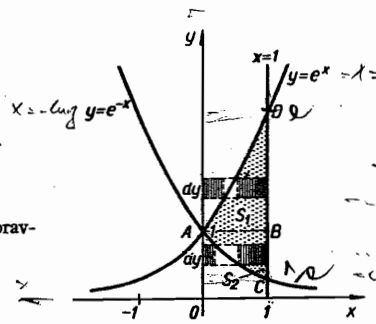
$$S_1=CDAB-CDAVB+\frac{1}{4}(2\pi-CDAB)$$

$$S_1=4-\int_{-4}^{-2}(x^2+6x+10)\,dx+\frac{1}{4}(2\pi-4)=4-\left|\frac{x^3}{3}+3x^2+10x\right|_{-4}^{-2}+\frac{\pi}{2}-1=$$

$$=3-\left(\frac{56}{3}-16\right)+\frac{\pi}{2}=\underline{\frac{3\pi+2}{6}}.$$

$$S_2=r^2\pi-S_1=2\pi-\frac{3\pi+2}{6}=\underline{\frac{9\pi-2}{6}}.$$

504. Lik je omeđen krivuljama $y=e^x$ i $y=e^{-x}$ i pravcem $x=1$.



Slika 21

Prema slici 21:

$$S=\int_0^1 e^x\,dx-\int_0^1 e^{-x}\,dx=\int_0^1(e^x-e^{-x})\,dx=\left|e^x+e^{-x}\right|_0^1=e+\frac{1}{e}-2=$$

$$=\frac{e^2-2e+1}{e}=\underline{\frac{(e-1)^2}{e}}.$$

Riješimo isti zadatak integrirajući uzduž osi Y, tj. prema $S=\int_c^d x\,dy$. U tom slučaju, kako se to vidi iz slike 21, tražena se površina raspada u dva dijela: donji $S_2=ABC$ gornji $S_1=ABD$, gdje je $C(1,\ e^{-1})$ i $D(1,\ e)$, dok jednadžbe krivulja sad glase: $x=-\ln y$, odnosno $x=\ln y$.

Prema slici: $$S=S_d+S_g=\int_{e^{-1}}^{1}(1+\ln y)\,dy+\int_1^e(1-\ln y)\,dy.$$

Kako parcijalno integriranje daje $\int \ln y\,dy=y\ln y-y$, bit će

$$S=\left|y+y\ln y-y\right|_{e^{-1}}^{1}+\left|y-y\ln y+y\right|_1^e=\frac{1}{e}+e-2=\underline{\frac{(e-1)^2}{e}}.$$

503. Lik je omeđen kubnim parabolama

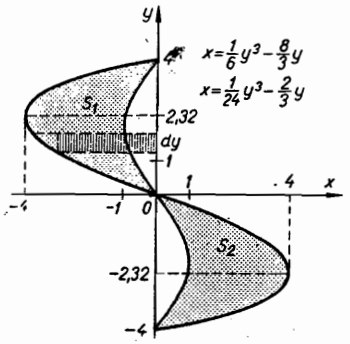
$$x=\frac{1}{6}y^3-\frac{8}{3}y \quad \text{i} \quad x=\frac{1}{24}y^3-\frac{2}{3}y.$$

Iz $x'=0$ slijedi da obje funkcije imaju ekstreme za $y=\pm 2{,}32$, pri čemu ekstremi za prvu funkciju iznose $x\doteq\pm 4$, a za drugu $x\doteq\pm 1$, dok obje funkcije imaju iste nultačke $y=0$ i $y=\pm 4$. Rišemo sliku 22.

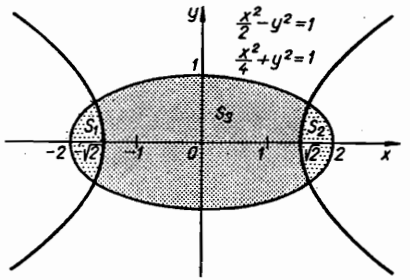
Kako je $|S_1|=|S_2|$, računamo samo S_1 i to prema $S=\int_c^d x\,dy$, pri čemu uzimamo u obzir da površine obiju parabola leže i s p o d osi Y.

$$S_1=\int_4^0\left(\frac{1}{6}y^3-\frac{8}{3}y\right)dy-\int_4^0\left(\frac{1}{24}y^3-\frac{2}{3}y\right)dy=\int_4^0\left(\frac{1}{8}y^3-2y\right)dy=\left|\frac{1}{8}\cdot\frac{y^4}{4}-y^2\right|_4^0=8.$$

$$\underline{S=2S_1=16.}$$



Slika 22



Slika 23

506. Likovi su omeđeni elipsom $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ i hiperbolom $\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

Rišemo sliku 23 prethodno izračunavši apscise sjecišta zadanih krivulja $x_{1,2}=\pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Napisavši jednadžbe elipse i hiperbole u obliku

$$y=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}, \quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2-2}$$

računamo prema slici i predtipu C (vidi npr. zadatke 247 i 248).

$$S_1=S_2=2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{\frac{2}{3}}}\sqrt{x^2-2}\,dx+\frac{1}{2}\int_{2\sqrt{\frac{2}{3}}}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx\right]=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\left|\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}-\ln\left(x+\sqrt{x^2-2}\right)\right|_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{\frac{2}{3}}}+\left|2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}\right|_{2\sqrt{\frac{2}{3}}}^{2}=$$

$$=\sqrt{2}\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{8}{3}-2}-\ln\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+\ln\sqrt{2}\right]+2\arcsin 1-$$

$$-2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}=\underline{\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 3-2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}=0{,}46.}$$

Uzevši u obzir da je površina elipse $S_e=ab\pi$, dobivamo prema slici

$$S_3=S_e-2S_1=2\cdot 1\cdot\pi-2\pi+\sqrt{2}\ln 3+4\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}=$$

$$\underline{=\sqrt{2}\ln 3+4\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\doteq 5{,}36.}$$

507. Lik je omeđen parabolom $y=x^2$, pravcima $x=1$, $x=2$ i osi X. [3].

508. Lik je omeđen parabolom $y=2x-x^2$ i pravcem $y=-x$. $\left[\frac{9}{2}\right]$.

509. Lik je omeđen parabolama $y=x^2$ i $x=y^2$. $\left[\frac{1}{3}\right]$.

510. Lik je omeđen parabolama $y^2=-8x+16$ i $y^2=24x+48$. $\left[\frac{32}{3}\sqrt{6}\right]$.

511. Lik je omeđen polukubnom parabolom $y^2=x^3$ i pravcima $y=4$ i $x=0$. $\left[\frac{24}{5}\sqrt[3]{2}\right]$.

512. Lik je omeđen hiperbolom $xy=6$ i pravcem $x+y-7=0$. [6, 76].

513. Lik je omeđen krivuljama $y=\ln x$ i $y=\ln^2 x$. [3−e].

514. Lik je omeđen krivuljama $y=\frac{1}{1+x^2}$ i $y=\frac{x^2}{2}$. $\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\right]$.

515. Lik je omeđen krivuljom $x=y^2(y-1)$ i osi Y. $\left[\frac{1}{12}\right]$.

b) U parametarskrm obliku $\left.\begin{array}{l} x=x(t) \\ y=y(t) \end{array}\right\} t_1 \leqslant t \leqslant t_2.$

Formula

Kako je $dx=x'(t)\,dt$, uvrštenje u $S=\int_a^b y\,dx$ daje

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)\,dt, \tag{77}$$

gdje je $t=t_1$ za $x=a$ i $t=t_2$ za $x=b$.

Ako je krivulja zatvorena pa se traži površina S zatvorenog lika, služimo se krivuljnim integralom

$$\boxed{S=\oint y\,dx} \tag{80}$$

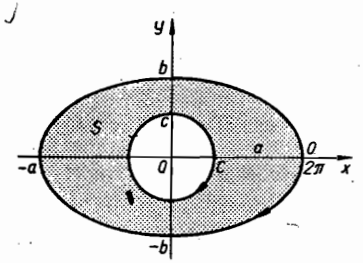
pri čemu krivulju obilazimo u negativnom smislu, tj. u smislu kretanja kazaljke na satu (površina na desno). Krivuljni integral rješavamo prijelazom na parametarske jednadžbe međašnje krivulje.

Zadaci

U zadacima **516** do **521** uklj. izračunaj površine likova zadanih parametarski.

516. Lik je omeđen elipsom $\left.\begin{array}{l} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{array}\right\} 0\leqslant t<2\pi$ i kružnicom $\left.\begin{array}{l} x=c\cos t \\ y=c\sin t \end{array}\right\} 0\leqslant t<2\pi,$

$a>b,\ c\leq b.$



Slika 24

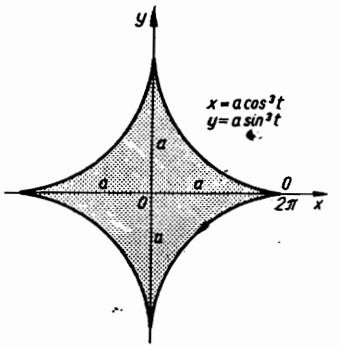
Uzevši u obzir da je za elipsu $dx=-a\sin t\,dt$, a za kružnicu $dx=-c\sin t\,dt$, računamo prema slici i (80):

$$S=S_e-S_k=-\int_{2\pi}^{0} ab\sin^2 t\,dt-\left[-\int_{2\pi}^{0} c^2\sin^2 t\,dt\right]=+ab\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt-c^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt=$$

$$=(ab-c^2)\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt=(ab-c^2)\left|\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right|_0^{2\pi}=\underline{\pi\,(ab-c^2)}.$$

517. Lik je omeđen astroidom

$$\left.\begin{array}{l} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{array}\right\} 0\leqslant t<2\pi.$$



Slika 25

Prema slici i formuli (80) dobivamo uzevši u obzir da je $dx=-3a\cos^2 t\sin t\,dt$

$$S=-\int_{2\pi}^{0} a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t\,dt=-3a^2\int_{2\pi}^{0}\sin^4 t\cos^2 t\,dt=$$

= prema tipu XI slučaj 7, vidi zadatak 436 =

$$=-3a^2\left|\frac{t}{16}-\frac{\sin 4t}{64}-\frac{\sin^3 2t}{48}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\underline{\frac{3\pi}{8}a^2}.$$

518. Lik je omeđen evolutom elipse $\left.\begin{array}{l} x=6\cos t \\ y=3\sin t \end{array}\right\} 0\leqslant t<2\pi.$

Znamo parametarsku jednadžbu elipsine evolute

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{e^2}{a}\cos^3 t \\ y=\dfrac{e^2}{b}\sin^3 t \end{array}\right\} 0\leqslant t<2\pi,$$ gdje je e linearni ekscentricitet elipse.

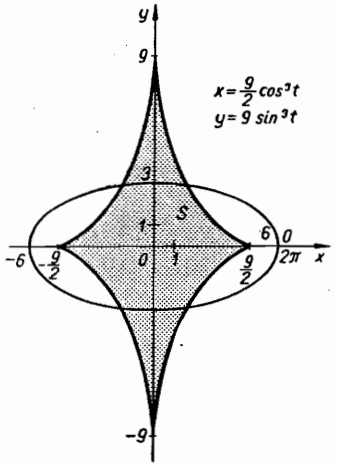
(vidi str. 52 u dijelu II Repetitorija).

Kako je u našem slučaju $a=6$ i $b=3$, $e^2=a^2-b^2=27$, pa je

$$\frac{e^2}{a}=\frac{9}{2},\ \text{a}\ \frac{e^2}{b}=9,\ \text{i}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{9}{2}\cos^3 t \\ y&=9\sin^3 t \end{aligned}\right\}$$ parametarska jednadžba zadane evolute.

Rišemo sliku 26 pa prema toj slici i formuli (80) računamo:



Slika 26

$$dx=-3\cdot\frac{9}{2}\cos^2 t\sin t\cdot dt=-\frac{27}{2}\cos^2 t\sin t\,dt$$

$$S=-9\cdot\frac{27}{2}\int_{2\pi}^{0}\sin^4 t\cos^2 t\,dt=$$ vidi zadatak 517 $=$

$$=-\frac{243}{2}\left|\frac{t}{16}-\frac{\sin 4t}{64}-\frac{\sin^3 2t}{48}\right|_{2\pi}^{0}=\frac{243\pi}{64}.$$

$$\underline{S=\frac{243\pi}{16}.}$$

519. Lik je omeđen kardioidom

$$\left.\begin{aligned} x&=2a\cos t-a\cos 2t \\ y&=2a\sin t-a\sin 2t \end{aligned}\right\}\ 0\leqslant t<2\pi.$$

Prema (80):

$$dx=(-2a\sin t+2a\sin 2t)\,dt$$

$$S=\int_{2\pi}^{0}(2a\sin t-a\sin 2t)(-2a\sin t+2a\sin 2t)\,dt=$$

$$=-2a^2\int_{2\pi}^{0}(2\sin^2 t-3\sin t\sin 2t+\sin^2 2t)\,dt=$$

$$=+2a^2\left|2\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right)-2\sin^3 t+\frac{1}{2}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\right|_{0}^{2\pi}=$$

$=2a^2(2\pi+\pi)=\underline{6\pi a^2}.$ Nariši graf!

520. Lik je omeđen krivuljom

$$\left.\begin{aligned} x&=1-\sin t \\ y&=1+\cos t \end{aligned}\right\}\ 0\leqslant t<2\pi,$$ Nariši graf!

$[\pi]$.

521. Lik je omeđen jednim lukom cikloide

$$x=a(t-\sin t)$$
$$y=a(1-\cos t)$$

i osi X.

$[3\pi a^2]$.

2. Jednadžbe krivulja zadane su u polarnim koordinatama

$$\rho=\rho(\varphi).$$

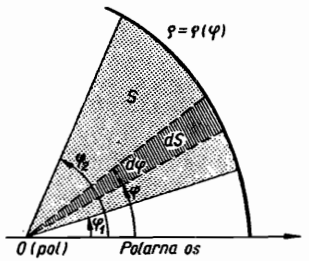
Upute

U tom slučaju dijelimo površinu S zadanog lika u elemente površine dS oblika krivocrtnih sektora, koje smatramo kao da su kružni polumjera ρ i središnjeg kuta φ, pa je prema slici 27

$$dS=\frac{1}{2}\rho^2 d\varphi, \tag{78}$$

a odatle je

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)\,d\varphi. \tag{78a}$$



Slika 27

Ako se traži površina zatvorena lika omeđena krivuljama zadanim u polarnim koordinatama služimo se formulom

$$S=\frac{1}{2}\oint\rho^2(\varphi)\,d\varphi \tag{81}$$

pri čemu obilazimo lik u pozitivnom smislu (površina lijevo).

Zadaci

U zadacima **522** do **528** uklj. izračunaj površine likova omeđenih krivuljama zadanim u polarnim koordinatama.

522. Lik je omeđen kardioidom

$$\rho = a(1-\cos\varphi).$$

Vidi sl. 28.

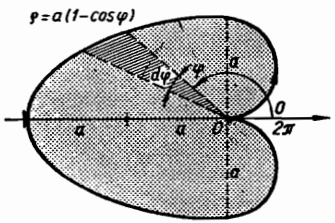
Prema (81): $$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left|\varphi-2\sin\varphi+\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right|_0^{2\pi}=\underline{\frac{3}{2}\pi a^2}.$$

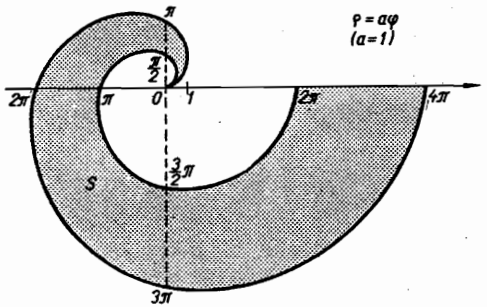
523. Lik je omeđen prvim i drugim zavojem Arhimedove spirale $\rho=a\varphi$. Vidi sl. 29.

$$S=\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi}a^2\varphi^2\,d\varphi-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2\varphi^2\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\left(\left|\frac{\varphi^3}{3}\right|_{2\pi}^{4\pi}-\left|\frac{\varphi^3}{3}\right|_0^{2\pi}\right)=$$

$$=\frac{a^2}{6}(56\pi^3-8\pi^3)=8a^2\pi^3.$$



Slika 28



Slika 29

524. Lik je omeđen kružnicama

$$\rho=2\sqrt{3}a\cos\varphi \quad \text{i} \quad \rho=2a\sin\varphi.$$

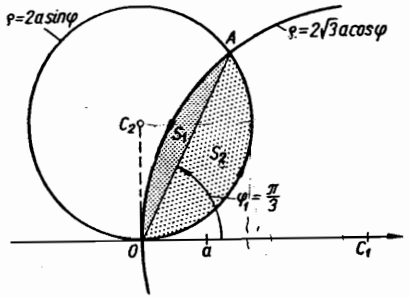
Obje kružnice prolaze kroz pol O, pri čemu je polumjer prve kružnice $r_1=\sqrt{3}a$, a druge $r_2=a$, dok središtu C_1 prve kružnice odgovara $\varphi=0$, a središtu C_2 druge — $\varphi=\frac{\pi}{2}$, jer su za te vrijednosti φ radijvektori ρ kružnica jednaki njihovim promjerima. Vidi sl. 30.

Da odredimo vrijednost φ_1 koja odgovara sjecištu A obiju kružnica, riješimo zajedno njihove jednadžbe. Dobivamo:

$$2\sqrt{3}a\cos\varphi=2a\sin\varphi$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}$$

$$\varphi_1=\frac{\pi}{3}.$$



Slika 30

Računamo prema slici i (81):

$$S=S_1+S_2=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}12a^2\cos^2\varphi\,d\varphi+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}4a^2\sin^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=2a^2\left(3\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\varphi\,d\varphi\right)=2a^2\left(3\left|\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{\varphi}{2}-\frac{\sin 2\varphi}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{3}}\right)=2a^2\left(3\frac{\pi}{12}-3\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=$$

$$=a^2\left(\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}\right)\doteq\underline{0{,}89a^2}.$$

525. Lik predočuje „ružu sa tri latice“, kojoj je jednadžba

$$\rho=a\cos 3\varphi.$$

Uzimajući za φ redom vrijednosti $0, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \ldots$ rišemo sliku 31.

Kako su sve tri latice iste površine, izračunat ćemo trostruku površinu npr. prve latice:

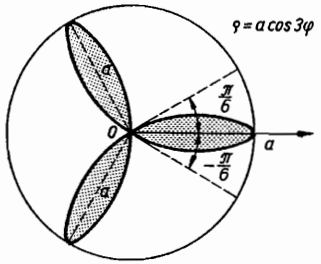
$$S=3S_1=3\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\varphi\,d\varphi.$$

Stavimo li $3\varphi=t$, dobivamo $d\varphi=\frac{1}{3}dt$, pa pripadni neodređeni integral glasi:

$$I=\frac{1}{3}\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{3}\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\varphi+\frac{\sin 6\varphi}{4}\right).$$

Slijedi:

$$S=\frac{3}{2}a^2\cdot\frac{1}{3}\left|\frac{3}{2}\varphi+\frac{\sin 6\varphi}{4}\right|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\underline{\frac{\pi a^2}{4}}.$$



Slika 31

526. Lik je omeđen Pascalovim pužem.

$$\rho=2+\cos\varphi.$$

Nariši graf! $\left[\frac{9}{2}\pi\right]$.

527. Lik predočuje „cvijet s dvije latice"

$$\rho^2=9\sin 2\varphi$$

Nariši graf! [9].

528. Lik je omeđen kardioidom $\rho=a(1-\cos\varphi)$ i kružnicom $\rho=a$. Nariši graf!

$$\left[2a^2\left(\frac{5\pi}{8}-1\right)\right].$$

U zadacima **529** do **532** uklj. prije računanja površina zadanih likova izvrši prijelaz na polarne koordinate.

529. Lik je omeđen Bernullijevom lemniskatom

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

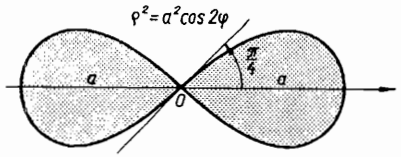
Da možemo taj zadatak riješiti, prelazimo na polarne koordinate, tj. uvrstimo formule prelaza: $x=\rho\cos\varphi$ i $y=\rho\sin\varphi$. Dobivamo:

$$\rho^4(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^2=a^2\rho^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$$

ili

$$\underline{\rho^2=a^2\cos 2\varphi.}$$

Rišemo sliku 32.



Slika 32

Prema toj slici računamo:

$$S=4S_1=4\cdot\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\,d\varphi=2a^2\left|\frac{\sin 2\varphi}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\underline{a^2}.$$

530. Lik je omeđen krivuljom

$$(x^2+y^2)^3=4a^2xy(x^2-y^2).$$

Vršimo prelaz na polarne koordinate $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Dobivamo:

$$\rho^6=4a^2\rho^4\cos\varphi\sin\varphi\cos 2\varphi$$

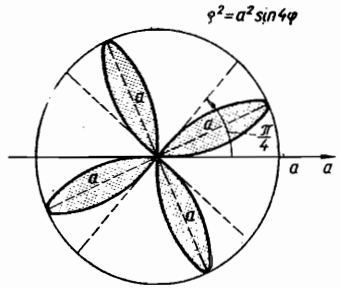
ili

$$\rho^2=2a^2\sin 2\varphi\cos 2\varphi=a^2\sin 4\varphi$$

$\rho=\pm a\sqrt{\sin 4\varphi}$. Vidi sl. 33, koja predočuje „ružu sa četiri latice".

Prema slici 33:

$$S=4S_1=4\cdot\frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 4\varphi\,d\varphi=-2a^2\left|\frac{1}{4}\cos 4\varphi\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\underline{a^2}.$$



Slika 33

531. Lik je omeđen krivuljama

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)\quad\text{i}\quad x^2+y^2=a^2.\qquad\left[2a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

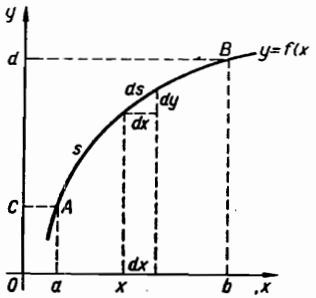
532. Lik je omeđen krivuljom

$$(x^2+y^2)^2=18xy. \qquad \text{[Vidi zadatak 527].}$$

b. Određivanje duljine luka krivulje (rektifikacija krivulje)

1. Jednadžbe krivulja zadane su u pravokutnim koordinatama

a) u eksplicitnom obliku $y=y(x)$, odnosno $x=x(y)$



Slika 34

Formule

Prema slici 34:

$$ds^2=dx^2+dy^2.$$

Odatle:

$$ds=\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx=\sqrt{1+x'^2(y)}\,dy \tag{86}$$

$$\boxed{\widehat{AB}=s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx} \tag{86a}$$

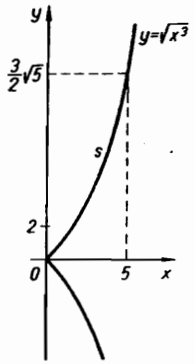
ili

$$s=\int_c^d \sqrt{1+x'^2(y)}\,dy. \tag{86b}$$

Zadaci

U zadacima **533** do **542** uklj. izračunaj duljine lukova zadanih krivulja.

533. Polukubne parabole $y=\sqrt{x^3}$ od $x=0$ do $x=5$.
Vidi sliku 35.



Slika 35

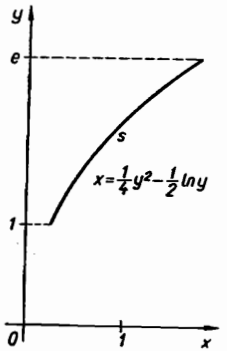
Prema (86a):

$$y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

$$s=\int_0^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^5 \sqrt{4+9x}\,dx=\frac{1}{27}\left|\sqrt{(4+9x)^3}\right|_0^5=$$

$$=\frac{1}{27}\left(\sqrt{49^3}-\sqrt{64}\right)=\frac{335}{27}\doteq 12{,}4.$$

534. Krivulje $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ od $y=1$ do $y=e$.
Vidi sliku 36.



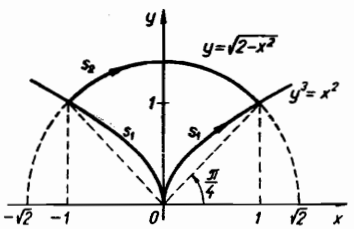
Slika 36

Prema (86b): $x'=\dfrac{y^2-1}{2y}$.

$$s=\int_1^e \sqrt{1+\frac{(y^2-1)^2}{4y^2}}\,dy=\int_1^e \frac{\sqrt{y^4+2y^2+1}}{2y}\,dy=\frac{1}{2}\int_1^e\left(y+\frac{1}{y}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{y^2}{2}+\ln y\right|_1^e=\frac{1}{4}(e^2+1).$$

535. Odredi opseg lika koji je omeđen krivuljama $y^3=x^2$ i $y=\sqrt{2-x^2}$. Vidi sl. 37.



Slika 37

Rješavajući zajedno zadane jednadžbe semikubne parabole i kružnice, dobivamo sjecišta tih krivulja (1,1) i (−1,1).

Računamo prema slici i (86b):

$$s=2s_1+s_2$$

$$s_1=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{4+9y}\,dy=\frac{1}{27}\left|\sqrt{(4+9y)^3}\right|_0^1=\frac{1}{27}(13\sqrt{13}-8).$$

Prema slici: $s_2=\frac{1}{4}$ duljine kružnice polumjera $\sqrt{2}=\frac{1}{4}\,2\sqrt{2}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

$$s=\frac{2}{27}(13\sqrt{13}-8)+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\doteq\underline{5{,}102}.$$

536. Krivulje $y=\ln(1-x^2)$ od $x_1=0$ do $x_2=\frac{1}{2}$.

Prema (86a):

$$s=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{x^4+2x^2+1}}{1-x^2}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2+1}{1-x^2}\,dx=$$

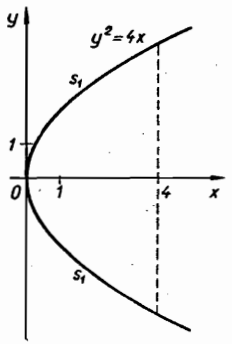
= nakon dijeljenja brojnika sa nazivnikom =

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)dx=-\left|x+2\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}\right|_0^{\frac{1}{2}}=\underline{\ln 3-\frac{1}{2}}.$$

537. Parabole $y^2=4x$ od $x_1=0$ do $x_2=4$. Vidi sliku 38.

Poradi jednostavnijeg integriranja prelazimo na inverznu funkciju $x=\frac{y^2}{4}$ pa nove granice integracije glase: $y_1=0$ i $y_2=4$.

Računamo: $x'=\frac{y}{2}$, pa je



Slika 38

$$s=2s_1=2\int_0^4\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}\,dy=\int_0^4\sqrt{4+y^2}\,dy=\text{ (prema predtipu } C)=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{y}{2}\sqrt{4+y^2}+2\ln\frac{y+\sqrt{4+y^2}}{2}\right|_0^4=\underline{\frac{1}{2}\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})}.$$

538. Krivulje $x=\ln\cos y$ od $y_1=0$ do $y_2=\frac{\pi}{3}$.

$$x'=-\frac{\sin y}{\cos y}=-\operatorname{tg}y;\quad s=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2y}\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dy}{\cos y}=\text{ prema (68) }=\left|\ln\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\ln\operatorname{tg}(30^\circ+45^\circ)=\ln\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\underline{\ln(2+\sqrt{3})}.$$

539. Dijela parabole $y=\frac{x^2}{2}-1$ između sjecištâ s osi x. Nariši sliku! $[\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})]$.

540. Dijela polukubne parabole $y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3$ koji se nalazi u nutrini parabole $y^2=\frac{x}{3}$

Nariši graf! $\left[\frac{8}{9}\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}-1\right)\right]$.

541. Lančanice $y=\frac{a}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ od $x_1=0$ do $x_2=a$. $[a\operatorname{sh}1]$.

542. Odredi opseg lika omeđenog parabolom $y^2=2px$ i pravcem $x=\frac{p}{2}$.

$[p\{2+\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\}]$.

b) u parametarskom obliku $\left.\begin{array}{l}x=x(t)\\ y=y(t)\end{array}\right\}\ t_1\leqslant t\leqslant t_2.$

Formula

$$\boxed{s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt.}\qquad(87)$$

Zadaci

U zadacima 543 do 549 uklj. izračunaj duljine lukova zadanih krivulja.

543. Astroide $\begin{array}{l}x=a\cos^3t\\ y=a\sin^3t\end{array}$. Vidi sl. 25 uz zadatak 517.

Računamo prema (87) uzevši u obzir da je krivulja simetrična s obzirom na obje koordinatne osi.

$$\dot{x}=-3a\cos^2t\sin t$$
$$\dot{y}=\ \ 3a\sin^2t\cos t.$$

$$s = 4\cdot 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t\cdot\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t}\,dt = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt =$$

$$= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cdot\cos t\,dt = 12a\left|\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{6a.}$$

544. Evolvente kružnice $\left.\begin{array}{l} x = r(\cos t + t\sin t) \\ y = r(\sin t - t\cos t) \end{array}\right\}$ od $t_1 = 0$ do $t_2 = \pi$.

Prema (87): $\dot{x} = r(-\sin t + t\cos t + \sin t) = r\,t\cos t$

$\dot{y} = r(\cos t + t\sin t - \cos t) = r\,t\sin t$

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 t^2\cos^2 t + r^2 t^2\sin^2 t}\,dt = r\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{1}{2}r\pi^2.$$

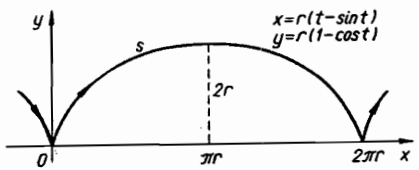
545. Krivulje $\left.\begin{array}{l} x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t \end{array}\right\}$ od $t_1 = 0$ do $t_2 = \pi$.

$\dot{x} = (t^2-2)\cos t + 2\cos t = t^2\cos t$

$\dot{y} = (t^2-2)\sin t + 2\sin t = t^2\sin t$

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{t^4\cos^2 t + t^4\sin^2 t}\,dt = \int_0^{\pi} \sqrt{t^4}\,dt = \left|\frac{t^3}{3}\right|_0^{\pi} = \underline{\frac{\pi^3}{3}}.$$

546. Prvog luka cikloide $\left.\begin{array}{l} x = r(t-\sin t) \\ y = r(1-\cos t) \end{array}\right| 0 \leqq t \leqq 2\pi$. Vidi sliku 39.



Slika 39

$\dot{x} = r(1-\cos t)$

$\dot{y} = r\sin t$

$$s = r\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt = r\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\,dt = r\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 2r\cdot 2\left|-\cos\frac{t}{2}\right|_0^{2\pi} = 4r(1+1) = \underline{8r}.$$

547. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{3}t^3 - t \\ y = t^2 + 2 \end{array}\right\}$ od $t_1 = 0$ do $t_2 = 3$.

[12].

548. $\left.\begin{array}{l} x = 8\sin t + 6\cos t \\ y = 6\sin t - 8\cos t \end{array}\right\}$ od $t_1 = 0$ do $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

[5 π].

549. $\left.\begin{array}{l} x = \cos^5 t \\ y = \sin^5 t \end{array}\right\}$ od $t_1 = 0$ do $t_2 = \frac{\pi}{2}$. $\left[\frac{5}{8}\left\{2 - \frac{\ln(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right\}\right]$.

2. Jednadžbe krivulja zadane su u polarnim koordinatama $\rho = \rho(\varphi)$.

Formula

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi. \tag{88}$$

Zadaci

U zadacima **550** do **559** uklj. izračunaj duljine lukova zadanih krivulja.

550. Prva dva zavoja Arhimedove spirale $\rho = a\varphi$. (Vidi sliku 29 uz zadatak 523).

Računamo prema slici i (88). Kako je $\rho' = a$, dobivamo:

$$s = \int_0^{4\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\,d\varphi = a\int_0^{4\pi} \sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi = \text{ prema predtipu } C =$$

$$= a\left|\frac{\varphi}{2}\sqrt{\varphi^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}\right)\right|_0^{4\pi} = \underline{a\left[2\pi\sqrt{16\pi^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(4\pi + \sqrt{16\pi^2+1}\right)\right]}.$$

551. Logaritamske spirale $\rho = e^{a\varphi}$ od $\varphi_1 = 0$ do $\varphi_2 = \varphi_0$. Vidi sliku 40.

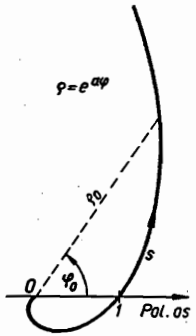
Kako je $\rho' = a e^{a\varphi}$, dobivamo:

$$s = \int_0^{\varphi_0} \sqrt{e^{2a\varphi} + a^2 e^{2a\varphi}}\,d\varphi = \int_0^{\varphi_0} \sqrt{e^{2a\varphi}(1+a^2)}\,d\varphi = \sqrt{1+a^2}\int_0^{\varphi_0} e^{a\varphi}\,d\varphi =$$

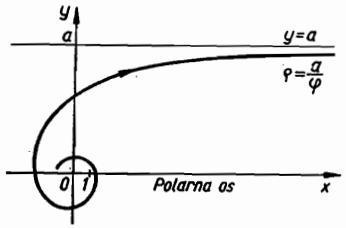
$$= \sqrt{1+a^2}\left|\frac{e^{a\varphi}}{a}\right|_0^{\varphi_0} = \underline{\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\left(e^{a\varphi_0} - 1\right)}.$$

552. Hiperbolne spirale $\rho=\frac{1}{\varphi}$ od $\varphi_1=\frac{1}{2}$ do $\varphi_2=2$.

Vidi sliku 41.



Slika 40



Slika 41

Prema (88): $$s=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{\frac{1}{\varphi^2}+\left(-\frac{1}{\varphi^2}\right)^2}\,d\varphi=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{\varphi}\sqrt{1+\frac{1}{\varphi^2}}\,d\varphi.$$

Stavimo: $\sqrt{1+\frac{1}{\varphi^2}}=t$, odatle je $\frac{1}{\varphi^2}=t^2-1$, a $\varphi=\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$, dok je

$$d\varphi=-\frac{t\,dt}{\sqrt{(t^2-1)^3}}.$$

Odredimo nove granice integracije:

$$\text{za } \varphi_1=\frac{1}{2}\quad t_1=\sqrt{1+4}=\sqrt{5},$$

$$\text{za } \varphi_2=2\quad t_2=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

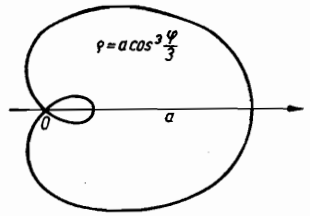
$$s=-\int_{\sqrt{5}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}\sqrt{t^2-1}\cdot\frac{t^2\,dt}{\sqrt{(t^2-1)^3}}=+\int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{5}}\frac{t^2\,dt}{t^2-1}=\int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{5}}\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\left|t+\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right|_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\sqrt{5}}=$$

$$=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\underline{\frac{\sqrt{5}}{2}+\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.$$

553. Krivulje $\rho=a\cos^3\frac{\varphi}{3}$.

Vidi sliku 42.



Slika 42

Kako je $\rho=a$ za $\varphi=0$, dok je $\rho=0$ za $a\cos^3\frac{\varphi}{3}=0$, tj. za $\frac{\varphi}{3}=\frac{\pi}{2}$, odnosno za $\varphi=\frac{3}{2}\pi$, zaključujemo s obzirom na sliku, da u intervalu $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{3}{2}\pi$ radijvektor opisuje polovinu krivulje, pa računamo prema (88) uzevši u obzir da je $\rho'=-a\cos^2\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3}\,d\varphi$.

$$s=2\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\sqrt{a^2\cos^6\frac{\varphi}{3}+a^2\cos^4\frac{\varphi}{3}\sin^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi=2a\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi=\text{ uz supstituciju }\frac{\varphi}{3}=t,\ d\varphi=$$

$$=3\,dt\text{ prema (59a)}=6a\left|\frac{\varphi}{6}+\frac{\sin\frac{2}{3}\varphi}{4}\right|_0^{\frac{3}{2}\pi}=a\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{3}{2}\sin\pi\right)=\underline{\frac{3}{2}\pi a}.$$

554. Kardioide $\rho=3(1+\cos\varphi)$. Nariši graf. [24].

555. Krivulje $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ uz graf. $\left[\frac{3}{2}\pi a\right]$.

556. $\rho=a\sin\varphi$ uz graf. $[\pi a]$.

557. $\rho=1-\cos\varphi$ uz graf. [8].

558. $\rho=\varphi^2$ od $\varphi_1=0$ do $\varphi_2=\pi$.

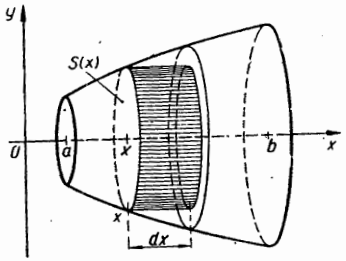
$$\left[\tfrac{1}{3}\{(\pi^2+4)\sqrt{\pi^2+4}-8\}\right].$$

559. Dokaži da luk parabole $y=\frac{1}{2p}x^2$, koji odgovara intervalu $0\leqslant x\leqslant a$, ima istu duljinu kao i luk spirale $\rho=p\varphi$ u intervalu $0\leqslant\rho\leqslant a$.

$$\left[s_p=s_s=\frac{a}{2p}\sqrt{p^2+a^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{\sqrt{p^2+a^2}}{p}\right].$$

c. Određivanje obujma (volumena) tijela kome je zadana površina S poprečnog presjeka kao funkcija od x, tj. u obliku $S=S(x)$.

Formula



Slika 43

Prema slici 43:

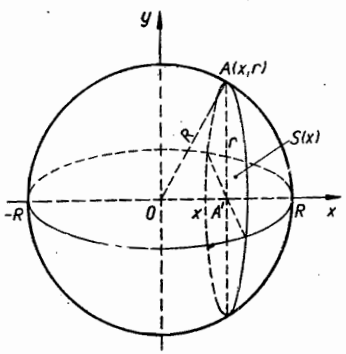
Element volumena $\quad dV=S(x)\,dx$

$$\boxed{V=\int_a^b S(x)\,dx} \qquad (89)$$

Zadaci

U zadacima **560** do **568** uklj. izračunaj volumene zadanih tjelesa prethodno prikazavši površine poprečnih presjeka tih tjelesa kao funkcije od x.

560. Kugle polumjera R. Vidi sliku 44.



Slika 44

Kako je svaki presjek kugle krug, površina poprečnog presjeka okomitog na os x i udaljenog za x od ishodišta O iznosi prema slici

$$S=\pi r^2$$

dok je

$$r^2=R^2-x^2, \text{ pa je } S(x)=\pi(R^2-x^2).$$

Računamo prema (89) i slici:

$$V=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left|R^2x-\frac{x^3}{3}\right|_{-R}^{R}=\pi\left[\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)\right]=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

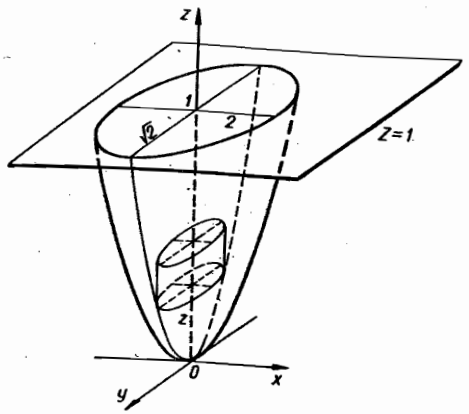
561. Tijela omeđenog eliptičkim paraboloidom

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=z$$

i ravninom $z=1$. Vidi sl. 45.

Uvrštenje $z=1$ u jednadžbu paraboloida daje

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1.$$



Slika 45

U toj elipsi siječe ravnina $z=1$ zadani paraboloid.

Podijelimo li jednadžbu paraboloida sa z, dobit ćemo jednadžbu presjeka u udaljenosti z od ravnine xy.

$$\frac{x^2}{4z}+\frac{y^2}{2z}=1.$$

To je opet elipsa s poluosima $2\sqrt{z}$ i $\sqrt{2z}$.

Kako je $S=ab\pi$ površina elipse s poluosima a i b, dobivamo

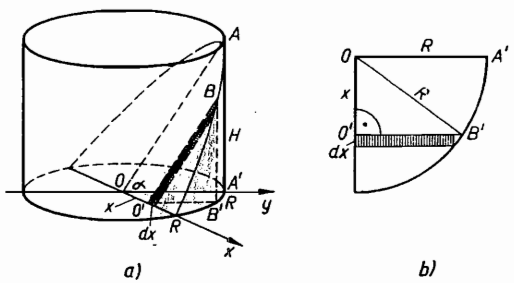
$$S(z)=2\sqrt{z}\cdot\sqrt{2z}\,\pi,$$

pa je prema (89) i slici:

$$V=2\sqrt{2}\,\pi\int_0^1 z\,dz=\underline{\sqrt{2}\,\pi}.$$

562. Od kružnog uspravnog valjka polumjera baze $R=10$ cm i visine $H=6$ cm odsječen je dio prema slici 46. Odredi volumen tog odsječka.

Traženi volumen odsječka opisuje prema slici površina pravokutnog $\Delta O'B'B$, koji je okomit na osi X, pri pomicanju tog trokuta uzduž osi X od $x=-R$ do $x=+R$. Izrazimo površinu tog trokuta kao funkciju od x, tj. u obliku $S(x)$.



Slika 46

$$S=pl\cdot\Delta O'B'B=\frac{O'B'\cdot BB'}{2},$$

a kako je $BB'=O'B'\cdot\operatorname{tg}\alpha=O'B'\cdot\frac{H}{R}$, jer je $\operatorname{tg}\alpha=$ prema slici $=\frac{H}{R}$, pa je

$$S=\frac{H}{2R}(O'B')^2.$$

Prema slici b): $(O'B')^2=R^2-x^2$.

Slijedi: $S(x)=\frac{H}{2R}(R^2-x^2)$.

Prema (89): $$V=\frac{H}{2R}\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\frac{H}{2R}\left|R^2x-\frac{x^3}{3}\right|_{-R}^{R}=\frac{2}{3}R^2H.$$

Uvrštenje: $R=10$ cm i $H=6$ cm daje

$$\underline{\underline{V=400\ \text{cm}^3.}}$$

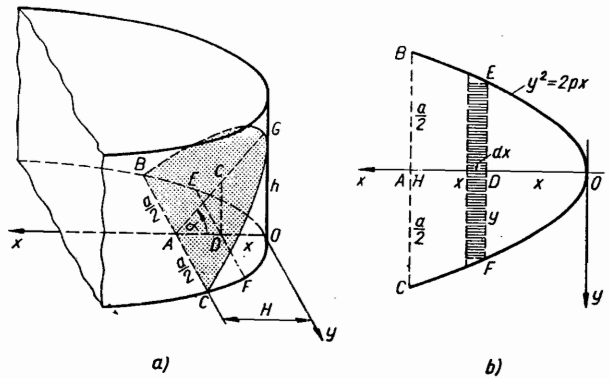
563. Uspravni valjak paraboličke baze presječen je s dvije ravnine od kojih je jedna okomita na izvodnicama valjka. Odredi volumen tako nastalog odsječka prikazanog na slici 47, ako su zadane dimenzije:

$$BC=a=10\ \text{cm};\ AO=H=8\ \text{cm};\ GO=h=6\ \text{cm}.$$

Traženi volumen zadanog odsječka opisuje površina pravokutnika kojemu je baza $EF=2y$ a visina $CD=v$ pri pomicanju uzduž osi X od $x=0$ do $x=H$, pri čemu je površina tog pravokutnika $S=2yv$. Kako je y ordinata parabole COB, izvedimo jednadžbu te parabole.

Uvrštenje $AC=y=\frac{a}{2}$ i $x=H$ u $y^2=2px$ daje:

$$\frac{a^2}{4}=2p\cdot H,\ \text{pa je}\ 2p=\frac{a^2}{4H}\ \text{i slijedi}$$



Slika 47

jednadžba parabole: $y^2=\frac{a^2}{4H}x$, odnosno $y=\frac{a}{2\sqrt{H}}\sqrt{x}$ (a)

$v=?$ Iz slike slijedi $\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{H}$, pa je

$$v=CD=AD.\ \operatorname{tg}\alpha=(H-x)\frac{h}{H}. \qquad \text{(b)}$$

Uvrštenje (a) i (b) u $S=2yv$ daje

$$S(x)=\frac{ah}{H\sqrt{H}}(H-x)$$

$$V=\frac{ah}{H\sqrt{H}}\int_0^H(H-x)\sqrt{x}\,dx=\frac{ah}{H\sqrt{H}}\left|\frac{2}{3}H\sqrt{x^3}-\frac{2}{5}\sqrt{x^5}\right|_0^H=$$

$$=\frac{ah}{H\sqrt{H}}\left(\frac{2}{3}H^2\sqrt{H}-\frac{2}{5}H^2\sqrt{H}\right)=\frac{4}{15}ahH=\frac{4}{15}\cdot10\cdot6\cdot8=\underline{128\ \text{cm}^3}.$$

564. Tijela kojemu je baza istokračni trokut visine h i osnovice a, dok je poprečni presjek tijela segment parabole, kojoj je tetiva jednaka visini segmenta. Vidi sliku 48.

Kako se vidi iz slike, zadano je tijelo nastalo pomicanjem uzduž osi X od $x=0$ do $x=h$ segmenta parabole DME. Znamo prema (75) da je površina parabole jednaka 2/3 produkta baze i visine, pa je

$$S=\frac{2}{3}DE\cdot MK=\frac{2}{3}(DE)^2,\ \text{jer je}\ MK=DE.$$

Izrazimo DE s x.

Iz sličnosti trokuta DEC i ABC slijedi:

$$\frac{DE}{a}=\frac{h-x}{h}.$$

pa je $$DE=\frac{a(h-x)}{h} \quad \text{i} \quad S=\frac{2}{3}\frac{a^2}{h^2}(h-x)^2.$$

Prema (89):

$$V=\frac{2a^2}{3h^2}\int_0^h (h-x)^2\,dx=\underline{\frac{2}{9}a^2h.}$$

565. Tijela omeđenog sa dva uspravna kružna valjka $x^2+y^2=R^2$ i $x^2+z^2=R^2$. Vidi sl. 49.

Slika 49 predočuje osmi dio tijela omeđenog zadanim valjcima i to onaj dio koji se nalazi u prvom oktantu, pri čemu prvi valjak ima za os simetrije os Z, a drugi os Y pa se te osi sijeku pod pravim kutom. Iz toga slijedi da je svaki presjek tog tijela s ravninom koja je paralelna s ravninom YZ kvadrat.

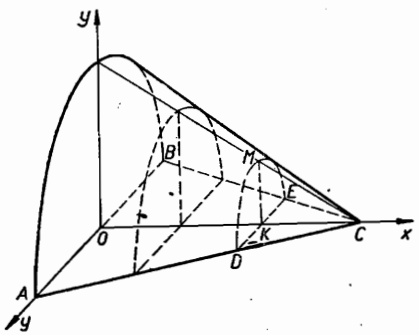
U slici 49. prikazan je kvadrat stranica $AB=AC$, udaljen za $OA=x$ od ravnine YZ. Prema toj slici:

$$AB=y=z=\sqrt{R^2-x^2}$$

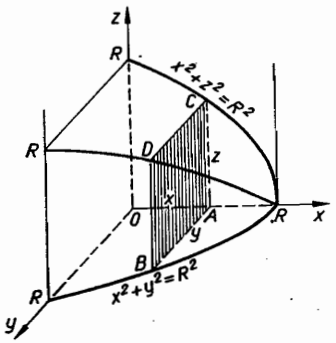
pa je $$S(x)=R^2-x^2$$

i $$\frac{V}{8}=\int_0^R (R^2-x^2)\,dx=\frac{2}{3}R^3$$

$$\underline{V=\frac{16}{3}R^3.}$$



Slika 48



Slika 49

566. Tijela omeđenog troosnim elipsoidom

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1.$$

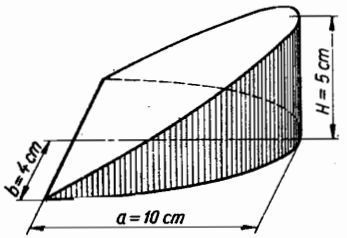
[Vidi sl. 61 u dijelu III. Repetitorija; 32π].

567. Tijela omeđenog jednokrilnim hiperboloidom i ravninama $z=-1$ i $z=2$.

[Vidi sl. 63 u dijelu III Repetitorija; $36\ \pi$].

568. Odsječka uspravnog valjka komu je baza elipsa prema slici 50.

$$\left[\frac{2}{3}abH=133\tfrac{1}{3}\ \text{cm}^3\right].$$



Slika 50

d. Rotacione plohe i tjelesa

1. Jednadžbe rotacionih ploha

Formule

Jednadžbe ploha nastalih rotacijom krivulja

$y=f(x)$ oko osi X: $\quad [f(x)]^2=y^2+z^2 \quad$ (90)

$x=\varphi(y)$ oko osi Y: $\quad [\varphi(y)]^2=x^2+z^2 \quad$ (90a)

Zadaci

U zadacima **569** do **573** uklj. odredi jednadžbe ploha nastalih rotacijom zadanih krivulja, odnosno pravaca, oko koordinatnih osi uz grafički prikaz tih ploha.

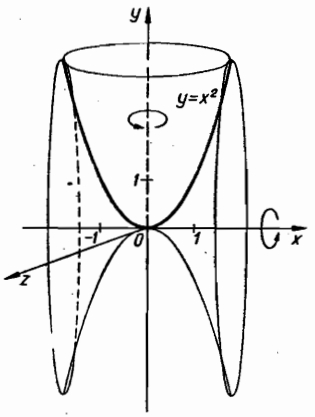
569. Parabola $y=x^2$ rotira oko osi X, a zatim oko osi Y.

Rotacija oko osi X: $f(x)=x^2$

Prema slici 51 i (90): $\underline{x^4=y^2+z^2.}$

Rotacija oko osi Y: $\varphi(y)=\sqrt{y}$.

Prema slici 51 i (90a): $\underline{y=x^2+z^2}$.



Slika 51

570. Pravac $y=x+1$ rotira oko osi X, a zatim oko osi Y.

Prema slici 52 i formulama (90).

Rotacija oko osi X: $f(x)=x+1$

$$(x+1)^2=y^2+z^2$$

ili

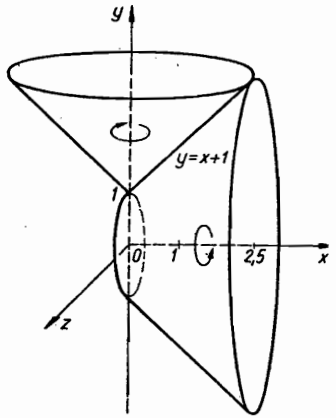
$$\underline{x^2-y^2-z^2+2x+1=0}.$$

Rotacija oko osi Y: $\varphi(y)=y-1=x$

$$(y-1)^2=x^2+z^2$$

ili

$$\underline{x^2-y^2+z^2+2y-1=0}.$$



Slika 52

571. Krivulja $y=e^x$ rotira oko osi X, $y=\ln x$ oko osi Y.

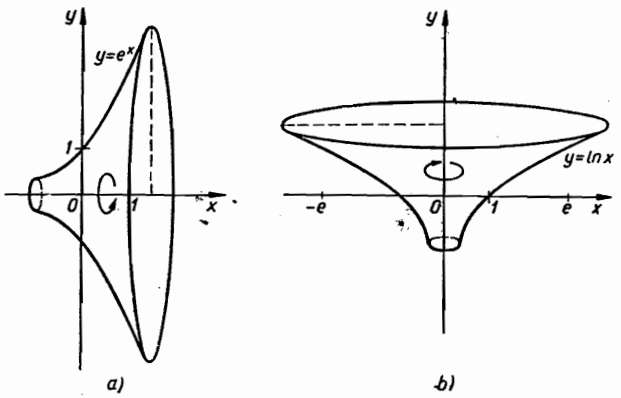
Rotacija oko osi X: $f(x)=e^x$

$$\underline{e^{2x}=y^2+z^2.}$$

Rotacija oko osi Y: $\varphi(y)=\ln y$.

$$\underline{\ln^2 y=x^2+z^2.}$$

Vidi slike 53a i b.



Slika 53

572. Parabola $y^2+6y+4x+1=0$ rotira oko osi Y.

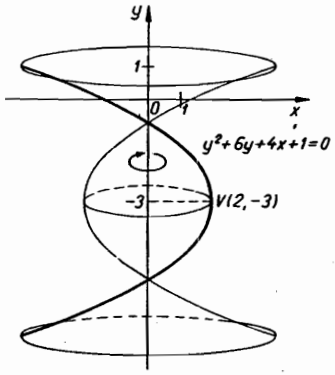
Da grafički prikažemo zadanu rotacionu plohu, jednadžbu parabole prikažemo u obliku $(y-n)^2=2p(x-n)$.

$$(y+3)^2-9=-4x-1 \qquad \text{(a)}$$

ili

$(y+3)^2=-4(x-2)$, pa je vrh $V(2,-3)$, a $p=2$.

Za $x=0$ $y=-3\pm 2{,}8=\begin{cases}-0{,}2.\\-5{,}8.\end{cases}$ Rišemo sliku 54.



Slika 54

Iz (a) slijedi: $x=-\dfrac{1}{4}(y^2+6y+1)=\varphi(y)$,

pa je prema (90a): $\dfrac{1}{16}(y^2+6y+1)^2=x^2+z^2$

ili

$$\underline{y^4+12y^3+38y^2+12y+1=16x^2+16z^2}$$

jednadžba zadane rotacione plohe.

573. Parabola, kojoj je vrh $V(-2,-3)$ a prolazi tačkama $A(0,-4)$ i $B(-4,-4)$ rotira oko osi X.

$[(x+2)^2=-4(y+3);\ (x^2+4x+16)^2=16y^2+16z^2]$.

2. Određivanje obujma rotacionih tjelesa

Svaka ravnina okomita na osi X siječe tijelo nastalo rotacijom krivulje $y=f(x)$ oko osi X u krugu kome je polumjer jednak pripadnoj ordinati krivulje $y=f(x)$, pa je površina poprečnog presjeka rotacionog tijela

$$S(x)=\pi y^2=\pi[f(x)]^2.$$

Odatle slijedi prema (89):

Volumen rotacionog tijela

$$V=\pi\int_a^b f[(x)]^2\,dx=\pi\int_a^b y^2(x)\,dx. \tag{91}$$

Nastaje li tijelo rotacijom krivulje $x=\varphi(y)$ oko osi Y, tada je

$$V=\pi\int_c^d [\varphi(y)]^2\,dy=\pi\int_c^d x^2(y)\,dy. \tag{91a}$$

Ako je krivulja, koja rotira oko osi X, zadana u parametarskom obliku

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t)\\ y&=y(t)\end{aligned}\right\}\ t_1\leqslant t\leqslant t_2$$

tada je prema (91)

$$V=\pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\cdot x'(t)\,dt \tag{92}$$

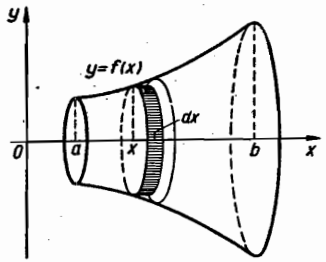
jer je $\qquad dx=x'(t)\,dt=\dot{x}\,dt.$

Zadana li je krivulja u polarnim koordinatama

$$\rho=\rho(\varphi)$$

a rotira oko polarne osi tada je

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi. \tag{92a}$$



Slika 55

Zadaci

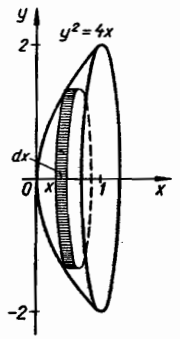
U zadacima **574** do **587** uklj. izračunaj volumene tjelesa nastalih rotacijom likova koji su omeđeni zadanim krivuljama, odnosno pravcima.

574. Lik, koji je omeđen parabolom $y^2=4x$ i pravcem $x=1$, rotira oko osi X.

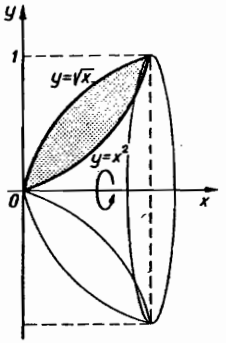
Prema slici 56 i (91):

$$V=\pi\int_0^1 4x\,dx=4\pi\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\underline{2\pi}\ \text{kubnih jedinica.}$$

575. Lik omeđen lukovima parabola $y=x^2$ i $x=y^2$ rotira oko osi X.



Slika 56



Slika 57

Najprije odredimo apscise sjecišta zadanih parabola:

Iz $\qquad \left.\begin{aligned} y&=x^2\\ y&=\sqrt{x}\end{aligned}\right|$ slijedi $x^2=\sqrt{x}\,|^2$

$$x^4-x=0$$

$$x(x^3-1)=0$$

$$x_1=0;\ x_2=1.$$

Iz slike vidimo, da je traženi volumen V jednak razlici volumena nastalih rotacijom lukova parabola $y=\sqrt{x}$ i $y=x^2$ od $x=0$ do $x=1$, pa prema (91) dobivamo:

$$V=\pi\int_0^1 x\,dx-\pi\int_0^1 x^4\,dx=\pi\left|\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right|_0^1=\underline{\frac{3}{10}\pi}.$$

576. Lik omeđen lukom parabole $y=\frac{x^2}{2}$ i pravcem $y=-x+\frac{3}{2}$ rotira oko osi X.

Odredivši apscise sjecišta parabole i pravca $x_1=-3$ i $x_2=1$, računamo prema slici 58:

$$V=\pi\int_{-3}^{1}\left(-x+\frac{3}{2}\right)^2dx-\pi\int_{-3}^{1}\frac{x^4}{4}\,dx=\pi\int_{-3}^{1}\left(x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{x^4}{4}\right)dx=$$

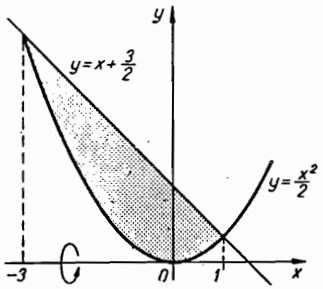
$$=\pi\left|\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{x^5}{20}\right|_{-3}^{1}=\pi\left(\frac{31}{30}+\frac{171}{10}\right)=\underline{18\frac{2}{15}}.$$

577. Lik omeđen elipsom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ rotira oko osi Y. Vidi sl. 58a.

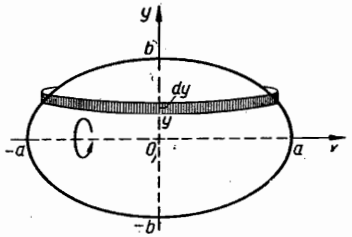
Računamo prema (91a) uzevši u obzir da je

$$x^2(y)=a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$V=\pi a^2\cdot\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\pi a^2\left|y-\frac{y^3}{3b^2}\right|_{-b}^{b}=\underline{\frac{4}{3}\pi a^2 b.}$$



Slika 58

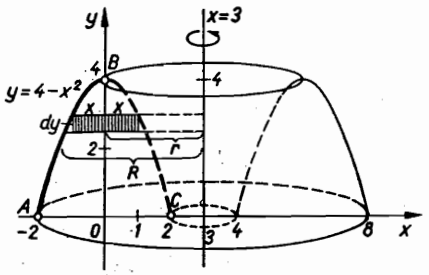


Slika 58a

Za $a=b=R$ dobivamo volumen kugle $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Izračunaj volumen rotacionog elipsoida rotirajući elipsu oko osi X. $\left[\frac{4}{3}ab^2\pi\right]$.

578. Lik je omeđen parabolom $y=4-x^2$ i osi X, a rotira oko pravca $x=3$.



Slika 59

Kako se vidi iz slike 59, elementi lukova AB i BC parabole ABC opisuju pri rotaciji oko pravca $x=3$ prstene visine dy omeđene koncentričnim kružnicama polumjera R, odnosno r sa središtem na osi rotacije, pri čemu je $R=3+x$, a $r=3-x$.

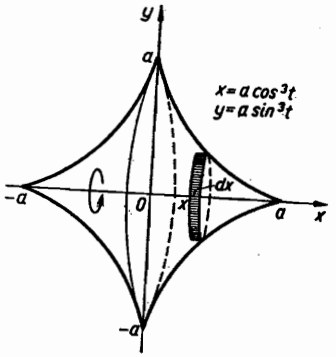
Volumen tog prstena $dV=\pi R^2 dy-\pi r^2 dy=\pi[(3+x)^2-(3-x)^2]dy=\pi\cdot 12x\,dy=$ $=12\pi\sqrt{4-y}\,dy$, jer je x apscisa tačke parabole $y=4-x^2$, a odatle je $x=\sqrt{4-y}$.

$$V=12\pi\int_0^4\sqrt{4-y}\,dy=8\pi\left|\sqrt{(4-y)^3}\right|_4^0=\underline{64\pi.}$$

579. Lik je omeđen astroidom

$$\left.\begin{aligned}x&=a\cos^3 t\\ y&=a\sin^3 t\end{aligned}\right|\ 0\leqslant t<2\pi.$$

Vidi sliku 59a.



Slika 59a

Kako je krivulja simetrična s obzirom na obje koordinatne osi, rotirat ćemo oko osi X samo prvi kvadrant lika uzevši u obzir da je za $x=0$ $t=\frac{\pi}{2}$, a za $x=a$ $t=0$.

Računamo prema (92): $V=\pi\int_{t_1}^{t_2}y^2(t)\cdot x'(t)\,dt.$

$$x'=-3a\cos^2 t\sin t\,dt.$$

Uvrštenje vrijednosti za y, x, dx i granice integracije daje:

$$V=-2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}a^2\sin^6 t\cdot 3a\cos^2 t\cdot\sin t\,dt=$$

$$=-6\pi a^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^7 t\cos^2 t\,dt=-6\pi a^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos^2 t)^3\cdot\cos^2 t\sin t\,dt=$$

$$=-6\pi a^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\cos^2 t-3\cos^4 t+3\cos^6 t-\cos^8 t)\sin t\,dt=$$

= (uz supstituciju $\cos t=z$, pa je $dz=-\sin t\,dt$) =

$$=6\pi a^3\left|\frac{\cos^3 t}{3}-\frac{3}{5}\cos^5 t+\frac{3}{7}\cos^7 t-\frac{\cos^9 t}{9}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\underline{\frac{32}{105}\pi a^3.}$$

580. Lik omeđen kardioidom rotira oko polarne osi.

Vidi sliku 28 uz zadatak 522.

Iz te slike vidimo da traženi volumen opisuje gornja polovina zadanog lika i to za $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ pa integrirajući prema (92a) dobivamo:

$$V = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos\varphi)^3 \sin\varphi \, d\varphi = (\text{uz supstituciju } 1 - \cos\varphi = z,$$

$$\text{pa je } \sin\varphi \, d\varphi = dz) = \frac{1}{6}\pi a^3 \cdot 16 = \underline{\frac{8}{3}\pi a^3}.$$

581. Lik omeđen parabolom $y = x^2$, osi X i pravcima $y = 0$ i $y = 1$ rotira oko osi X. Nariši taj lik!

$$\left[\frac{\pi}{2}\right].$$

582. Lik omeđen hiperbolom $y = \frac{4}{x}$, osi X i pravcem $x = 4$ rotira oko osi X. Nariši taj lik!

$[12\pi]$.

583. Lik omeđen hiperbolom $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, osi X i pravcima $y = b$ i $y = -b$ rotira oko osi Y. Grafički prikaz!

$$\left[\frac{8}{3}\pi a^2 b\right].$$

584. Lik omeđen parabolom $y^2 + x - 4 = 0$ i osi Y rotira oko te osi.

$$\left[34\frac{2}{15}\pi\right].$$

585. Lik omeđen kubnom parabolom $y = x^3$ i pravcima $y = -8$ i $y = 8$ rotira oko osi Y.

$[38, 4\pi]$.

586. Lik omeđen jednim lukom cikloide

$$x = r(t - \sin t)$$
$$y = r(1 - \cos t)$$

i osi X rotira oko osi X, a zatim oko osi Y.

$[5\pi^2 r^3;\ 6\pi^3 r^3]$.

587. Lik omeđen lemniskatom $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ rotira oko polarne osi.

$$\left[\frac{\pi a^3}{4}\left\{\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{2}{3}\right\}\right].$$

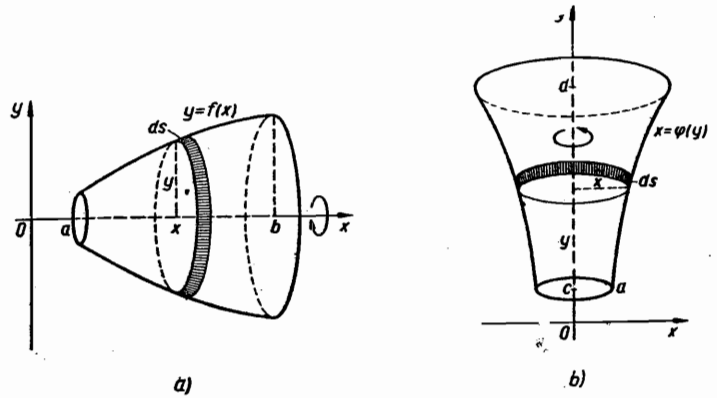
3. *Određivanje površina rotacionih ploha*

Formule

Ako krivulja $y = f(x)$ rotira oko osi X od $x = a$ do $x = b$, ona opisuje plohu, kojoj je površina

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx. \tag{93}$$

Vidi sliku 60.



Slika 60

Rotira li krivulja $x = \varphi(y)$ oko osi Y od $y = c$ do $y = d$, tada je površina tako nastale rotacione plohe

$$S = 2\pi \int_c^d \varphi(y) \sqrt{1 + [\varphi'(y)]^2} \, dy. \tag{93a}$$

Ako je jednadžba krivulje koja rotira zadana u parametarskom obliku

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right| \; t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

tada je prema (87)

$$ds = \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} \, dt,$$

i prema (93)

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} \, dt.$$

Ako je jednadžba krivulje zadana u polarnim koordinatama $\rho = \rho(\varphi)$, tada je prema (88) $ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\varphi$, dok je $y = \rho \sin\varphi$, a $x = \rho \cos\varphi$, pa prema (93) i (93a) dobivamo za površinu koja nastaje rotacijom luka krivulje oko polarne osi (osi X), odnosno osi Y

$$S = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\varphi. \tag{94}$$

$$S = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \cos\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\varphi. \tag{94a}$$

Zadaci

U zadacima **588** do **603** uklj. izračunaj površine ploha nastalih rotacijom krivulja, odnosno pravaca oko koordinatnih osi.

588. Luk kubne parabole $y=x^3$ rotira oko osi X od $x=-\frac{2}{3}$ do $x=\frac{2}{3}$.

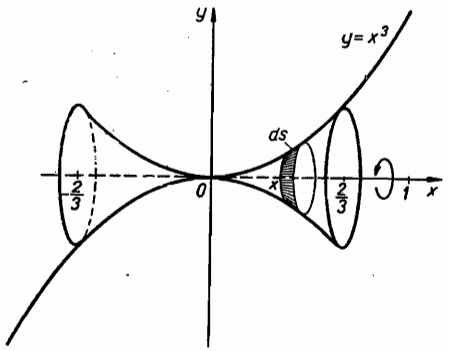
Računamo prema (93) uzevši u obzir da se rotaciona ploha raspada u dva jednaka dijela, kako se to vidi iz slike 61. Dobivamo

$$S=2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{2}{3}} x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx,$$

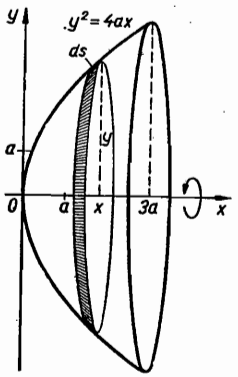
jer je $ds=\sqrt{1+[f'(x)]^2}=\sqrt{1+(3x^2)^2}$.

Integriramo uz supstituciju $1+9x^4=z$, pa je $dz=36x^3\,dx$, dok je $x^3\,dx=\frac{dz}{36}$, pri čemu je za $x=0$ $z=1$, a za $x=\frac{2}{3}$ $z=\frac{25}{9}$.

$$S=\frac{4}{36}\pi\int_1^{\frac{25}{9}}\sqrt{z}\,dz=\frac{\pi}{9}\left|\frac{2}{3}\sqrt{z^3}\right|_1^{\frac{25}{9}}=\frac{196}{729}\pi\doteq \underline{0{,}846 \text{ kvadratnih jedinica.}}$$



Slika 61



Slika 61a

589. Parabola $y^2=4ax$ rotira oko osi X od vrha do tačke apscise $x=3a$.

Računamo prema (93) i slici 61a, uzevši u obzir da je

$$2y\cdot y'=4a,\ \text{pa je}\ y'=\frac{2a}{y}=\frac{2a}{2\sqrt{ax}}=\sqrt{\frac{a}{x}}.$$

$$S=2\pi\int_0^{3a}\sqrt{4ax}\sqrt{1+\frac{a}{x}}\,dx=4\pi\sqrt{a}\int_0^{3a}\sqrt{a+x}\,dx=$$

$$=4\pi\sqrt{a}\left|\frac{2}{3}\sqrt{(a+x)^3}\right|_0^{3a}=\frac{8}{3}\pi\sqrt{a}\left(\sqrt{(4a)^3}-\sqrt{a^3}\right)=\underline{\frac{56}{3}\pi a^2}.$$

590. Luk kružnice $x^2+(y-b)^2=R^2$ rotira oko osi Y od $y=y_1$ do $y=y_2$ $(x>0)$.

Računamo prema (93a):

$$S=2\pi\int_{y_1}^{y_2} x\sqrt{1+x'^2}\,dy=2\pi\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{x^2+(xx')^2}\,dy. \qquad \text{(a)}$$

Derivirajući $x^2=R^2-(y-b)^2$ po y, dobivamo

$$2xx'=-2(y-b)\ \text{ili}\ xx'=-(y-b).$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$S=2\pi\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{R^2-(y-b)^2+(y-b)^2}\,dy=2\pi R\left|y\right|_{y_1}^{y_2}=2\pi R(y_2-y_1)=$$

$$=\text{prema slici 62}=\underline{2\pi RH.}$$

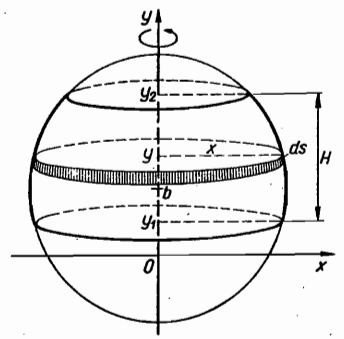
Tu je H visina kuglinog pojasa. Za $H=2R$ dobivamo oplošje kugle ili sfere.

591. Petlja krivulje $9ax^2=y(3a-y)^2$ rotira oko osi Y.

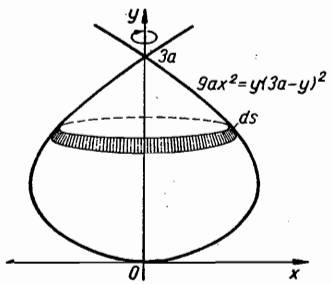
Računamo prema (a) iz prethodnog zadatka 590. Deriviranje jednadžbe krivulje daje:

$$18axx'=-2y(3a-y)+(3a-y)^2=(3a-y)\cdot 3(a-y),$$

$$\text{pa je}\ xx'=\frac{(3a-y)(a-y)}{6a}.$$



Slika 62



Slika 63

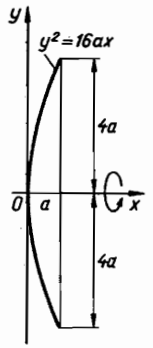
Uvrštenje u (a) daje s obzirom na sliku 63

$$S=2\pi\int_0^{3a}\sqrt{\frac{y(3a-y)^2}{9a}+\frac{(3a-y)^2(a-y)^2}{36a^2}}\,dy=$$

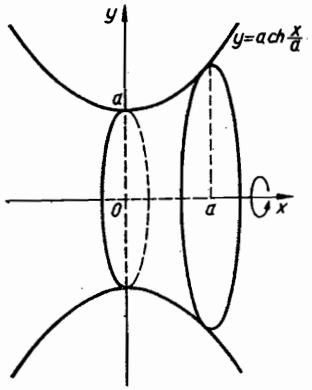
$$=\frac{\pi}{3a}\int_0^{3a}(3a-y)\sqrt{y^2+2ay+a^2}\,dy=\frac{\pi}{3a}\int_0^{3a}(3a-y)(a+y)\,dy=$$

$$=\frac{\pi}{3a}\int_0^{3a}(3a^2+2ay-y^2)\,dy=\frac{\pi}{3a}\left|\,3a^2y+ay^2-\frac{y^3}{3}\,\right|_0^{3a}=\underline{3\pi a^2.}$$

592. Paraboličkog zrcala kojemu su dimenzije prikazane na slici 64.



Slika 64



Slika 65

Najprije napišimo jednadžbu parabole prema slici. Tačka $A(a, 4a)$ leži na paraboli $y^2=2px$, pa je

$$16a^2=2pa, \text{ dakle } 2p=16a \text{ i}$$

$$y^2=16ax-\text{jednadžba parabole.}$$

Odatle $2yy'=16a$ i $y'=\frac{2a}{\sqrt{ax}}=2\sqrt{\frac{a}{x}}$.

Prema (93) i slici 64:

$$S=2\pi\int_0^a 4\sqrt{ax}\cdot\sqrt{1+\frac{4a}{x}}\,dx=8\pi\sqrt{a}\int_0^a\sqrt{x+4a}\,dx=$$

$$=8\pi\sqrt{a}\cdot\frac{2}{3}\left|\sqrt{(x+4a)^3}\right|_0^a=\underline{\frac{16}{3}\pi a^2(5\sqrt{5}-8)}.$$

593. Luk lančanice $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ rotira oko osi X od $x=0$ do $x=a\,(a>0)$. (Traži se površina katenoida).

Prema (93), slici 65 i formulama za hiperbolne funkcije:

$$S=2\pi a\int_0^a \mathrm{ch}\frac{x}{a}\cdot\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx=2\pi a\int_0^a \mathrm{ch}^2\frac{x}{a}\,dx=$$

$$=2\pi a\int_0^a\left(\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)^2dx=\pi a\int_0^a\left(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx=$$

$$=\frac{\pi a}{2}\left|\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right|_0^a=\underline{\frac{\pi a^2}{4}(e^2+4-e^{-2})}.$$

594. Luk sinusoide $y=\sin 2x$ rotira oko osi X od $x=0$ do $x=\frac{\pi}{2}$. Nariši graf rotacionog tijela.

Kako je $y'=2\cos 2x$, dobivamo prema (93):

$$S=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\sqrt{1+4\cos^2 2x}\,dx.$$

Stavimo $2\cos 2x=t$, tada je $-4\sin 2x\,dx=dt$, a $\sin 2x\,dx=-\frac{1}{4}dt$, pri čemu uzmimo u obzir da je za $x=0$ $t=2$, a za $x=\frac{\pi}{2}$ $t=-2$. Dobivamo prema predtipu C, primjer 3 na str. 94:

$$S=2\pi\int_2^{-2}\sqrt{1+t^2}\cdot\left(-\frac{1}{4}dt\right)=\frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}\left|\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right|_{-2}^{2}=\underline{\frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5}+\ln(\sqrt{5}+2)\right)}.$$

595. Astroida $\left.\begin{array}{l}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{array}\right|$ rotira oko osi X.

Vidi sliku 25 uz zadatak 517.

Računamo prema (94):

$$\dot{x}=-3a\cos^2 t\sin t$$

$$\dot{y}=3a\sin^2 t\cos t$$

pa je $y(t)\cdot\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=3a^2\sin^3 t\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}=$

$$=3a^2\sin^3 t\cdot\sin t\cos t=3a^2\sin^4 t\cos t.$$

Prema slici:

$$S=2\cdot 2\pi\cdot 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,dt=(\text{uz supstituciju}$$

$$\sin t = z, \text{ te je } \cos t\, dt = dz) = 12\pi a^2 \left| \frac{\sin^5 t}{5} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{12}{5}\pi a^2}.$$

596. Luk krivulje

$$\left.\begin{aligned} x &= e^t \sin t \\ y &= e^t \cos t \end{aligned}\right| \text{ rotira oko osi } X \text{ od } t=0 \text{ do } t=\frac{\pi}{2}.$$

Prema (94):

$$\dot{x} = e^t(\cos t + \sin t)$$

$$\dot{y} = e^t(\cos t - \sin t)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2e^{2t}.$$

$$S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t \cdot \sqrt{2e^{2t}}\, dt = 2\pi\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \cos t\, dt = (\text{prema } (65)$$

$$\text{uz } a=2 \text{ i } b=1) = 2\pi\sqrt{2} \left| \frac{e^{2t}}{5}(2\cos t + \sin t) \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{2}{5}\pi\sqrt{2}(e^{\pi} - 2)}.$$

597. Luk lemniskate $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ rotira oko polarne osi.

Vidi sliku 32 uz zadatak 529.

Računamo prema (94): $S = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi$.

Kako je $\rho' = -a\dfrac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, a $\rho^2 + \rho'^2 = \dfrac{a^2}{\cos 2\varphi}$, dobivamo prema slici:

$$S = 2\cdot 2\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = -4\pi a^2 \left| \cos\varphi \right|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -4\pi a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = \underline{2\pi a^2(2 - \sqrt{2})}.$$

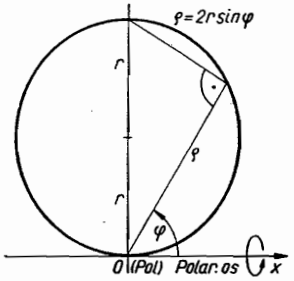
598. Kružnica $\rho = 2r \sin\varphi$ rotira oko polarne osi (X).

Vidi sliku 66.

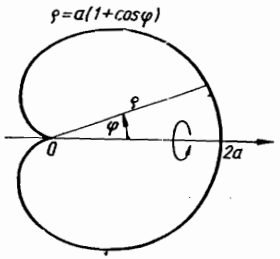
Kako je $\rho^2 + \rho'^2 = 4r^2$, dobivamo prema (94):

$$S = 8\pi r^2 \int_0^{\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = 8\pi r^2 \left| \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right|_0^{\pi} = \underline{4\pi^2 r^2}.$$

Proba prema Guldinovu pravilu (96): $S = s \cdot 2\pi y_t = 2\pi r \cdot 2\pi r = 4\pi^2 r^2$.



Slika 66



Slika 66a

599. Luk kardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ rotira oko polarne osi.

Kako je $\rho' = -a\sin\varphi$, pa je $\rho^2 + \rho'^2 = a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi = 2a^2(1+\cos\varphi) =$

$= 2a^2 \cdot 2\cos^2\dfrac{\varphi}{2} = 4a^2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}$, dobivamo prema (94):

$$S = 4\pi a^2 \int_0^{\pi} 2\cos^2\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= \left(\frac{\varphi}{2} = t,\ \varphi = 2t,\ dy = 2\,dt;\ \text{za } \varphi = 0\ t = 0,\ \text{a za } \varphi = \pi\ t = \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 32\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \cdot \sin t\, dt = -32\pi a^2 \left| \frac{\cos^5 t}{5} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{32}{5}\pi a^2}.$$

Nariši sliku!

600. Luk kružnice $x^2 + y^2 = 4$ $(x > 0)$ rotira oko osi Y od $y = -1$ do $y = 1$. Grafički prikaz!

[8π].

601. Kružnica $\left.\begin{aligned} x &= r\cos t + p \\ y &= r\sin t + q \end{aligned}\right|$ $0 \leq t < 2\pi$ rotira oko osi X.

[Nariši sliku. $S = 4\pi^2 rq$].

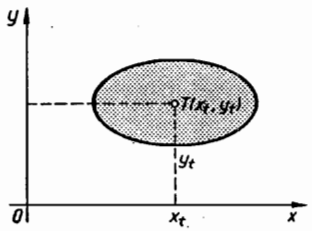
602. Jedan luk cikloide

$$\left.\begin{aligned} x &= t - \sin t \\ y &= 1 - \cos t \end{aligned}\right| \text{ rotira oko osi } X, \text{ a zatim oko osi } Y.$$

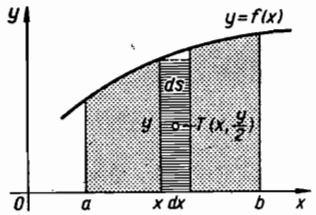
$\left[\text{Nariši sliku; } \dfrac{64}{3}\pi,\ 16\pi^2\right]$.

603. Lemniskata $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ rotira oko osi Y.

$[2\pi a^2\sqrt{2}]$.



Slika 67



Slika 68

e. Računanje statičkih momenata i koordinata težišta

1. Ravni likovi

Formule

a) U pravokutnim koordinatama

Statički momenti ravna lika prema slici 67:

$$\text{s obzirom na os } X: \; M_x = S\cdot y_t$$
$$\text{s obzirom na os } Y: \; M_y = S\cdot x_t. \qquad \text{(a)}$$

Tu su x_t i y_t koordinate težišta T lika, a S njegova površina.

Iz (a) slijedi:

$$x_t = \frac{M_y}{S}; \quad y_t = \frac{M_x}{S}. \qquad \text{(b)}$$

Ako površina lika i koordinate težišta nisu poznate, računaju se statički momenti za element dS površine lika, a zatim se integrira po čitavoj površini lika.

$$M_x = \int_S y\,dS; \quad M_y = \int_S x\,dS. \qquad (82)$$

Tu su x i y koordinate elementa dS lika.

Ako je zadani lik omeđen krivuljom kojoj je poznata jednadžba $y = f(x)$, tada je prema slici 68

$$dS = y\cdot dx$$

dok su koordinate težišta elementa površine dS

$$x_t = x; \; y_t = \frac{y}{2},$$

pa statički momenti lika prema (82) glase

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx; \quad M_y = \int_a^b xy\,dx \qquad (82a)$$

Podijelimo li formule (82a) s površinom $S = \int_a^b y\,dx$ lika, dobijemo prema (b) koordinate težišta lika:

$$x_t = \frac{M_y}{S} = \frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx},$$
$$y_t = \frac{M_x}{S} = \frac{\int_a^b y^2\,dx}{\int_a^b y\,dx}. \qquad (83)$$

Primjedba: Težište lika, koji je simetričan s obzirom na neku os, leži na toj osi.

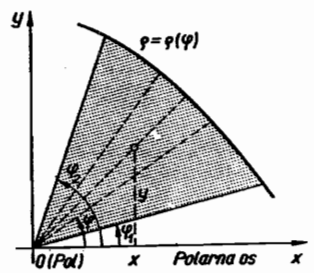
b) U polarnim koordinatama

Uzmimo li u obzir, da je prema slici 69 element površine

$$dS = \frac{1}{2}\rho^2\,d\varphi \qquad (78)$$

i da je težište elementa dS površine, koji ima oblik krivocrtnog trokuta, udaljeno od vrha za $\frac{2}{3}\rho$, dobivamo za pravokutne koordinate težišta tog trokuta

$$x = \frac{2}{3}\rho\cos\varphi, \qquad y = \frac{2}{3}\rho\sin\varphi.$$



Slika 69

Uvrštenje tih izraza za x i y u formule (82a) i (83) daje s obzirom na sliku 69 i (78):

Statički momenti

$$M_x = \frac{1}{3}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \sin\varphi\,d\varphi; \quad M_y = \frac{1}{3}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \cos\varphi\,d\varphi. \qquad (84)$$

Koordinate težišta

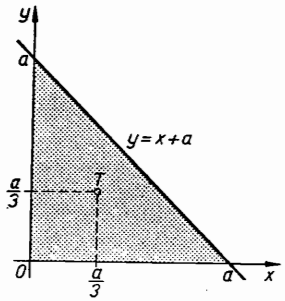
$$x_t=\frac{M_y}{S}=\frac{\frac{1}{3}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^3\cos\varphi\,d\varphi}{\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2 d\varphi},$$

$$y_t=\frac{M_x}{S}=\frac{\frac{1}{3}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^3\sin\varphi\,d\varphi}{\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2 d\varphi}. \qquad (84a)$$

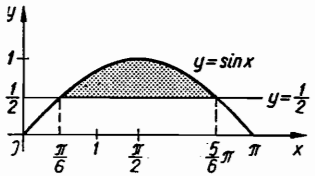
Zadaci

U zadačima **604** do **617** uklj. odredi s obzirom na koordinatne osi statičke momente, odnosno koordinate težišta, ravnih likova omeđenih zadanim krivuljama ili pravcima.

604. Lik je omeđen pravcima $x+y=a$, $x=0$ i $y=0$. Odredi statičke momente lika i koordinate težišta.



Slika 70



Slika 71

Prema (82a) i slici 70:

$$M_x=\frac{1}{2}\int\limits_0^a(-x+a)^2dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^a(x^2-2ax+a^2)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{x^3}{3}-ax^2+a^2x\right|_0^a=\underline{\frac{a^3}{6}}.$$

$$M_y=\int\limits_0^a x(a-x)\,dx=\left|a\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right|_0^a=\underline{\frac{a^3}{6}}.$$

Dobili smo $M_x=M_y$, jer je zadani lik simetričan s obzirom na pravac $y=x$

S toga je razloga $x_t=y_t=\dfrac{\frac{a^3}{6}}{\frac{a^2}{2}}=\underline{\dfrac{a}{3}}$.

605. Lik je omeđen lukom sinusoide i pravcem $y=\frac{1}{2}$. Odredi statički moment lika s obzirom na os X (za jedan segment).

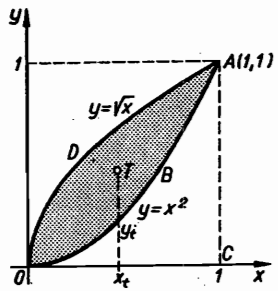
Kako je $\sin 30°=\sin 150°=\frac{1}{2}$, granice integracije su arc $30°=\frac{\pi}{6}$ i arc $150°=\frac{5\pi}{6}$.

Prema (82a) i slici 71 imamo:

$$M_x=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\sin^2x\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}\left|\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}-\frac{1}{4}x\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}=\frac{1}{8}\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\underline{\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}}.$$

606. Lik je omeđen parabolama $y=x^2$ i $y=\sqrt{x}$. Odredi koordinate težišta.



Slika 72

Budući da je pravac $y=x$ os simetrije zadanog lika težište leži na toj osi pa je $x_t=y_t$. Vidi sliku 72.

Prema (82a) i slici uzevši u obzir da su $O(0;0)$ i $A(1;1)$ sjecišta parabola imamo

$$\text{za lik } ODAC:\ M_x'=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\,dx=\frac{1}{4}.$$

za lik $OBAC$: $M_x'' = \frac{1}{2}\int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{10}$.

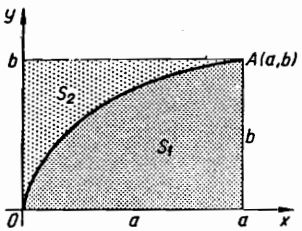
$$M_x = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}.$$

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \left|\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Prema (83)

$$x_t = y_t = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20} = \underline{0{,}45.}$$

607. Pravokutnik sa stranicama a i b presječen je parabolom (vidi sliku 73) na dva dijela S_1 i S_2. Odredi koordinate težišta svakog dijela.



Slika 73

Parabola $y^2 = 2px$ prolazi tačkom $A(a; b)$, pa je

$$b^2 = 2pa, \text{ dok je } 2p = \frac{b^2}{a}, \text{ i}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a}x \text{ — jednadžba zadane parabole.}$$

Za S_1: $M_x = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{b^2}{a}x\,dx = \frac{ab^2}{4}$

$$M_y = \int_0^a x\cdot\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{5}a^2b.$$

Površina $S_1 = \frac{b}{\sqrt{a}}\int_0^a \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}ab.$

$$x_t = \frac{M_y}{S} = \frac{2}{5}a^2b\cdot\frac{3}{2ab} = \underline{\frac{3}{5}a.}$$

$$y_t = \frac{M_x}{S} = \frac{ab^2}{4}\cdot\frac{3}{2ab} = \underline{\frac{3}{8}b.}$$

Statičke momente za dio S_2 dobit ćemo kao razliku statičkih momenata pravokutnika i dijela S_1.

Za pravokutnik imamo prema slici:

$$M_x = S\cdot y_t = ab\cdot\frac{b}{2} = \frac{ab^2}{2}; \quad M_y = S\cdot x_t = ab\cdot\frac{a}{2} = \frac{a^2b}{2}.$$

Za S_2: $M_x = \frac{ab^2}{2} - \frac{ab^2}{4} = \frac{ab^2}{4}$; $M_y = \frac{a^2b}{2} - \frac{2}{5}a^2b = \frac{a^2b}{10}$.

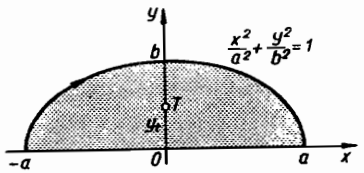
$$\text{Površina } S_2 = ab - \frac{2}{3}ab = \frac{ab}{3}$$

Za S_2: $x_t = \frac{M_y}{S} = \frac{a^2b}{10}\cdot\frac{3}{ab} = \underline{\frac{3}{10}a}$; $y_t = \frac{M_x}{S} = \frac{ab^2}{4}\cdot\frac{3}{ab} = \underline{\frac{3}{4}b.}$

608. Lik je omeđen poluelipsom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ i osi } X(y \geqslant 0).$$

Odredi koordinate težišta.



Slika 74

Prema slici 74:

$$\underline{x_t = 0.}$$

Radi jednostavnijeg integriranja prelazimo na parametarske jednadžbe elipse:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right\} 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

Računamo prema (82a) i (83):

$$M_x = -\frac{b^2a}{2}\int_\pi^0 \sin^3 t\,dt = \text{(prema tipu VIII)} = -\frac{ab^2}{2}\left|-\frac{1}{3}\sin^2 t\cos t - \frac{2}{3}\cos t\right|_\pi^0 = \frac{2}{3}ab^2.$$

$$S = \int_\pi^0 y\,dx = -ba\int_\pi^0 \sin^2 t\,dt = -ab\left|\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right|_\pi^0 = \frac{ab\pi}{2}.$$

$$y_t = \frac{M_x}{S} = \frac{2}{3}ab^2\cdot\frac{2}{ab\pi} = \underline{\frac{4b}{3\pi}}.$$

609. Lik je omeđen prvim lukom cikloide.

$$\left.\begin{aligned} x &= r(t - \sin t) \\ y &= r(1 - \cos t) \end{aligned}\right| 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

i osi X. Odredi koordinate težišta.

Iz slike 39 uz zadatak 546 vidi se da je

$$\underline{x_t = r\pi}.$$

Računamo y_t

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^3(1-\cos t)^2(1-\cos t)\,dt = \frac{r^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt =$$

$$= \frac{r^3}{2}\left|t-3\sin t+3\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)-\frac{1}{3}\sin t\cos^2 t+\frac{2}{3}\sin t\right|_0^{2\pi} = \frac{5}{2}\pi r^3.$$

$$S = r^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt = r^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt = r^2\left|t-2\sin t+\right.$$

$$\left.+\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right|_0^{2\pi} = 3\pi r^2.$$

$$y_t = \frac{M_x}{S} = \frac{5}{2}\pi r^3\cdot\frac{1}{3\pi r^2} = \underline{\frac{5}{6}r}.$$

610. Lik je omeđen Arhimedovom spiralom

$$\rho = a\varphi \text{ od } \varphi = 0 \text{ do } \varphi = \pi.$$

Odredi pravokutne koordinate težišta.

Vidi sliku 29 uz zadatak 523.

Računamo prema (84) i (84a):

$$M_x = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} a^3\varphi^3\sin\varphi\,d\varphi = \text{nakon trostrukog parcijalnog integriranja} =$$

$$= \frac{a^3}{3}\left|(6\varphi-\varphi^3)\cos\varphi+(3\varphi^2-6)\sin\varphi\right|_0^{\pi} = \frac{a^3}{3}(\pi^3-6\pi).$$

$$M_y = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} a^3\varphi^3\cos\varphi\,d\varphi = \frac{a^3}{3}\left|(\varphi^3-6\varphi)\sin\varphi+(3\varphi^2-6)\cos\varphi\right|_0^{\pi} = a^3(4-\pi^2)$$

Prema (81): $S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2\varphi^2\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\left|\frac{\varphi^3}{3}\right|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{6}a^2.$

$$\underline{x_t = \frac{6a(4-\pi^2)}{\pi^3}};\ \underline{y_t = \frac{2a(\pi^2-6)}{\pi^2}}.$$

611. Lik je omeđen krivuljom $y = \frac{3}{4}x^2$ i pravcima $x = 0$ i $x = a$.

Odredi koordinate težišta uz grafički prikaz. $\left[x_t = \frac{3}{2};\ y_t = \frac{9}{10}\right]$.

612. Lik je omeđen polukružnicom

$$y = +\sqrt{r^2-x^2} \text{ i osi } X.$$

Odredi koordinate težišta

1) neposredno u pravokutnim koordinatama

2) uz prijelaz na parametarske jednadžbe polukružnice. $\left[0;\ \frac{4r}{3\pi}\right]$.

613. Lik je omeđen parabolom $y = 2x - x^2$ i osi X. Odredi težište uz grafički prikaz.

$\left[1;\ \frac{3}{5}\right]$

614. Lik je omeđen kosinusoidom i osi X od $x = -\frac{\pi}{2}$ do $x = \frac{\pi}{2}$. Odredi koordinate težišta

$\left[0;\ \frac{\pi}{8}\right]$.

615. Lik je omeđen lukom astroide

$\left.\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right|$ i koordinatnim osima u prvom kvadrantu. Odredi koordinate težišta.

$\left[\frac{256a}{315\pi}\right]$.

616. Lik je omeđen parabolom

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{a} \text{ i koordinatnim osima.}$$

Odredi koordinate težišta uz grafički prikaz. $\left[x_t = y_t = \frac{a}{5}\right]$.

617. Lik predočuje kružni isječak polumjera r sa središnjim kutom 60°. Odredi koordinate težišta isječka, koji je smješten simetrično s obzirom na os Y.

$\left[\text{Prikaži jednadžbu kružnice u polarnim koordinatama } \rho = r;\ T\left(0;\ \frac{2r}{\pi}\right)\right]$.

2. Krivulje u ravnini

Formule

a) **U pravokutnim koordinatama**

Za krivulju $y = y(x)$:

$$\text{Duljina luka } s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{86}$$

Statički momenti

$$M_x=\int_s y\,ds=\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$M_y=\int_s x\,ds=\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{86a}$$

Koordinate težišta: $x_t=\dfrac{M_y}{s}$; $y_t=\dfrac{M_x}{s}$. (86b)

Za krivulju zadanu parametarski $\left.\begin{array}{l}x=x(t)\\ y=y(t)\end{array}\right| t_1\leqslant t\leqslant t_2$

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt \tag{87}$$

$$M_x=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$$

$$M_y=\int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt \tag{87a}$$

$$x_t=\frac{M_y}{s};\quad y_t=\frac{M_x}{s} \tag{87b}$$

b) **U polarnim koordinatama**

Za krivulju $\rho=\rho(\varphi)$

$$s=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi \tag{88}$$

$$M_x=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$$

$$M_y=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho\cos\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi \tag{88a}$$

$$x_t=\frac{M_y}{s};\quad y_t=\frac{M_x}{s}. \tag{88b}$$

Zadaci

U zadacima 618 do 625 uklj. odredi s obzirom na koordinatne osi statičke momente i koordinate težišta zadanih ravnih krivulja, odnosno pravaca.

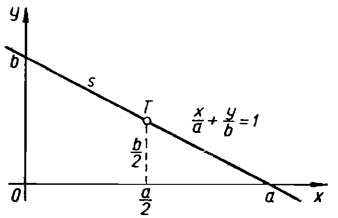
618. Koordinate težišta za odrezak pravca

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

između koordinatnih osi.

Računamo prema slici 75 i (86a).

$$s=\sqrt{a^2+b^2};\qquad y=-\frac{b}{a}x+b;\qquad y'=-\frac{b}{a}$$



Slika 75

$$M_x=\int_0^a\left(-\frac{b}{a}x+b\right)\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\,dx=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\left|-\frac{b}{2a}x^2+bx\right|_0^a=$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\left(-\frac{ab}{2}+ab\right)=\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

$$M_y=\int_0^a x\,\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\,dx=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^a=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

$$x_t=\frac{M_y}{s}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\underline{\frac{a}{2}}$$

$$y_t=\frac{M_x}{s}=\underline{\frac{b}{2}}.$$

619. Koordinate težišta za prvi luk cikloide

$$x=r(t-\sin t)$$
$$y=r(1-\cos t).$$

Prema slici 39 u zadatku 546:

$$\underline{x_t=r\pi}.$$

Prema (87) i (87a):

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}=r(1-\cos t)\\ \dot{y}=r\sin t\end{array}\right|\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=r\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}=$$

$$=r\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}=r\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}=2r\sin\frac{t}{2}.$$

$$M_x=\int_0^{2\pi} r(1-\cos t)\cdot 2r\sin\frac{t}{2}\,dt=4r^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=\left(\text{prema tipu VIII uz supstituciju } \frac{t}{2}=z,\ \text{pa je } dt=2dz\right)=$$

$$=8r^2\left|-\frac{1}{3}\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}-\frac{2}{3}\cos\frac{t}{2}\right|_0^{2\pi}=\underline{\frac{32}{3}r^2}.$$

$s=8r \rightarrow$ vidi zadatak 546.

$$\underline{y_t=\frac{4}{3}r.}$$

620. Koordinate težišta za luk astroide

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos^3 t\\ y&=a\sin^3 t\end{aligned}\right\}\text{ koji leži u I kvadrantu.}$$

Kako je astroida simetrična s obzirom na obje koordinatne osi, težište luka leži na osi simetrije luka $y=x$, pa je $x_t=y_t$.

Prema (87a) i slici 25 uz zadatak 517:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\ 3a\cos^2 t\sin t \ \Big|\ 2\\ \dot{y} &= \ \ 3a\sin^2 t\cos t \ \Big|\ +\\ \hline \dot{x}^2+\dot{y}^2&=9a^2\sin^2 t\cos^2 t \end{aligned}$$

ili

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=3a\sin t\cos t.$$

$$M_x=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,dt=3a^2\left|\frac{\sin^5 t}{5}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{5}a^2.$$

Prema (87):

$$s=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt=3a\left|\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}a.$$

Prema (87b):

$$\underline{x_t=y_t=\frac{2}{5}a.}$$

621. Koordinate težišta luka logaritamske spirale

$$\rho=ae^{\varphi}$$

od $\varphi=\frac{\pi}{2}$ do $\varphi=\pi$.

Računamo prema (88b):

$$M_x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}ae^{\varphi}\sin\varphi\sqrt{a^2e^{2\varphi}+a^2e^{2\varphi}}\,d\varphi=a^2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{2\varphi}\sin\varphi\,d\varphi=$$

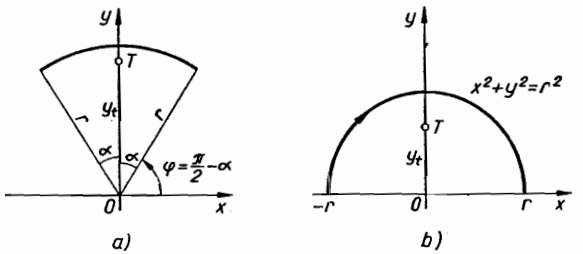
$$=\text{prema (64)}=a^2\sqrt{2}\left|\frac{e^{2\varphi}}{2^2+1}(2\sin\varphi-\cos\varphi)\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{a^2\sqrt{2}}{5}(e^{2\pi}-2e^{\pi}).$$

Prema (88): $s=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{a^2e^{2\varphi}+a^2e^{2\varphi}}\,d\varphi=\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}\right)$

$$\underline{y_t=\frac{M_x}{s}=\frac{a}{5}\,\frac{e^{2\pi}-2e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}.}$$

Izračunaj na isti način x_t. Dobit ćeš $x_t=-\frac{a}{5}\,\frac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}$.

622. Koordinate težišta kružnog luka polumjera r kojemu odgovara središnji kut 2α.



Slika 76

Računamo prema slici 76a i formulama (88):

$x_t=0$, jer je os Y os simetrije zadanog luka.

Prelazimo na polarne koordinate:

$\rho=r \rightarrow$ jednadžba luka, pa je $\rho'=0$ i $\rho^2+\rho'^2=r^2$.

$$M_x=\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha}r^2\sin\varphi\,d\varphi=-r^2\left|\cos\varphi\right|_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha}=2r^2\sin\alpha$$

$$y_t=\frac{M_x}{s}=\frac{2r^2\sin\alpha}{2r\alpha}=\underline{r\frac{\sin\alpha}{\alpha}}.$$

Za polukružnicu:

$$\alpha=\frac{\pi}{2},\ \text{pa je}\ y_t=r\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\underline{\frac{2r}{\pi}}.\ \text{Vidi sl. 76b.}$$

623. Težište luka kardioide

$$\rho = r(1+\cos\varphi) \text{ od } \varphi=0 \text{ do } \varphi=\pi.$$

Prema (88):

$$M_x = \int_0^\pi r(1+\cos\varphi)\cdot\sin\varphi\sqrt{r^2(1+\cos\varphi)^2+r^2\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= r^2\int_0^\pi (1+\cos\varphi)\sin\varphi\cdot\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= r^2\int_0^\pi 2\cos^2\frac{\varphi}{2}\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= 8r^2\int_0^\pi \cos^4\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8r^2\left|-\frac{2}{5}\cos^5\frac{\varphi}{2}\right|_0^\pi = \frac{16}{5}r^2.$$

$s=8r$ (vidi zadatak 554 u kojem je $r=3$)

$$y_t = \frac{M_x}{s} = \underline{\frac{2}{5}r}.$$

Izračunaj na isti način prema (88b) y_t. Dobit ćeš istu vrijednost $\frac{2}{5}r$.

624. Koordinate težišta lančanice

$$y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a} \quad \text{za} \quad -a \leqslant x \leqslant a.$$ Vidi sliku 65 uz zadatak 593.

Iz te slike slijedi da je $x=0$. Odredimo y_t prema formulama (86). Kako je $y' = \mathrm{sh}\frac{x}{a}$, imamo:

$$M_x = \int_{-a}^{a} a\,\mathrm{ch}\frac{x}{2}\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{2}}\,dx = 2a\int_0^a \mathrm{ch}^2\frac{x}{2}\,dx = \Big(\text{prema } \mathrm{ch}\,x =$$

$$= \sqrt{\frac{1+\mathrm{ch}\,2x}{2}}, \text{ pa je } 2\,\mathrm{ch}^2 x = 1+\mathrm{ch}\,2x\Big) = a\int_0^a\left(1+\mathrm{ch}\,2\frac{x}{a}\right)dx =$$

$$= a\left|x+\frac{a}{2}\,\mathrm{sh}\,2\frac{x}{a}\right|_0^a = a\left(a+\frac{a}{2}\,\mathrm{sh}\,2\right) = \frac{a^2}{2}(2+\mathrm{sh}\,2).$$

$$s = 2\int_0^a\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx = 2\left|a\,\mathrm{sh}\frac{x}{a}\right|_0^a = 2a\,\mathrm{sh}\,1.$$

$$y_t = \frac{M_x}{s} = \underline{\frac{a(2+\mathrm{sh}\,2)}{4\,\mathrm{sh}\,1} = 1{,}18\,a}.$$

625. Izračunaj koordinate težišta polukružnice $x^2+y^2=r^2$ ne prelazeći na polarne koordinate $\left[0, \frac{2r}{\pi}\right]$.

f. Računanje momenata tromosti (inercije)

1. Ravni likovi (homogeni gustoće $\gamma=1$, pa je masa m identična s površinom S lika)

Formule

Momente tromosti

aksijalni

$$I_x = \int_S y^2\,dS$$

$$I_y = \int_S x^2\,dS \qquad (85a)$$

polarni s obzirom na ishodište $O(0;0)$:

$$I_0 = \int_S \varrho^2\,dS.$$

Zadaci

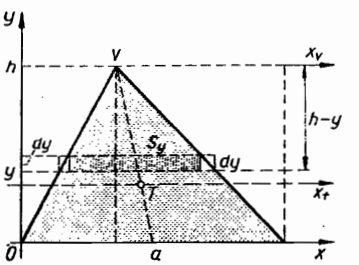
U zadacima **626** do **633** uklj. izračunaj momente tromosti zadanih ravnih likova s obzirom na zadane osi, odnosno polove.

626. Trokut baze a cm i visine h cm. Momenti tromosti s obzirom na

1) bazu,

2) pravac, koji je paralelan s bazom a, a prolazi vrhom V trokuta,

3) pravac, koji je paralelan s bazom, a prolazi težištem T trokuta. Vidi sliku 77.



Slika 77

ad 1) Prema slici 77 i (85a):

$$dI_x = y^2\cdot dS = y^2\cdot z\,dy.$$

Treba z izraziti s y:

Iz sličnosti trokuta slijedi:

$$z:a=(h-y):h$$

pa je

$$z=\frac{a(h-y)}{h}=a-\frac{a}{h}y. \qquad \text{(a)}$$

Slijedi:

$$\mathrm{d}I_x=y^2\left(a-\frac{a}{h}y\right)\mathrm{d}y$$

i

$$I_x=a\int_0^h y^2\mathrm{d}y-\frac{a}{h}\int_0^h y^3\,\mathrm{d}y=a\left|\frac{y^3}{3}\right|_0^h-\frac{a}{h}\left|\frac{y^4}{4}\right|_0^h$$

$$\underline{I_x=\frac{ah^3}{12}\,\mathrm{cm}^4.}$$

ad 2)

$$\mathrm{d}I_v=(h-y)^2\cdot z\,\mathrm{d}y=(\text{prema (a)})=a(h-y)^2\left(1-\frac{y}{h}\right)\mathrm{d}y$$

ili

$$\mathrm{d}I_v=a\left(h^2-3hy+3y^2-\frac{1}{h}y^3\right)\mathrm{d}y$$

$$I_v=a\left|h^2y-3h\frac{y^2}{2}+y^3-\frac{1}{h}\cdot\frac{y^4}{4}\right|_0^h=\underline{\frac{ah^3}{4}\,\mathrm{cm}^4.}$$

ad 3) Moment tromosti I_t s obzirom na os X_t kroz težište T lika odredimo pomoću Steinerova stavka

$$I_x=I_t+S\cdot d^2.$$

gdje je d međusobna udaljenost paralelnih osi X i X_t.

U našem je slučaju $d=\frac{h}{3}$, dok je $I_x=\frac{ah^3}{12}$.

$$\frac{ah^3}{12}=I_t+\frac{ah}{2}\cdot\left(\frac{h}{3}\right)^2.$$

Odatle je:

$$\underline{I_t=\frac{ah^3}{36}\,\mathrm{cm}^4.}$$

I_t možemo odrediti i pomoću $I_v=\frac{ah^3}{4}$ uzevši u obzir da je sad $d=\frac{2}{3}h$:

$$\frac{ah^3}{4}=I_t+\frac{ah}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}h\right)^2.$$

Dobivamo:

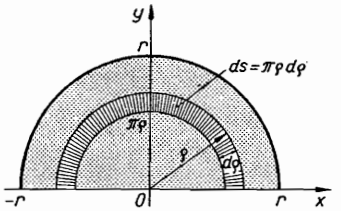
$$\underline{I_t=\frac{ah^3}{36}\,\mathrm{cm}^4.}$$

627. Moment otromosti polukruga polumjera r s obzirom na ishodište $O(0;0)$.

Prema slici 78 i (85a):

$$\mathrm{d}I_0=\rho^2\cdot\mathrm{d}S=\rho^2\cdot\pi\rho\,\mathrm{d}\rho=\pi\rho^3\,\mathrm{d}\rho.$$

$$I_0=\pi\int_0^r\rho^3\,\mathrm{d}\rho=\pi\left|\frac{\rho^4}{4}\right|_0^r=\underline{\frac{\pi}{4}r^4.}$$



Slika 78

628. Moment tromosti elipse s poluosima a i b s obzirom na obje osi.

1) S obzirom na os $X(2a)$.

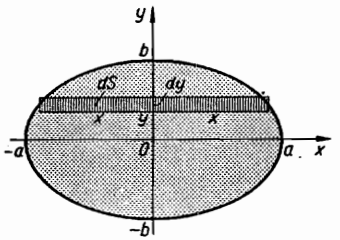
Prelazimo na parametarske jednadžbe elipse

$$\left.\begin{aligned}x&=a\cos t\\ y&=b\sin t\end{aligned}\right|\;0\leqslant t<2\pi.$$

Prema (85a) i slici 79:

$$\mathrm{d}S=2x\,\mathrm{d}y=2a\cos t\cdot b\cos t\,\mathrm{d}t=2ab\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}I_x=y^2\cdot\mathrm{d}S=2ab^3\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$



Slika 79

$$I_x=2\cdot 2ab^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^2 t\cos^2 t}{4}\,\mathrm{d}t=ab^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}ab^3\left|t-\frac{\sin 4t}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\underline{\frac{\pi}{4}ab^3.}$$

2) Na isti način izračunaj I_y. Dobit ćeš $\underline{\frac{\pi}{4}ba^3.}$

629. Moment tromosti paraboličkog segmenta prema slici s obzirom na obje koordinatne osi.

Parabola $y^2=2px$ prolazi tačkom $A(a;b)$ pa je

$$b^2=2pa, \qquad \text{a odatle je} \qquad 2p=\frac{b^2}{a}$$

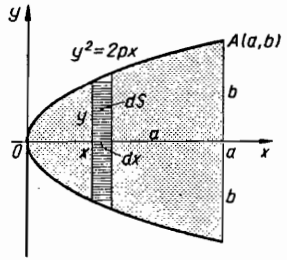
i $y^2=\frac{b^2}{a}x$, odnosno $y=\pm\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{x}$ → jednadžba zadane parabole.

Prema (85a) i slici 80:

$$dI_y=x^2\cdot dS=x^2\cdot 2\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{x}\,dx.$$

$$I_y=\frac{2b}{\sqrt{a}}\int_0^a\sqrt{x^5}\,dx=\frac{2b}{\sqrt{a}}\cdot\frac{2}{7}\left|x^{\frac{7}{2}}\right|_0^a=\underline{\frac{4}{7}ba^3}.$$

Odredi na isti način I_x. Dobit ćeš $\underline{\frac{4}{15}ab^3}$.



Slika 80

630. Momenti tromosti pravokutnika stranica a i b s obzirom na obje osi simetrije pravokutnika.

$$\left[I_x=\frac{ab^3}{12};\quad I_y=\frac{a^3b}{12}\right].$$

631. Moment tromosti polukruga polumjera r s obzirom na dijametar.

[Izvrši prelaz na parametarske jednadžbe kružnice; $I_x=\frac{\pi}{8}r^4$].

632. Polarni moment tromosti kružnog prstena s polumjerima r_1 i r_2.

$$\left[I_0=\frac{\pi}{2}(r_2^4-r_1^4)\right].$$

633. Moment tromosti s obzirom na os X.

1) paraboličkog segmenta omeđenog parabolom, kojoj su nultačke $\pm\frac{a}{2}$, a vrh $V(0, h)$ i osi X.

$$\left[\frac{16}{105}ah^3\right].$$

2) paraboličkog segmenta omeđenog parabolom $y=4-x^2$ i pravcem $y=3$.

$$\left[\frac{1628}{105}\right].$$

2. **Ravne krivulje** (homogene gustoće $\gamma=1$, pa je masa m i identična s duljinom s krivulje).

Formule

Aksijalni momenti: $I_x=\int_s y^2\,ds$

$I_y=\int_s x^2\,ds$ (85b)

polarni moment $I_0=\int_s \rho^2\,ds$

Zadaci

U zadacima **634** do **637** uklj. izračunaj momente tromosti zadanih krivulja s obzirom na zadane osi, odnosno polove.

634. Momenti tromosti polukružnice polumjera r s obzirom na njen dijametar i središte O.

Parametarske jednadžbe zadane polukružnice

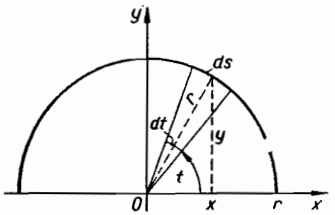
$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos t\\ y&=r\sin t\end{aligned}\right|0\leqslant t\leqslant\pi.$$

Prema (87), (85b) i slici 81:

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\sqrt{r^2\cos^2 t+r^2\sin^2 t}\,dt=r\,dt$$

$$I_x=\int_0^\pi r^2\sin^2 t\cdot r\,dt=r^3\left|\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right|_0^\pi=\frac{\pi r^3}{2}=\pi r\cdot\frac{r^2}{2}=$$

$$=\underline{m\frac{r^2}{2}},\ \text{jer je } \pi r=s=m.$$



Slika 81

$$I_0=\int_0^\pi r^2\cdot r\,dt=r^3\pi=r\pi\cdot r^2=\underline{mr^2}.$$

635. Momenti tromosti jednog luka cikloide

$$\left.\begin{aligned}x&=r(t-\sin t)\\ y&=r(1-\cos t)\end{aligned}\right|0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

s obzirom na obje koordinatne osi.

(Vidi sliku 39 uz zadatak 546).

Prema slici i (87) i (85b):

$$ds=\sqrt{r^2(1-\cos t)^2+r^2\sin^2 t}\,dt=r\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt=2r\sin\frac{t}{2}dt.$$

$$I_x=\int_0^{2\pi}r^2(1-\cos t)^2\cdot 2r\sin\frac{t}{2}dt=2r^3\int_0^{2\pi}4\sin^5\frac{t}{2}dt=$$

$$=\left(\frac{t}{2}=u;\ dt=2du;\ \text{za } t=2\pi\ u=\pi\right)=16r^3\int_0^\pi\sin^5 u\,du=\text{prema tipu VIII}=$$

$$=16r^3\left|-\frac{1}{5}\left(\sin^4 u+\frac{4}{3}\sin^2 u+\frac{8}{3}\right)\cos x\right|_0^\pi=\underline{\frac{256}{15}r^3}.$$

Izračunaj na slični način I_y. Dobit ćeš $\underline{16a^3\left(\pi-\frac{128}{45}\right)}$.

636. Moment tromosti krivulje $y=e^x$ za $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ s obzirom na os X. $\left[\frac{\sqrt{(1+e)^3}-2\sqrt{2}}{3}\right]$.

637. Moment tromosti lančanice

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

za $0\leqslant x\leqslant a$ s obzirom na os X. $\left[\frac{a^3}{24}(e-e^{-1})(e^2+e^{-2}+10)\right]$.

g. Guldinovo pravilo za volumen i površinu rotacionih tjelesa

Formule

Volumen $V=S\cdot 2\pi y_t$. (95)

Tu je: S površina ravnog lika koji rotira, y_t udaljenost težišta tog lika od osi rotacije pa je $2\pi y_t$ duljina kružnice koju opisuje težište lika kod rotacije, tj. put težišta.

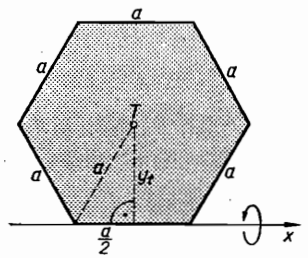
Površina $S=s\cdot 2\pi y_t$. (96)

Tu je s duljina luka koji rotira, y_t udaljenost težišta tog lika od osi rotacije, pa je $2\pi y_t$ put težišta luka kod rotacije. Pomoću formula (95) i (96) možemo odrediti težišta lika, odnosno luka koji rotira, ako je poznat volumen rotacionog tijela i površina lika koji rotira, odnosno ako je poznata površina rotacionog tijela i duljina luka koji rotira.

Zadaci

U zadacima **638** do **645** uklj. odredi pomoću Guldinova pravila volumen, odnosno površinu zadanog rotacionog tijela.

638. Pravilni šesterokut stranice a rotira oko jedne stranice. Odredi obujam rotacionog tijela.



Slika 82

Prema slici 82 i formuli (95):

$$y_t=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$V=6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2\pi\frac{a\sqrt{3}}{2}=\underline{\frac{9}{2}\pi a^3}.$$

639. Pomoću Guldinova pravila odredi obujam tijela koje je nastalo rotacijom polukruga polumjera r oko tangente.

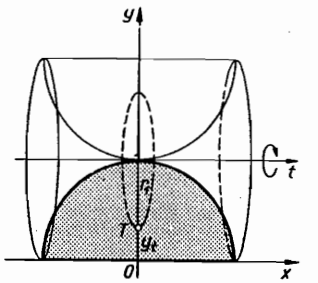
Najprije odredimo ordinatu y_t polukruga.

Prema slici 83 i formuli (95):

$$V=S\cdot 2\pi y_t,\quad \text{a odatle je}\quad y_t=\frac{V}{2\pi S}.$$

Kako je $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, a $S=\frac{\pi}{2}r^2$, dobivamo:

$$y_t=\frac{4r}{3\pi}.$$



Slika 83

Težište T opisat će kod rotacije oko tangente t kružnicu polumjera

$$r_1=r-\frac{4r}{3\pi}=\frac{r(3\pi-4)}{3\pi},$$

pa je

$$V=\frac{\pi r^2}{2}\cdot 2\pi r_1=\frac{\pi r^2}{2}\cdot 2\pi\frac{r(3\pi-4)}{3\pi}=\underline{\frac{\pi r^3}{3}(3\pi-4)}.$$

640. Pokaži pomoću Guldinova pravila da je težište trokuta udaljeno od njegove osnovice za jednu trećinu visine trokuta.

Prema slici 84 i formuli (95):

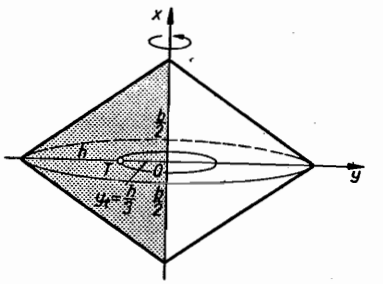
$$V=\frac{bh}{2}\cdot 2\pi y_t,\quad \text{a odatle je}$$

$$y_t=\frac{V}{\pi bh}.$$

Kako je $V=2\cdot\frac{1}{3}\pi h^2\cdot\frac{b}{2}=\frac{1}{3}\pi h^2 b$

(vidi sliku!)

Uvrštenje u y_t daje: $\underline{y_t=\frac{h}{3}}$.



Slika 84

641. Cikloida

$$\left.\begin{aligned}x&=r(t-\sin t)\\ y&=r(1-\cos t)\end{aligned}\right|\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

rotira oko osi X. Odredi volumen i oplošje rotacionog tijela.

U zadatku 609 već smo izračunali za lik omeđen prvim lukom cikloide i osi X: površinu $S=3\pi r^2$ i koordinate težišta $x_t=\pi r$ i $y_t=\frac{5}{6}r$.

Prema (95) dobivamo:

$$V=3\pi r^2\cdot 2\pi\frac{5}{6}r=\underline{5\pi^2 r^3}.$$

U zadatku 546 izračunali smo za prvi luk cikloide da je duljina luka $s=8r$, a u zadatku 619 ordinatu težišta tog luka $y_t=\frac{4}{3}r$.

Prema (96):

$$S=8r\cdot 2\pi\frac{4}{3}r=\underline{\frac{64}{3}\pi r^2}.$$

642. Astroida

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos^3 t\\ y&=a\sin^3 t\end{aligned}\right|$$

rotira oko osi X. Odredi volumen rotacionog tijela. U zadatku 517 već smo izračunali: $S=\frac{3\pi}{8}a^2$, pa je $\frac{S}{2}=\frac{3}{16}\pi a^2$, a u zadatku 615: $y_t=\frac{256a}{315\pi}$.

Prema (95):

$$V=\frac{3\pi}{16}a^2\cdot 2\pi\frac{256a}{315\pi}=\underline{\frac{32}{105}\pi a^3}.$$

U zadatku 543 dobili smo: $s=6a$, pa je $\frac{s}{2}=3a$, a u zadatku 620: $y_t=\frac{2}{5}a$.

Prema (96):

$$S=3a\cdot 2\pi\frac{2}{5}a=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

Istu vrijednost za S dobili smo već prije. Vidi zadatak 595.

643. Elipsa s poluosima a i b rotira oko osi Z koja je paralelna s osi $2a$ a udaljena od nje za $3b$. Odredi volumen rotacionog tijela.

$[6\pi^2 ab^2]$

644. Odredi pomoću Guldinova pravila koordinate težišta polukružnice polumjera r.

$\left[\left(0;\ \frac{2r}{\pi}\right)\right]$.

645. Odredi oplošje i volumen torusa nastalog rotacijom kružnice, odnosno kruga

$$(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant r^2$$

oko koordinatnih osi X i Y $(a\geqslant r;\ b\geqslant r)$.

$$\left[\begin{array}{lll}\text{oko osi } X: & S=4\pi^2 br; & V=2\pi^2 br^2.\\ \text{oko osi } Y: & S=4\pi^2 ar; & V=2\pi^2 ar^2.\end{array}\right].$$

h. Težište i moment tromosti homogenih rotacionih tjelesa gustoće $\gamma=1$ pa je $m\equiv V$.

Formule

Težište

Koordinate težišta tijela nastalog rotacijom krivulje

$$\text{a) } y=f(x) \text{ oko osi } X:\ x_t=\frac{\int\limits_v x\,dV}{V}=\frac{\int\limits_a^b x[f(x)]^2dx}{\int\limits_a^b [f(x)]^2dx}. \tag{97}$$

$$\text{b) } x=\varphi(y) \text{ oko osi } Y:\ y_t=\frac{\int\limits_v y\,dV}{V}=\frac{\int\limits_c^d y[\varphi(y)]^2dy}{\int\limits_c^d [\varphi(y)]^2dy}. \tag{97a}$$

Težište rotacionog tijela leži uvijek na osi rotacije!

Momenti tromosti

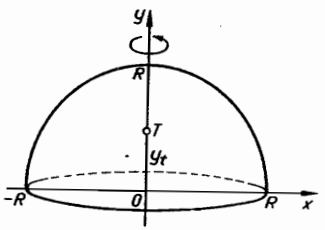
$$I_x=\frac{1}{2}\pi\int\limits_a^b [f(x)]^4dx. \tag{100}$$

$$I_y=\frac{1}{2}\pi\int\limits_c^d [\varphi(y)]^4dy. \tag{100a}$$

Zadaci.

U zadacima **646** do **650** uklj. izračunaj koordinate težišta zadanih rotacionih tjelesa.

646. U kojoj udaljenosti od geometrijskog središta leži težište polukugle polumjera R? Polukugla nastaje rotacijom oko osi Y četvrtine kruga polumjera R. Vidi sl. 85.



Slika 85

Uzevši u obzir da je

$$\varphi(y)=\sqrt{R^2-y^2}$$

i da je volumen polukugle $V=\frac{2}{3}\pi R^3$ dobivamo prema (97a):

$$y_t=\frac{\pi\int\limits_0^R y(R^2-y^2)\,dy}{\frac{2}{3}\pi R^3}=\frac{3}{2R^3}\left|\frac{R^2y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right|_0^R=\underline{\frac{3}{8}R}.$$

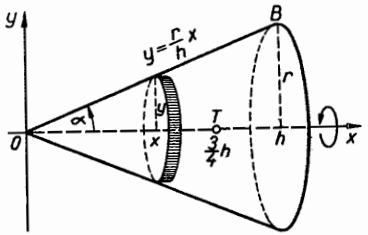
647. Težište T uspravnog kružnog stošca polumjera baze r i visine h prema slici 86. Prema toj slici jednadžba izvodnice OB glasi:

$$y=x\cdot\operatorname{tg}\alpha=x\cdot\frac{r}{h} \quad \text{pa prema (97) imamo:}$$

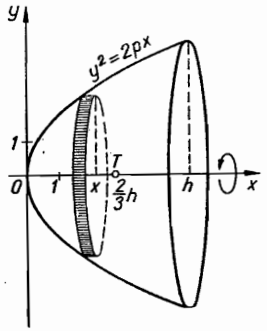
$$x_t=\frac{\int\limits_0^h x\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx}{\int\limits_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx}=\frac{\int\limits_0^h x^3\,dx}{\int\limits_0^h x^2\,dx}=\frac{\left|\frac{x^4}{4}\right|_0^h}{\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^h}=\underline{\frac{3}{4}h.}$$

$$\underline{T\left(\frac{3}{4}h;\ 0\right).}$$

648. U kojoj udaljenosti od vrha leži težište T rotacionog paraboloida visine h?



Slika 86



Slika 87

Prema slici 87 i formuli (97) dobivamo uzevši u obzir da je $y^2=2px$ jednadžba parabole:

$$x_t=\frac{\int\limits_0^h x\cdot 2px\,dx}{\int\limits_0^h 2px\,dx}=\frac{\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^h}{\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^h}=\underline{\frac{2}{3}h.}$$

649. Težište T paraboloida koji je nastao rotacijom oko osi Y luka AVB parabole ako je zadano $V(0;3)$, $A(2;6)$ i $B(-2;6)$. Vidi sl. 88.

Odredimo jednadžbu parabole:

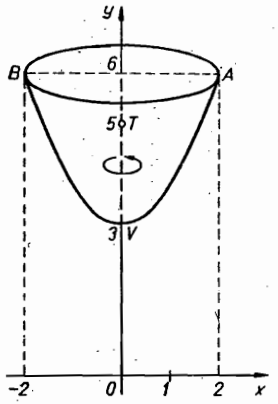
$$(x-m)^2=2p(y-n).$$

Uvrštenje $m=0$ i $n=3$, a također $x=2$ i $y=6$ daje $4=2p\cdot 3$ pa je $2p=\frac{4}{3}$ i $x^2=\frac{4}{3}(y-3)$.

Prema slici 88 i formuli (97) imamo

$$x_t=0;\ y_t=\frac{\int\limits_3^6 y\cdot\frac{4}{3}(y-3)\,dy}{\int\limits_3^6 \frac{4}{3}(y-3)\,dy}=\frac{\left|\frac{y^3}{3}-\frac{3}{2}y^2\right|_3^6}{\left|\frac{y^2}{2}-3y\right|_3^6}=\underline{5.}$$

$$\underline{T(0,\ 5).}$$



Slika 88

650. Odredi težište T paraboloida koji je nastao rotacijom oko osi X luka AVB parabole ako je zadano $V(-3;0)$, $A(0;2)$ i $B(0;-2)$.

$$\left[y^2=\frac{4}{3}(x+3);\quad T(-1;0)\right].$$

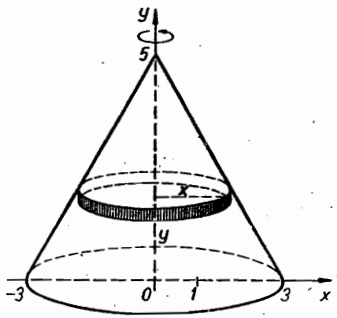
U zadacima **651** do **655** uklj. izračunaj momente tromosti zadanih rotacionih tjelesa.

651. Moment tromosti stošca polumjera baze 3 cm i visine 5 cm s obzirom na njegovu os.

Prema slici 89 i formuli (100a) imamo: stožac je nastao rotacijom oko osi Y pravca

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1 \quad \text{ili} \quad x=3\left(1-\frac{y}{5}\right)$$

$$\text{pa je}\quad I_y=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^5 3^4\left(1-\frac{y}{5}\right)^4 dy=-\frac{\pi}{2}\cdot 81\cdot 5\left|\frac{\left(1-\frac{y}{5}\right)^5}{5}\right|_0^5=\underline{\frac{81}{2}\pi\ \text{cm}^5.}$$



Slika 89

652. Moment tromosti rotacionog elipsoida koji je nastao rotacijom elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ oko osi X.

Računamo prema (100): $y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$.

$$I_x=\frac{1}{2}\pi\cdot 2\int_0^a b^4\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2 dx=\pi b^4\int_0^a\left(1-\frac{2}{a^2}x^2+\frac{1}{a^4}x^4\right)dx=$$

$$=\pi b^4\left|x-\frac{2}{3a^2}\cdot x^3+\frac{1}{5a^4}\cdot x^5\right|_0^a=\underline{\frac{8}{15}\pi a b^4}.$$

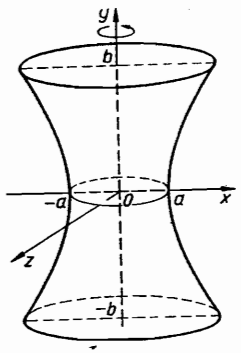
Na isti način izračunaj I_y. Dobit ćeš $\frac{8}{15}\pi a^4 b$.

653. Moment tromosti rotacionog hiperboloida koji je nastao rotacijom oko osi Y hiperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ od $y=-b$ do $y=b$. Vidi sl. 90.

Kako je $x^2=a^2\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)$, dobivamo prema (100a)

$$I_y=\frac{1}{2}\pi\cdot 2\int_0^b a^4\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 dy=\pi a^4\int_0^b\left(1+\frac{2}{b^2}y^2+\frac{1}{b^4}y^4\right)dy=$$

$$=\pi a^4\left|y+\frac{2}{3b^2}\cdot y^3+\frac{1}{5b^4}\cdot y^5\right|_0^b=\underline{\frac{28}{15}\pi a^4 b}.$$



Slika 90

654. Moment tromosti tijela nastalog rotacijom oko osi X lika omeđenog s $y=e^x$, $y=0$, $x=-1$ i $x=1$.

Prema (100):

$$I_x=\frac{1}{2}\pi\int_{-1}^{1}e^{4x}dx=\frac{1}{2}\pi\left|\frac{e^{4x}}{4}\right|_{-1}^{1}=\underline{\frac{\pi}{8}\left(e^4-\frac{1}{e^4}\right)}.$$

Prikaži grafički!

655. Odredi momente tromosti uz grafički prikaz:

1) Rotacionog paraboloida polumjera r baze i visine h s obzirom na os rotacije $\left[\frac{1}{6}\pi r^4 h\right]$.

2) Kugle polumjera R s obzirom na dijametar. $\left[\frac{8}{15}\pi R^5\right]$.

3) Uspravnog valjka polumjera baze r i visine h s obzirom na os valjka. $\left[\frac{1}{2}\pi r^4 h\right]$.

i. Zadaci iz fizike

1. Put prevaljen tačkom

Formule

Ako se tačka giblje po nekoj krivulji pri čemu je brzina v gibanja zadana kao funkcija vremena t, tj. u obliku $v=f(t)$, tada iz $v=\frac{ds}{dt}=f(t)$ slijedi

$$ds=f(t)\,dt. \tag{a}$$

Taj izraz predočuje element puta s što ga je tačka prevalila u vremenu dt, a

$$s=\int_{t_1}^{t_2}f(t)\,dt \tag{b}$$

daje put tačke u razmaku vremena od t_1 do t_2.

Zadaci

656. Brzina tačke zadana je formulom

$$v=\sqrt{1+t}\ \text{m/sek}.$$

Odredi put, što ga je tačka prevalila za prvih 10 sekundi poslije početka gibanja, i srednju brzinu za to vrijeme.

Prema (b):

$$s=\int_0^{10}\sqrt{1+t}\cdot dt=\frac{2}{3}\left|\sqrt{(1+t)^3}\right|_0^{10}=\frac{2}{3}(11\sqrt{11}-1)\doteq\underline{23{,}7\ \text{m}}.$$

$$v_{sr}=\frac{s}{10}\doteq\underline{2.4\ \text{m/sec}}.$$

657. Brzina tačke mijenja se po zakonu

$$v=2(6-t)\ \text{m/sek}.$$

Odredi najveću udaljenost tačke od početka gibanja.

Zadani izraz za brzinu kazuje da je gibanje tačke usporeno, pa će najveća udaljenost tačke biti kad se tačka zaustavi, tj. kad je

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=2(6-t)=0.$$

Odatle dobivamo $t=6$ sek, pa je prema (b):

$$s=2\int_0^6(6-t)\,\mathrm{d}t=2\left|6t-\frac{t^2}{2}\right|_0^6=\underline{36\text{ m.}}$$

658. Poznata je jednadžba harmoničkih titranja tačke uzduž osi X

$$x=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\alpha\right).$$

gdje je A amplituda titraja, t vrijeme, T vrijeme jednog titraja (period titranja), dok je α početna faza [Vidi (53) u I dijelu Repetitorija].

Odredi položaj tačke u moment t_2, ako je poznato, da se tačka nalazila u momentu t_1 u položaju $x=x_1$.

Kako je brzina $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, dobivamo

$$v=A\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\alpha\right)$$

pa prema (b):

$$x_1=\frac{2\pi A}{T}\int_0^{t_1}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\alpha\right)\mathrm{d}t=\frac{2\pi A}{T}\cdot\frac{T}{2\pi}\left|\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\alpha\right)\right|_0^{t_1}=$$

$$=A\left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t_1+\alpha\right)-\sin\alpha\right]$$

$$x_2=x_1+\frac{2\pi A}{T}\int_{t_1}^{t_2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\alpha\right)\mathrm{d}t=$$

$$\underline{=x_1+A\left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t_2+\alpha\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{T}t_1+\alpha\right)\right].}$$

659. Raketa se diže vertikalno u vis. Uz pretpostavku da pri stalnoj pogonskoj sili ubrzanje rakete (uslijed umanjenja njene težine) raste po zakonu

$$u(t)=\frac{A}{a-bt},$$

gdje je $a-bt>0$, odredi brzinu v rakete u bilo kojem momentu t, a također visinu h_1, koju je postigla raketa u momentu t_1.

Kako je $u=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, $\mathrm{d}v=u(t)\cdot\mathrm{d}t$, pa je brzina

$$v=\int_0^t u(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \text{(c)}$$

Za naš slučaj:

$$v(t)=\int_0^t\frac{A}{a-bt}\,\mathrm{d}t=-\frac{A}{b}\left|\ln(a-bt)\right|_0^t=\underline{\frac{A}{b}\ln\frac{a}{a-bt}}.$$

Prema (b):

$$h_1=\frac{A}{b}\int_0^{t_1}\ln\frac{a}{a-bt}\,\mathrm{d}t=\text{(nakon parcijalnog integriranja)}=\frac{A}{b}\left(t_1\ln\frac{a}{a-bt_1}-b\int_0^{t_1}\frac{t\,\mathrm{d}t}{a-bt}\right)=$$

$$=\frac{A}{b}\left(t_1\ln\frac{a}{a-bt_1}+t_1-a\int_0^{t_1}\frac{\mathrm{d}t}{a-bt}\right)=\underline{\frac{A}{b^2}\left[bt_1-(a-bt_1)\ln\frac{a}{a-bt_1}\right]}.$$

660. Odredi zakon raspadanja radioaktivne supstance, ako je poznato da je brzina raspadanja razmjerna s količinom mase supstance i da je u početni moment $t_0=0$ bilo Q_0 grama supstance, a nakon $T=1600$ godina masa se smanjila na polovinu.

Kako je masa m radioaktivne supstance funkcija vremena t tj. $m=m(t)$, bit će $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ brzina raspadanja supstance u nekom momentu t, pa je

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-km \quad \text{ili} \quad \frac{\mathrm{d}m}{m}=-k\,\mathrm{d}t,$$

gdje je k koeficijent razmjernosti, a derivacija je negativna, jer je $m(t)$ padajuća funkcija. Integriranje daje uz pretpostavku da je za $t=0$ $m=Q_0$ a u moment t $m=Q$:

$$\int_{Q_0}^{Q}\frac{\mathrm{d}m}{m}=-k\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t,$$

pa je $$\ln Q-\ln Q_0=-kt$$

ili $$\ln\frac{Q}{Q_0}=-kt, \quad \text{pa je} \quad Q=Q_0e^{-kt}.$$

Da odredimo k, uvrstimo $t=1600$ i $Q=\frac{Q_0}{2}$ u $\ln\frac{Q}{Q_0}=-kt$;

$$\ln\frac{1}{2}=-1600\,k$$

ili $$-\ln 2=-1600\,k, \quad \text{pa je} \quad k=\frac{\ln 2}{1600}.$$

Traženi zakon raspadanja glasi

$$Q=Q_0e^{-\frac{\ln 2}{1600}t}=Q_0\left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{1600}}=\underline{Q_0\cdot 2^{-\frac{t}{1600}}}.$$

661. Znamo da je brzina tijela bačena vertikalno u vis s početnom brzinom v_0 ukoliko se zanemari otpor zraka određena formulom

$$v=v_0-gt,$$

gdje je t vrijeme a g akceleracija sile teže. U kojoj će se udaljenosti nalaziti tijelo od početnog položaja nakon t sekundi od momenta bacanja?

$$\left[h=v_0 t-\frac{g}{2}t^2\right].$$

662. Tačka se giblje po osi X počevši od M (1; 0) tako da je brzina jednaka apscisi x. Gdje će biti tačka nakon 10 sekundi od početka gibanja?

$[e^{10}]$.

2. Radnja promjenljive sile

Formule

Ako je sila P, koja vrši radnju a djeluje u smjeru osi X, promjenljiva te je funkcija od x, tj. $P=F(x)$, tada izraz

$$\mathrm{d}A=F(x)\,\mathrm{d}x$$

daje element izvršene radnje, dok je

$$A=\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(c)}$$

radnja što je izvršila sila $F(x)$ na odresku puta $[x_1, x_2]$.

Zadaci

663. Koju radnju treba izvršiti da tijelo mase m dignemo s površine Zemlje, kojoj je polumjer R, na visinu h? Odredi i radnju potrebnu da bi se tijelo udaljilo u beskonačnost.

Prema Newtonovu zakonu gravitacije

$$F=k\frac{m\cdot M}{r^2}$$

je sila s kojom masa M Zemlje djeluje na masu m tijela udaljenog od središta Zemlje za r.

Uzevši u obzir da u našem slučaju tijelo treba podignuti na visinu $(R+h)$ računajući od središta Zemlje, dobivamo prema (c):

$$A=\int_R^{R+h}\frac{kmM}{r^2}\,\mathrm{d}r=kmM\left|-\frac{1}{r}\right|_R^{R+h}=kmM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right).$$

Na površini Zemlje ($r=R$) sila $F=mg$, gdje je g akceleracija sile teže, pa iz $F=\frac{kmM}{r^2}$ slijedi:

$$mgR^2=kmM, \quad \text{pa je } kM=gR^2.$$

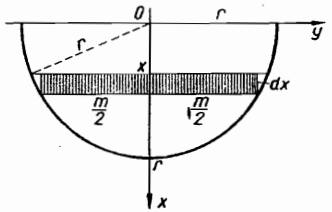
Uvrštenje u A daje:

$$A=mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)=\underline{\frac{mgh}{1+\frac{h}{R}}}.$$

Kad $h\to\infty$

$$A_\infty=\lim_{h\to\infty}A=mg\lim_{h\to\infty}\frac{h}{1+\frac{h}{R}}=\text{po L'Hospitalovu pravilu (vidi dio I Repetitorija)}=\underline{mgR}.$$

664. Odredi radnju utrošenu na crpljenje vode iz spremišta oblika poluvaljka duljine a i polumjera r.



Slika 91

Prema slici 91 obujam elementarnog sloja vode debljine $\mathrm{d}x$ na dubini x, duljine a i širine m iznosi

$$\mathrm{d}V=2\sqrt{r^2-x^2}\cdot a\,\mathrm{d}x,$$

jer je $\frac{m}{2}=\sqrt{r^2-x^2}$.

Element radnje $\mathrm{d}A$ potreban za dizanje tog elementarnog sloja vode na visinu x iznosi

$$\mathrm{d}A=2a\sqrt{r^2-x^2}\cdot\gamma\cdot x\,\mathrm{d}x,$$

gdje je γ specifična težina vode.

Tražena radnja

$$A=2a\gamma\int_0^r x\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x=-a\gamma\left|\frac{2}{3}\sqrt{(r^2-x^2)^3}\right|_0^r=\underline{\frac{2}{3}\gamma a r^3}.$$

665. Koju radnju treba utrošiti da se iscrpi ulje iz vertikalnog valjkovitog spremišta visine $H=6$ m i polumjera baze $R=2$ m, ako je $\gamma=0{,}9$ specifična težina ulja.

Prema slici 92 volumen elementarnog sloja ulja debljine $\mathrm{d}x$ iznosi

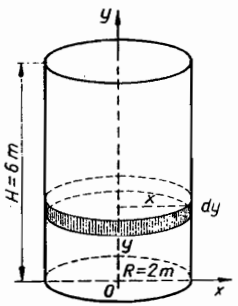
$$\mathrm{d}V=\pi R^2\,\mathrm{d}y$$

njegova težina $\quad \mathrm{d}G=\pi R^2\,\mathrm{d}y\cdot\gamma,$

a radnja da se taj elementarni sloj ulja podigne na visinu y:

$$\mathrm{d}A=\pi R^2\,\mathrm{d}y\cdot\gamma\cdot y.$$

Slijedi:



Slika 92

$$A=\pi R^2\gamma\int_0^H y\,\mathrm{d}y=\pi\gamma R^2\left|\frac{y^2}{2}\right|_0^H=\frac{1}{2}\pi\gamma R^2H^2=$$

$$=\frac{1}{2}\pi\,0{,}9\cdot10^3\cdot4\cdot36=64{,}8\cdot10^3\cdot\pi\,\text{kpm}=640800\cdot9{,}81\,\pi=\underline{635688\,\pi\ \text{dž}},$$

jer je u CGS sustavu jedinica radnje 1 džaul $=\frac{1}{9{,}81}$ kpm $\doteq 0{,}102$ kpm, dok je 1 kpm $=$ $=9{,}81$ dž.

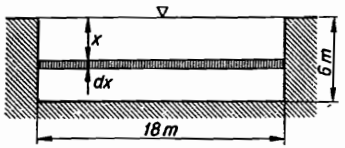
gdje je $\gamma=\frac{1\,\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}=\frac{1\,\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}=\frac{10^3\,\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ = specifična težina vode.

Odatle dobivamo traženi tlak vode na čitavu branu:

$$P=18\gamma\int_0^6 x\,\mathrm{d}x=18\gamma\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^6=9\,\mathrm{m}\cdot\frac{10^3\,\mathrm{kp}}{\mathrm{m}^3}\cdot 36\,\mathrm{m}^2=$$

$$=324000\,\mathrm{kp}=324000\cdot 9{,}81\,\mathrm{N}=\frac{324000\cdot 9{,}81}{10^6}\,\mathrm{MN}\doteq\underline{3{,}18\,\mathrm{MN}},$$

jer je 1 kp = 9,81 N (njutna), a 1 mega njutn MN = 10^6 N.



Slika 94

674. Na kojoj dubini $x=c$ treba branu navedenu u predašnjem zadatku podijeliti horizontalnim pravcem u dva dijela da bi tlak vode na gornji i donji dio brane bio jednak?

Imali smo

$$\mathrm{d}P=18\gamma x\,\mathrm{d}x.$$

Taj izraz integrirajmo sad od 0 do c, a zatim od c do 6 pa izjednačimo oba integrala:

$$18\gamma\int_0^c x\,\mathrm{d}x=18\gamma\int_c^6 x\,\mathrm{d}x.$$

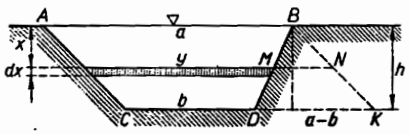
Slijedi:

$$\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^c=\left|\frac{x^2}{2}\right|_c^6$$

$$c^2=36-c^2,$$

pa je $c=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\doteq\underline{4{,}23\ \mathrm{m}}.$

675. Odredi tlak vode na vertikalnu branu koja ima oblik trapeza $ABCD$. Dimenzije brane navedene su u slici 95.



Slika 95

Prema Pascalovu zakonu u sl. 95 tlak vode na element površine brane iznosi

$$\mathrm{d}P=\gamma\cdot xy\cdot\mathrm{d}x. \qquad \text{(a)}$$

Da možemo integrirati, izrazimo y sa x.

Iz sličnosti trokuta DBK i MBN slijedi

$$(a-b):(a-y)=h:x,$$

pa je

$$y=a-\frac{x}{h}(a-b)$$

uvrštenje u (a) daje:

$$\mathrm{d}P=\gamma\left[ax-\frac{x^2}{h}(a-b)\right]\mathrm{d}x.$$

pa je $$P=\gamma\int_0^h\left(ax-\frac{a-b}{h}x^2\right)\mathrm{d}x=\gamma\left|a\frac{x^2}{2}-\frac{a-b}{h}\frac{x^3}{3}\right|_0^h=\underline{\frac{\gamma h^2(a+2b)}{6}}.$$

676. Odredi tlak vode na vertikalni parabolički segment kojemu baza $b=4$ m leži na površini vode, a vrh se nalazi na dubini $h=4$ m.

Računamo prema slici 96 i Pascalovu zakonu $P=\gamma hS$;

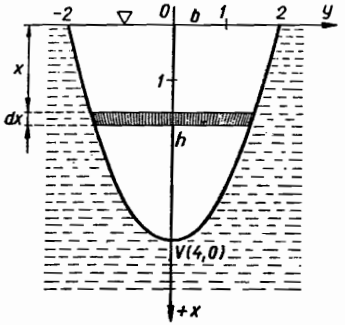
$$\gamma=1=\frac{10^3\,\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3};\ h=x\ \text{ i }\ \mathrm{d}S=2y\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}P=\gamma\cdot x\cdot 2y\,\mathrm{d}x. \qquad \text{(a)}$$

Parabola $y^2=2p(x-4)$ prolazi tačkom (0, 2) pa je

$$4=2p(0-4)\ \text{ i }\ 2p=-1.$$

Dobivamo $y^2=4-x$ i $y=\sqrt{4-x}$.



Slika 96

Uvrštenje u (a) daje:

$$\mathrm{d}P=\gamma\cdot x\cdot 2\sqrt{4-x}\,\mathrm{d}x$$

$$P=2\gamma\int_0^4 x\sqrt{4-x}\,\mathrm{d}x.$$

Uz supstituciju $4-x=t^2$ ili parcijalnim integriranjem dobivamo:

$$P=2\gamma\left|\sqrt{(4-x)^3}\left(\frac{4-x}{5}-\frac{4}{3}\right)\right|_0^4=\frac{32\cdot 8\,\mathrm{m}^3}{15}\cdot\frac{10^3\,\mathrm{kp}}{\mathrm{m}^3}=\frac{256}{15}\cdot 10^3\cdot 9{,}81\,\mathrm{N}\doteq\underline{167\cdot 10^3\,\mathrm{N}}.$$

677. Izračunaj tlak vode na uronjenu ploču oblika trokuta, kojoj je baza b a visina h uz pretpostavku da vrh trokuta leži na površini vode, a baza je s njome paralelna. Odredi također koliko će se puta smanjiti tlak, ako okrenemo ploču tako da na površinu vode dođe baza b.

$$\left[\frac{bh^2}{3}\cdot 9{,}81\cdot 10^3\,\mathrm{N};\ \text{dva puta}\right].$$

678. Vertikalna brana ima oblik trapeza kome je gornja baza $a=70$ m i leži na površini vode, dok je donja baza $b=50$ m, a visina brane $h=20$ m.

$[111\cdot 10^6 \mathrm{N}]$.

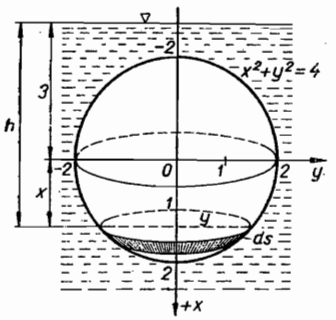
679. Ploča oblika polovice elipse kojoj su osi $2a$ i $2b$ uronjena je vertikalno u vodu tako, da mala os $2b$ leži na površini vode, dok je velika poluos a u vodi. Odredi tlak vode na svaku stranu ploče (a i b izraženi su u dm).

$$\left[\frac{2}{3}a^2 b\,\mathrm{kp}\right].$$

680. Pravokutna ploča stranica a i b $(a>b)$ uronjena je u tekućinu specifične težine γ pod kutom α prema površini tekućine. Duža stranica ploče leži u dubini h. Odredi tlak vode na svaku stranu ploče (a i b su izraženi u m).

$$\left[ab\gamma\left(h+\frac{b}{2}\sin\alpha\right)\cdot 9{,}81\cdot 10^3\,\mathrm{N}\right].$$

681. Odredi tlak vode na površinu kugle promjera $d=4$ m, ako se središte kugle nalazi na dubini 3 m od površine vode.



Slika 97

Prema slici 97 i Pascalovom zakonu tlak vode na element $dS=2\pi y\,ds$ površine kugle na dubini h iznosi

$$dP=\gamma\cdot 2\pi y\,ds\cdot h, \qquad \text{(a)}$$

gdje je ds diferencijal luka kružnice $x^2+y^2=4$.

Kako je prema (86) $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$, a iz $2yy'=-2x$ slijedi $y'=-\dfrac{x}{y}$, dobivamo

$$ds=\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}\,dx=\frac{2}{y}\,dx.$$

Dalje prema slici imamo $h=3+x$.

Uvrštenje u (a) daje:

$$dP=4\gamma(3+x)\,dx$$

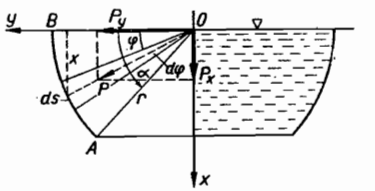
i
$$P=4\pi\gamma\int_{-2}^{2}(3+x)\,dx=4\pi\gamma\left|3x+\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{2}=\left(4\pi\cdot\frac{10^3\,\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot 12\,\mathrm{m}^3\right)\mathrm{kp}=$$

$$=48000\,\pi\cdot 9{,}81\,\mathrm{N}=\underline{0{,}471\,\pi\,\mathrm{MN}}\ \text{(mega njutna)}.$$

Da odredimo tlak vode na gornju polovinu kugle, integriramo od -2 do 0. Načini to! Dobit ćeš $0{,}157\,\pi\,\mathrm{MN}$.

Na isti način odredi i tlak vode na donju polovinu kugle.

682. Slika 98 predočuje presjek stjenke spremišta napunjenog vodom. Odredi tlak vode na luk AB kružnice polumjera r, kojoj središte O leži na površini vode, a središnji kut BOA je α.



Slika 98

Računamo prema Pascalovu zakonu tlak vode na element ds luka stjenke uzevši u obzir da je taj tlak jednak umnošku ds i dubine x elementa puta γ: $dP=\gamma\cdot x\cdot ds$.

Prema slici $\qquad x=r\sin\varphi\,;\quad ds=r\,d\varphi$, pa je

$$dP=\gamma r^2\sin\varphi\,d\varphi\,.$$

Sad odredimo projekcije dP u smjeru koordinatnih osi prema slici.

U smjeru osi X: $dP_x=dP\cdot\cos(90^\circ-\varphi)=\gamma r^2\sin^2\varphi\,d\varphi$.

U smjeru osi Y: $P_y=dP\cdot\cos\varphi=\gamma r^2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\dfrac{\gamma}{2}r^2\sin 2\varphi\,d\varphi$.

Odatle:

$$P_x=\gamma r^2\int_0^\alpha\sin^2\varphi\,d\varphi=\gamma r^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\sin 2\alpha}{4}\right)=\frac{\gamma\cdot r^2}{4}(2\alpha-\sin 2\alpha)$$

$$P_y=\frac{1}{2}\gamma r^2\int_0^\alpha\sin 2\varphi\,d\varphi=-\frac{\gamma r^2}{4}(\cos 2\alpha-1)=\frac{\gamma r^2}{2}\sin^2\alpha.$$

Traženi tlak P na luk $BA=s$ dobit ćemo kao rezultantu tlakova P_x i P_y:

$$P=\sqrt{P_x^2+P_y^2}=\underline{\frac{r^2}{4}\sqrt{\left(2\alpha-\frac{\sin 2\alpha}{4}\right)^2+4\sin^4\alpha}\ \mathrm{kp}}.$$

683. Odredi tlak vode na uspravni kružni stožac polumjera r baze i visine h koji je uronjen u vodu tako, da mu se baza podudara s površinom vode.

$$\left[\frac{\gamma\pi}{3}r^2h^2\right].$$

4. Masa tijela

Formule

Homogeno tijelo gustoće $\mu=\text{const.}$ i volumena V:

Masa $\qquad m=\mu\cdot V.$

Nehomogeno tijelo gustoće $\mu=\mu(x)$ i volumena $V(x)$:

Element mase tijela $\qquad dm=\mu(x)\cdot dV.$ (f)

Masa tijela $\qquad m=\int_a^b \mu(x)\,dV.$

Zadaci

684. Odredi masu kugle polumjera R, ako je gustoća μ u bilo kojoj tački T kugle razmjerna s udaljenošću te tačke od središta O kugle.

Slika 99 predočuje vertikalni presjek kroz koncentrične kugle polumjera R, x i $x+dx$.

Volumen kugle polumjera x glasi $V=\frac{4}{3}\pi x^3$. Diferenciramo li taj izraz, dobit ćemo element volumena kugle — kuglina sloja debljine dx:

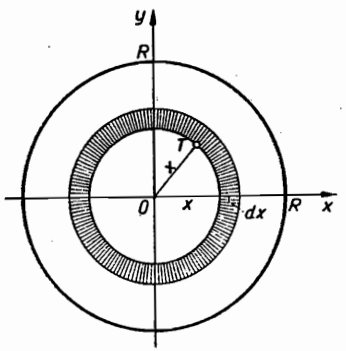
$$dV=\frac{4}{3}\pi\cdot 3x^2dx=4\pi x^2dx.$$

Prema (f), zadatku i slici:

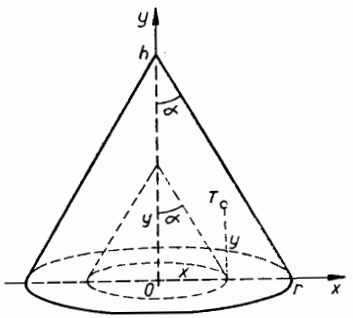
$$dm=kx\cdot 4\pi x^2dx=4k\pi x^3dx$$

i

$$m=4k\pi\int_0^R x^3dx=\underline{k\pi R^4}.$$



Slika 99



Slika 100

685. Odredi masu uspravnog kružnog stošca visine h i kuta α što ga visina zatvara s izvodnicom stošca, ako je gustoća u bilo kojoj tački T stošca razmjerna s njenom udaljenošću od baze stošca.

Slika 100 predočuje osim zadanog stošca još jedan stožac sličan zadanom, kome je polumjer baze x, a visina y. Volumen tog stošca glasi

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2y,\ \text{a kako je prema slici}\ x=y\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$V=\frac{\pi}{3}y^3\,\mathrm{tg}^2\alpha.$$

Diferencirajući V po y dobivamo element volumena zadanog stošca:

$$dV=\frac{\pi}{3}\mathrm{tg}^2\alpha\cdot 3y^2dy=\pi\,\mathrm{tg}^2\alpha\,y^2dy,$$

pa je

$$dm=\mu(y)\cdot dV=k\pi\,\mathrm{tg}^2\alpha\,y^3dy$$

i

$$m=k\pi\,\mathrm{tg}^2\alpha\int_0^h y^3dy=\underline{\frac{1}{4}k\pi\,\mathrm{tg}^2\alpha\,h^4}.$$

686. Odredi masu štapa duljine $l=10$ m. ako se linearna gustoća štapa mijenja po zakonu $\mu=6+0{,}3x$ kg/m gdje je x udaljenost od jednog kraja štapa.

[75 kg].

5. *Istjecanje tekućine kroz otvor*

Formula

Brzina istjecanja tekućine čija je površina na visini h iznad otvora određena je Toricellijevim zakonom

$$v=c\sqrt{2gh}, \qquad \text{(g)}$$

gdje je c empirički koeficijent, koji ovisi o vrsti tekućine i o obliku posude i otvora, dok je $g=9{,}81$ m/sek² ubrzanje sile teže.

Zadaci

687. Za koje će se vrijeme isprazniti do vrha napunjena vertikalna valjkovita bačva dijametra $D=1$ m i visine $h=2$ m kroz okrugli otvor na dnu dijametra $d=1$ cm, ako je $c=0{,}6$?

Pretpostavimo da će za vrijeme dt isteći iz bačve element tekućine visine dy i volumena dV, pa je prema slici 101

$$V=\pi\frac{D^2}{4}dy$$

Taj dio tekućine volumena dV isteći će u isto vrijeme dt kroz otvor veličine $\frac{\pi d^2}{4}$ i to s brzinom v koja po Toricellijevu zakonu iznosi $c\sqrt{2gy}$ m/sek.

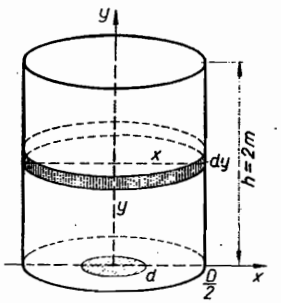
Na taj način dobijemo drugi izraz za isti dV:

$$dV=c\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gy}\,dt.$$

Izjednačenje obaju izraza za dV daje jednadžbu iz koje računamo dt i t:

$$\frac{\pi D^2}{4}dy=c\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gy}\,dt.$$

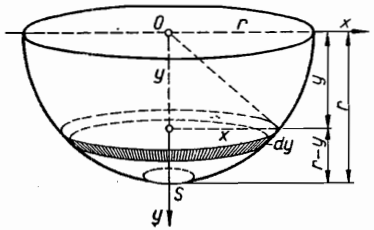
$$dt=\frac{D^2}{cd^2\sqrt{2g}}\cdot\frac{dy}{\sqrt{y}}$$



Slika 101

$$t=\frac{D^2}{cd^2\sqrt{2g}}\int_0^2\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{1^2\cdot 2}{0{,}6\cdot 0{,}01^2\sqrt{19{,}62}}\sqrt{2}=\frac{10^5\cdot 1{,}414}{3\cdot 4{,}43}\doteq 10703 \text{ sek}\doteq \underline{3 \text{ sata}}.$$

688. Za koje će vrijeme isteći voda iz posude oblika polukugle polumjera $r=40$ cm kroz otvor u dnu kome je površina 2 cm² ($c=0{,}8$)?



Slika 102

Računamo:

prema slici 102: $dV=\pi x^2\,dy=\pi(r^2-y^2)\,dy$

prema Toricellijevu zakonu: $dV=c\cdot S\cdot\sqrt{2g(r-y)}\,dt$, gdje je S površina otvora.

Slijedi:

$$\pi(r^2-y^2)\,dy=c\,S\sqrt{2g(r-y)}\,dt,$$

pa je

$$dt=\frac{\pi(r^2-y^2)}{cS\sqrt{2g}(r-y)}\,dy$$

i

$$t=\frac{\pi}{cS\sqrt{2g}}\left(r^2\int_0^r\frac{dy}{\sqrt{r-y}}-\int_0^r\frac{y^2}{\sqrt{r-y}}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{cS\sqrt{2g}}\left|-\frac{4}{3}r\sqrt{(r-y)^3}+\frac{2}{5}\sqrt{(r-y)^5}\right|_0^r=\frac{\pi}{cS\sqrt{2g}}\left(\frac{4}{3}r^2\sqrt{r}-\frac{2}{5}r^2\sqrt{r}\right)=$$

$$=\frac{14\pi r^2}{15cS}\sqrt{\frac{r}{2g}}=\frac{14\cdot\pi\cdot 1600}{15\cdot 0{,}8\cdot 2}\sqrt{\frac{40}{1962}}=\underline{418 \text{ sek}}.$$

689. Za koje će vrijeme isteći voda iz valjkovite vertikalne posude kojoj je površina baze $S=420$ cm² a visina $h=40$ cm kroz otvor na dnu površine $s=2$ cm²?

[100 sekundi].

690. Na dnu posude oblika uspravnog kružnog valjka, kojemu je površina baze 100 cm² a visina 30 cm, postoji otvor. Odredi površinu tog otvora, ako voda koja zaprema posudu isteče u toku od 2 minute ($c=0{,}6$).

[$\doteq 0{,}35$ cm²].

VII. NEPRAVI INTEGRALI

Formule

I slučaj: Gornja ili donja, odnosno obje su granice integracije beskonačne.

Definiramo:

1. $$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{x\to\infty}\int_a^x f(x)\,dx.$$

2. $$\int_\infty^b f(x)\,dx=\lim_{x\to\infty}\int_x^b f(x)\,dx.$$

3. $$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx=\lim_{x\to-\infty}\int_x^c f(x)\,dx+\lim_{x\to+\infty}\int_c^x f(x)\,dx,$$

gdje je $-\infty<c<+\infty$

ako ti limesi postoje i konačni su.

II slučaj: Podintegralna funkcija $f(x)$ neprekinuta je za sve vrijednosti x u intervalu $[a;b]$ osim tačke c u kojoj $f(x)$ ima tačku diskontinuiteta II vrste. Tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx$$

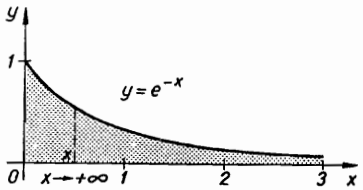
ako ti limesi postoje i konačni su.

Zadaci

U zadacima 691 do 705 uklj. izračunaj limese zadanih nepravih integrala slučaja I, odnosno pokaži da su divergentni.

691. $$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx=\text{prema slici 103}=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-x}\,dx=-\lim_{x\to+\infty}(e^{-x}-1)=\underline{1}.$$

Zadani integral konvergira! Šrafirani dio površine u slici 103 predočuje vrijednost tog nepravog konvergentnog integrala, koja je konačna (1), iako se proteže uzduž osi X u beskonačnost.



Slika 103

692. $$\int_{-\infty}^{0} x e^x \, dx = \lim_{x\to-\infty} \int_{x}^{0} x e^x \, dx = \text{ parcijalno integriramo } =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left| x e^x - e^x \right|_{x}^{0} = \lim_{x\to-\infty} (-1 - x e^x + e^x) = \underline{-1},$$

jer pomoću L'Hospitalova pravila (vidi I dio Repetitorija, § 15) dobivamo, da je

$$\lim_{x\to-\infty} (x e^x) = -\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

693. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{x\to-\infty} \int_{x}^{c} \frac{dx}{x^2+2x+2} + \lim_{x\to+\infty} \int_{c}^{x} \frac{dx}{x^2+2x+2} =$$

$$= \text{prema predtipu } A = \lim_{x\to-\infty} \left| \operatorname{arc\,tg}(x+1) \right|_{x}^{c} + \lim_{x\to+\infty} \left| \operatorname{arc\,tg}(x+1) \right|_{c}^{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} [\operatorname{arc\,tg}(c+1) - \operatorname{arc\,tg}(x+1)] + \lim_{x\to+\infty} [\operatorname{arc\,tg}(x+1) -$$

$$\operatorname{arc\,tg}(c+1)] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \underline{\pi}.$$

694. $$\int_{0}^{+\infty} \sin x \, dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{0}^{x} \sin x \, dx = -\lim_{x\to+\infty} \left| \cos x \right|_{0}^{x} = -\lim_{x\to+\infty} \cos x + 1.$$

Zadani integral divergira, jer $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$ ne postoji!

695. $$\int_{a}^{+\infty} \frac{x}{c^2+x^2} dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{a}^{x} \frac{x\,dx}{c^2+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left| \frac{1}{2} \ln(c^2+x^2) \right|_{a}^{x} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \left[\ln(c^2+x^2) - \ln(c^2+a^2) \right] = \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \left(\ln \frac{c^2+x^2}{c^2+a^2} \right) = \underline{+\infty}.$$

Integral divergira!

696. $$\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{0}^{x} \frac{x\,dx}{(1+x)^3} = \text{(integral računamo pomoću supstitucije } 1+x=t) =$$

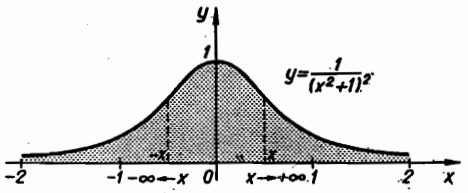
$$= \lim_{x\to+\infty} \left| -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1+x)^2} \right|_{0}^{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1+x)^2} + 1 - \frac{1}{2} \right) = \underline{\frac{1}{2}}.$$

697. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \int_{x}^{0} \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \lim_{x\to+\infty} \int_{0}^{x} \frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \text{prema tipu I} = \lim_{x\to-\infty} \left| \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x \right|_{x}^{0} +$$

$$+ \lim_{x\to+\infty} \left| \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x \right|_{0}^{x} = -\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}(-\infty) +$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}(+\infty) = -\frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\frac{\pi}{2}}.$$



Slika 104

Šrafirana površina u slici 104 prikazuje vrijednost tog konvergentnog integrala koja je konačna $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ iako se proteže lijevo i desno uzduž osi X u beskonačnost.

698. Na osi X u udaljenosti a od ishodišta O nalazi se u tački T jedinična masa. Tu masu privlači s Newtonovom silom gravitacije $dF = \frac{1 \cdot m}{x^2} dx$ masa m koja se nalazi u ishodištu O. Izračunaj radnju A, koju će izvršiti ta sila, ako se tačka T premjesti u beskonačnost. Uzevši u obzir da je radnja A negativna, jer sila F djeluje u smjeru protivnom smjeru gibanja tačke T, računamo:

$$A = -\int_{a}^{\infty} \frac{m}{x^2} dx = -\lim_{x\to+\infty} \int_{a}^{x} \frac{m}{x^2} dx = \lim_{x\to\infty} \left| \frac{m}{x} \right|_{a}^{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{m}{x} - \frac{m}{a} \right) = \underline{-\frac{m}{a}}.$$

699. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}\cos(bx)\,dx = \lim\limits_{c\to\infty}\int\limits_0^{c} e^{-ax}\cos(bx)\,dx =$ prema (65) $=$

$$= \lim_{c\to\infty}\left|\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}\Big(-a\cos(bx)+bx\sin(bx)\Big)\right|_0^c =$$

$$= \lim_{c\to\infty}\left\{\frac{e^{-ac}}{a^2+b^2}\Big(-a\cos(bc)+b\sin(bc)\Big)-\frac{1}{a^2+b^2}(-a)\right\} = \underline{\frac{a}{a^2+b^2}}.$$

700. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{a^2+b^2x^2}$. $\left[\frac{\pi}{2ab}\right]$.

701. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(bx)\,dx \quad (a>0)$. $\left[\frac{b}{a^2+b^2}\right]$.

702. $\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx$. $\left[\frac{1}{2}\right]$.

703. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$. $\left[\text{Tip II neodređenog integrala; } \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right]$.

704. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x\,dx}{x^2+1}$. [Divergira].

705. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}$. [Tip I; $1-\ln 2$].

U zadacima 706 do 722 uklj. izračunaj limese zadanih nepravih integrala slučaja II; odnosno pokaži da su divergentni.

706. $\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left(\text{kad } x\to 0,\ \frac{1}{\sqrt{x}}\to\infty\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx =$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left|2\sqrt{x}\right|_{\varepsilon}^{1} = 2\cdot 1 - \lim_{\varepsilon\to+0}2\sqrt{\varepsilon} = \underline{2}.$$

Integral konvergira!

707. $\int\limits_0^2\frac{dx}{2-x} = \left(\text{kad } x\to 2,\ \frac{1}{2-x}\to\infty\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{2-x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Big|-\ln(2-x)\Big|_0^{2-\varepsilon} =$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\{\ln(2-2+\varepsilon)-\ln 2] = -\lim_{\varepsilon\to 0}(\ln\varepsilon)+\ln 2 = +\infty,$$

jer je $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\ln\varepsilon) = \ln 0 = \underline{-\infty}$.

Integral divergira.

708. $\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \left(\text{kad } x\to 2,\ \frac{1}{\sqrt{2-x}}\to\infty\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{2-x}} =$

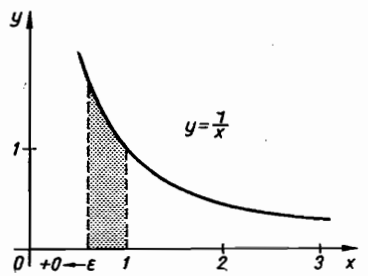
$$= -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\sqrt{2-x}\right|_0^{2-\varepsilon} = -2\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{2-2+\varepsilon}-\sqrt{2}\right) = \underline{2\sqrt{2}}.$$

Integral konvergira.

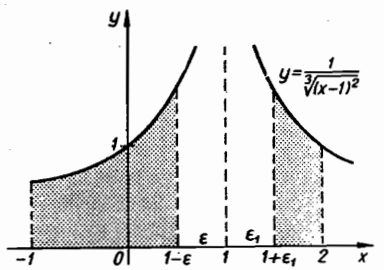
709. $\int\limits_0^1\frac{dx}{x} = \left(\text{kad } x\to+0,\ y=\frac{1}{x}\to+\infty,\ \text{vidi sl. 105}\right) =$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big|\ln x\Big|_{\varepsilon}^{1} = 0-\lim_{\varepsilon\to+0}(\ln\varepsilon) = \underline{+\infty}.$$

Integral divergira.



Slika 105



Slika 106

710. $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} =$ (kad $x\to 1$, podintegralna funkcija $\to\infty$; vidi sl. 106) $=$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon_1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 3\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\sqrt[3]{x-1}\right|_{-1}^{1-\varepsilon} + 3\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left|\sqrt[3]{x-1}\right|_{1+\varepsilon_1}^{2} =$$

$$=3\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{1-\varepsilon-1}-\sqrt[3]{2}\right)+3\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(1-\sqrt[3]{1+\varepsilon_1-1}\right)=-3\sqrt[3]{-2}+3=3\left(\sqrt[3]{2}+1\right).$$

Integral konvergira.

711. $$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\left(\text{kad } x\to 1,\ \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\to\infty\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$$

$$=(\text{uz supstituciju } \arcsin x=u)=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\arcsin^2 x\right|_0^{1-\varepsilon}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\arcsin^2(1-\varepsilon)-0\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{4}.$$

712. $$\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Vidimo da kad $x\to 2$, $\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\to\infty$, pa je integral nepravi. Da izračunamo pripadni neodređeni integral, uvedimo supstituciju $x=2\sin t$. Tada je

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\cos t,\ \text{a } dx=2\cos t\,dt,\ \text{dok}$$

je za $x=0$ $t=0$, a za $x=2$ $\sin t=1$, pa je $t=\frac{\pi}{2}$.

Zadani integral prima oblik:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8\sin^3 t\cdot 2\cos t\,dt}{2\cos t}=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,dt=\text{ prema zadatku 397 }=$$

$$=8\left|-\frac{1}{3}\sin^2 t\cos t-\frac{2}{3}\cos t\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{16}{3}.$$

Zamjenom promjenljive pretvorili smo nepravi integral u pravi integral neprekinute funkcije s konačnim intervalom integriranja.

713. $$\int_2^3 \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}.$$ $\left[\frac{2}{3}\sqrt[4]{125}\right]$.

714. $$\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$$ $\left[6\sqrt[3]{2}\right]$.

715. $$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$ [Integral divergira: ∞].

716. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$.

717. $$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$$ uz grafički prikaz podintegralne funkcije i površine.

[Tip II neodređenih integrala; π].

718. $$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-x-1}}.$$ [Integrand $\to\infty$, kad $x\to 1$; tip III c) neodr. integrala; $-\arcsin\frac{2}{3}+\frac{\pi}{2}$].

719. $$\int_{-8}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$ $\left[\frac{15}{2}\right]$.

720. $$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)(2-x)}.$$ [π].

721. $$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)(x-2)}.$$ [divergira].

722. $$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$$ [divergira].

VIII. ODREĐIVANJE PRIBLIŽNE VRIJEDNOSTI ODREĐENOG INTEGRALA $\int_a^b f(x)\,dx$ (NUMERIČKA KVADRATURA)

Postupak i metode

Interval integracije $[a;\ b]$ dijelimo u n jednakih dijelova duljine $h=\frac{b-a}{n}$, u svim diobenim tačkama konstruiramo ordinate podintegralne funkcije $f(x)$, tj.

$$f(a),\quad f(a+h),\quad f(a+2h),\ldots\ldots,f(b-h),\quad f(b)$$

pa površinu omeđenu lukom funkcije $f(x)$, osi X i ordinatama $f(a)$ i $f(b)$, tj. vrijednost određenog integrala, možemo aproksimirati na više načina.

a) **Metoda pravokutnika** uzima za približnu vrijednost određenog integrala zbroj površina pravokutnika i to nutarnjih, ako se za visinu pravokutnika u svakom dijeliću intervala $[a;\ b]$ uzima manja, odnosno veća ordinata krivulje dotičnog dijelića intervala za vanjske pravokutnike.

$$S=\int_a^b f(x)\,dx \doteq h[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\ldots+f(b-h)] \tag{101}$$

$$S\doteq h[f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\ldots+f(b-h)+f(b)] \tag{101a}$$

b) **Metoda trapeza** aproksimira vrijednost određenog integrala zbrojem površina trapeza, koji nastaju tako da se u svakom dijeliću intervala duljine $h=\frac{b-a}{n}$ povuku tetive krivulje $y=f(x)$. Uzevši u obzir da je površina trapeza jednaka umnošku visine h trapeza i poluzbroja osnovica, dobivamo

$$S=\int_a^b f(x)\,dx \doteq h\left[\frac{f(a)}{2}+\frac{f(b)}{2}+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\ldots+f(b-h)\right].$$

c) **Metoda tangenata** aproksimira površinu u svakom dijeliću intervala duljine $h=\frac{b-a}{n}$ trapezom, kome je kosi bočni krak tangenta povučena na krivulju $f(x)$ u polovici drugog bočnog kraka, tj. u tačkama apscisa

$$a+\frac{h}{2},\quad a+\frac{3}{2}h,\quad a+\frac{5}{2}h,\ldots\ldots,b-\frac{h}{2}.$$

Kako je površina trapeza jednaka umnošku srednjica $f\left(a+\frac{h}{2}\right)$, $f\left(a+\frac{3}{2}h\right)$, ...i visina h, dobivamo

$$S=\int_a^b f(x)\,dx \doteq h\left[f\left(a+\frac{h}{2}\right)+f\left(a+\frac{3}{2}h\right)+\ldots\ldots+f\left(b-\frac{h}{2}\right)\right]. \tag{102}$$

d) **Simpsonova formula** aproksimira krivulju $f(x)$ u svakom dijeliću intervala duljine $h=\frac{b-a}{n}$ lukovima parabola, koji su određeni tačkama zadane krivulje $f(x)$ na početku, u sredini i na kraju svakog dijelića intervala, pa se površina ispod tih parabola aproksimira pomoću Cavalieri-Gregorijeve formule, koja kazuje, da je površina omeđena parabolom i osi X jednaka $\frac{\text{duljini intervala}}{6}\cdot$ (početna ordinata + 4 srednje + krajnja ordinata), pa je

$$S=\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{h}{6}\left\{f(a)+f(b)+2[f(a+h)+f(a+2h)+\right.$$

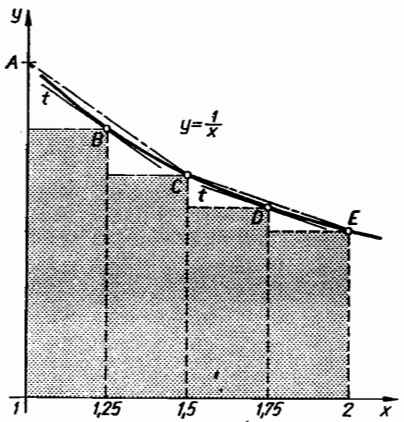
$$\left.+\cdots+f(b-h)]+4\left[f\left(a+\frac{h}{2}\right)+f\left(a+\frac{3}{2}h\right)+\cdots+f\left(b-\frac{h}{2}\right)\right]\right\}. \tag{104}$$

Zadaci

U zadacima **723** do **726** uklj. izračunaj metodama numeričke kvadrature približne vrijednosti zadanih određenih integrala.

723. Izračunaj $\int_1^2 \frac{dx}{x}=\ln 2$ podijelivši interval $[1;\ 2]$ u 4 jednaka dijela i izračunavši vrijednosti podintegralne funkcije $y=\frac{1}{x}$ u diobenim tačkama A, B, C, D i E intervala na 5 decimala tačno. Odredi također apsolutnu i procentualnu pogrešku svakog rezultata uzevši da je $\ln 2=0{,}69315$ na 5 decimala tačno.

Kako je $\int_1^x \frac{dx}{x}=\left|\ln x\right|_1^x=\ln x-\ln 1=\ln x$, površina ispod luka istostrane hiperbole $y=\frac{1}{x}$ od $x=1$ do $x=2$ numerički je jednaka vrijednosti $\ln 2$, pa slika 107 predočuje $\ln 2$ u obliku šrafirane površine.



Slika 107

Račun provedimo u obliku tablice i to za metode pravokutnika (a), trapeza (b), tangenata (c) i po Simpsonovoj formuli (d).

x	$y=\frac{1}{x}$	Faktori za metode				Produkt za metode			
		(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)
1.00	1.00000	—	1	—	$\frac{1}{3}$	—	1.00000	—	0.33333
1.25	0.80000	1	—	2	$\frac{4}{3}$	0.80000	—	1.60000	1.06666
1.50	0.66667	1	2	—	$\frac{2}{3}$	0.66667	1.33334	—	0.44445
1.75	0.57143	1	—	2	$\frac{4}{3}$	0.57143	—	1.14286	0.76197
2.00	0.50000	1	1	—	$\frac{1}{3}$	0.50000	0.50000	—	0.16667
					Zbroj	2.53810	2.83334	2.74286	2.77308
					puta $h=\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}$	0.63452	0.70834	0.68572	0.69329
					Pogreške apsolutna	0.05863	0.00019	0.00743	0.00014
					Pogreške procentualna	0,85%	0,027%	1,07%	0,020%

Vidimo da je najtačniji rezultat dobiven po Simpsonovoj formuli.

724. Izračunaj na pet decimala tačno broj π pomoću integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left| \operatorname{arc\,tg} x \right|_0^1 = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

primijenivši gore navedene četiri metode i odredi za svaki dobiveni rezultat apsolutnu, relativnu i procentualnu pogrešku (Interval [0; 1] podijeli u 10 jednakih dijelova, vrijednosti ordinata podintegralne funkcije računaj na 6 decimala tačno). Nariši sliku funkcije $y=\frac{1}{1+x^2}$.

[(a) 2,83992; (b) 3,13992; (c) 3,14793; (d) 3,14160].

725. Izračunaj integral $\int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx$ najprije tačno, a zatim približno po metodama pravokutnika nutarnjih i vanjskih, trapeza i Simpsona podijelivši interval [1; 9] u 8 jednakih

dijelova i računajući vrijednosti ordinata podintegralne funkcije na 4 decimale tačno. Odredi također apsolutne, relativne i procentualne pogreške dobivenih rezultata.

[38; (a) 34,8183 i 40,8183; (b) 37,8183; (d) 37,9655].

726. Izračunaj $\int_0^{0,8} \cos x\,dx$ po metodi trapeza i po Simpsonovoj formuli podijelivši interval [0; 0,8] u 10 jednakih dijelova i računajući vrijednosti ordinata $\cos x$ na 5 decimala tačno. Izračunaj također apsolutne, relativne i procentualne pogreške dobivenih rezultata.

[(b) 0,71676; (d) 0,71736].

IX. DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

A. OPĆENITO O DIFERENCIJALNIM JEDNADŽBAMA

Diferencijalnom jednadžbom zovemo jednadžbu koja sadrži derivacije ili diferencijale nepoznate funkcije.

Ako nepoznata funcija zavisi samo od jednog argumenta, diferencijalna jednadžba zove se **obična**, a ako zavisi od nekoliko argumenata pa sadrži parcijalne derivacije te nepoznate funkcije, tada se jednadžba zove **parcijalna** diferencijalna jednadžba. **Red** diferencijalne jednadžbe je red najviše derivacije koju sadrži diferencijalna jednadžba.

Zadaci koji slijede sadržat će samo obične diferencijalne jednadžbe, npr. diferencijalne jednadžbe prvog reda, koje imaju općenito oblik

$$F(x, y, y')=0,$$

gdje je x argument, a y tražena funkcija.

Često se diferencijalna jednadžba prvog reda dade riješiti po y':

$$y'=f(x, y)$$

a kadšto se svode i na ovaj oblik

$$P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=0.$$

U tom slučaju možemo za nepoznatu funkciju uzeti kako x, tako i y.

Funkcija, koja zadovoljava diferencijalnu jednažbu, zove se rješenje ili integral diferencijalne jednadžbe.

Rješenje ili integral diferencijalne jednadžbe zove se **općim**, ako sadrži toliko nezavisnih konstanata po volji, kolik je red diferencijalne jednadžbe, dok funkcije koje se dobivaju iz općeg integrala uz različite brojčane vrijednosti konstanata po volji jesu **partikularna** rješenja te diferencijalne jednadžbe. Iz navedenog slijedi da opće rješenje diferencijalne jednadžbe n-tog reda sadrži uvijek n nezavisnih konstanata $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$.

Geometrijski odgovara svakom partikularnom integralu diferencijalne jednadžbe njegova grafička predodžba, tj. graf. u obliku ravninske krivulje, koja se zove **integralna krivulja** te jednadžbe, a općem integralu odgovara **familija** svih integralnih krivulja.

Iz toga slijedi: ako je zadana jednadžba familije krivulja koja ovisi o n parametara $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ pa ako tu jednadžbu n puta redom deriviramo pa iz zadane i tako dobivenih n jednadžbi uklonimo sve parametre, dobit ćemo diferencijalnu jednadžbu n-tog reda, kojoj je zadana jednadžba familije opće rješenje.

Da se iz bezbroja rješenja, koja sadrži integral diferencijalne jednadžbe izluči jedno naročito rješenje, koje odgovara uvjetima konkretnog zadatka, koji se rješava pomoću diferencijalne jednadžbe, ili, geometrijski shvaćeno, da se dobije jedna naročita krivulja familije,

treba uvesti u opće rješenje **početne uvjete**, a ti su npr. za diferencijalnu jednadžbu prvog reda koordinate jedne tačke $x=x_0$, $y=y_0$ kojom ta naročita krivulja familije ima da prode. Tako se dobije već spomenuto partikularno rješenje diferencijalni-jednadžbe.

Rješenje diferencijalne jednadžbe, koje se ne može dobiti iz općeg rješenja ni za kakvu vrijednost konstanata C uključujući i $\pm\infty$, zove se **singularno** (osobito) rješenje. Na kraju treba još podvući golemo značenje praktičko i teoretsko diferencijalnih jednadžbi, jer pomoću njih dolazimo do analitičkih izraza funkcijske zavisnosti između promjenljivih parametara mnogih tehničkih i fizičkih procesa.

Zadaci

U zadacima **727** do **735** uklj. pokaži da su zadane funkcije rješenja zadanih diferencijalnih jednadžbi.

727. $y=\sqrt{x}$, $2yy'=1$.

Deriviramo: $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje:

$$2y\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=1$$

ili

$$2\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=1,$$

pa je

$$\underline{1=1}.$$

Zadana funkcija $y=\sqrt{x}$ pretvara u identitet zadanu diferenciialnu jednadžbu, pa je $y=\sqrt{x}$ partikularno rješenje te jednadžbe.

728. $y=e^{\sqrt{1-x^2}}$; $xy\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0$.

Diferenciramo: $dy=-e^{\sqrt{1-x^2}}\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\dfrac{xe^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Uvrštenje u zadanu diferencijalnu jednadžbu daje:

$$x\cdot e^{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx-x\cdot e^{\sqrt{1-x^2}}\,dx\equiv\underline{0}.$$

$y=e^{\sqrt{1-x^2}}$ je partikularno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

729. $\ln x\cdot\ln y=C$; $y\ln y\,dx+x\ln x\,dy=0$.

Diferenciramo zadanu implicitnu funkciju:

$$\ln x\cdot\frac{1}{y}\cdot dy+\ln y\cdot\frac{1}{x}\,dx=0.$$

Odatle slijedi:

$$dy=-\frac{y\ln y\,dx}{x\ln x}.$$

Uvrštenje daje identitet:

$$y\ln y\cdot dx-x\ln x\cdot\frac{y\ln y\,dx}{x\ln x}=y\ln y\cdot dx-y\ln y\,dx\equiv\underline{0},$$

pa je $\ln x\cdot\ln y=C$ opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

730. $s=-t-\frac{1}{2}\sin 2t$; $\frac{d^2s}{dt^2}+\operatorname{tg}t\cdot\frac{ds}{dt}=\sin 2t.$

Funkciju s deriviramo dvaput redom po t:

$$\frac{ds}{dt}=-1-\cos 2t;\quad \frac{d^2s}{dt^2}=2\sin 2t.$$

Uvrštenje u zadanu diferencijalnu jednadžbu drugog reda daje identitet:

$$2\sin 2t+\operatorname{tg}t\,(-1-\cos 2t)-\sin 2t=\sin 2t-\operatorname{tg}t\cdot 2\cos^2 t=$$
$$=\sin 2t-2\sin t\cdot\cos t=\sin 2t-\sin 2t\equiv 0.$$

Zadana funkcija je partikularno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe drugog reda.

731. $y-x+C_1\cdot\ln y=C_2$; $yy''-(y')^2+(y')^3=0.$

Deriviramo: $$y'-1+C_1\frac{y'}{y}=0 \qquad \text{(a)}$$

i drugi put: $$y''+C_1\frac{yy''-y'\cdot y'}{y^2}=0. \qquad \text{(b)}$$

Da uklonimo C_1 iz (b), računamo C_1 iz (a) i uvrštavamo u (b). Dobivamo:

$$C_1=\frac{(1-y')\,y}{y'}.$$

$$y''+\frac{(1-y')\,y}{y'}\cdot\frac{yy''-y'^2}{y^2}=0\ \Big|\cdot yy'\ \text{i uredimo.}$$

$$yy''-(y')^2+(y')^3=0.$$

Dobili smo zadanu diferencijalnu jednadžbu, a to znači da zadana funkcija predočuje geometrijski familiju krivulja koja ovisi o dvjema parametrima C_1 i C_2, dok je zadana diferencijalna jednadžba diferencijalna jednadžba zadane familije.

732. $y=Ce^{-2x}$; $y'+2y=0.$

733. $y=x^2-4x$; $x\,dy-y\,dx=x^2\,dx.$

734. $y=C_1x+C_2x^2$; $x^2y''-2xy'+2y=0.$

735. $s=t^2\ln t+C_1t^2+C_2t+C_3$; $t\frac{d^3s}{dt^3}=2.$

U zadacima **736** do **740** uklj. prema zadanom općem rješenju diferencijalne jednadžbe prvog reda konstruiraj integralne krivulje, tj. grafove partikularnih rješenja, koje prolaze zadanim tačkama.

736. $y=Cx^2$; $A\left(1;\ \frac{1}{3}\right)$, $B(1;\ 1)$ i $C\left(1,\ -\frac{1}{3}\right)$.

Opći integral diferencijalne jednadžbe I reda određuje geometrijski familiju krivulja koja ovisi o jednom parametru C, u našem slučaju familiju parabola. Uvrštavajući redom u $y=Cx^2$ koordinate zadanih tačaka i računajući vrijednosti parametra C dobivamo jednadžbe pojedinih integralnih krivulja te familije tj. grafove partikularnih integrala diferencijalne jednadžbe.

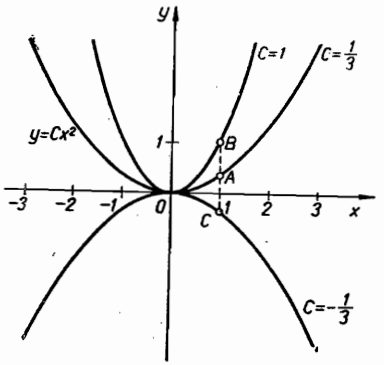
Uvrštenje u $y=Cx^2$

$A\left(1;\ \frac{1}{3}\right)$ daje $\frac{1}{3}=C$, pa je $\underline{y=\frac{1}{3}x^2}$.

$B(1;\ 1)$ daje $1=C$, pa je $\underline{y=x^2}$.

$C\left(1;\ -\frac{1}{3}\right)$ daje $-\frac{1}{3}=C$,

pa je $\underline{y=-\frac{1}{3}x^2}$.



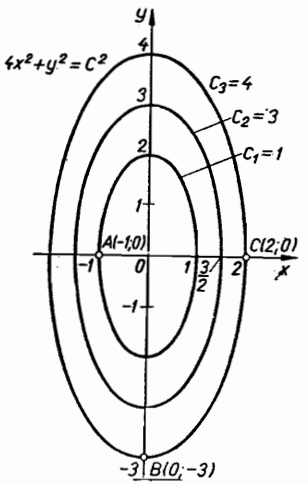
Slika 108

Vidi sliku 108.

737. $4x^2+y^2=C^2$; $A(-1;\ 0)$; $B(0;\ -3)$ i $C(2;\ 0)$. Sl. 109.

Podijelimo li zadano opće rješenje s C^2, dobit ćemo $\frac{x^2}{\frac{C^2}{4}}+\frac{y^2}{C^2}=1$, a to je jednadžba familije koncentričnih elipsa s poluosima $\frac{C}{2}$ i C, koje leže na koordinatnim osima.

Uvrštenje u $C^2=4x^2+y^2$.



Slika 109

$A(-1;0)$ daje $C=\pm 2$, pa je $4x^2+y^2=4$ ili $\underline{\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1}$.

$B(0;-3)$ daje $C=\pm 3$, pa je $4x^2+y^2=9$ ili $\underline{\frac{x^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y^2}{9}=1}$.

$C(2;0)$ daje $C=\pm 4$, pa je $4x^2+y^2=16$ ili $\underline{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1}$.

Vidi sl. 109.

738. $y=x^2+C$; $A(0;0)$, $B(-1,4)$, $C(-3,-1)$.

[$y=x^2$; $y=x^2+3$; $y=x^2-4$].

739. $x^2+y^2=C^2$; $A(3,-4)$, $B(-6,8)$.

[$x^2+y^2=25$; $x^2+y^2=100$].

740. $x^2+y^2=2Cx$; $A(-1;1)$, $B(3;0)$.

$\left[x^2+y^2=-2x;\quad x^2+y^2=3x\right]$.

U zadacima **741** do **745** uklj. odredi diferencijalne jednadžbe zadanih familija krivulja.

741. $y=Cx+C^2$.

Da dobijemo diferencijalnu jednadžbu zadane familije krivulja, moramo iz zadanog općeg rješenja tražene diferencijalne jednadžbe ukloniti konstantu po volji, odnosno parametar C. U tu svrhu deriviramo zadanu jednadžbu po nezavisnoj promjenljivoj pa iz tako dobivene jednadžbe i zadane jednadžbe familije uklonimo parametar C.

Računamo: $y'=C$,

pa uvrštenje u $y=Cx+C^2$ daje traženu jednadžbu

$$\underline{y=y'x+(y')^2}.$$

742. $\frac{x^2}{C^2}+\frac{y^2}{4}=1$. (a)

$$\frac{1}{C^2}\cdot 2x+\frac{1}{4}\cdot 2yy'=0 \quad \text{ili} \quad \frac{2x}{C^2}=-\frac{yy'}{2}.$$

Odatle: $C^2=-\frac{4x}{yy'}$.

Uvrštenje u (a) daje

$$\underline{-xyy'+y^2=4}.$$

743. $x^2+y^2=C^2$.

$$2x+2yy'=0,$$

pa je $\underline{x+yy'=0}$

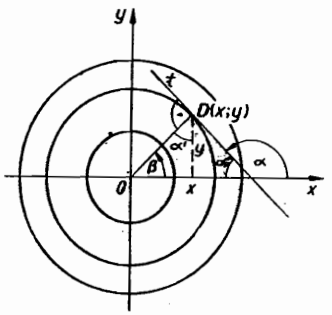
tražena diferencijalna jednadžba zadane familije koncentričnih kružnica polumjera C po volji. Vidi sliku 110.

Napišemo li tu jednadžbu u obliku

$$y'=-\frac{x}{y}$$

vidjet ćemo na slici 110, da je

$$\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{tg}\alpha'=-\frac{x}{y}=y'=k_1$$



Slika 110

a to je koeficijent smjera tangente na bilo koju kružnicu familije u bilo kojoj tački $D(x, y)$ te kružnice. U drugu ruku vidimo iz slike da je koeficijent smjera radijvektora OD

$$k_1=\operatorname{tg}\beta=\frac{y}{x}=-\frac{1}{k}$$

pa je tangenta t okomita na OD.

Iz toga slijedi opće svojstvo krivulja zadane familije: tangente na kružnice familije okomite su na polumjerima povučenim u dirališta tangenata.

744. $y^2=2Cx$. [$y=2xy'$].

745. $y=Cx^2$. Izvedi također opće svojstvo krivulja te familje prikazavši ih grafički.

$$\left[y'=2\frac{y}{x};\quad k=2k_1\right].$$

B. DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE PRVOG REDA

a. Općenito

Opći oblik jednadžbe

$$y'=f(x,y) \text{ ili implicitno } F(x,y,y')=0.$$

Opće rješenje

$$y=y(x,C) \text{ ili implicitno } \varphi(x,y,C)=0.$$

Početni uvjeti

koordinate jedne tačke $\left.\begin{matrix}x=x_0\\ y=y_0\end{matrix}\right\}$ početni položaj.

Geometrijsko značenje:

Iz diferencijalne jednadžbe prvog reda $y'=f(x,y)$ neposredno slijedi da svakoj tački u ravnini XY diferencijalna jednadžba dodijeluje tangens smjera $y'=\operatorname{tg}\alpha$ u toj tački, tj. određuje polje smjerova u ravnini XY, odnosno silnice ravnog polja sila, jer integralne krivulje imaju u svakoj svojoj tački smjer koja pripada toj tački.

b. Integriranje pojedinih tipova diferencijalnih jednadžbi prvog reda

TIP I.

Promljenljive x i y su separirane, odnosno dadu se separirati

Uputa

U tom slučaju svodi se zadana diferencijalna jednadžba na oblik

$$f(x)\,dx=F(y)\,dy.$$

Taj se postupak zove separacija promljenljivih. Integrirajući obje strane jednadžbe dobivamo rješenje ili integral diferencijalne jednadžbe:

$$\int f(x)\,dx=\int F(y)\,dy+C.$$

Zadaci

U zadacima **746** do **759** uklj. riješi zadane diferencijalne jednadžbe načinom separacije promjenljivih.

746. $(xy^2+y^2)\,dx+(x^2-x^2y)\,dy=0.$

Odatle $$y^2(x+1)\,dx+x^2(1-y)\,dy=0.$$

Separiramo x i y tako da jednadžbu podijelimo s x^2y^2:

$$\frac{x+1}{x^2}\,dx+\frac{1-y}{y^2}\,dy=0.$$

Integriramo: $$\int\frac{x+1}{x^2}\,dx+\int\frac{1-y}{y^2}\,dy=C,$$

ili $$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dy}{y^2}-\int\frac{dy}{y}=C$$

$$\ln x-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\ln y=C,$$

pa je $$\underline{\ln\frac{x}{y}-\frac{x+y}{xy}=C}$$

opći integral zadane diferencijalne jednadžbe.

Primjedba. Uvrštenje $x=0$ i $y=0$ u zadanu jednadžbu daje identitet $0=0$, pa su $x=0$ i $y=0$ rješenja zadane diferencijalne jednadžbe i to singularna rješenja, jer ih ne možemo dobiti iz općeg integrala. Te dvije integralne krivulje $x=0$ i $y=0$ (koordinatne osi) izgubili smo pri dijeljenju jednadžbe s x^2y^2, a taj je produkt jednak nuli uzduž koordinatnih osi.

747. $$x+xy+y'(y+xy)=0$$

$$x(1+y)+yy'(1+x)=0\,|:x$$

$$1+y+yy'\frac{1+x}{x}=0\,\Big|:yy'$$

$$\frac{1+y}{yy'}+\frac{1+x}{x}=0.$$

Uvrštenje $y'=\dfrac{dy}{dx}$ daje

$$\frac{1+y}{y\,dy}\,dx+\frac{1+x}{x}=0\,\Big|:dx$$

$$\frac{1+y}{y\,dy}+\frac{1+x}{x\,dx}=0 \text{ ili reciprocno } \frac{x\,dx}{1+x}+\frac{y\,dy}{1+y}=0.$$

Integriramo $$\int\frac{x\,dx}{1+x}+\int\frac{y\,dy}{1+y}=C'$$

ili

$$\int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx+\int\left(1-\frac{1}{1+y}\right)dy=C'$$

$$x-\ln(x+1)+y-\ln(y+1)=\ln C.$$

Radi jednostavnijeg rezultata konstantu po volji C' uzeli smo u obliku $\ln C$, što je dopušteno, jer $\ln C$ prima sve vrijednosti od $-\infty$ do $+\infty$,

pa je $$\underline{x+y=\ln|C(x+1)(y+1)|}$$ opći integral.

748. $$\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2x}\,dx+\sin y\cos y\,dy=0.$$

Integriramo uz supstituciju $\operatorname{tg}x=t$, tada je $dt=\dfrac{dx}{\cos^2x}$, i $\sin y=u$, pa je $du=\cos y\cdot dy$. Dobivamo:

$$\int t\,dt+\int u\,du=C'$$

ili $$\frac{t^2}{2}+\frac{u^2}{2}=C',$$

pa je $$\operatorname{tg}^2x+\sin^2y=2C'$$

ili $$\underline{\operatorname{tg}^2x+\sin^2y=C.}$$

749. $(\sqrt{xy}+\sqrt{x})\,y'-y=0.$

Odatle
$$\sqrt{x}(\sqrt{y}+1)\frac{dy}{dx}-y=0 \;\Big|\; \cdot\frac{dx}{y\sqrt{x}}$$
$$\frac{\sqrt{y}+1}{y}\,dy-\frac{dx}{\sqrt{x}}=0$$
$$\int\frac{\sqrt{y}+1}{y}\,dy-\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=C$$
$$\int\frac{dy}{\sqrt{y}}+\int\frac{dy}{y}-\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=C.$$
$$\underline{2\sqrt{y}+\ln y-2\sqrt{x}=C.}$$

750. $2^{x+y}+3^{x-2y}y'=0.$
$$2^x\cdot 2^y+3^x\cdot 3^{-2y}\frac{dy}{dx}=0 \;\Big|\; \cdot 2^{-y}\cdot 3^{-x}dx$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x dx+2^{-y}\cdot(3^2)^{-y}dy=0$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x dx+18^{-y}dy=0$$
$$\int\left(\frac{2}{3}\right)^x dx+\int 18^{-y}dy=C$$
$$\underline{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}}-\frac{18^{-y}}{\ln 18}=C.}$$

751. $\sin\alpha\cos\beta\,d\alpha=\cos\alpha\sin\beta\,d\beta.$

Da separiramo promjenljive α i β, podijelimo obje strane jednadžbe s $\cos\beta\cos\alpha$:
$$\operatorname{tg}\alpha\,d\alpha=\operatorname{tg}\beta\,d\beta.$$

Integriramo: $$-\ln\cos\alpha+\ln\cos\beta=\ln C.$$

Slijedi: $$\ln\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\ln C$$

i $$\underline{\cos\beta=C\cos\alpha.}$$

752. $x^2(2yy'-1)=1.$

Dijelimo s x^2 uzevši $y'=\frac{dy}{dx}$:

$$2y\frac{dy}{dx}-1=\frac{1}{x^2} \;\Big|\; \cdot dx$$
$$2y\,dy=\left(\frac{1}{x^2}+1\right)dx.$$

Integriramo: $$y^2+C=-\frac{1}{x}+x \;\Big|\; \cdot x$$
$$\underline{x(y^2+C)=x^2-1.}$$

753. $3e^x\sin y\,dx=(e^x-1)\sec y\,dy.$

Da separiramo x i y, dijelimo obje strane jednadžbe sa $\sin y\cdot(e^x-1)$:
$$\frac{3e^x}{e^x-1}dx=\frac{dy}{\sin y\cos y}$$
$$3\int\frac{e^x}{e^x-1}dx=2\int\frac{dy}{\sin 2y}+\ln C.$$

Uz $e^x=t$ dobivamo $e^x\,dx=dt$, pa je $e^x=\frac{dt}{dx}$, dok iz $2y=u$ slijedi $dy=\frac{du}{2}$
$$3\int\frac{dt}{t-1}=\int\frac{du}{\sin u}+\ln C.$$

Prema (67): $$3\ln(t-1)=\ln\operatorname{tg}\left|\frac{u}{2}\right|+\ln C$$

ili $$\ln(e^x-1)^3=\ln(C\cdot\operatorname{tg}y)$$

slijedi: $$\underline{(e^x-1)^3=C\operatorname{tg}y.}$$

754. $e^{-s}\left(1+\frac{ds}{dt}\right)=1.$

Odatle $$\frac{ds}{dt}=e^s-1 \;\Big|\; \cdot\frac{dt}{e^s-1}$$
$$\frac{ds}{e^s-1}=dt,\ \text{pa je}\ t=\int\frac{ds}{e^s-1}+\ln C.$$

Uz $e^s=u$ i $e^s\,ds=du$, dobivamo $ds=\frac{du}{e^s}=\frac{du}{u}$,

pa je $$t=\int\frac{du}{u(u-1)}+\ln C.$$

Nakon rastavljanja $\frac{1}{u(u-1)}$ u parcijalne razlomke, dobivamo
$$t=-\int\frac{du}{u}+\int\frac{du}{u-1}+\ln C$$
$$t=-\ln u+\ln(u-1)+\ln C$$

ili $t=\ln\left(C\frac{u-1}{u}\right)$, odnosno $t=\ln C(1-u^{-1})$, a kako je $u=e^s$,

bit će $t=\ln C(1-e^{-s})$.

Odatle po definiciji logaritma slijedi

$$\underline{e^t=C(1-e^{-s})}.$$

755. $\varphi^2\,dr+(r-a)\,d\varphi=0.$

Dijeljenje s $dr\cdot d\varphi$ daje:

$$\frac{\varphi^2}{d\varphi}=-\frac{r-a}{dr} \text{ ili } \frac{dr}{r-a}=-\frac{d\varphi}{\varphi^2}.$$

Integriramo: $\ln|r-a|-\ln C=\frac{1}{\varphi}$

ili $\ln\left|\frac{r-a}{C}\right|=\frac{1}{\varphi}$,

pa je $\frac{r-a}{C}=e^{\frac{1}{\varphi}}$

ili $\underline{r=Ce^{\frac{1}{\varphi}}+a.}$

756. $yy'+x=1.$ $[(x-1)^2+y^2=C^2].$

757. $1+(1+y')e^y=0.$ $[(e^y+1)e^x=C].$

758. $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\,y'=0.$ $[\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C].$

759. $y'+\sin\frac{x+y}{2}=\sin\frac{x-y}{2}.$ $\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right|=C-2\sin\frac{x}{2}\right].$

U zadacima **760** do **767** uklj. odredi partikularna rješenja zadanih diferencijalnih jednadžbi prema zadanim početnim uvjetima.

760. $(1+y^2)\,dx=xy\,dy;\quad y(2)=1.$

Najprije načinom separacije promjenljivih odredimo opće rješenje zadane jednadžbe podijelivši je u tu svrhu s $x(1+y^2)$.

$$\frac{dx}{x}=\frac{y\,dy}{1+y^2}.$$

Integriramo: $\ln x=\int\frac{y\,dy}{1+y^2}+\ln C$

ili $\ln x=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+\ln C,$

pa je $x=C\sqrt{1+y^2}$ – opće rješenje.

Uvrštenje početnog uvjeta $y=1$ za $x=2$ daje

$$2=C\sqrt{2}$$

a odatle računamo C: $C=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$

Uvrštenje u opće rješenje

$$x=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+y^2}$$

ili $\underline{x^2=2+2y^2}$

daje traženo partikularno rješenje određeno početnim uvjetom $y(2)=1$.

761. $s=s'\cos^2 t\cdot\ln s;\quad s(\pi)=1.$

Uzevši $s'=\frac{ds}{dt}$ i pomnoživši jednadžbu s $\frac{dt}{s\cos^2 t}$ separiramo varijable t i s:

$$\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{\ln s\cdot ds}{s}.$$

Integriramo: $\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\int\frac{\ln s}{s}ds+C.$

Uz supstituciju $\ln s=u$ i $du=\frac{ds}{s}$ dobivamo opće rješenje

$$\operatorname{tg} t=\frac{1}{2}\ln^2 s+C.$$

Uvrštenje $t=\pi$ i $s=1$ daje $C=0$,

pa je $\underline{2\operatorname{tg} t-\ln^2 s=0}$ – partikularno rješenje.

762. $y\,dx+\operatorname{ctg} x\,dy=0;\quad y\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1.$

Množenje jednadžbe s $\frac{\operatorname{tg} x}{y}$ daje

$$\operatorname{tg} x\,dx+\frac{dy}{y}=0.$$

Integriramo: $-\ln|\cos x|+\ln|y|=\ln C$

ili $\ln|y|=\ln[C\cdot|\cos x|],$

a odatle je

$$|y|=C|\cos x|$$

ili

$$y=\pm C\cos x, \text{ odnosno, } y=C_1\cos x.$$

Uvrštenje $x=\frac{\pi}{3}$ i $y=-1$ daje: $-1=C_1 \cos\frac{\pi}{3}$,

pa je
$$C_1=-\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}=-2.$$

Slijedi: $\underline{y=-2\cos x}$ — partikularno rješenje.

763. $y'=(2y+1)\operatorname{ctg} x;\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}.$ $\left[y=\frac{C\sin^2 x-1}{2};\quad y=2\sin^2 x-\frac{1}{2}\right].$

764. $(xy'-y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=x;\quad y(-1)=0.$ $\left[\sqrt{x^2+y^2}=e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\right].$

765. $2(1+e^x)yy'=e^x;\quad y(0)=0.$ $[2e^{y^2}=e^x+1].$

766. $(1+x^2)y^3\,dx-(y^2-1)x^3\,dy=0;\quad y(1)=1.$ $\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2\left(1+\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)\right].$

767. $xy\,dx+(1+y'^2)\sqrt{1+x^2}\,dy=0;\ y(\sqrt{8})=1.$ $\left[\sqrt{1+x^2}+\ln|y|+\frac{y^2}{2}=\frac{7}{2}\right].$

c. Primjena diferencijalnih jednadžbi prvog reda za određivanje analitičkog izraza funkcijske zavisnosti između promjenljivih veličina (parametara) nekih fizičkih, tehničkih i geometrijskig problema

Zadaci

U zadacima **768** do **783** uklj. izrazi pomoću diferencijalne jednadžbe, a zatim pomoću općeg odnosno partikularnog rješenja te jednadžbe funkcijsku zavisnost između zadanih promjenljivih parametara.

768. Tijelo se kreće pravocrtno s brzinom v, koja je razmjerna s kvadratom vremena t. Odredi zavisnost između prevaljenog puta s i vremena t, ako je poznato da je u početni moment $t=0$ prevaljeni put iznosio $s=s_0$.

Znamo kinematičko značenje prve derivacije s po t:
$$v=\frac{ds}{dt}.$$

U našem je slučaju
$$\frac{ds}{dt}=k\cdot t^2\,|\cdot dt,$$
gdje je k koeficijent razmjernosti.
$$ds=kt^2\,dt$$
$$s=k\int t^2\,dt=\frac{k}{3}t^3+C. \qquad \text{(a)}$$

Uvrštenje početnog uvjeta: $s=s_0$ za $t=0$ daje
$$s_0=0+C, \text{ pa je } C=s_0.$$

Uvrštenje u (a) daje traženu zavisnost s od t
$$\underline{s(t)=\frac{k}{3}t^3+s_0}.$$

769. Tačka mase m pomiče se pravocrtno pod djelovanjem sile F, koja je upravno razmjerna s vremenom t i obratno razmjerna s brzinom gibanja v. Odredi zavisnost između brzine v i vremena t, ako je za $t=0$ i $v=0$.

Prema drugom Newtonovu zakonu
$$F=m\frac{dv}{dt},$$
gdje je $\frac{dv}{dt}$ akceleracija gibanja, imamo prema uvjetu zadatka
$$\frac{m\,dv}{dt}=\frac{kt}{v}\,\Big|\cdot v\,dt$$
$$mv\,dv=kt\,dt.$$

Odatle
$$m\int v\,dv=k\int t\,dt+C$$
$$m\frac{v^2}{2}=k\frac{t^2}{2}+C.$$

Uvrštenje početnog uvjeta $v=0$ za $t=0$ daje $C=0$, pa je
$$\underline{v=\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}.$$

770. Okrugla pločica rotira u tekućini. Djelovanje trenja na pločicu usporava rotaciju i to razmjerno s kutnom brzinom ω okretanja. Izrazi kutnu brzinu kao funkciju vremena t, ako je poznato da se za 25 sekundi od početka gibanja kutna brzina smanjila od 100 na 50 $\frac{\text{okretaja}}{\text{sekunda}}$.

Označimo li s $\omega(t)$ broj okretaja pločice u sekundi u moment t, tada će $\frac{d\omega}{dt}$ biti broj okretaja pločice u jednoj sekundi u moment t, tj. kutna brzina u taj moment t.

Prema uvjetu zadatka:
$$\frac{d\omega}{dt}=-k\omega, \qquad \text{(a)}$$

gdje je k koeficijent razmjernosti, dok predznak minus pokazuje da funkcija $\omega(t)$ opada, pa je $\frac{d\omega}{dt}<0$.

$$\frac{d\omega}{\omega}=-k\,dt.$$

Integriramo:

$$\ln\omega=-kt+\ln C$$

$$\ln\frac{\omega}{C}=-kt$$

$$\omega=Ce^{-kt}.$$

Da odredimo C, uvedimo početni uvjet: $\omega=100$ za $t=0$.

Dobivamo $100=C$,

pa je $$\omega=100e^{-kt} \qquad \text{(a)}$$

k ćemo odrediti iz drugog uvjeta za $t=25$ sek $\omega=50\frac{\text{okretaja}}{\text{sek}}$

$$50=100.e^{-25k} \quad \text{ili} \quad 1=2e^{-25k},$$

pa je $$0=\ln 2-25k \quad \text{i}$$

$$k=\frac{\ln 2}{25}=0{,}04\ln 2.$$

Uvrštenje u (a) daje

$$\underline{\omega(t)=100e^{-0{,}04\ln 2.t}}$$

771. U sobi pri stalnoj temperaturi 20° nalazi se tijelo ugrijano do 100°. Za koliko će se vremena to tijelo ohladiti do 25°, ako se do 60° ohladilo za 10 minuta i kako glasi zavisnost temperature tijela od vremena.

Označimo li temperaturu s T, a vrijeme s t, bit će $\frac{dT}{dt}$ brzina hlađenja tijela.

Prema Nervtonovu zakonu koji kazuje da je brzina hlađenja razmjerna s razlikom temperatura, dobivamo

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-20°),$$

gdje je k koeficijent razmjernosti, a predznak minus kazuje da je $T(t)$ opadajuća funkcija.

Separiranje promjenljivih T i t daje:

$$\frac{dT}{T-20}=-k\,dt,$$

a integriranje

$$\ln(T-20°)=-kt+C.$$

Za $t=0$ temperatura tijela $T=100°$. Uvrštenje daje

$$\ln 80=C,$$

pa je $$\ln(T-20°)=-kt+\ln 80°$$

ili $$kt=\ln\frac{80°}{T-20°}. \qquad \text{(a)}$$

Kako je prema zadatku $T=60°$ za $t=10$ minuta, dobivamo

$$k\cdot 10=\ln\frac{80}{40}, \text{ pa je } k=\frac{\ln 2}{10}\doteq 0{,}07$$

i

$$\ln(T-20°)=-0{,}07\,t+\ln 80°$$

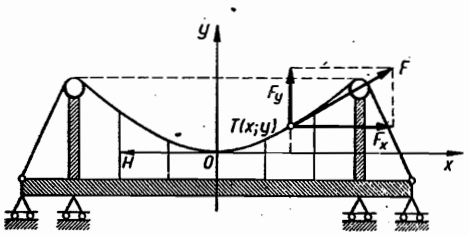
ili $$\ln\frac{T-20°}{80°}=-0{,}07\,t$$

ili $\underline{T=20°+80°e^{-0{,}07t}}$ — tražena zavisnost temperature T tijela od vremena t.

Da odredimo za koliko će se minuta tijelo ohladiti do 25°, uvrstimo u (a) $k=\frac{\ln 2}{10}$ i $T=25°$, pa dobivamo

$$\frac{\ln 2}{10}t=\ln\frac{80°}{5°} \quad \text{ili} \quad t=\ln 16\cdot\frac{10}{\ln 2}=\frac{4\cdot\ln 2\cdot 10}{\ln 2}=\underline{40\,\text{minuta}}.$$

772. Opterećenje užeta visećeg mosta iznosi p kp (kiloponda) na jedinicu dužine horizontalne grede. Zanemarivši težinu užeta, odredi njegov oblik uz pretpostavku da naprezanje užeta u najnižoj tački iznosi H kp.



Slika 111

Na luku užeta uzmimo tačku $T(x;y)$ po volji pa u krajnim tačkama O i T dijela OT užeta, koji je opterećen težinom px horizontalne grede, zamijenimo nutarnje sile naprezanja užeta vanjskim silama: horizontalnom silom H i tangentnom silom F u tački T. Tu silu F rastavimo u horizontalnu F_x i vertikalnu F_y kompomentu. Vidi sl. 111.

Da taj dio užeta ostane u ravnoteži, moraju biti jednake nuli sume projekcija sviju sila na os X i os Y, pa prema slici računamo:

$$\Sigma X=H-F_x=0, \text{ pa je } F_x=H$$

$$\Sigma Y=-px+F_y=0, \text{ pa je } F_y=px.$$

Znamo geometrijsko značenje derivacije:

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha=\text{prema slici}=\frac{F_y}{F_x}=\frac{px}{H}, \text{ pa je}$$

$\frac{dy}{dx}=\frac{px}{H}$ — diferencijalna jednadžba oblika užeta. Odatle je

$$dy=\frac{p}{H}x\,dx$$

i

$$y=\frac{p}{H}\cdot\frac{x^2}{2}+C.$$

Prema slici: za $x=0$ $y=0$, pa je $C=0$ i

$$y=\frac{p}{2H}x^2.$$

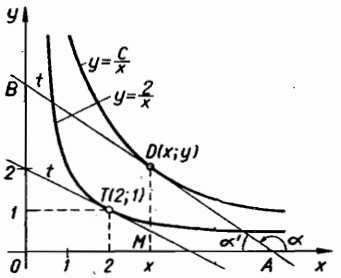
Uže ima oblik parabole!

773. Odredi jednadžbu familije krivulja kojima dirališta raspolovljuju odreske tangenata između koordinatnih osi. Napiši također jednadžbu one integralne krivulje koja prolazi tačkom $T_1(2;1)$.

Prema slici 112;

$$MA=MD\cdot\operatorname{ctg}\alpha'=-MD\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{MD}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Kako je $MA=OM=x$, $DM=y$ i $\operatorname{tg}\alpha=y'$, dobivamo:



Slika 112

$$x=-\frac{y}{y'}\quad\text{ili}\quad x=-\frac{y\,dx}{dy},\ \text{pa je}$$

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}.$$

Integriramo: $\ln y=-\ln x+\ln C$

ili

$$\ln y=\ln\frac{C}{x},$$

$$y=\frac{C}{x},$$

a to je familija istostranih hiperbola.

Uvrštenje koordinata tačke $T_1(2;1)$ daje $C=2$, slijedi

$$y=\frac{2}{x}$$

jednadžba integralne krivulje koja prolazi tačkom T_1.

774. Odredi jednadžbu familije krivulja kojima je koeficijent smjera tangente u bilo kojoj tački dvaput manji od koeficijenta smjera radijvektora dirališta. Napiši također jednadžbu one krivulje familije koja prolazi tačkom $T_1(4;3)$.

Prema slici 113:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha=\text{koeficijent smjera tangente } t.$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}=\text{koeficijent smjera radijvektora } r.$$

Prema uvjetu zadatka

$$2\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\Big|\cdot\frac{dx}{y}$$

$$2\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}.$$

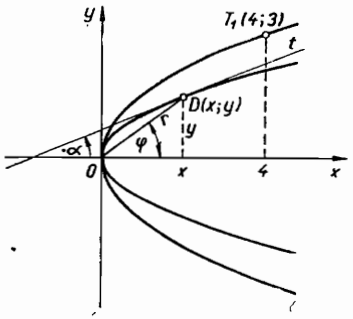
Odatle:

$$2\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}+\ln C$$

$$2\ln y=\ln x+\ln C$$

$$\ln y^2=\ln(xC)$$

$$y^2=Cx\ \text{— familija parabola}$$



Slika 113

kojima je os simetrije os X.

Uvrštenje koordinata tačke $T_1(4;3)$ daje integralnu krivulju, koja prolazi tom tačkom:

$$9=4C,\quad\text{pa je}\quad C=\frac{9}{4}\quad\text{i}$$

$$y^2=\frac{9}{4}x.$$

775. Krivulja prolazi tačkom $A(0;a)$, dok je MN neka ordinata te krivulje. Odredi familije krivulja uz uvjet da je površina $OAMN=S=as$, gdje je s duljina luka AM.

Prema slici 114: $dS=y\cdot dx$, a kako je prema zadatku $S=as$, imamo u drugu ruku $dS=a\,ds$, pa je

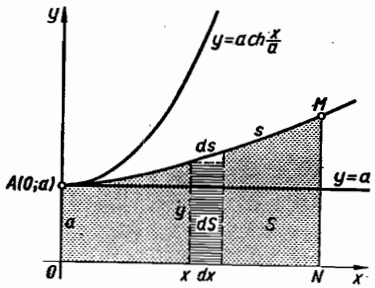
$$y\,dx=a\,ds\quad\text{ili}\quad y=a\frac{ds}{dx},$$

pa je prema (86): $y=a\sqrt{1+y'^2}$

ili $y^2=a^2(1+y'^2)$,

a odatle je $$y'=\pm\sqrt{\frac{y^2}{a^2}-1}.\qquad\text{(a)}$$

Stavimo li $y=a\operatorname{ch}u$, tada je $y'=a\operatorname{sh}u\cdot u'$, (b)



Slika 114

a uvrštenje u (a) daje: $y'=\pm\sqrt{\frac{a^2\,\mathrm{ch}^2 u}{a^2}-1}=\pm\sqrt{\mathrm{ch}^2 u-1}=\pm\,\mathrm{sh}\,u.$

Uvrštenje u (b) daje

$$a\,\mathrm{sh}\,u\cdot u'=\pm\,\mathrm{sh}\,u.$$

Odatle slijedi:

1) $\mathrm{sh}\,u=0$, tada je $\mathrm{ch}\,u=1$, $y=a\,\mathrm{ch}\,u=a\cdot 1=a$

$$\underline{y=a} \text{ — pravac.}$$

2) $\mathrm{sh}\,u\neq 0$, tada je $au'=\pm 1$, tj. $a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\pm 1$ i $a\,\mathrm{d}u=+\mathrm{d}x$.

Integriranje daje $au=\pm(x+C)$, pa je $u=\pm\frac{x+C}{a}$,

a kako je $y=a\,\mathrm{ch}\,u$, dobivamo

$$y=a\,\mathrm{ch}\frac{x+C}{a}$$

za $x=0$ i $y=a$

$$a=a\,\mathrm{ch}\frac{C}{a} \quad \text{ili} \quad \mathrm{ch}\frac{C}{a}=1, \text{ pa je } C=0.$$

Slijedi

$$\underline{y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}} \text{ — lančanica.}$$

Zadana površina $OAMN$ omeđena je odozgo ili pravcem $y=a$ ili lančanicom $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$.

776. Odredi krivulju koja prolazi tačkom $T_1(a;a)$, a kojoj je subnormala u svakoj tačk jednaka dvostrukoj apscisi dirališta.

Diferencijalna jednadžba tražene familije krivulja glasi prema zadatku

$$yy'=2x,$$

jer je subnormala $S_N=yy'$. Vidi formulu (134a) u I dijelu Repetitorija.

Odatle

$$y\,\mathrm{d}y=2x\,\mathrm{d}x,$$

pa je

$$y^2=2x^2+2C \qquad \text{(a)}$$

ili

$$\underline{\frac{y^2}{2C}-\frac{x^2}{C}=1,} \qquad \text{(b)}$$

a to je familija hiperbola kojima se osi podudaraju s koordinatnim osima.

Uvrštenje koordinata tačke $T_1(a;a)$ u (a) daje traženi partikularni integral:

$$a^2=2a^2+2C,$$

pa je

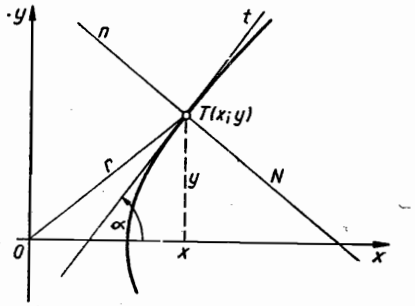
$$C=-\frac{a^2}{2}$$

i prema (b)

$$\underline{\frac{x^2}{\frac{a^2}{2}}-\frac{y^2}{a^2}=1.}$$

To je hiperbola s poluosima $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ i a.

777. Odredi familiju krivulja, ako je u bilo kojoj tački tih krivulja radijvektor r jednak odresku normale između dotične krivulje i osi X.



Slika 115.

Na slici 115 se vidi da je prema zadatku u nekoj tački $T(x,y)$ krivulje

$$r=OT=\sqrt{x^2+y^2},$$

dok je dužina normale $N=y\sqrt{1+y'^2}$.
Kako je prema zadatku $r=N$, imamo

$$\sqrt{x^2+y^2}=y\sqrt{1+y'^2}.$$

Nakon kvadriranja i uređivanja dobivamo:

$$y'=\pm\frac{x}{y}$$

1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{y}$

$x\,\mathrm{d}x=y\,\mathrm{d}y$

$\frac{x^2}{2}=\frac{y^2}{2}+C'/\cdot 2$

$\underline{x^2-y^2=C.}$

Familija istostranih hiperbola.

2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}$

$y\,\mathrm{d}y=-x\,\mathrm{d}x$

$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+C'$

$\underline{x^2+y^2=C^2.}$

Familija kružnica sa središtem u $O(0,0)$.

778. Tijelo se giblje pravocrtno s ubrzanjem koje je razmjerno s umnožkom brzine v gibanja i vremena t. Odredi zavisnost između brzine i vremena, ako je u moment $t=0$ $v=v_0$.

$$\left[v=v_0\cdot e^{\frac{kt^2}{2}}\right].$$

779. Brzina razmnožavanja nekih bakterija razmjerna je s količinom bakterija u momentu promatranja t. Količina bakterija utrostručila se u toku od 5 sati. Odredi zavisnost količine x bakterija od vremena t.

$$[x(t)=x_0 e^{0{,}2\, t \ln 3} \doteq x_0 e^{0{,}22\, t}].$$

780. Odredi uz grafički prikaz familiju krivulja, kojima je koeficijent smjera tangente u bilo kojoj tački dvaput veći od koeficijenta smjera radijvektora dirališta, napose jednadžbu one krivulje familije koja prolazi tačkom $T_1(2;4)$.

$$[y=Cx^2;\quad y=x^2].$$

781. Odredi i konstruiraj krivulju koja prolazi tačkom $A(-1;\ +1)$, ako je koeficijent smjera tangente u bilo kojoj tački krivulje jednak kvadratu ordinate dirališta.

$$\left[y=-\frac{1}{x}\right].$$

782. Odredi i konstruiraj krivulju koja prolazi tačkom $A(-1;\ -1)$ i za koju je odrezak OT, što ga odsjeca na osi x tangenta povučena u bilo kojoj tački T, jednak kvadratu apscise dirališta.

$$\left[y=\frac{2x}{1-x}\right].$$

783. Krivulja prolazi tačkom $A(0;\ a)$, a MN je po volji uzeta ordinata te krivulje. Odredi i konstruiraj krivulju uz uvjet da je površina $S=OAMN=a(MN-a)$.

$$\left[y=a\,e^{\frac{x}{a}}\right].$$

TIP II

Homogene diferencijalne jednadžbe

Upute

Diferencijalna jednadžba $y'=f(x,y)$ zove se homogena, ako $f(x,y)$ možemo prikazati kao funkciju omjera promjenljivih x i y, tj. kao $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, pa jednadžba prima oblik

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Iz toga slijedi da zbroj eksponenata od x i y u svakom članu homogene diferencijalne jednadžbe oblika $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ mora biti isti.

Rješavajući homogenu diferencijalnu jednadžbu svodimo je na tip I i to pomoću supstitucije

$$\frac{y}{x}=z,\ \text{a odatle je}\ y=xz\quad\text{i}\quad y'=xz'+z.$$

Zadaci

U zadacima **784** do **800** uklj. riješi zadane homogene diferencijalne jednadžbe.

784. $$y-xy'=y\ln\frac{x}{y}.$$

Da se uvjerimo da je zadana jednadžba homogena, riješimo je po y'

$$y'=\frac{y}{x}\left(1-\ln\frac{x}{y}\right),$$

ili

$$y'=\frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad \text{(a)}$$

Stavimo

$$\frac{y}{x}=z,\ \text{pa je}\ y'=xz'+z.$$

Uvrštenje u (a) daje

$$xz'+z=z\,(1+\ln z).$$

Separiramo promjenljive x i z:

$$x\frac{dz}{dx}=z\cdot\ln z$$

i

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z\ln z}.$$

Integriramo:

$$\int\frac{dz}{z\ln z}=\int\frac{dx}{x}+\ln C.$$

Uz supstituciju $\ln z=t$ je $\frac{dz}{z}=dt$, pa dobivamo

$$\ln|\ln z|=\ln|x|+\ln C$$

$$\ln|\ln z|=\ln|Cx|$$

$$\ln z=Cx$$

$$z=\frac{y}{x}=e^{Cx},$$

pa je $\underline{y=x\,e^{Cx}}$ traženo opće rješenje.

Odredimo još partikularno rješenje uz početni uvjet $y(1)=e^{-\frac{1}{2}}$. Uvrštenje u opće rješenje daje

$$e^{-\frac{1}{2}}=1\cdot e^{C},\ \text{pa je}\ C=-\frac{1}{2}$$

$$y=x\,e^{-\frac{x}{2}}\ \text{– traženi partikularni integral.}$$

785. $2x^2\,dy=(x^2+y^2)\,dx.$

Jednadžba je homogena, jer su eksponenti od x i y jednaki 2.
Dijeljenje s $2x^2\cdot dx$ daje:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Uz $\frac{y}{x}=z$ i $y'=xz'+z$ dobivamo

$$xz'+z=\frac{1}{2}(1+z^2).$$

Separiramo x i z i integriramo

$$2\frac{dz}{(z-1)^2}=\frac{dx}{x}$$

$$-\frac{2}{z-1}+\ln C=\ln x$$

ili

$$\ln\frac{x}{C}=-\frac{2}{\frac{y}{x}-1},$$

pa je

$$\underline{x=Ce^{-\frac{2x}{y-x}}}$$

Separirajući x i z podijelili smo jednadžbu s $x\cdot(z-1)^2$, a to je moguće, ako je $x\neq 0$ i $z=\frac{y}{x}\neq 1$, tj. $y\neq x$. Međutim i $x=0$ i $y=x$ su rješenja diferencijalne jednadžbe, jer je zadovoljavaju. To su singularna rješenja, jer ih ne možemo dobiti iz općeg rješenja.

786. $(x^2+y^2)\,dx-2xy\,dy=0.$

Jednadžba je homogena, jer je zbroj eksponenata, odnosno eksponenti od x i y jednaki 2. Podijelivši jednadžbu s dx dobivamo nakon uređenja

$$y'=\frac{x^2+y^2}{2xy},$$

odnosno

$$y'=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Uz $\frac{y}{x}=z$ i $y'=xz'+z$ imamo

$$xz'+z=\frac{1+z^2}{2z}$$

ili

$$\frac{x}{dx}=\frac{1-z^2}{2z\,dz},\ \text{a reciprocno}\ \frac{dx}{x}=\frac{2z\,dz}{1-z^2}.$$

Integriramo: $\ln|x|+\ln C=-\ln|1-z^2|$

ili

$$\ln|x(1-z^2)|=\ln\frac{1}{C}.\ \text{pa je uz}\ z=\frac{y}{x}$$

$$x\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)=\frac{1}{C}\ \text{ili uz}\ \frac{1}{C}=C_1$$

$$\underline{y^2=x^2-C_1x.}$$

787. $xy'\cos\frac{y}{x}=y\cos\frac{y}{x}-x.$

Dijelenje s x daje: $y'\cos\frac{y}{x}=\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}-1$

a uz $\frac{y}{x}=z$ i $y'=xz'+z$ dobivamo

$$\left(x\frac{dz}{dx}+z\right)\cos z=z\cos z-1$$

ili

$$\frac{x\,dz}{dx}=-\frac{1}{\cos z}\Big|:dz\ \text{i uzimamo recipročno:}$$

$$\frac{dx}{x}=-\cos z\,dz$$

$$\ln|x|=-\sin\frac{y}{x}+C$$

ili

$$\underline{\ln|x|+\sin\frac{y}{x}=C.}$$

788. $y-xy'=x+yy'.$

Homogena!

$$y'=\frac{y-x}{y+x}\Big|\begin{matrix}:x\\:x\end{matrix}$$

$$y'=\frac{z-1}{z+1}$$

$$xz'+z=\frac{z-1}{z+1},\ \text{a odatle dobivamo}$$

$$\frac{dx}{x}=-\frac{(z+1)\,dz}{z^2+1}.$$

Integriranje daje

$$\ln|x|+\ln C=-\frac{1}{2}\ln|1+z^2|-\operatorname{arc\,tg} z$$

ili konačno

$$\underline{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+\ln\left(C\sqrt{x^2+y^2}\right)=0.}$$

789. $yy'=2y-x.$ $\left[y-x=Ce^{\frac{x}{y-x}}\right]$

790. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}.$ $\left[\ln(Cx)=e^{-\frac{y}{x}}\right].$

791. $y'\cos x-y\sin x=\sin 2x.$ $\left[y=\frac{C-\cos 2x}{2\cos x}\right].$

792. $y' - \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x} = 0$ $\qquad [y = xe^{C_1 x + 1}]$.

793. $x\,dy - y\,dx = y\,dy$ i partikularni integral za početni uvjet $y=1$ za $x=-1$.

$[x = y(C - \ln|y|);\quad x = -y(1+\ln|y|)]$.

794. $y^2 + x^2 y' = xyy'$ i partikularni integral za početni uvjet $y=4$ za $x=3$.

$\left[y = 4e^{\frac{3y-4x}{3x}}\right]$.

795. Zadana je diferencijalna jednadžba familije krivulja

$$(xy' - y)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = x.$$

Odredi onu krivulju familije, koja prolazi tačkom $T_1(1;\,0)$.

Dijeljenje s x daje:

$$\left(\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = 1.$$

Stavimo $\quad \frac{y}{x} = z \quad$ i $\quad \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$:

$$\left(z + x\frac{dz}{dx} - z\right)\operatorname{arc\,tg} z = 1$$

ili

$$\frac{dx}{x} = \operatorname{arc\,tg} z\,dz.$$

Integriranje daje: $\ln|x| = z\operatorname{arc\,tg} z - \ln\sqrt{1+z^2} + C$ (vidi zadatak 208)

ili

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{x}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + C.$$

Uvrstimo sad početni uvjet, tj. $y=0$ i $x=1$. Dobivamo

$$\sqrt{x^2+y^2} = e^{\frac{y}{x}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}.$$

796. Zrcalo reflektira sve zrake, koje izlaze iz jedne tačke O (izvora svijetla) paralelno sa zadanim smjerom ON. Odredi oblik tog zrcala.

Promatramo ravni presjek zrcala prikazan u slici 116. Neka je M jedna tačka tog zrcala. Ishodište koordinatnog sustava XY smjestimo u zadanoj tački O, a os Y uzmimo u smjeru ON. Tada je OM upadna, a MS, koja je paralelna s ON, reflektirana zraka. MN je normala, a PM je tangenta na presjek zrcala.

Kako je kut upadne zrake jednak kutu reflektirane

$$\measuredangle\, OMN = \measuredangle\, NMS, \text{ pa je } OM = ON, \qquad \text{(a)}$$

dok je $OM = \sqrt{x^2+y^2}$, a $ON = OK + KN$.

Prema slici: $OK = y$, a $KN = x\operatorname{tg}\beta = x\operatorname{tg}(90-\alpha) = x\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{x}{y'}$ pa je $ON = y + \frac{x}{y'}$, a iz (a) slijedi

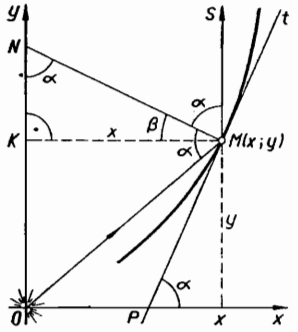
$$\sqrt{x^2+y^2} = y + \frac{x}{y'},$$

dok je odatle

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - y}{x}$$

ili

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} - 1}{\frac{x}{y}}$$



Slika 116

Za $\frac{x}{y} = z \quad \frac{dx}{dy} = y\frac{dz}{dy} + z$, pa je odatle

$$\frac{z\,dz}{\sqrt{1+z^2} - (1+z^2)} = \frac{dy}{y}.$$

Uz supstituciju $1 + z^2 = t^2$ i $z\,dz = t\,dt$ dobivamo $\frac{dt}{1-t} = \frac{dy}{y}$ i nakon integriranje i uređenja

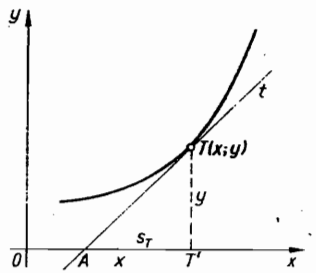
$$\sqrt{x^2+y^2} = C|y|^2$$

$$y = \frac{x^2 - C^2}{2c}.$$

Opće rješenje predočuje familiju parabola, kojima je os Y os simetrije, a tačka O zajednički fokus. Zrcalo mora imati oblik rotacionog paraboloida. Parabolična zrcala pretvaraju snop zraka u paralelne zrake, a upotrebljavaju se za reflektore.

797. Odredi familiju krivulja kojima je suptangenta u bilo kojoj tački jednaka aritmetičkoj sredini iz koordinata dirališta, a napose onu krivulju familije, koja prolazi tačkom $M(4;\,3)$.

Prema slici 117 i formuli (134a) (vidi dio I Repetitorija)



Slika 117

Suptangenta

$$S_T = T'A = \frac{y}{y'},$$

a prema zadatku

$$\frac{y}{y'} = \frac{x+y}{2}.$$

To je diferencijalna jednadžba familije traženih krivulja.
Prikazavši tu jednadžbu u obliku

$$\frac{dx}{x}=\frac{1+z}{z-z^2}\,dz, \text{ gdje je } z=\frac{y}{x}, \text{ integriramo:}$$

$$\ln x=\int\frac{1+z}{z-z^2}\,dz+\ln C.$$

Nakon rastavljanja integranda $\frac{1+z}{z-z^2}$ u parcijalne razlomke dobivamo:

$$\ln x=\ln z-2\ \ln\ |1-z|+\ln\ C,$$

pa je konačno $\underline{Cy=(x-y)^2.}$

Uvrštenje $x=4$ i $y=3$ daje partikularno rješenje određeno tačkom $M(4;\,3)$:

$$\underline{y=3\,(x-y)^2.}$$

798. Zadana je diferencijalna jednadžba familije krivulja

$$y'+\frac{x^2+y^2}{xy}=0.$$

Odredi krivulju familije koja prolazi tačkom $T_1\ (1;\ 0)$. $[x^2\,(x^2+2\,y^2)=1]$.

799. Iz familije integralnih krivulja diferencijalne jednadžbe

$$y-xy'=-\frac{x}{\cos\frac{y}{x}}$$

odredi krivulju koja prolazi tačkom $T_1\ (1;\pi)$. $\left[x=e^{\sin\frac{y}{x}}\right]$.

800. Odredi uz grafički prikaz krivulju, ako u bilo kojoj tački te krivulje os Y raspolavlja odrezak tangente omeđen diralištem i presjekom s osi X.

[Za diralište $D(x,y)\ t\equiv Y-y=y'(X-x)$, a za $Y=0$ $X_0=x-\frac{y}{y'}$ itd; $y^2=Cx$].

TIP III

Linearne diferencijalne jednadžbe

Upute i formule

Diferencijalna jednadžba oblika

$$y'+f(x)\,y=g(x)$$

zove se **linearna**, jer se tražena funkcija $y(x)$ i njena derivacija y' pojavljuju u prvom stupnju, dok su $f(x)$ i $g(x)$ zadane neprekinute funkcije od x.

Ako je $g(x)=0$ ta jednadžba glasi $y'+f(x)\,y=0$, a taj se prikraćeni oblik jednadžbe zove linearna homogena diferencijalna jednadžba prvog reda.

Prvi način rješavanja: pomoću supstitucije $y=u(x)\cdot v(x)$.
Uvrštenje $y=uv$ i $y'=uv'+vu'$ u $y'+f(x)\,y=g(x)$ daje

$$uv'+v[u'+f(x)\cdot u]=g(x). \qquad \text{(a)}$$

Kako je $y=u\cdot v$, jednu od tih funkcija možemo uzeti po volji dok je druga određena jednadžbom (a).

Funkciju $u(x)$ odabrat ćemo tako da bi izraz u uglatim zagradama jednadžbe (a) postao nula, tj. stavimo

$$u'+f(x)\,u=0. \qquad \text{(b)}$$

Ostaje u (a) $\qquad uv'=g(x). \qquad$ (c)

U tom slučaju dovoljno je da za $u(x)$ dobijemo bilo koji partikularni integral (uzet ćemo $C=0$).

Riješimo jednadžbu (b):

$$\frac{du}{dx}=-f(x)\,u\ \Big|\cdot\frac{dx}{u}$$

$$\frac{du}{u}=-f(x)\,dx.$$

Integriramo: $\qquad \ln u=-\int f(x)\,dx,$

pa je $\qquad u=e^{-\int f(x)\,dx}. \qquad$ (d)

Uvrštenje u (c) daje: $e^{-\int f(x)\,dx}\cdot\frac{dv}{dx}=g(x).$

Slijedi $\quad v=\int e^{\int f(x)\,dx}\cdot g(x)\,dx+C, \qquad$ (e)

a kako je $y=u\cdot v$ imamo prema (d) i (e):

$$\underline{y=e^{-\int f(x)\,dx}\left[\int e^{\int f(x)\,dx}\cdot g(x)+C\right].} \qquad (106)$$

To je opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe.

Primijetimo da linearna diferencijalna jednadžba može imati i drugi oblik

$$\frac{dx}{dy}+f(y)\,x=g(y).$$

Način integriranja je isti, razlika je samo u tome što je sad y nezavisna promjenljiva, a $x(y)$ tražena funkcija, pa prema (106) imamo

$$x=e^{-\int f(y)\,dy}\left[\int e^{\int f(y)\,dy}\cdot g(y)+C\right]. \qquad (106a)$$

Zadaci

U zadacima **801** do **815** uklj. riješi zadane linearne diferencijalne jednadžbe.

801. $y'+2xy=2x^3\,e^{-x^2}$.

To je linearna diferencijalna jednadžba, jer su y' i y u prvom stupnju, dok je $f(x)=2x$, a $g(x)=2x^3\,e^{-x^2}$.

Stavimo $\qquad y=u\cdot v,$

pa je $\qquad y'=uv'+vu'$

i $\qquad v\,(u'+2xu)+u\,v'=2x^3\,e^{-x^2}.$

$uv'+vu'+2xuv$

Stavimo $$u' + 2xu = 0 \qquad \text{(a)}$$

preostaje $$u\,v' = 2x^2 e^{-x^2}. \qquad \text{(b)}$$

Riješimo (a): $$\frac{du}{dx} = -2xu$$

$$\ln u = -x^2 \quad \text{i} \quad u = e^{-x^2}.$$

Uvrštenje u (b) daje

$$e^{-x^2}\frac{dv}{dx} = 2x^2 e^{-x^2}$$

ili $$dv = 2x^2\,dx \quad \text{i} \quad v = \frac{2}{3}x^3 + C.$$

$$y = u\cdot v, \quad \text{pa je}$$

$$\underline{y = e^{-x^2}\left(\frac{2}{3}x^3 + C\right).}$$

802. $y\,dx - (3x + 1 + \ln y)\,dy = 0$

i partikularni integral uz početni uvjet $y = 1$ za $x = -\frac{1}{3}$.

Zadana diferencijalna jednadžba nije linearna, jer funkcija $y(x)$ ulazi kao argument logaritamske funkcije ($\ln y$). Kušajmo izraziti x kao funkciju od y.
Podijelimo li jednadžbu s $y\,dy$, dobivamo

$$\frac{dx}{dy} - \frac{3x}{y} = \frac{1 + \ln y}{y}, \qquad \text{(a)}$$

a to je linearna diferencijalna jednadžba s obzirom na $x(y)$ i $x'(y)$.

Stavimo $$x = u(y)\cdot v(y),$$

pa je $$\frac{dx}{dy} = u\frac{dv}{dy} + v\frac{du}{dy}.$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$u\left(\frac{dv}{dy} - \frac{3v}{y}\right) + v\frac{du}{dy} = \frac{1 + \ln y}{y}.$$

Odatle slijede dvije jednadžbe: za odredivanje u i v:

$$\frac{dv}{dy} - \frac{3v}{y} = 0 \quad \text{i} \quad v\frac{du}{dy} = \frac{1 + \ln y}{y}.$$

Iz prve jednadžbe dobivamo v:

$$\frac{dv}{v} = 3\frac{dy}{y}, \quad \text{pa je} \quad \ln v = 3\ln y \quad \text{i} \quad v = y^3. \qquad \text{(b)}$$

Iz druge jednadžbe slijedi:

$$y^3\frac{du}{dy} = \frac{1 + \ln y}{y} \quad \text{ili} \quad du = \frac{1 + \ln y}{y^4}\,dy$$

$$u = \int y^{-4}dy + \int y^{-4}\ln y\,dy + C = -\frac{1}{3y^3} + I + C.$$

Uzevši $u_1 = \ln y$ i $dv_1 = y^{-4}dy$ i parcijalno integrirajući dobivamo $I = -\frac{\ln y}{3y^3} - \frac{1}{9y^3}$,

pa je $$u = -\frac{1}{3y^3} - \frac{\ln y}{3y^3} - \frac{1}{9y^3} + C, \qquad \text{(c)}$$

a kako je $x = u\cdot v$ dobivamo prema (b) i (c):

$$\underline{x = Cy^3 - \frac{4}{9} - \frac{1}{3}\ln y.}$$

Uvrštenje početnog uvjeta $x = -\frac{1}{3}$ i $y = 1$ daje $C = \frac{1}{9}$, pa je

$\underline{x = \frac{y^3 - 4}{9} - \frac{1}{3}\ln y}$ traženi partikularni integral.

803. $$dy = (x^2 + 2x - 2y)\,dx.$$

Odatle $$y' + 2y = x^2 + 2x.$$

Riješimo tu linearnu diferencijalnu jednadžbu neposredno po formuli (106):

$$y = e^{-\int f(x)\,dx}\left[\int e^{\int f(x)\,dx}\cdot g(x)\,dx + C\right]$$

koja daje opće rješenje jednadžbe $y' + f(x)y = g(x)$,
kako je za naš slučaj $f(x) = 2$, a $g(x) = x^2 + 2x$ to je $\int f(x)\,dx = \int 2\,dx = 2x$,

pa je $$y = e^{-2x}\left[\int e^{2x}(x^2 + 2x)\,dx + C\right]. \qquad \text{(a)}$$

Računamo:

$\int e^{2x}(x^2 + 2x)\,dx = \int x^2 e^{2x}dx + 2\int xe^{2x}dx =$ nakon parcijalnog integriranja $=$

$= e^{2x}\cdot\frac{1}{4}(2x^2 + 2x - 1).$

Uvrštenje u (a) daje

$$\underline{y = Ce^{-2x} + \frac{1}{4}(2x^2 + 2x - 1).}$$

Iz našeg primjera i (106) vidimo, da se linearna diferencijalna jednadžba najjednostavnije rješava tako, da se izračuna $\int f(x)\,dx$, a zatim integral u uglatim zagradama, koji se pomnoži s $e^{-\int f(x)dx}$.

804. $$e^{x^2}\frac{dy}{dx} + 2xye^{x^2} = x\sin x.$$

Dijeljenje s e^{x^2} daje

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{x\sin x}{e^{x^2}},$$

pa je prema (106): $f(x) = 2x$, a $g(x) = \frac{x\sin x}{e^{x^2}}$.

Računamo: $\int f(x)\,dx = 2\int x\,dx = x^2$

$$\int e^{x^2}\cdot\frac{x\sin x}{e^{x^2}}\,dx=\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

Uvrštenje u (106) daje

$$y=e^{-x^2}(-x\cos x+\sin x+C)=\underline{Ce^{-x^2}+(\sin x-x\cos x)e^{-x^2}}.$$

805. $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\cos y+a\sin 2y}.$$

Jednadžba nije linearna s obzirom na y, jer y ulazi kao argument za funkcije sinus i kosinus. Svedimo zadanu jednadžbu na linearnu s obzirom na x i x'. U tu svhru izjednačimo recipročne vrijednosti obiju strana zadane jednadžbe. Dobivamo:

$$\frac{dx}{dy}=x\cos y+a\sin 2y$$

ili

$$\frac{dx}{dy}-x\cos y=a\sin 2y.$$

Računamo prema (106a):

$$f(y)=-\cos y;\ g(y)=a\sin 2y$$

$$\int f(y)\,dy=-\sin y\ ;\ e^{\int f(y)\,dy}=e^{-\sin y}$$

$\int e^{f(y)dy}g(y)\,dy=a\int e^{-\sin y}\cdot\sin 2y\,dy=2a\int e^{-\sin y}\sin y\cos y\,dy=$ (nakon parcijalnog integriranja) $=-2ae^{-\sin y}(1+\sin y)$.

Prema (106a):

$$x(y)=e^{\sin y}[-2ae^{-\sin y}(1+\sin y)+C]$$

ili

$$\underline{x(y)=-2a(1+\sin y)+Ce^{\sin y}}.$$

806. $$y'+3x^2y=1.$$

Kako je $f(x)=3x^2$, a $g(x)=1$; prema (106) dobivamo

$$y=e^{-\int x^2dx}[\int e^{\int x^2dx}dx+C].$$

Uvrštenje

$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\ \text{daje}$$

$$y=e^{-x^3}[\int e^{x^3}dx+C]. \qquad \text{(a)}$$

$\int e^{x^3}dx$ ne možemo izraziti pomoću konačnog broja elementarnih funkcija, pa ćemo integrand e^{x^3} razviti u Mac Laurinov red potencija pa taj red integrirati član po član. Kako red potencija konvergira uniformno, dobiveni red integrala konvergirat će za sve x koji leže u nutrini intervala konvergencije reda potencija, pa ga smijemo integrirati član po član. (Vidi u dijelu I Repetitorija § 20; 7. 8. 9 i 11., a u dijelu II § 5,8. i zadatke 701 i sl. u zbirci I „Riješeni zadaci više matematike").

Za $f(x)=e^{x^3}$ dobivamo:

$$f(0)=1\ ;\ f'(x)=e^{x^3}\cdot 3x^2,\ f'(0)=0,$$

$$f''(x)=3e^{x^3}(2x+3x^4),\ f''(0)=0,$$

$$f'''(x)=3e^{x^3}(2+18x^3+9x^6),\ f'''(0)=6\ \text{itd.}$$

$$e^{x^3}=1+x^3+\frac{x^6}{2!}+\frac{x^9}{3!}+\dots,$$

pa prema (a) imamo:

$$y=e^{-x^3}\left[\int\left(1+x^3+\frac{x^6}{2!}+\frac{x^9}{3!}+\dots\right)dx+C\right]=$$

$$\underline{=e^{-x^3}\left(C+x+\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7\cdot 2!}+\frac{x^{10}}{10\cdot 3!}+\dots\right)}.$$

807. Jakost struje i u vodu s otporom R, samoindukcijom L i elektromotornom silom E zadovoljava jednadžbu

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E.$$

Odredi zavisnost jakosti struje i od vremena t smatrajući, da su R i L stalni, da elektromotorna sila E raste razmjerno s vremenom t i da je jakost struje u početni moment $t=0$ jednaka nuli.

Zadana diferencijalna jednadžba uz $E=kt$, tj.

$$L\frac{di}{dt}+Ri=kt$$

linearna je, a $i(t)$ je tražena funkcija.

Uvrštenje $\quad i=u\cdot v\ \ \text{i}\ \ i'=uv'+vu'$ daje

$$Lu'v+u(Lv'+Rv)=kt.$$

Stavimo $\quad Lv'+Rv=0. \qquad$ (a)

Ostaje $\quad Lu'v-kt=0. \qquad$ (b)

Iz (a) slijedi: $\quad \dfrac{dv}{v}=-\dfrac{R}{L}dt$, pa je $v=e^{-\frac{R}{L}t}$,

dok iz (b) imamo: $\quad L\dfrac{du}{dt}e^{-\frac{R}{L}t}=kt,$

pa je $\quad u=\dfrac{k}{L}\displaystyle\int te^{\frac{R}{L}t}dt.$

Nakon parcijalnog integriranja dobivamo:

$$u=\left(\frac{k}{L}t-\frac{kL}{R^2}\right)e^{\frac{R}{L}t}+C.$$

Uvrštenje u $i=u\cdot v$ daje opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$i=\frac{k}{R}t-\frac{kL}{R^2}+Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Uvrštenje početnog uvjeta i to $i=0$ za $t=0$ daje $C=-\frac{kL}{R^2}$, pa tražena zavisnost između jakosti struje i i vremena t glasi:

$$i=\frac{k}{R}t+\frac{kL}{R^2}\left(e^{-\frac{R}{L}t}-1\right).$$

808. $y'+\frac{y}{x}=x^2$. $\left[\frac{1}{4}x^3+\frac{C}{x}\right]$.

809. $y'-y \operatorname{ctg} x=\sin x$. $[(x+C)\sin x]$.

810. $y'+\frac{1}{x+y^2}=0$. $[x=2y-y^2-2+Ce^{-y}]$.

811. $(1-x)(y'+y)=e^{-x}$ i partikularno rješenje uz početni uvjet: za $x=2$ $y=0$.

$[y=-e^{-x}\ln|1-x|]$.

812. $\cos y\,dx=(x+2\cos y)\sin y\,dy$. $[2x\cos y=C-\cos 2y]$.

813. $y'=\frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}$ i partikularni integral uz $y(1)=-1$. $[y=-x]$.

814. $y\,dy+(x-2y)\,dx=0$. $[x=(y-x)\ln C(y-x)]$.

815. $y=xy'+y'\cdot\ln y$. $[x=Cy-1-\ln y]$.

Drugi način rješavanja: pomoću metode varijacije konstanata.

Upute

Lagrangeov način varijacije konstanata sastoji se u tome, da se riješi prikraćena ili homogena linearna diferencijalna jednadžba, koja se dobije iz zadane potpune tako, da se stavi $g(x)=0$, pa ima oblik

$$y'+f(x)y=0.$$

Da rješenje te prikraćene jednadžbe bude i opće rješenje zadane potpune linearne diferencijalne jednadžbe, uzima se da konstanta integracije C, koja ulazi u opće rješenje prikraćene jednadžbe, nije konstanta već funkcija od x, tj. $C(x)$. Zadatak se prema tome svodi na određivanje te funkcije $C(x)$. Primijetimo da je taj drugi način rješavanja linearnih diferencijalnih jednadžbi u bitnosti isti kao i prvi način.

Zadaci

U zadacima 816 do 818 uklj. riješi zadane linearne diferencijalne jednadžbe načinom varijacije konstante C.

816. $y'-y=e^x$. (a)

Rješavamo pripadnu prikraćenu jednadžbu, tj.

$$y'-y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=y';\quad \frac{dy}{y}=dx,\ \text{pa je}\ \ln\frac{y}{C}=x\ \text{ili}$$

$$y=Ce^x. \qquad \text{(b)}$$

To je opće rješenje prikraćene diferencijalne jednadžbe.
Neka je $y=C(x)\cdot e^x$ — opće rješenje potpune, tj. zadane jednadžbe, pa ono mora zadovoljavati tu jednadžbu.

Stoga računamo: $y'=C(x)\cdot e^x+e^x\cdot C'(x)$. (c)

Uvrštenje (b) i (c) i (a) daje:

$$Ce^x+e^xC'-Ce^x=e^x$$

ili

$$C'=\frac{dC}{dx}=1,\ \text{pa je}\ C(x)=x+A.$$

Uvrštenje u (b) daje

$$y=(x+A)e^x.$$

A je konstanta po volji!

817. $(x^2+1)y'+4xy=3$.

Odatle

$$y'+\frac{4x}{x^2+1}y=\frac{3}{x^2+1}.$$

Pripadna prikraćena diferencijalna jednadžba:

$$y'+\frac{4x}{x^2+1}y=0.$$

Riješimo je:

$$\frac{dy}{y}=-\frac{4x\,dx}{x^2+1}$$

$$\ln y=-2\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}+\ln C$$

$$\ln\frac{y}{C}=-2\ln(x^2+1)$$

$$y=\frac{C}{(x^2+1)^2}\ \text{— opći integral prikraćene jednadžbe.}$$

$$y=\frac{C(x)}{(x^2+1)^2}\ \text{— opći integral zadane jednadžbe.}$$

Računamo: $$y'=\frac{(x^2+1)C'-4xC}{(x^2+1)^3}.$$

Uvrštenje vrijednosti dobivenih za y' i y u zadanu jednadžbu daje nakon uređenja:

$$\frac{C'}{x^2+1}=3 \text{ ili } dC=3(x^2+1)\,dx,$$

pa je $$C(x)=x^3+3x+A.$$

Uvrštenje u $y=\frac{C(x)}{(x^2+1)^2}$ daje opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe:

$$\underline{y=\frac{x^3+3x+A}{(x^2+1)^2}}.$$

818. Riješi načinom varijacije konstante zadatke

803, 807, 808 i 809.

TIP IV

Bernoullijeva diferencijalna jednadžba

Opći oblik:

$$y'+f(x)y=g(x)y^n,$$

gdje je n bilo koji realni broj osim $n=0$ i $n=1$.

Usporedimo li tu jednadžbu s linearnom diferencijalnom jednadžbom tipa III, opazit ćemo odmah da je funkcija $g(x)$ pomnožena s y^n, pa za $n=0$ Bernoullijeva jednadžba prelazi u linearnu, a za $n=1$ ta jednadžba prelazi u jednadžbu u kojoj se varijable dadu separirati.

Upute

Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu možemo riješiti na tri načina.

I način. Bernoullijevu jednadžbu svodimo na linearnu.

U tu svrhu

1) dijelimo jednadžbu s y^n:

$$\frac{y'}{y^n}+\frac{f(x)}{y^{n-1}}=g(x), \qquad \text{(a)}$$

2) uvodimo supstituciju

$$\frac{1}{y^{n-1}}=z \qquad \text{(b)}$$

3) z deriviramo po x pamteći da je y funkcija od x:

$$z'=(1-n)\frac{y'}{y^n},$$

pa je

$$\frac{y'}{y^n}=\frac{z'}{1-n}. \qquad \text{(c)}$$

4) uvrštavamo (b) i (c) u (a) pa dobivamo linearnu diferencijalnu jednadžbu u z i x, tj

$$\frac{z'}{1-n}+f(x)z=g(x)$$

koju rješavamo prema (106) uvrstivši na kraju u rezultat vrijednost z iz (b).

II način. Bernoullijevu jednadžbu rješavamo kao linearnu pomoću supstitucije $y=u\cdot v$.

III način. Pomoću metode varijacije konstante.

Zadaci

U zadacima **819** do **829** uklj. riješi zadane Bernoullijeve diferencijalne jednadžbe.

819. $$xy'-y(2y\ln x-1)=0.$$

Odatle $y'+y\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}y^2$, a to je Bernoullijeva diferencijalna jednadžba, u kojoj je $f(x)=\frac{1}{x}$ $g(x)=\frac{2\ln x}{x}$ i $y^n=y^2$.

Riješimo je na I način, tj. svedimo je na linearnu diferencijalnu jednadžbu. U tu svrhu podijelimo je s y^2.

$$\frac{y'}{y^2}+\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}. \qquad \text{(a)}$$

Supstitucija:

$$\frac{1}{y}=z \quad \text{daje} \quad -\frac{1}{y^2}\cdot y'=z', \quad \frac{y'}{y^2}=-z'.$$

Uvrštenje u (a) daje linearnu diferencijalnu jednadžbu u z i x:

$$z'-\frac{1}{x}z=-2\frac{\ln x}{x}.$$

Prema (106) uzevši u obzir da je u našem slučaju $f(x)=-\frac{1}{x}$, a $g(x)=-2\frac{\ln x}{x}$, pa je $-\int\frac{dx}{x}=-\ln x$, a $e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$ i $e^{\ln x}=x$, dobivamo da je $-2\int\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln x}{x}dx=$(nakon parcijalnog integriranja) $=2\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}+C$. Dakle

$$z=x\left(2\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}+C\right)=2\ln x+2+Cx$$

a kako je $z=\frac{1}{y}$:

$$\underline{y=\frac{1}{2(\ln x+1)+Cx}}.$$

820. $x^2y^2y'+xy^3=1.$

Dijeljenje s x^2y^2 daje

$$y'+\frac{y}{x}=\frac{1}{x^2}\cdot y^{-2}, \qquad \text{(a)}$$

a to je Bernoullijeva diferencijalna jednadžba, u kojoj je $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$, dok je $n=-2$.

Prelazimo na linearnu jednadžbu pomnoživši zadanu jednadžbu s y^2.

$$y'y^2+\frac{y^3}{x}=\frac{1}{x^2}.$$

Supstitucija $y^3=z$, pa je $3y^2\cdot y'=z'$, a odatle je $y'=\frac{z'}{3y^2}$.

Uvrštenje u (a) daje:

$$\frac{z'}{3y^2}+\frac{y}{x}=\frac{1}{x^2}\cdot y^{-2}\,|\cdot 3y^2$$

$$z'+\frac{3y^3}{x}=\frac{3}{x^2},$$

a uvrštenje $y^3=z$ daje linearnu diferencijalnu jednadžbu koju znamo riješiti. Dobivamo:

$$z=\frac{1}{x^3}\left(\frac{3x^2}{2}+C\right)$$

ili

$$z=\frac{3}{2x}+\frac{C}{x^3},$$ a kako je $y=\sqrt[3]{z}$, bit će

opće rješenje

$$\underline{y=\sqrt[3]{\frac{3}{2x}+\frac{C}{x^3}}}.$$

821. $$y'-\frac{2xy}{1+x^2}-4\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arc\,tg}x=0.$$

Riješimo tu Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu na II način, tj. pomoću supstitucije $y=u\cdot v$, odnosno $y'=uv'+vu'$.

Uvrštenje u zadanu jednadžbu daje

$$u'v+u\left(v'-\frac{2x}{1+x^2}v\right)=4\frac{\operatorname{arc\,tg}x}{\sqrt{1+x^2}}\sqrt{uv}.$$

Stavimo $$v'-\frac{2x}{1+x^2}v=0,$$ preostaje $$u'v=4\frac{\operatorname{arc\,tg}x}{\sqrt{1+x^2}}\sqrt{uv}.$$

Slijedi: $$\frac{dv}{v}=\frac{2x\,dx}{1+x^2},$$ pa je $v=1+x^2$, dok je

$$\frac{du}{dx}(1+x^2)=4\frac{\operatorname{arc\,tg}x}{\sqrt{1+x^2}}\sqrt{u(1+x^2)}.$$

Separirajući promjenljive u i x dobivamo nakon integriranja

$$u=(\operatorname{arc\,tg}^2x+C)^2.$$

pa uvrštenje u $y==u\cdot v$ daje traženo opće rješenje:

$$\underline{y=(1+x^2)(\operatorname{arc\,tg}^2x+C)^2,}$$

822. $y'+\frac{y}{x}=x^2y^4.$

Tu Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu riješimo na III način, tj. metodom varijacije konstante C.

Najprije riješimo pripadnu prikraćenu jednadžbu

$$y'+\frac{y}{x}=0.$$

Dobivamo

$$y=\frac{C}{x}.$$

Odredimo $C=C(x)$ tako da je

$$y=\frac{C(x)}{x} \qquad \text{(a)}$$

rješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

Računamo:

$$y'=\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}, \qquad \text{(b)}$$

pa (a) i (b) uvrštavamo u zadanu jednadžbu.

Dobivamo:

$$\frac{C'(x)}{x}=\frac{C^4(x)}{x^2}.$$

Integriranje

$$\frac{d\,C(x)}{C^4(x)}=\frac{dx}{x}$$ daje

$$C(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{3\ln\frac{A}{x}}},$$ gdje je A konstanta po volji pa je prema (a):

$$\underline{y=\frac{1}{x\sqrt[3]{3\ln\frac{A}{x}}}}.$$

823. $(x^2\ln y-x)y'=y;$ početni uvjet: $x=2$ za $y=1$.

Dijeljenje s $y'=\frac{dy}{dx}$ daje:

$$\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y}=\frac{\ln y}{y}x^2$$

a to je Bernoullijeva diferencijalna jednadžba u x, tj.

$$x'+f(y)\,x=g(y)\,x^n, \text{ pa je } f(y)=\frac{1}{y},\ g(y)=\frac{\ln y}{y} \text{ i } n=2.$$

Riješimo jednadžbu načinom varijacije konstante C. Integriranje prikraćene jednadžbe $\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y}=0$ daje

$$x=\frac{C(y)}{y},$$

pa je

$$x'=\frac{C'(y)}{y}-\frac{C(y)}{y^2}.$$

Uvrštenje vrijednosti za x i x' u diferencijalnu jednadžbu daje nakon uređenja

$$\frac{dC(y)}{C^2(y)}=\frac{\ln y}{y^2}dy,$$

a odatle parcijalno integrirajući dobivamo

$$C(y)=\frac{y}{\ln y+1-Ay}.$$

Uvrštenje u $x=\frac{C(y)}{y}$ daje opći integral

$$\underline{x=\frac{1}{\ln y+1-Ay}},$$

a uvrštenje $x=2$ i $y=1$ daje $A=\frac{1}{2}$, pa je

$$\underline{x=\frac{1}{\ln y+1-\frac{y}{2}}}$$

traženo partikularno rješenje.

824. $y'-y=xy^2$. $\left[\text{Svedi na linearnu jednadžbu; } y=\frac{1}{1-x+Ce^{-x}}\right]$.

825. $xy'-y^2\ln x+y=0$. $\left[\text{Isto; } y=\frac{1}{1+\ln x+Cx}\right]$.

826. $y'-xy=-y^3e^{-x^2}$. $\left[\text{Uzmi } y=u\cdot v;\ y^2=\frac{e^{x^2}}{2(x+C)}\right]$.

827. $y'-\frac{1}{x}y+y^2=0$. $\left[\text{Primijeni metodu varijacije konstante; } y=\frac{2x}{x^2+A}\right]$.

828. $yy'-4x-y^2\sqrt{x}=0$. $\left[x=\frac{y^4}{4}\ln^2(Cx)\right]$.

829. $y'+y=e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}$; početni uvjet $y(0)=\frac{9}{4}$. $\left[y=e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^x+1\right)^2\right]$.

TIP V

Clairautova diferencijalna jednadžba

Opći oblik

$$y=xy'+f(y').$$

Upute

Karakteristično je za Clairautovu jednadžbu da prvi član desne strane glasi xy', dok je drugi član zadana funkcija od y'.

Clairautova diferencijalna jednadžba rješava se deriviranjem!

$$y'=xy''+y'+f'(y')y'',$$

odatle je

$$y''[x+f'(y')]=0.$$

Slijedi:

$$y''=0 \qquad \text{(a)}$$

i

$$x+f'(y')=0. \qquad \text{(b)}$$

Iz (a) slijedi

$$y'=C,$$

a uvrštenje u Clairautovu jednadžbu daje opće rješenje te jednadžbe

$$y=Cx+f(C).$$

Clairautova diferencijalna jednadžba rješava se tako da se u jednadžbu uvrsti $y'=C$, gdje je C konstanta integracije.

Geometrijski predočuje opće rješenje familiju pravaca koeficijenta smjera C po volji, kojima su odsječci na osi Y određeni zadanom funkcijom f konstante C. Uklonimo li y' iz (b) iz Clairautove jednadžbe, dobit ćemo još jedno rješenje jednadžbe i to singularno rješenje, jer ga ne možemo dobiti iz općeg rješenja dajući konstanti C bilo koje vrijednosti. Geometrijski predočuje to singularno rješenje ovojnicu (anvelopu) familije pravaca određenih općim rješenjem.

Zadaci

U zadacima **830** do **838** uklj. odredi opća i singularna rješenja zadanih Clairautovih diferencijalnih jednadžbi i prikaži grafički integralne pravce i ovojnice.

830. $x=\frac{y}{y'}-\frac{1}{y'^2}$.

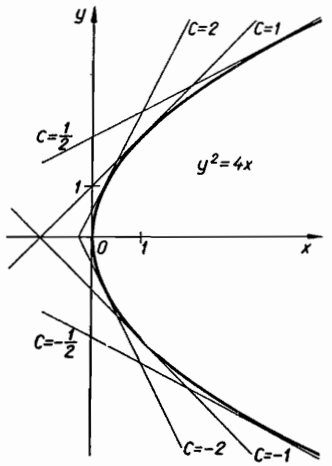
Riješimo li jednadžbu po y, dobit ćemo

$$y=xy'+\frac{1}{y'}, \qquad \text{(a)}$$

a to je Clairautova diferencijalna jednadžba.

Uvrštenje $y'=C$ daje opće rješenje

$$\underline{y=Cx+\frac{1}{C}}.$$



Slika 118

Da odredimo singularno rješenje, deriviramo (a) po x.

Dobivamo:

$$y'=y'+xy''-\frac{y''}{y'^2}$$

ili

$$y''\left(x-\frac{1}{y'^2}\right)=0.$$

Odatle slijedi:

$$y''=0, \text{ pa je } y'=C$$

a to smo već imali,

i $\quad x-\frac{1}{y'^2}=0 \quad$ ili $\quad y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Uvrštenje u (a) daje

$$y=\frac{x}{\sqrt{x}}+\sqrt{x} \quad \text{ili} \quad y=2\sqrt{x}$$

ili

$$\underline{y^2=4x.}$$

To je singularno rješenje, koje predočuje grafički ovojnicu familije integralnih pravaca. Vidi sl. 118.

831. $y=xy'+y'+y'^2$.

Uvrštenje $y'=C$ daje opće rješenje:

$$\underline{y=C(x+1)+C^2.}$$

Deriviranje po x daje:

$$y''(x+1+2y')=0.$$

Slijedi:

$$y''=0, \text{ pa je } y'=C$$

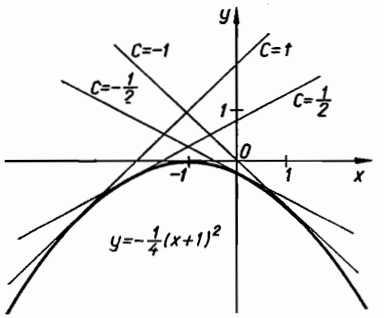
i

$$x+1+2y'=0, \text{ pa je } y'=-\frac{x+1}{2}.$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje nakon uređenja singularno rješenje

$$\underline{y=-\frac{1}{4}(x+1)^2.}$$

Vidi sl. 119.



Slika 119

832. $y=xy'+\sqrt{4+9y'^2}$.

Opće rješenje:

$$\underline{y=Cx+\sqrt{4+9C^2}.}$$

Odredimo singularno rješenje. Deriviranje daje

$$y''\left(x+\frac{9y'}{\sqrt{4+9y'^2}}\right)=0.$$

Odatle je

$$y''=0, \text{ pa je } y'=C$$

i

$$x+\frac{9y'}{\sqrt{4+9y'^2}}=0,$$

pa je

$$x=-\frac{9y'}{\sqrt{4+9y'^2}}. \qquad \text{(a)}$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje

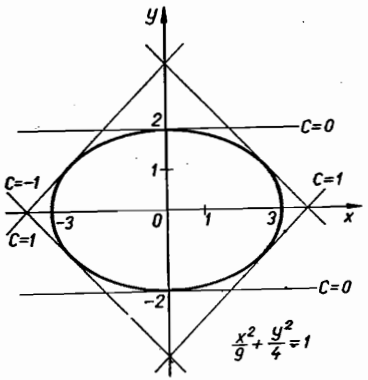
$$y=\frac{4}{\sqrt{4+9y'^2}}. \qquad \text{(b)}$$

Stavimo li $y'=p$ u (a) i (b), dobit ćemo singularno rješenje u parametarskom obliku

$$x=-\frac{9p}{\sqrt{4+9p^2}}, \qquad y=\frac{4}{\sqrt{4+9p^2}}$$

Uklonimo li p iz tih jednadžbi, dobit ćemo singulamo rješenje u obliku

$$\underline{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1}$$



Slika 120

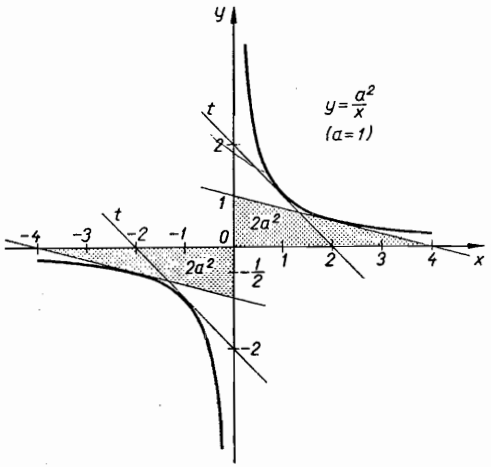
a to je elipsa s poluosima 3 i 2. Vidi sl. 120.

833. $y=xy'+y'-y'^2$. $\qquad \left[y=\frac{1}{4}(x+1)^2\right]$.

834. $y=xy'+\frac{1}{2}y'^2-3y'+2$. $\qquad \left[y=-\frac{x^2}{2}+3x-\frac{5}{2}\right]$.

835. $y=xy'-e^{y'}$. $\qquad [y=x(\ln x-1)]$.

836. Odredi krivulju kojoj tangente zatvaraju s koordinatnim osima trokute konstantne površine $2a^2$.



Slika 121

Zadatak se svodi na određivanje ovojnice familije pravaca koji zatvaraju s koordinatnim osima trokute površine $2a^2$.

Odredimo najprije diferencijalnu jednadžbu te familije pravaca.

Znamo da jednadžba tangente na krivulju $Y=f(X)$ u tački $T\ (x, y)$ krivulje glasi $Y-y=$ $=y'(X-x)$ ili u segmentnom obliku

$$\frac{X}{x-\frac{y}{y'}}+\frac{Y}{y-xy'}=1,$$

pa su odsječci tangente na osi X: $x-\frac{y}{y'}$, a na osi Y: $y-xy'$.

Prema zadatku za površinu trokuta dobivamo

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{y}{y'}\right)(y-xy')=2a^2,$$

a odatle nakon uređenja dobivamo

$$y=xy'\pm\sqrt{-4a^2y'}. \qquad \text{(a)}$$

To je Clairautova diferencijalna jednadžba, kojoj je opće rješenje

$$y=Cx\pm\sqrt{-4a^2C}$$

tražena jednadžba familije tangenata.

Odredimo singularno rješenje, koje će biti jednadžba tražene krivulje, tj. ovojnice familije tangenata.

Deriviranje (a) daje nakon uređenja:

$$y''\left(x\mp\frac{2a^2}{\sqrt{-4a^2y'}}\right)=0,$$

pa je $\qquad x^2=\frac{4a^2}{-4a^2y'}$, odnosno $y'=-\frac{a^2}{x^2}$

i

$$y=\frac{a^2}{x}.$$

Tražena ovojnica je ištostrana hiperbola. Vidi sliku 121.

837. Odredi krivulju kojoj tangente sijeku na koordinatnim osima odreske kojima je zbroj a.

[Parabola $(y-x-a)^2=4ax$].

838. $y=x\left(\frac{1}{x}+y'\right)+y'^2$. $\qquad \left[y=1-\frac{x^2}{4}\right]$.

TIP VI

Lagrangeova diferencijalna jednadžba

Opći oblik

$$y=x\varphi(y')+f(y').$$

Vidimo da je Lagrangeova jednadžba općenitiji slučaj Clairautove, jer za $\varphi(y')=y'$ dobivamo Clairautovu jednadžbu. Kao i Clairautova jednadžba tako i Lagrangeova su linearne jednadžbe s obzirom na x i y, pri čemu su koeficijenti funkcije od y'.

Upute

I Lagrangeova diferencijalna jednadžba rješava se deriviranjem.

Označivši u jednadžbi y' s p, tj. napisavši je u obliku

$$y=x\varphi(p)+f(p) \qquad \text{(a)}$$

deriviramo je po x i pišemo u obliku

$$p-\varphi(p)=x\varphi'(p)\cdot\frac{dp}{dx}+f'(p)\cdot\frac{dp}{dx}. \qquad \text{(b)}$$

Smatramo li da je x tražena funkcija od p, tada jednadžba (b) predočuje linearnu diferencijalnu jednadžbu u x i p pa je možemo riješiti po formuli (106).

Dobiveno rješenje $\qquad x=x(p, C)$

uvrstimo u (a) pa dobijemo

$$y=y\ (p, C).$$

Te dvije jednadžbe daju opće rješenje Lagrangeove jednadžbe u parametarskom obliku. Uspijemo li da iz tih jednadžbi uklonimo parametar p, dobit ćemo opće rješenje u obliku $y=y(x, C)$ ili $F(x, y, C)=0$.

Lagrangeova diferencijalna jednadžba može imati i singularno rješenje.

Pretpostavimo da je

$$p-\varphi(p)=0 \qquad \text{(c)}$$

za neku vrijednost $p=p_0$.

Jasno je da $p=p_0$ zadovoljava jednadžbu (b).

Uvrštenje $p=p_0$ u zadana diferencijalnu jednadžbu (a) daje linearnu funkciju u x i y.

$$y=\varphi(p_0)x+f(p_0) \qquad \text{(d)}$$

koja je singularno rješenje Lagrangeove jednadžbe. Geometrijski predočuje ta jednadžba familiju integralnih pravaca, koji tangiraju integralne krivulje određene općim integralom diferencijalne jednadžbe.

Zadaci

U zadacima **839** do **843** uklj. riješi zadane Lagrangeove diferencijalne jednadžbe i odredi singularna rješenja ukoliko postoje.

839. $y=2xy'+y'^2$.

Uvrstivši $y'=p$

$$y=2xp+p^2$$

deriviramo po x tu jednadžbu

$$p=2x\frac{dp}{dx}+2p+2p\frac{dp}{dx}$$

ili

$$\frac{dx}{dp}=-\frac{2(x+p)}{p}$$

ili

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2}{p}x=-2.$$

Integriranje te linearne diferencijalne jednadžbe u x i p daje prema (106) $x=\frac{C}{p^2}-\frac{2p}{3}$.

Uvrštenje te vrijednosti za x u $y=2xp+p^2$ daje

pa je

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{2C}{p}-\frac{p^2}{3}\\ x&=\frac{C}{p^2}-\frac{2p}{3}\end{aligned}\right| \quad \text{opće rješenje, } p=y' \text{ je parametar.}$$

Iz uspoređenja zadane jednadžbe s općim oblikom Lagrangeove jednadžbe vidimo da je

$$\varphi(y')=\varphi(p)=2y'=2p.$$

Uz pretpostavku da je $p-\varphi(p)=p-2p=0$ dobivamo $p=y'=0$, pa uvrštenje $p=0$ u zadanu jednadžbu $y=2xy'+y'^2$ daje singularno rješenje

$$\underline{y=0.}$$

840. $y=xy'^2+y'^2$.

Uvrštenje $y'=p$ daje $y=xp^2+p^2$.

Deriviranje po x daje nakon uređenja

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2}{p-1}x=-\frac{2}{p-1},$$

a to je linearna diferencijalna jednadžba u x i p.
Integrirajući je prema (106) dobivamo

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{C}{(p-1)^2}-1\\ y&=\frac{Cp^2}{(p-1)^2}.\end{aligned}\right| \quad \text{Traženi opći integral u parametarskom obliku.}$$

U našem slučaju možemo iz izraza za x i y ukloniti p pa tako dobiti integral u obliku $y=f(x, C)$. U tu svrhu uvrstimo C^2 mjesto C u izraz za x i izračunajmo C^2.

Dobivamo

$$C^2=(x+1)(p-1)^2,$$

a odatle je

$$p=\frac{C+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}.$$

Uvrštenje u izraz za y daje opće rješenje u eksplicitnom obliku

$$\underline{y=(C+\sqrt{x+1})^2.}$$

Usporedimo li zadanu diferencijalnu jednadžbu $y=xp^2+p^2$ s općim oblikom Lagrangeove jednadžbe opazit ćemo da je u našem slučaju

$$\varphi(p)=p^2$$

pa uz pretpostavku da je $p-\varphi(p)=0$ dobivamo $p-p^2=0$, odnosno $p(1-p)=0$.
Odatle slijedi:

1) $p=0$ pa je $\underline{y=0}$ singularno rješenje;

2) $p=1$ pa je $\underline{y=x+1}$. To nije singularno rješenje, jer ga dobivamo iz općeg rješenja uzevši $C=0$.

841. $y=2xy'+\frac{1}{y'^2}$.

Uz $y'=p$: $y=2xp+\frac{1}{p^2}$. (a)

Deriviramo po x pa nakon uređenja dobivamo linearnu diferencijalnu jednadžbu u x i p:

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2}{p}x=\frac{2}{p^4}$$

Riješimo li tu jednadžbu prema (106) uzevši u obzir da je $f(p)=\frac{2}{p}$, a $g(p)=\frac{2}{p^4}$, dobit ćemo

$$\underline{x=\frac{C}{p^2}-\frac{2}{p^3},}$$

a uvrštenje vrijednosti dobivene za x u (a) daje

$$y=\frac{2C}{p}-\frac{3}{p^2}.$$

Time smo dobili opće rješenje u parametarskom obliku.
Iz uspoređenja zadane Lagrangeove jednadžbe s njenim općim oblikom slijedi da je $p=\varphi(p)$ pa uvrštenje u $p-\varphi(p)=0$ daje $p-p=0$.

Zadana Lagrangeova jednadžba n e m a singularnog rješenja.

842. $y=2xy'+\frac{1}{2}y'^2-3y'+2.$ $\left[x=\frac{C}{p^2}-\frac{p}{3}+\frac{3}{2},\ y=\frac{2C}{p}+\frac{p^2}{6}+2;\quad y=2\right].$

843. $y=2xy'+y\cdot y'^2.$ [$2Cx=C^2-y^2$, singularnog rješenja nema].

TIP VII

Egzaktne diferencijalne jednadžbe. Eulerov multiplikator

Vidi u zbirci „Riješeni zadaci više matematike" uz Repetitorij III dio poglavlje VIII, zadatke **569** do **581** uklj. i poglavlje IX, zadatke **582** do **595** uklj.

TIP VIII

Diferencijalne jednadžbe kojim je opći oblik

$$x=\varphi(y'),\ \text{odnosno}\ y=\varphi(y')$$

Upute

Jednadžbe toga tipa možemo lako riješiti u parametarskom obliku stavivši $y'=p$ i uzevši p za parametar.

Zadaci

U zadacima **844** do **851** uklj. riješi zadane diferencijalne jednadžbe prelazeći na parametarski oblik.

844. $x=y'\sin y'+\cos y'.$

Stavimo

$$y'=p,\ \text{pa je}\ dy=p\,dx\quad\text{i}\quad dx=\frac{dy}{p},$$

a $$x=p\sin p+\cos p.$$

Diferenciramo: $dx=p\cos p\,dp,$

a uvrštenje $dx=\frac{dy}{p}$ daje $dy=p^2\cos p\,dp$.

Integriramo: $y=\int p^2\cos p\,dp+C=$ (parcijalno integrirajući) $=(p^2-2)\sin p+2p\cos p+C.$

Opće rješenje dobivamo u parametarskom obliku

$$\left.\begin{aligned}x&=p\sin p+\cos p\\ y&=(p^2-2)\sin p+2p\cos p+C.\end{aligned}\right|\ p=y'.$$

845. $\arcsin\frac{x}{y'}=y'.$

Odatle je $\sin y'=\frac{x}{y'}$ ili $x=y'\sin y'$, pa je uz $y'=p$ $x=p\sin p$.

Slijedi

$$dx=p\cos p\,dp+\sin p\,dp,$$

a kako je $dy=p\,dx$, imamo

$$dy=p^2\cos p\,dp+p\sin p\,dp.$$

Parcijalno integrirajući dobivamo

zadano je $\left.\begin{aligned}y&=(p^2-1)\sin p+p\cos p+C\\ x&=p\sin p\end{aligned}\right|$ Opće rješenje u parametarskom obliku, $p=y'$.

846. $y=e^{y'}(y'-1).$

Slijedi $y=e^p(p-1)$, gdje je $p=\frac{dy}{dx}$, pa je $dy=p\,dx$.

Diferenciramo $y=e^p(p-1)$ po p, pa je:

$$dy=e^p\,dp+(p-1)e^p\,dp=p\,e^p\,dp,$$

a kako je $dy=p\,dx$, dobivamo $p\,dx=p\,e^p\,dp$, pa je

$$dx=e^p\,dp.$$

Integriranje daje $x=e^p+C$

Imali smo $y=e^p(p-1)$ | Opće rješenje.

p možemo ukloniti: iz prve jednadžbe slijedi

$$e^p=x-C,\ \text{pa je}\ p=\ln(x-C),$$

a uvrštenje u drugu jednadžbu daje opće rješenje u eksplicitnom obliku:

$$y=(x-C)\ln|(x-C)-1|.$$

847. $x=y'+\ln y'.$ $[x=\sqrt{2(y-C)}-1+\ln|\sqrt{2(y-C)}-1|].$

848. $y=y'\ln y'.$ $\left[x=\frac{1}{2}\ln^2 p-\ln p+C;\quad y=p\ln p\right].$

849. $x=2(\ln y'-y')$. $[x=2(\ln p-p);\quad y=2p-p^2+C]$.

850. $y'=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{y'^2}$. $[x=p\operatorname{tg}p-\ln\cos p+C;\quad y=p^2\operatorname{tg}p]$.

851. $x=e^{2y'}(2y'^2-2y'+1)$. $\left[x=e^{2p}(2p^2-2p+1);\quad y=e^{2p}\left(2p^3-3p^2+3p-\dfrac{1}{2}\right)+C\right]$.

d. Primjedbe o rješavanju diferencijalnih jednadžbi prvog reda

Ukoliko zadana diferencijalna jednadžba ne spada ni u jedan od navedenih tipova, treba je uz podesnu transformaciju, odnosno supstituciju svesti na jednadžbu kojoj je način rješavanja prikazan u gore navedenim tipovima diferencijalnih jednadžbi.

Zadaci

U zadacima **852** do **857** uklj. riješi zadane diferencijalne jednadžbe.

852. $$\underset{P}{(2x+y+1)}\,dx+\underset{Q}{(-x-2y+1)}\,dy=0.$$

Kušajmo riješiti zadanu jednadžbu po tipu VII:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=+1\ ;\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1.$$

Kako je $\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2\neq 0$, lijeva strana jednadžbe nije totalni diferencijal neke funkcije $z(x,y)$.

Odredivanje Eulerova multiplikatora prema formulama (152) (vidi dio III Repetitorija) daje

$$\mu=\mu(x,y),$$

tj. μ nije funkcija samo od x ili samo od y (pokaži to!).

Svedimo zadanu diferencijalnu jednadžbu na homogenu, tj. na tip II. U tu svrhu napišemo zadanu jednadžbu u obliku

$$y'=\frac{2x+y+1}{x+2y-1}. \qquad \text{(a)}$$

Brojnik i nazivnik desne strane jednadžbe izjednačeni s nulom predočuju geometrijski dva pravca, koji se sijeku. Odredimo njihovo sjecište S riješivši sustav jednadžbi

$$\left.\begin{aligned}2x+y+1&=0\\ x+2y-1&=0\end{aligned}\right|.$$

Dobivamo $S(-1,1)$ i u tu tačku prenesimo ishodište koordinatnog sustava, tj. stavimo

$$x=u-1\ ,\ \text{pa je } dx=du$$

$$y=v+1\ ,\ \text{pa je } dy=dv.$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje nakon uređenja

$$(2u+v)du+(u+2v)dv=0, \qquad \text{(b)}$$

a to je homogena diferencijalna jednadžba.

Uzevši $\dfrac{v}{u}=t$, bit će $v=ut$ i $dv=u\,dt+du$, dobivamo nakon uvrštenja u (b) i separiranja varijabla u i t opće rješenje u obliku

$$u\sqrt{t^2+t+1}=C,$$

a nakon uvrštenja $t=\dfrac{v}{u}$ i kvadriranja

$$u^2+uv+v^2=C^2,$$

a uvrštenje $u=x+1$ i $v=y-1$ daje

traženo opće rješenje zadane jednadžbe u obliku

$$\underline{x^2+y^2+xy+x-y=C_1,}$$

gdje je $C_1=C^2-1$.

Primijetimo da jednadžbu (b)

$$\underset{P}{(2u+v)}du+\underset{Q}{(u+2v)}dv=0$$

možemo riješiti jednostavnije, jer je

$$\frac{\partial P}{\partial v}=1\ \text{ i }\ \frac{\partial Q}{\partial u}=1,\ \text{tj.}\ \frac{\partial P}{\partial v}-\frac{\partial Q}{\partial u}=0$$

te lijeva strana jednadžbe predočuje totalni diferencijal funkcije $z(u,v)$. Odredimo je.

$$\int_{u_0}^{u}(2u+v)du+\int_{v_0}^{v}(u+2v)dv=C^2.$$

Slijedi

$$u^2+uv+v^2=C^2.$$

Uvrštenje $u=x+1$ i $v=y-1$ daje gore navedeno opće rješenje.

53. $(x+y+2)dx+(2x+2y-1)dy=0.$

Opet je $\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}=+1-2=-1\neq 0$ pa lijeva strana jednadžbe nije totalni diferencijal.

Opažamo da jednadžbe

$$x+y+2=0$$

$$2x+2y-1=0$$

predočuju geometrijski dva paralelna pravca kojima je koeficijent smjera $\operatorname{tg}\alpha=-1$, pa možemo odmah staviti

$$x+y=t,\ \text{pa je } y=t-x \text{ i } dy=dt-dx.$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje

$$dx=\frac{2t-1}{t-3}dt,$$

a integriranje

$$x=\int\frac{2t-1}{t-3}dt=\int\left(2+\frac{5}{t-3}\right)dt=2t+5\ln|t-3|+C_1.$$

Kako je $t=x+y$, dobivamo traženo opće rješenje

$$\underline{x+2y+5\ln|x+y-3|=C,}$$

gdje je

$$C=-C_1.$$

854. $(x+y+1)dx+(-2x-2y+1)dy=0.$ $[x-2y+\ln|x+y|=C].$

855. $(3x+3y-1)\,dx+(2x+2y)\,dy=0$ uz početni uvjet $y(0)=2.$

$[3x+2y-4+2\ln|x+y-1|=0].$

856. $(2x+y-1)\,dx+(x-2y+3)\,dy=0.$ $[x^2+xy-y^2-x+3y=C].$

857. $y'=\dfrac{x+y-2}{y-x-4}$. Odredi integralnu krivulju koja prolazi tačkom $T_1(1;1)$.

$[x^2+2xy-y^2-4x+8y-6=0].$

e. Ortogonalne trajektorije

Upute

Ortogonalnim trajektorijama zadane familije krivulja, koja ovisi o jednom parametru, npr. a, zovemo takvu familiju krivulja koje sijeku pod pravim kutom krivulje zadane familije.

Postupak za određivanje ortogonalnih trajektorija za zadanu familiju krivulja $F(x,y,a)=0$:

1) Deriviramo po x jednadžbu zadane familije krivulja i uklonivši iz zadane jednadžbe i deriviranjem dobivene parametar a, dobivamo **diferencijalnu jednadžbu zadane familije krivulja**.
2) U toj jednadžbi zamijenimo y' s $-\dfrac{1}{y'}$ pa tako dobivamo **diferencijalnu jednadžbu traženih ortogonalnih trajektorija**.
3) Integrirajući tu jednadžbu dolazimo do jednadžbe, koja predočuje familiju ortogonalnih trajektorija.

Primjedba. Trajektorije koje sijeku krivulje zadane familije pod kutom koji je različit od pravog zovu se **izogonalne trajektorije**.

Zadaci

U zadacima **858** do **866** uklj. odredi ortogonalne trajektorije zadanih familija krivulja i prikaži grafički zadane krivulje i njihove ortogonalne trajektorije.

858. Familija parabola $x=ay^2$.

Deriviramo po x:

$$1=2ayy'$$

Odatle i iz $x=ay^2$ uklonimo parametar a

$$a=\frac{x}{y^2},\ \text{pa je}$$

$$2xy'=y$$

diferencijalna jednadžba zadane familije parabola.

Uvrštenje $-\dfrac{1}{y'}$ mjesto y' daje diferencijalnu jednadžbu ortogonalnih trajektorija:

$$-2x\cdot\frac{1}{y'}=y$$

ili

$$2x+yy'=0.$$

Riješimo tu jednadžbu:

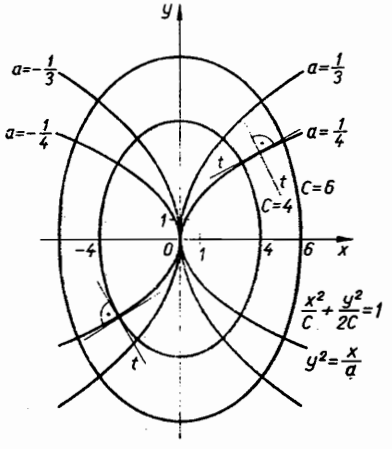
$$y\,dy+2x\,dx=0$$

$$\int y\,dy+2\int x\,dx=C$$

$$\frac{y^2}{2}+x^2=C$$

ili

$$\underline{\frac{y^2}{2C}+\frac{x^2}{C}=1.}$$



Slika 122

To je jednadžba traženih ortogonalnih trajektorija, koja predočuje familiju koncentričnih elipsa, kojima je vertikalna poluos $\sqrt{2}$ puta veća od horizontalne. Vidi sl. 122.

859. Familija istostranih hiperbola

$$y=\frac{a}{x}.$$

Deriviramo:

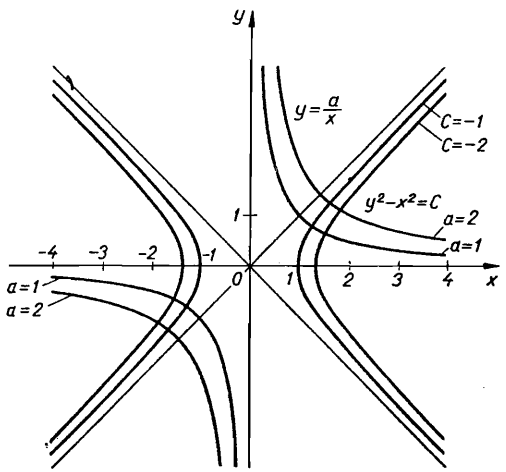
$$y'=-\frac{a}{x^2}.$$

Uklonimo a uvrstivši $a=xy$:

$$y'=-\frac{y}{x}.$$

Uvrstimo $-\dfrac{1}{y'}$ mjesto y':

$$-\frac{1}{y'}=-\frac{y}{x}\quad\text{ili}\quad y'=\frac{x}{y}.$$



Slika 123

Integriramo:

$$\int y\,dy=\int x\,dx+C_1$$

$$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+C_1$$

ili

$$\underline{y^2-x^2=C}$$

— familija istostranih hiperbola, gdje je $C=2C_1$

Vidi sl. 123.

860. Familija parabola $y^2=4(x-a)$.
Deriviranje po x daje $2yy'=4$.

Kako parametra a već nema, uvrstimo $-\frac{1}{y'}$ mjesto y':

$$-2y\cdot\frac{1}{y'}=4$$

ili

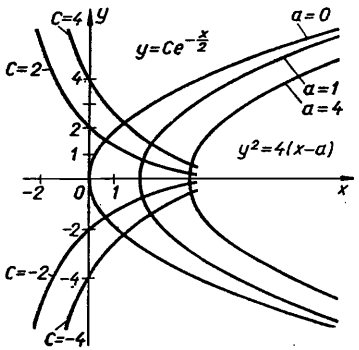
$$\frac{dy}{y}=-\frac{1}{2}dx.$$

Integriramo:

$$\ln|y|=-\frac{x}{2}+\ln C$$

$\underline{y=Ce^{-\frac{x}{2}}}$ → familija eksponencijalnih krivulja.

Vidi sl. 124.



Slika 124

861. Familija elipsa konstantne velike osi $2a$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

b je parametar.

Deriviramo po x:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0. \qquad \text{(a)}$$

Iz zadane jednadžbe slijedi $b^2=\frac{a^2y^2}{a^2-x^2}$, dok uvrštenje u (a) daje nakon uređenja

$$xy+y'(a^2-x^2)=0.$$

Uvrštenje $-\frac{1}{y'}$ mjesto y' daje

$$xy-\frac{1}{y'}(a^2-x^2)=0$$

ili

$$y\,dy=a^2\frac{dx}{x}-x\,dx.$$

Integriramo:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=a^2\ln|x|+\ln C_1$$

ili

$$\underline{x^2+y^2=2a^2\ln|Cx|},$$

gdje je

$$C=2a^2C_1.$$

862. Familija parabola $ay=x^2$. $[x^2+2y^2=C^2]$.

863. Familija hiperbola $x^2-2y^2=a^2$. $\left[y=\frac{C}{x^2}\right]$.

864. Familija kružnica $x^2+y^2=2ax$. $[y=C(x^2+y^2)]$.

865. Odredi familiju izogonalnih trajektorija koje sijeku pod kutom $\alpha=60^\circ$ familiju krivulja

$$x^2=2a(y-x\sqrt{3}),$$

gdje je a parametar.

Da uklonimo a, deriviramo po x:

$$2x=2a(y'-\sqrt{3}),$$

pa je

$$2a=\frac{2x}{y'-\sqrt{3}},$$

a uvrštenje u jednadžbu zadane familije daje nakon uređenja

$$y'=2\frac{y}{x}-\sqrt{3}. \qquad \text{(a)}$$

Ako su koeficijenti smjera zadanih krivulja iznosili $\operatorname{tg}\beta=y'$, koeficijenti smjera izogonalnih trajektorija bit će:

$$y_1'=\operatorname{tg}(\beta+\alpha)=\operatorname{tg}(\beta+60^\circ)=\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}60^\circ}{1-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}60^\circ}=\frac{y'+\sqrt{3}}{1-y'\sqrt{3}}.$$

Uvrštenje y_1' mjesto y' u (a) daje nakon uređenja:

$$y'=\frac{\frac{y}{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,\frac{y}{x}-1}.$$

Uz $\frac{y}{x}=t$, $y=t\cdot x$ i $y'=t+xt'$ dobivamo

$$t+xt'=\frac{t-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,t-1},$$

ili

$$x\frac{dt}{dx}=\frac{-\sqrt{3}\,t^2+2t-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,t-1},$$

a odatle je

$$\frac{dx}{x}=-\frac{\sqrt{3}\,t-1}{\sqrt{3}\,t^2-2t+\sqrt{3}}.$$

Uz supstituciju $\sqrt{3}\,t^2-2t+\sqrt{3}=u$ i $\frac{du}{2}=\sqrt{3}\,t-1$ dobivamo

$$\frac{dx}{x}=-\frac{1}{2}\frac{du}{u} \quad \text{pa je} \quad \ln|x|=\ln\frac{1}{\sqrt{u}}+\ln C_1.$$

Odatle je

$$x\sqrt{u}=C_1.$$

Nakon uvrštenja $u=\sqrt{3}\,t^2-2t+\sqrt{3}$ i $t=\frac{y}{x}$ dobivamo poslije uređenja jednadžbu traženih izogonalnih trajektorija u obliku

$$xy-\frac{\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2)=C.$$

866. Odredi izogonalne trajektorije familije parabola, $y^2=4ax$ ako je kut presjeka $\alpha=45°$.

$$\left[\ln(2x^2+xy+y^2)+\frac{6}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2y}{x\sqrt{7}}=C\right].$$

C. DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE DRUGOG REDA

a. Općenito

Diferencijalna jednadžba drugog reda ima općenito oblik

$$y''=f(x,y,y') \text{ ili implicitno } F(x,y,y',y'')=0.$$

Da prikažemo geometrijsko značenje diferencijalnih jednadžbi drugog reda, podijelimo tu jednadžbu s $(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{f(x,y,y')}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Lijeva strana gornje jednakosti predočuje prema formuli (26) zakrivljenost $\frac{1}{\rho}$ krivulje $y=y(x)$ u nekoj tački apscise x, dok je desna strana funkcija od x, y i y' tj. $\varphi(x,y,y')$, pa je

$$\frac{1}{\rho}=\varphi(x,y,y').$$

Odatle slijedi: za svaku tačku (x,y) u ravnini XY i po volji uzeti tangens smjera y' u toj tački diferencijalna jednadžba drugog reda daje zakrivljenost, odnosno polumjer zakrivljenosti one integralne krivulje koja prolazi tom tačkom.

Prema tome riješiti diferencijalnu jednadžbu drugog reda znači geometrijski povući u ravnini familiju krivulja, koje ispresjecaju tu ravninu u svim smjerovima, ali od bezbroja krivulja te familije, koje prolaze nekom tačkom ravnine, svaka krivulja ima zakrivljenost propisanu diferencijalnom jednadžbom.

Kako se opće rješenje diferencijalne jednadžbe drugog reda dobije nakon dvije kvadrature, ono sadrži dvije konstante po volji C_1 i C_2 pa općenito ima oblik

$$y=y(x,C_1,C_2) \quad \text{ili} \quad f(x,y,C_1,C_2)=0.$$

Iz geometrijskog značenja diferencijalne jednadžbe drugog reda jasno slijede početni uvjeti da se dobije partikularno rješenje, tj. jedna naročita krivulja familije zadane diferencijalnom jednadžbom.

Ti uvjeti jesu:

1) početni položaj, tj. koordinate jedne tačke $x=x_0$, $y=y_0$ kojom ta krivulja ima proći,

2) početni smjer, tj. tangens smjera $y'=y_1'$ u nekoj tački (x_1,y_1) te naročite krivulje.

Uvrstimo li početne uvjete $x=x_0$ i $y=y_0$ u opće rješenje $y=y(x,C_1,C_2)$, a $x=x_1$, $y'=y_1$ u $y'=y'(x,C_1,C_2)$, dobit ćemo dvije jednadžbe, iz kojih odredimo C_1 i C_2. Uvrštenje tako dobivenih za C_1 i C_2 vrijednosti u opće rješenje daje partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe drugog reda za te početne uvjete.

Navedimo kao primjer zadatak

867. Ispitaj da li je $y=C_1x^{\frac{3}{2}}+C_2$ opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$2xy''-y'=0$$

u području $x>0$ i odredi partikularno rješenje koje odgovara početnim uvjetima $y(1)=4$ i $y'(1)=3$.

Zadano opće rješenje deriviramo dvaput redom po x:

$$y'=\frac{3}{2}C_1x^{\frac{1}{2}} \text{ i } y''=\frac{3}{4}C_1x^{-\frac{1}{2}}.$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje identitet:

$$2x\cdot\frac{3}{4}C_1x^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}C_1x^{\frac{1}{2}}\equiv 0.$$

Slijedi: $y=C_1x^{\frac{3}{2}}+C_2$ opće je rješenje zadane diferencijalne jednadžbe u području $x>0$.

Da odredimo partikularno rješenje uvrstimo u $y=C_1x^{3/2}+C_2$ i $y'=\frac{3}{2}C_1x^{1/2}$ zadane početne uvjete $y(1)=4$ i $y'(1)=3$:

$$4=C_1 1^{3/2}+C_2, \text{ pa je } C_1=4-C_2$$

$$3=\frac{3}{2}C_1\cdot 1^{1/2}, \text{ pa je } C_1=2,$$

a odatle je $C_2=2$

i $\underline{y=2x^{\frac{3}{2}}+2}$

partikulano rješenje određeno zadanim početnim uvjetima.

b. Redukcija diferencijalnih jednadžbi drugog reda na diferencijalne jednadžbe prvog reda

Ako u diferencijalnu jednadžbu drugog reda, kojoj je opći oblik

$$y''=f(x,y,y')$$

ne ulazi eksplicitno jedna ili više od tih promjenljivih x,y i y', diferencijalna jednadžba je nepotpuna, pa je možemo reducirati, tj. svesti na diferencijalnu jednadžbu prvog reda.

Promotrimo pojedine slučajeve redukcije.

Prvi slučaj redukcije

$$y''=f(x),$$

tj. diferencijalna jednadžba ne sadrži traženu funkciju i njenu prvu derivaciju.

Uputa

Opće rješenje dobivamo uzastopnim integriranjem zadane diferencijalne jednadžbe.

Zadaci

U zadacima **868** do **877** uklj. odredi opća rješenja zadanih diferencijalnih jednadžbi, odnosno partikularna rješenja ukoliko su zadani početni uvjeti.

868. $y''=xe^{-x}$ uz početne uvjete $y(0)=1$ i $y'(0)=0$.

$y''=\frac{d^2y}{dx^2}$ možemo napisati u obliku $\frac{dy'}{dx}$, pa imamo

$$\frac{dy'}{dx}=x\cdot e^{-x} \mid \cdot dx$$

$$dy'=x\cdot e^{-x}dx.$$

Integriramo:

$$y'=\int xe^{-x}dx+C_1=-xe^{-x}-e^{-x}+C_1$$

ili

$$\frac{dy}{dx}=-xe^{-x}-e^{-x}+C_1 \mid \cdot dx \text{ i integriramo parcijalno:}$$

$$y=\int(-xe^{-x}-e^{-x}+C_1)dx+C_2=$$

$$=xe^{-x}+e^{-x}+e^{-x}+C_1x+C_2=\underline{(x+2)e^{-x}+C_1x+C_2.}$$

Uvrštenje početnih uvjeta daje:

$$y(0)=1\rightarrow 1=2+C_2$$

$$y'(0)=0\rightarrow 0=-1+C_1.$$

Odatle: $C_2=-1$ i $C_1=1$.

Uvrštenje u y daje traženo partikularno rješenje.

$$\underline{y=(x+2)e^{-x}+x-1.}$$

Do istog rezultata dolazimo i na taj način da odmah iza prvog integriranja uvrštavamo jedan početni uvjet, a drugi iza drugog integriranja. Pokažimo to:

Imali smo $y'=-xe^{-x}-e^{-x}+C_1.$

Uvrštenje $y'(0)=0$ daje $0=-1+C_1$, pa je $C_1=1$

i $y'=-xe^{-x}-e^{-x}+1.$

Odatle je $y=xe^{-x}+2e^{-x}+x+C_2,$

a uvrštenje $y(0)=1$ daje $1=2+C_2$, pa je $C_2=-1$ i

$$\underline{y=(x+2)e^{-x}+x-1.}$$

Iz toga slijedi:

Pri određivanju partikularnih rješenja diferencijalne jednadžbe drugog, a i viših redova nije potrebno da se najprije odredi opće rješenje, a tek zatim određuju vrijednosti konstanata integracije. Mnogo je jednostavnije određivati vrijednost pojedine konstante, čim se ona pojavi u toku rješavanja diferencijalne jednadžbe.

869. $y''=2\sin x\cos^2x-\sin^3x.$

$$y'=2\int \sin x\cos^2x\,dx-\int \sin^3x\,dx+C_1=$$

= (uz supstituciju $\cos x=t$, odnosno prema tipu VIII neodređenih integrala) =

$$=-\frac{2}{3}\cos^3x+\frac{1}{3}\sin^2x\cos x+\frac{2}{3}\cos x+C_1,$$

$$y=\int\left(-\frac{2}{3}\cos^3x+\frac{1}{3}\sin^2x\cos x+\frac{2}{3}\cos x+C_1\right)dx+C_2=$$

$$=-\frac{2}{9}\sin x\cos^2x-\frac{4}{9}\sin x+\frac{1}{9}\sin^3x+\frac{2}{3}\sin x+C_1x+C_2=$$

$$\underline{=\frac{1}{3}\sin^3x+C_1x+C_2.}$$

870. $y''=4\cos 2x$ uz početne uvjete $y(0)=0$ i $y'(0)=0$.

$$y'=4\int \cos 2x\,dx+C_1=2\sin 2x+C_1.$$

Uvrštenje $x=0$ i $y'=0$ daje $0=C_1$:

$$y=2\int \sin 2x\,dx+C_2=-\cos 2x+C_2.$$

Uvrštenje $x=0$ i $y=0$ daje

$$0=-1+C_2,\ \text{pa je}\ C_2=1.$$

Traženo partikularno rješenje glasi: $\underline{y=1-\cos 2x}$.

871. $y''=x+\sin x$. $\left[y=\frac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2\right]$.

872. $y''=\ln x$. $\left[y=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{2}{3}\right)+C_1x+C_2\right]$.

873. $y''=\frac{1}{1+x^2}$ uz početne uvjete $y'(0)=0$ i $y(0)=0$. $\left[y=x\,\mathrm{arc\,tg}\,x-\ln\sqrt{1+x^2}\right]$.

874. $y''=\mathrm{arc\,tg}\,x$ uz $y'(0)=0$ i $y(0)=0$. $\left[y=\frac{\mathrm{arc\,tg}\,x}{2}(x^2-1)-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)\right]$.

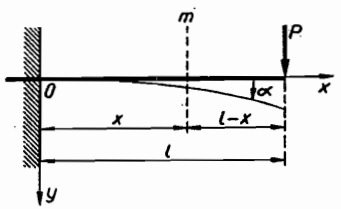
875. Krivulja zadovoljava jednadžbu

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x+3.$$

Odredi njenu jednadžbu, ako je poznato da prolazi tačkom $T_1(2;4)$ i ima u T_1 koeficijent smjera jednak 3.

$$\left[y=\frac{x^3}{6}+\frac{3}{2}x^2-5x+\frac{20}{3}\right].$$

876. Odredi jednadžbu krivulje savijanja (elastične linije) horizontalne grede kojoj je jedan kraj uklješten, a na drugom kraju djeluje sila P, zanemarivši težinu grede i pretpostavivši da je savijanje maleno. Vidi sl. 125.



Slika 125

Očito da je zakrivljenost elastične linije, tj. $\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ u nekom presjeku m

grede u udaljenosti x od uklještenja to veća, što je veći moment savijanja M_x u tom presjeku, a to manja što je veća krutost EI grede, gdje je E modul elasticiteta, a I moment tromosti poprečnog presjeka grede. Prema tome diferencijalna jednadžba elastične linije glasi

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{M_x}{EI}.$$

Uz pretpostavku da je savijanje maleno možemo uzeti da je $y'=\mathrm{tg}\,\alpha\doteq 0$ jer je kut α malen, pa diferencijalna jednadžba prima oblik

$$y''=\frac{M_x}{EI}.$$

Na slici 125 vidimo da je

$$M_x=P(l-x),$$

pa je

$$y''=\frac{P}{EI}(l-x).$$

Integriramo:

$$y'=\frac{P}{EI}\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)+C_1.$$

Prema slici: za $x=0$ $y'=\mathrm{tg}\,\alpha=0$, pa je $C_1=0$.

Dakle

$$y'=\frac{Px}{2EI}(2l-x). \qquad \text{(a)}$$

Kako je $y'=\mathrm{tg}\,\alpha\doteq\alpha$, jer je savijanje maleno, jednadžba (a) prima oblik

$$\alpha\doteq\frac{Px}{2EI}(2l-x)$$

i daje lučnu mjeru kuta što ga elastična linija zatvara s osi X. Npr. za kraj grede ($x=l$) imamo

$$\alpha\doteq\frac{Pl^2}{2EI}.$$

Integriranje jednadžbe (a) daje

$$y=\frac{P}{EI}\left(l\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+C_2.$$

Prema slici: za $x=0$ je $y=0$, pa je i $C_2=0$.

Dobivamo jednadžbu elastične linije

$$\underline{y=\frac{Px^2}{6EI}(3l-x).}$$

Uvrštenje $x=l$ daje najveći progib grede na njenom kraju

$$y_{maks}=\frac{Pl^3}{3EI}.$$

877. Izvedi zakon slobodnog pada tijela mase m uz pretpostavku da je tijelo u početni moment $t=0$ već prevalilo put $s=s_0$ i imalo brzinu $v=v_0$. Otpor zraka zanemari.

$$\left[m\frac{d^2s}{dt^2}=mg;\quad v=gt+v_0;\quad s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0\right].$$

P r i m j e d b a. Diferencijalne jednadžbe oblika $y^{(n)}=f(x)$.

Na isti način rješavaju se i diferencijalne jednadžbe viših redova toga tipa.

U zadacima **878** do **883** uklj. odredi opća rješenja zadanih diferencijalnih jednadžbi, odnosno njihova partikularna rješenja, ako su zadani početni uvjeti.

878. $$y'''=\frac{6}{x^3}.$$

$$y''=6\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{3}{x^2}+C_1,$$

$$y'=\int\left(-\frac{3}{x^2}+C_1\right)dx+C_2=\frac{3}{x}+C_1x+C_2.$$

$$y=\int\left(\frac{3}{x}+C_1x+C_2\right)dx+C_3=\underline{3\ln|x|+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3}.$$

879. $y^{IV}=\cos^2 x$ uz početne uvjete $y(0)=\frac{1}{32}$; $y'(0)=0$; $y''(0)=\frac{1}{8}$ i $y'''(0)=0$.

Prvo integriranje daje $y'''=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C_1$,

a za $y'''(0)=0$ dobivamo $C_1=0$, pa je

$$y'''=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}.$$

Drugo integriranje daje

$$y''=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8}\cos 2x+C_2,$$

a uz $y''(0)=\frac{1}{8}$ dobivamo $C_2=\frac{1}{4}$, pa je

$$y''=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{1}{4}.$$

Integriramo treći put:

$$y'=\frac{x^3}{12}-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{4}x+C_3.$$

Uvrštenje $y'=0$ za $x=0$ daje $C_3=0$, pa je

$$y'=\frac{x^3}{12}-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{4}x$$

i četvrti put:

$$y=\frac{x^4}{48}+\frac{1}{32}\cos 2x+\frac{x^2}{8}+C_4,$$

a za $y=\frac{1}{32}$ i $x=0$ dobivamo $C_4=0$, pa je traženo partikularno rješenje

$$\underline{y=\frac{x^4}{48}+\frac{x^2}{8}+\frac{1}{32}\cos 2x.}$$

880. $y'''=(y'')^2$.

Stavimo $y''=z$, tada je $y'''=z'$, pa je

$$z'=z^2 \text{ ili } \frac{dz}{dx}=z^2, \text{ a odatle je}$$

$$\frac{dz}{z^2}=dx.$$

Integriramo: $-\frac{1}{z}=x+C_1$ ili $z=-\frac{1}{x+C_1}$, a kako je $z=y''$, imamo

$$y''=-\frac{1}{x+C_1}.$$

Integriramo: $$y'=-\ln(x+C_1)+C_2.$$

Treće integriranje daje:

$$y=-(x+C_1)\ln(x+C_1)+x+C_1+C_2x+C_3$$

ili $$y=-(x+C_1)\ln(x+C_1)+x(C_2+1)+C_1+C_3.$$

Uzevši radi jednostavnosti

$$K_1=C_1,$$

$$K_2=C_2+1,$$

$$K_3=C_1+C_3,$$

dobit ćemo opće rješenje u obliku

$$\underline{y=-(x+K_1)\ln(x+K_1)+K_2x+K_3.}$$

881. $y'''=\frac{24}{(x+2)^5}$. $\left[y=-\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3\right]$.

882. $y'''=xe^{-x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=2$, $y''(0)=2$. $\left[y=-(x+3)e^{-x}+\frac{3}{2}x^2+3\right]$.

883. $y'''=x\sin x$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=2$. $[y=x\cos x-3\sin x+x^2+2x]$.

Drugi slučaj redukcije

$$y''=f(x,y')$$

tj. diferencijalna jednadžba ne sadrži eksplicitno traženu funkciju y.

Upute

Supstituiramo

$$y'=p,$$

pa uvrštenje $y'=p$ i $y''=p'$ u zadanu diferencijalnu jednadžbu daje diferencijalnu jednadžbu prvog reda u p i x:

$$p'=f(x,p), \text{ odnosno } F(x,p,p')=0$$

koju znamo riješiti prema gore navedenim tipovima diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

Zadaci

U zadacima 884 do 891 uklj. odredi opća rješenja zadanih diferencijalnih jednadžbi, odnosno partikularna rješenja ukoliko su zadani početni uvjeti.

884. $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x$.

Zadana diferencijalna jednadžba ne sadrži eksplicitno y, pa uvrstimo u jednadžbu $y'=p$ i $y''=p'$:

$$p'+p\operatorname{tg}x=\sin 2x, \tag{a}$$

a to je linearna diferencijalna jednadžba prvog reda, koju znamo riješiti prema tipu III. Stavimo $p=uv$, pa je $p'=uv'+vu'$.
Uvrštenje u (a) daje

$$vu'+u\left(\frac{dv}{dx}+v\operatorname{tg}x\right)=\sin 2x.$$

Uzimamo

$$\frac{dv}{dx}+v\operatorname{tg}x=0 \tag{b}$$

ostaje

$$v\frac{du}{dx}=\sin 2x. \tag{c}$$

Iz (b) slijedi: $\frac{dv}{v}=-\operatorname{tg}x\,dx$, pa je $\ln v=\ln\cos x$

i

$$v=\cos x.$$

Uvrštenje u (c) daje

$$du=\frac{\sin 2x\,dx}{\cos x}=2\sin x\,dx \quad \text{i} \quad u=-2\cos x+C_1.$$

Slijedi: $p=uv=-2\cos^2 x+C_1\cos x$, a kako je $p=\frac{dy}{dx}$ bit će

i

$$y=-2\int\cos^2 x\,dx+C_1\int\cos x\,dx+C_2.$$

Odatle je

$$y=-x-\frac{\sin 2x}{2}+C_1\sin x+C_2.$$

885. $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$.

y eksplicitno ne ulazi, opet imamo drugi slučaj redukcije pa uvrštavamo $y'=p$ i $y''=p'$:

$$xp'=p\ln\frac{p}{x} \quad \text{ili} \quad p'-\frac{p}{x}\ln\frac{p}{x}=0, \tag{a}$$

a to je homogena diferencijalna jednadžba prvog reda s obzirom na x i p. Riješimo je prema tipu II.

Stavimo $\frac{p}{x}=z$, $p=xz$; $p'=xz'+z$.

Uvrštenje u (a) daje $xz'+z-z\ln z=0$

ili

$$x\frac{dz}{dx}=z(\ln z-1),$$

pa je

$$\frac{dz}{z(\ln z-1)}=\frac{dx}{x}.$$

Pomoću supstitucije $\ln z-1=t$ i $dt=\frac{dz}{z}$ dobivamo

$$\frac{dt}{t}=\frac{dx}{x},$$

pa integriranje daje

$$\ln(\ln z-1)=\ln(C_1x)$$

ili

$$\ln z-1=C_1x$$

i

$$\ln z=C_1x+1,$$

pa je

$$z=e^{C_1x+1},$$

a kako je $z=\frac{p}{x}$, dobivamo $p=y'=xe^{C_1x+1}$

pa je

$$y=\int xe^{C_1x+1}\,dx+C_2$$

i nakon parcijalnog integriranja

$$y=\frac{1}{C_1}xe^{C_1x+1}-\frac{1}{C_1^2}e^{C_1x+1}+C_2.$$

886. $(x-3)y''+y'=0$ uz početne uvjete $y(4)=2$ i $y'(4)=1$.
Uvrštenje $y'=p$ i $y''=p'$ daje

$$(x-3)p'+p=0$$

ili $$(x-3)\frac{dp}{dx}+p=0 \mid : dp \text{ i recipročno:}$$

$$\frac{dx}{x-3}=-\frac{dp}{p}.$$

Dobili smo diferencijalnu jednadžbu prvog reda sa separiranim promjenljivim x i p, tj. tip I. Integriramo:

$$\ln|x-3|+\ln|p|=\ln C_1$$

$$|p(x-3)|=C_1$$

$$p(x-3)=\pm C_1=C.$$

Za $x=4$ $$p=y'=1 \;:\; C=1$$

$$dy=\frac{dx}{x-3}$$

$$y=\ln|x-3|+C_2.$$

Za $x=4$ i $y=2$ $$C_2=2, \text{ pa je}$$

$$\underline{y=\ln|x-3|+2.}$$

887. $x^3y''+x^2y'=1.$ $\left[y=\frac{1}{x}+C_1\ln x+C_2\right].$

888. $y''x\ln x=y'.$ $[y=C_1x(\ln x-1)+C_2].$

889. $y''-\frac{y'}{x-1}=x(x-1)\;;\; y(2)=1,\; y'(2)=-1.$ $\left[\frac{1}{24}(3x^4-4x^3-36x^2+72x+8)\right].$

890. Tijelo mase m pada vertikalno s neke visine početnom brzinom 0. Odredi zakon gibanja tijela, ako je otpor zraka razmjeran s kvadratom brzine tijela.

Znamo: ako je s prevaljen put tijela, tada je brzina $v=\frac{ds}{dt}$, ubrzanje $v=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$ i da prema zadatku na tijelo djeluju sile:

u smjeru pada: težina tijela $G=mg$, gdje je $g=9{,}81^{m}/_{sek^2}$

u suprotnom smjeru: otpor zraka $F=kv^2=k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, gdje je k koeficijent razmjernosti.

Prema drugom Newtonovu zakonu sila je $m\cdot\frac{d^2s}{dt^2}$, pa diferencijalna jednadžba pada zadanog tijela glasi:

$$m\frac{d^2s}{dt}=mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

ili

$$m\ddot{s}=mg-k\dot{s}^2. \qquad \text{(a)}$$

U diferencijalnu jednadžbu ne ulazi tražena funkcija s, imamo dakle drugi slučaj redukcije, pri čemu su

početni uvjeti: $s=0$ za $t=0$,

$v=\dot{s}=0$ za $t=0$.

Podijelivši jednadžbu (a) s m i uzevši u obzir da je $\dot{s}=\frac{ds}{dt}=v$ i $\ddot{s}=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}$, dobivamo

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{k}{m}v^2 \;\Big|\cdot\frac{m}{k}$$

$$\frac{m}{k}\frac{dv}{dt}+v^2=\frac{gm}{k}. \qquad \text{(b)}$$

Označimo $\frac{gm}{k}=a^2$, tada je $\frac{m}{k}=\frac{a^2}{g}$ pa jednadžba (b) prima oblik:

$$\frac{a^2}{g}\cdot\frac{dv}{dt}+v^2=a^2 \;\Big|\cdot\frac{g}{a^2}=\frac{k}{m}$$

$$\frac{dv}{dt}=(a^2-v^2)\cdot\frac{k}{m} \quad \text{ili} \quad \frac{dv}{a^2-v^2}=\frac{k}{m}dt.$$

Integriramo pa prema (55a) za $v<a$ dobivamo

$$\frac{1}{2a}\ln\frac{a+v}{a-v}=\frac{k}{m}t+C_1.$$

Uvrštenje početnog uvjeta $v=0$ za $t=0$ daje $C_1=0$, pa je

$$\ln\frac{a+v}{a-v}=\frac{2ak}{m}t$$

ili

$$\frac{a+v}{a-v}=e^{\frac{2ak}{m}t},$$

a odatle je

$$v=a\frac{e^{\frac{2ak}{m}t}-1}{e^{\frac{2ak}{m}t}+1} \;\Big|\cdot\frac{e^{-\frac{ak}{m}t}}{e^{-\frac{ak}{m}t}}$$

$$v=a\frac{e^{\frac{ak}{m}t}-e^{-\frac{ak}{m}t}}{e^{\frac{ak}{m}t}+e^{-\frac{ak}{m}t}},$$

a prema formuli (59) iz dijela I Repetitorija

$$v=a\,\mathrm{th}\frac{ak}{m}t. \qquad \text{(c)}$$

Imali smo $\frac{m}{k}=\frac{a^2}{g}$, a odatle je $a=\sqrt{\frac{mg}{k}} \;\Big|\cdot\frac{k}{m}$ daje $\frac{ak}{m}=\sqrt{\frac{kg}{m}}$. (d)

Uvrštenje u (c) daje

$$v=\frac{ds}{dt}=a\,\mathrm{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}t,$$

a odatle je $$ds=a\,\mathrm{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t\,dt, \text{ pa je}$$

$$s=\sqrt{\frac{m}{kg}}\,a\ln\operatorname{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}t+C_2=\text{ (prema (d)) }=$$

$$=\frac{m}{k}\ln\operatorname{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}t+C_2.$$

Za $t=0$ $s=0$, pa je $C_2=0$ i

$$s=\frac{m}{k}\ln\operatorname{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}t.$$

To je traženi zakon pada tijela uz otpor zraka, koji je razmjeran s v^2, dok je zakon brzine pada određen prema (c) s

$$v=a\operatorname{th}\frac{ak}{m}t.$$

Uzmemo li u obzir da $\operatorname{th}x\to 1$, kad $x\to\infty$, dobivamo

$$v=a\lim_{t\to\infty}\operatorname{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}t=a.$$

Dakle v ne teži u beskonačnost kad t teži u beskonačnost već teži konstanti $a=\sqrt{\frac{gm}{k}}=$ $=\sqrt{\frac{G}{a}}$, gdje je G težina tijela koje pada.

Praktički brzina pada postizava svoju graničnu vrijednost vrlo brzo i malo se razlikuje od nje, tj. praktički se može uzeti da već nakon nekoliko sekundi od početka pada gibanje tijela postaje jednoliko.
Ta činjenica se opaža kod zategnutih skokova padobranaca s velike visine.

891. Odredi ravne krivulje kojim je zakrivljenost konstantna i jednaka $\frac{1}{R}$.

[Kružnice $(x+C_1)^2+(y+C_2)^2=R^2$].

Treći slučaj redukcije

$$y''=f(y,y')$$

tj. diferencijalna jednadžba ne sadrži eksplicitno nezavisnu promjenljivu.

Uputa

Opet stavimo $y'=\frac{dy}{dx}=p$, ali sada smatramo da je p funkcija od y. U tu svrhu množimo i dijelimo desnu stranu jednakosti

$$y''=\frac{dp}{dx}$$

s dy pa dobivamo:

$$y''=\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dy}{dy}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot y'=\frac{dp}{dy}\cdot p. \qquad \text{(a)}$$

Uvrštenje u $y''=f(y,y')$ daje

$$\frac{dp}{dy}p=f(y,p).$$

Odredivši odatle p izražen s y, opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe dobivamo iz

$$y'=\frac{dy}{dx}=p.$$

Zadaci

U zadacima **892** do **901** uklj. odredi opća rješenja zadanih diferencijalnih jednadžbi, odnosno partikularna rješenja prema zadanim početnim uvjetima.

892. $2y'^2=(y-1)y''$.

Zadana jednadžba ne sadrži x eksplicitno, pa spada u treći slučaj redukcije.

Uvrštenje $y'=p$ i prema (a) $y''=\frac{dp}{dy}p$ daje diferencijalnu jednadžbu prvog reda u p i y:

$$2p^2=(y-1)p\frac{dp}{dy}$$

ili

$$p\left[2p-(y-1)\frac{dp}{dy}\right]=0.$$

Slijedi: $\quad p=\frac{dy}{dx}=0$; a odatle je $y=C$ i $y''=0$.

Uvrštenje tih vrijednosti u diferencijalnu jednadžbu daje identitet, pa je $y=C$ partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe.

Da odredimo opće rješenje separiramo promjenljive p i y u

$$2p-(y-1)\frac{dp}{dy}=0\;\Big|\cdot\frac{dy}{2p\cdot(y-1)}$$

$$\frac{dp}{2p}=\frac{dy}{y-1}.$$

Integriramo: $\quad \frac{1}{2}\ln p=\ln(y-1)+\ln C_1,$

a odatle je

$$\sqrt{p}=C_1(y-1) \quad \text{ili} \quad p=C_1^2(y-1)^2$$

ili

$$\frac{dy}{dx}=C_1^2(y-1)^2.$$

Integriranje

$$\frac{dy}{C_1^2(y-1)^2}=dx$$

daje

$$-\frac{1}{C_1^2(y-1)}=x+C_2$$

ili

$$\underline{(x+C_2)(y-1)=C_1},$$

gdje je

$$C_1=-\frac{1}{C_1^2}.$$

893. $y''+2y(y')^3=0.$

Stavimo $y'=p$, a prema (a) $y''=\frac{dp}{dy}p$:

$$p\left(\frac{dp}{dy}+2yp^2\right)=0.$$

Slijedi: 1) $p=y'=0$, pa je $y=C$ i $y''=0$. Te vrijednosti zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu, pa je $y=C$ partikularno rješenje zadane jednadžbe.

$$\frac{dp}{dy}+2yp^2=0 \;\Big|\cdot\frac{dy}{2p^2}$$

$$\frac{dp}{2p^2}=-y\,dy.$$

Integriramo: $\frac{1}{p}=y^2-2C_1'$ ili $\frac{dx}{dy}=y^2+C_0$, gdje je $C_0=-2C_1'$.

Drugo integriranje daje $\underline{y^3+C_1y+C_2=3x},$

gdje je $C_1=3C_0$, a $C_2=3C_2'$.

894. $yy''-(y')^2=y^3$ uz početne uvjete $y(0)=-\frac{1}{2}$ i $y'(0)=0$.

Uvrštenje $y'=p$ i $y''=\frac{dp}{dy}p$ daje nakon uređenja

$$\frac{dp}{dy}-\frac{p}{y}=\frac{y^2}{p},$$

a to je Bernoullijeva diferencijalna jednadžba u p i y. Prema tipu IV uzimamo:

$$p=u\cdot v,\ \text{pa je}\ \frac{dp}{dy}=u\cdot\frac{dv}{dy}+v\cdot\frac{du}{dy},$$

i

$$u\frac{dv}{dy}+v\frac{du}{dy}-\frac{uv}{y}=\frac{y^2}{uv},$$

a odatle je

$$u\frac{dv}{dy}+v\left(\frac{du}{dy}-\frac{u}{y}\right)=\frac{y^2}{uv}.$$

Stavimo: $\frac{du}{dy}-\frac{u}{y}=0$, ostaje $u\frac{dv}{dy}=\frac{y^2}{uv}$.

Iz prve jednadžbe slijedi:

$$\frac{du}{u}=\frac{dy}{y},\ \text{pa je}\ \ln u=\ln y\ \text{ili}\ u=y.$$

Uvrštenje u drugu jednadžbu daje

$$v\,du=dy,\ \text{pa je}\ \frac{v^2}{2}=y+C_1$$

ili

$$v=\pm\sqrt{2(y+C_1)},$$

pa je

$$p=\frac{dy}{dx}=u\cdot v=y\cdot v=\pm y\sqrt{2(y+C_1)}. \qquad \text{(a)}$$

Uvedimo prvi početni uvjet $y'=0$ za $y=-\frac{1}{2}$:

$$0=\mp\sqrt{2\left(-\frac{1}{2}+C_1\right)},$$

pa je

$$C_1=\frac{1}{2}.$$

Uvrštenje u (a) daje

$$\frac{dy}{dx}=\pm y\sqrt{2y+1},\ \text{a odatle je}\ \frac{dy}{y\sqrt{2y+1}}=\pm dx.$$

Integriramo:

$$\pm x+C_2=\int\frac{dy}{y\sqrt{2y+1}}.$$

$$I=\int\frac{dy}{y\sqrt{2y+1}}=\left(z=\sqrt{2y+1},\ z^2=2y+1,\ y=\frac{z^2-1}{2}\ \text{i}\ 2z\,dz=2\,dy\right)=$$

$$=2\int\frac{z\,dz}{(z^2-1)z}=(\text{prema (56b)})=\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=\ln\frac{|\sqrt{2y+1}-1|}{\sqrt{2y+1}+1},$$

pa je

$$\pm x+C_2=\ln\frac{|\sqrt{2y+1}-1|}{\sqrt{2y+1}+1}.$$

Uvrštenje drugog početnog uvjeta $y=-\frac{1}{2}$ za $x=0$ daje

$$C_2=\ln|-1|=0.$$

Traženo partikularno rješenje glasi:

$$\underline{x=\pm\ln\frac{|\sqrt{2y+1}-1|}{\sqrt{2y+1}+1}}.$$

895. $y''\operatorname{tg}y=2(y')^2.$ $[\operatorname{ctg}y=C_2+C_1x$, gdje je $C_1=-C_1^2$, a $C_2=-C_2C_1^2]$.

896. $y y''-(y')^2=0$ uz početne uvjete $y(0)=1$ i $y'(0)=2$. $[y=e^{2x}]$.

897. $y y''+y'=0$. $[y^2=C_1x+C_2]$.

898. $1+y'^2=y y''$. $\left[\frac{1}{C_1}\ln(C_1 y+\sqrt{C_1^2y^2-1})=\pm(x+C_2)\right]$.

899. $y y''=(y')^2-(y')^3$; $y(1)=1$; $y'(1)=-1$. $[x=-2\ln y+y]$.

900. Odredi sve krivulje u ravnini, kojima je polumjer zakrivljenosti jednak kubu duljine normale, a napose onu krivulju, koja prolazi tačkom T_1 (0;1), a siječe u toj tački os X pod kutom $\alpha=45°$.

Prema formuli (26) za krivulju $y=f(x)$ je $\rho=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$, a prema (134a) dijela I Repetitorija $N=y\sqrt{1+y'^2}$ pišemo diferencijalnu jednadžbu traženih krivulja:

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}=y^3(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Odatle je $$\frac{1}{y''}=y^3 \quad \text{ili} \quad y''y^3=1.$$

Stavimo: $y'=p$; $y''=\frac{dp}{dy}p$, pa je nakon uređenja

$$p\,dp=\frac{dy}{y^3}.$$

Integriranje daje: $$p=\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{2C_1'y^2-1}}{y} \qquad \text{(a)}$$

Integriranje uz supstituciju $\sqrt{2C_1'y^2-1}=z$ daje nakon uređenja

$$\underline{C_1y^2=1+(C_1x+C_2)^2}, \qquad \text{(b)}$$

gdje je $C_1=2C_1'$, a $C_2=2C_1'C_2'$.

To je jednadžba svih krivulja u ravnini XY zadanih svojstava.

Odredimo još jednadžbu krivulje određenu početnim uvjetima $y(0)=1$ i $y'(0)=\operatorname{tg}45°=1$. Uvrštenje $x=0$ i $y=1$ u (b) daje $C_1=1+C_2^2$, a uvrštenje $x=0$ i $y'=1$ u (a) daje $1=\sqrt{2C_1'-1}$, pa je $C_1'=1$, a $C_1=2C_1'=2$, dok je $C_2=1$. Uvrštenje u (b) daje

$$\underline{y^2=2x^2+2x+1.}$$

901. Odredi sve krivulje u ravnini, kojima je polumjer zakrivljenosti dvaput veći od duljine normale.

$$\left[C_1y=\frac{(C_1x+C_2)^2}{4}+1\right].$$

Poseban slučaj redukcije

Uputa

Ako je diferencijalna jednadžba oblika $F(y,y',y'')=0$ homogena stepena homogenosti dva, tj. $F(\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^2F(y,y',y'')$, tu homogenu jednadžbu možemo riješiti jednostavnije pomoću supstitucije $\frac{y'}{y}=z$.

Zadaci

U zadacima **902** do **906** uklj. riješi zadane diferencijalne jednadžbe stepena homogenosti dva.

902. $3(y')^2=4yy''+y^2$.

Dijeljenje jednadžbe s y^2 daje

$$3\left(\frac{y'}{y}\right)^2=4\frac{y''}{y}+1. \qquad \text{(a)}$$

Supstitucija $\frac{y'}{y}=z$, a diferenciranje po x daje

$$z'=\frac{y''}{y}-\left(\frac{y'}{y}\right)^2, \quad \text{pa je} \quad \frac{y''}{y}=z'+z^2.$$

Uvrstimo li to u (a), dobijemo

$$3z^2=4z'+4z^2+1,$$

a odatle je

$$\frac{dz}{1+z^2}=-\frac{1}{4}dx.$$

Integriramo: $$\operatorname{arctg}z=C_1-\frac{x}{4}$$

ili $$z=\operatorname{tg}\left(C_1-\frac{x}{4}\right), \quad \text{a kako je} \quad z=\frac{y'}{y}, \quad \text{bit će}$$

$$\frac{dy}{y}=\operatorname{tg}\left(C_1-\frac{x}{4}\right)dx.$$

Integriranje daje

$$\ln y=4\ln\cos\left(C_1-\frac{x}{4}\right)+\ln C_2$$

ili

$$\underline{y=C_2\cos^4\left(C_1-\frac{x}{4}\right).}$$

903. $(y')^2+2yy''=0$.

Riješimo ovu homogenu jednadžbu na drugi način i to pomoću supstitucije

$$y=e^{\int z(x)\,dx}. \qquad \text{(a)}$$

Deriviranje daje

$$y' = e^{\int z\,dx} \cdot z$$

i

$$y'' = e^{\int z\,dz}(z' + z^2),$$

pa diferencijalna jednadžba prima oblik

$$e^{2\int z\,dx}(3z^2 + 2z') = 0$$

$$e^{2\int z\,dx} \neq 0, \quad \text{pa je} \quad 3z^2 + 2z' = 0$$

ili

$$2\frac{dz}{dx} = -3x^2 \Big| \cdot \frac{dx}{2z^2} \quad \text{i integriramo:}$$

$$\frac{dz}{z^2} = -\frac{3}{2}dx$$

$$-\frac{1}{z} = -\frac{3}{2}x + C_1'$$

$$z = \frac{1}{\frac{3}{2}x - C_1'}.$$

Računamo prema (a):

$$\int z\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x - \frac{2}{3}C_1'} + \ln C_2 = \left(uz - \frac{2}{3}C_1' = C_1\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\ln(x + C_1) + \ln C_2 = \ln[C_2(x + C_1)^{2/3}],$$

pa je

$$y = e^{\ln[C_2(x+C_1)^{2/3}]}$$

ili

$$\underline{y = C_2(x + C_1)^{\frac{2}{3}}}.$$

904. $(y')^2 + yy'' = yy'$.

Kako je $(yy')' = yy'' + (y')^2 =$ lijeva strana zadane jednadžbe, možemo jednadžbu riješiti jednostavnije, jer jednadžba prima oblik

$$\frac{d(yy')}{dx} = yy',$$

pa je

$$\frac{d(yy')}{yy'} = dx.$$

Slijedi:

$$\ln(yy') = x + \ln C_1,$$

a odatle je

$$\ln\frac{yy'}{C_1} = x \quad \text{i} \quad yy' = C_1 e^x,$$

pa je

$$y\,dy = C_1 e^x\,dx$$

i

$$\underline{\frac{1}{2}y^2 = C_1 e^x + C_2}.$$

905. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$. $[y\cos^2(x + C_1) = C_2]$.

906. Riješi zadatak 885 uzevši u obzir da je zadana diferencijalna jednadžba homogena stepena dva.

D. DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE VIŠIH REDOVA

a. Linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima

Opći oblik:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x).$$

Diferencijalna jednadžba zove se **linearna**, kad je linearna, tj. u prvom stupnju, s obzirom na funkciju y i sve njene derivacije.

Ona se zove **homogena**, kad je njena desna strana $f(x) = 0$, inače je nehomogena.

$a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ su zadani realni koeficijenti.

1. Homogene linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima

a) Drugog reda

Opći oblik: $y'' + a_1y' + a_0y = 0$.

Upute

Ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ dva partikularna rješenja te jednadžbe, pri čemu su ta rješenja linearno nezavisna, tj. $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$ const., tada je

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

opće rješenje diferencijalne jednadžbe.

Da se odrede ta dva partikularna integrala, treba riješiti karakterističnu jednadžbu, koja se dobiva iz zadane diferencijalne jednadžbe tako da

mjesto y'' pišemo r^2

mjesto y' pišemo r

a mjesto y pišemo 1.

Dobivamo:

$$r^2 + a_1r + a_0 = 0.$$

To je kvadratna jednadžba pa pri rješavanju te jednadžbe mogu biti tri slučaja:

1) Korijeni r_1 i r_2 su realni i različiti:

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe glasi:

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}. \tag{108a}$$

2) r_1 i r_2 su jednaki, tj. $r_1 = r_2 = r$.

Opće rješenje glasi

$$y = C_1e^{rx} + xC_2e^{rx}. \tag{108b}$$

3) r_1 i r_2 su konjugirano kompleksni, tj.

$$r_1=a+bi \text{ i } r_2=a-bi.$$

Opće rješenje

$$y=C_1e^{(a+bi)x}+C_2e^{(a-bi)x}, \qquad (108c)$$

ali prema Eulerovim formulama (vidi dio I Repetitorija § 21) transformira se u oblik

$$y=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx)$$

ili

$$y=C_1e^{ax}\sin(bx+C_2). \qquad (108c)$$

Zadaci

U zadacima **907** do **923** uklj. riješi zadane diferencijalne jednadžbe odredivši opća rješenja, odnosno partikularna, ako su zadani početni uvjeti.

907. $y''-5y'-6y=0.$

Pišemo karakterističnu jednadžbu

$$r^2-5r-6=0,$$

pa je rješavamo.

Dobivamo $\qquad r_1=6 \text{ i } r_2=-1.$

Opće rješenje glasi prema (108a):

$$\underline{y=C_1e^{6x}+C_2e^{-x}.}$$

908 $y''-2y'+y=0$ i partikularno rješenje prema $y(0)=4$ i $y'(0)=2$.

Karakteristična jednadžba

$$r^2-2r+1=0;\ r_{1,2}=1.$$

Opće rješenje

$$y=C_1e^x+xC_2e^x$$

ili

$$\underline{y=e^x(C_1+C_2x).}$$

Da odredimo partikularno rješenje, računamo

$$y'=e^x(C_2+C_1+C_2x).$$

Uvrštenje početnih uvjeta daje

$$\text{u } y':\ 2=C_1+C_2$$

$$\text{u } y:\ 4=C_1,$$

pa je $C_2=-2$ i partikularno rješenje glasi:

$$\underline{y=e^x(4-2x).}$$

909. $y''+6y'+13y=0.$

$$r^2+6r+13=0;\ r_{1,2}=-3\pm 2i, \text{ pa je } a=-3 \text{ i } b=2.$$

Prema (108c):

$$\underline{y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).}$$

910. $\dfrac{d^2s}{dt^2}+4\dfrac{ds}{dt}+4s=0.$

$$r^2+4r+4=0;\ r_1=r_2=-2.$$

Prema (108b):

$$\underline{s=e^{-2t}(C_1+C_2t).}$$

911. $y''+16y=0.$

$$r^2+16=0;\ r_{1,2}=\pm 4i, \text{ pa je } a=0 \text{ i } b=4.$$

Prema (108c)':

$$\underline{y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x.}$$

912. $y''-9y=0.$

$$r^2-9=0;\ r_{1,2}=\pm 3.$$

$$\underline{y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}.}$$

913. $y''+3y'=0.$

$$r^2+3r=0;\ r_1=0 \text{ i } r_2=-3.$$

Prema (108a):

$$\underline{y=C_1+C_2e^{-3x}.}$$

914. $y''-y'-2y=0.$ $\qquad [y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}].$

915. $y''-6y'+34y=0.$ $\qquad [y=e^{3x}(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x)].$

916. $y''-2ay+a^2y=0.$ $\qquad [y=e^{ax}(C_1+C_2x].$

917. $y''-5y'=0.$ $\qquad [y=C_1+C_2e^{5x}].$

918. $\ddot{s}+25s=0.$ $\qquad [s=C_1\cos 5t+C_2\sin 5t].$

919. Odredi integralnu krivulju jednadžbe $y''-4y'+3y=0$, koja prolazi tačkom $T_1(0;2)$ i koja dira u toj tački pravac $y=x+2$.

Riješimo zadanu diferencijalnu jednadžbu i odredimo familiju krivulja određenih tom jednadžbom:

$$r^2-4r+3=0;\ r_1=3,\ r_2=1$$

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^x,$$

dok je

$$y'=3C_1e^{3x}+C_2e^x.$$

Tražena krivulja prolazi tačkom $T_1(0;2)$ pa je

$$2=C_1+C_2 \qquad \text{(a)}$$

i u toj tački ima tangentu $y=x+2$, pa je $y'=1$ i

$$1=3C_1+C_2\,. \qquad \text{(b)}$$

Iz (a) i (b) slijedi $C_1=-\frac{1}{2}$ i $C_2=\frac{5}{2}$, pa je

$$\underline{y=\frac{5}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{3x}}$$

tražena integralna krivulja.

920. Odredi partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $\ddot{x}-2\dot{x}=0$ koje zadovoljava uvjetima na krajevima intervala: za $t=0$ $x=0$, a za $t=\ln 2$ $x=3$.

$$r^2-2r=0\,;\, r_1=0 \text{ i } r_2=2$$

$$x=C_1+C_2e^{2t}.$$

Uvrštenje početnih uvjeta daje

$$0=C_1+C_2$$

$$3=C_1+C_2e^{2\ln 2} \text{ ili } 3=C_1+4C_2.$$

Odatle: $C_1=-1$ i $C_2=1$, pa je

$$\underline{x=e^{2t}-1.}$$

921. Materijalna tačka mase m giba se po osi X pod djelovanjem elastične sile F_1 koja je usmjerena prema ishodištu O koordinatnog sustava, a proporcionalna je s udaljenošću tačke od O; sredina u kojoj se giba tačka vrši otpor, koji je razmjeran s brzinom gibanja tačke. Odredi zakon gibanja tačke.

Ako je $x(t)$ put što ga je tačka prevalila u moment t, tada je u taj moment t brzina tačke $\dot{x}(t)$, ubrzanje $\ddot{x}(t)$, dok je elastična sila $F_1=-\omega^2x(t)$, a sila otpora $F_2=-2k\dot{x}(t)$, gdje su ω^2 i $2k$ koeficijenti razmjernosti.

Prema drugom Newtonovu zakonu imamo

$$m\ddot{x}=-\omega^2x-2k\dot{x}$$

ili za $m=1$:

$$\ddot{x}+2k\dot{x}+\omega^2x=0,$$

a to je linearna homogena diferencijalna jednadžba drugog reda.

Karakteristična jednadžba:

$$l^2+2kl+\omega^2=0,$$

a odatle je

$$l_{1,2}=-k\pm\sqrt{k^2-\omega^2}. \qquad \text{(a)}$$

Promotrimo tri slučaja:

1) Diskriminanta $k^2-\omega^2>0$ pa su korijeni realni i različiti, označimo ih s $l_1=-r_1$ i $l_2=-r_2$.
Tada je

$$x=C_1e^{-r_1t}+C_2e^{-r_2t}.$$

Opće rješenje kazuje da je gibanje tačke aperiodično.

2) Diskriminanta $k^2-\omega^2=0$, pa je prema (a) $l_1=l_2=-k$.

Opće rješenje $\qquad x=(C_1+C_2t)e^{-kt}.$

Gibanje tačke opet je aperiodično.

3) Diskriminanta $k^2-\omega^2<0$, pa su korijeni konjugirano kompleksni.
Označimo li $k^2-\omega^2=-k_1^2$, dobit ćemo prema (a)

$$l_{1,2}=-k\pm i\,k_1,$$

dok je opće rješenje prema (108c)':

$$x=Ce^{-kt}\cdot\sin(k_1t+D),$$

gdje su C i D konstante po volji.
Tačka vrši prigušena titranja, jer amplituda tih titraja nije konstantna već je funkcija vremena t i to eksponencijalna funkcija Ce^{-kt}, koja teži nuli kad $t\to\infty$.

[Vidi Titranja, § 10, 3. f)].

922. Odredi integralnu krivulju diferencijalne jednadžbe $y''+2y'+2y=0$ koja prolazi tačkom $T_1(0\,;\,1)$ i dira u toj tački pravac $y=x+1$.

$$[y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)\;;\; y=e^{-x}(\cos x+2\sin x)].$$

923. Riješi zadatak 921 zanemarivši silu otpora $F_2=-2k\dot{x}$.

$$[x=C\sin(\omega t+D)\to \text{harmonično gibanje perioda } \frac{2\pi}{\omega},$$

koji ovisi samo o koeficijentu elastičnosti ω].

b) Viših redova

Upute

Opći oblik jednadžbe:

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+\ldots+a_2y''+a_1y'+a_0y=0.$$

Njoj odgovara karakteristična jednadžba:

$$a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+a_{n-2}r^{n-2}+\ldots+a_2r^2+a_1r+a_0=0.$$

Opće rješenje:

$$y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3+\ldots+C_{n-1}y_{n-1}+C_ny_n,$$

gdje su $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ partikularna rješenja diferencijalne jednadžbe i to linearno nezavisna. Spomenimo, da je dovoljni uvjet linearne nezavisnosti n funkcija neprekinutih zajedno sa svojim derivacijama jest da je determinanta Wronskoga „vronskijana" različita od nule u intervalu $[a,b]$, tj.

$$W_n=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots\ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots\ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}\neq 0.$$

U tablici koja slijedi prikazana je veza izmedu korijena karakteristične jednadžbe i partikularnih rješenja diferencijalne jednadžbe.

Redni broj	Oblici korijena karakteristične jednadžbe	Partikularna rješenja diferencijalne jednadžbe
1	r je jednostruki realni korijen	e^{rx}
2	r je realni korijen višestrukosti k	$e^{rx},\ xe^{rx},\ x^2e^{rx}, \ldots\ldots, x^{k-1}e^{rx}$
3	$a \pm bi$ par konjugirano kompleksnih korijena višestrukosti k	$e^{ax}\cos bx\ ;\ xe^{ax}\cos bx, \ldots\ldots, x^{k-1}e^{ax}\cos bx$ $e^{ax}\sin bx\ ;\ xe^{ax}\sin bx, \ldots\ldots, x^{k-1}e^{ax}\sin bx$

Zadaci

U zadacima **924** do **944** uklj. riješi zadane diferencijalne jednadžbe odredivši opća, odnosno partikularna rješenja, ako su zadani početni uvjeti.

924. $y''' - y' = 0$.

Funkcije e^x, e^{-x} i $\operatorname{ch} x$ su partikularna rješenja zadane diferencijalne jednadžbe, jer je zadovoljavaju (pokaži to uvrštenjem!). Nastaje pitanje, da li je moguće po tim partikularnim rješenjima sastaviti opće rješenje diferencijalne jednadžbe? Znamo, da partikularna rješenja, koja ulaze u opće rješenje, moraju biti linearno nezavisna, stoga ćemo izračunati vronskijan:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \operatorname{ch} x \\ e^x & -e^{-x} & \operatorname{sh} x \\ e^x & e^{-x} & \operatorname{ch} x \end{vmatrix} = 0,$$

jer su elementi prvog i trećeg retka jednaki, pa su te tri funkcije linearno zavisne, pa pomoću njih ne možemo sastaviti opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe. Primijetimo da do istog zaključka dolazimo i jednostavnije, ako se sjetimo da je $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$ (linearna zavisnost!).

Riješimo zadanu jednadžbu pomoću karakteristične jednadžbe koja glasi

$$r^3 - r = 0, \text{ pa je } r_1 = 0,\ r_2 = 1 \text{ i } r_3 = -1.$$

Korijeni su realni i različiti, pa prema retku 1 tablice partikularna rješenja glase 1, e^x i e^{-x}, dok je opće rješenje

$$\underline{y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}}.$$

925. Da li su zadane funkcije linearno nezavisne? Ako jesu, napiši pripadno opće rješenje

1) $2x^2 + 1\ ;\ x^2 - 1\ ;\ x + 2$. [da].

2) $1 + x\ ;\ 2x + 1\ ;\ x + 2$. [ne].

926. $y''' - 6y'' + 13y' = 0$.

Karakteristična jednadžba: $r^3 - 6r^2 + 13r = 0$ ili $r(r^2 - 6r + 13) = 0$.

Odatle je

$$r_1 = 0,\ r_{2,3} = 3 \pm 2i.$$

Rješenja su jednostruka pa prema recima 1 i 3 tabele imamo

$$y_1 = e^0 = 1\ ;\ y_2 = e^{3x}\cos 2x \text{ i } y_3 = e^{3x}\sin 2x.$$

Opće rješenje

$$\underline{y = C_1 + e^{3x}(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)}.$$

927. $y^{(4)} - 6y'' + 9y = 0$.

$r^4 - 6r^2 + 9 = 0$ ili $(r^2 - 3)^2 = 0$.

Slijedi (k je višestrukost korijena)

$$r_1 = \sqrt{3}\ ;\ k = 2$$

$$r_2 = -\sqrt{3}\ ;\ k = 2.$$

Opće rješenje prema retku 2 tabele:

$$\underline{y = C_1 e^{x\sqrt{3}} + C_2 x e^{x\sqrt{3}} + C_3 e^{-x\sqrt{3}} + C_4 x e^{-x\sqrt{3}}}.$$

928. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0$.

$r^4 - 2r^3 + r^2 = 0$ ili $r^2(r^2 - 2r + 1) = 0$.

Slijedi: $r_{1,2} = 0\ ;\ r_{3,4} = 1$

Partikularni integrali: $y_1 = 1\ ;\ y_2 = x\ ;\ y_3 = e^x\ ;\ y_4 = xe^x$.

Opće rješenje: $\underline{y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 x e^x}$.

929. $\frac{d^4 y}{dx^4} - y = 0$.

$$r^4 - 1 = 0 \text{ ili } (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0$$

$$r_{1,2} = \pm 1\ ;\ r_{3,4} = \pm i.$$

Prema recima 1 i 3 tablice

$$y_1 = e^x\ ;\ y_2 = e^{-x}\ ;\ y_3 = \cos x\ ;\ y_4 = \sin x$$

$$\underline{y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x}.$$

930. $y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0$.

$r^4 + 13r^2 + 36 = 0$.

Stavimo li $r^2 = u$, dobivamo $u^2 + 13u + 36 = 0$,

pa je $u_1 = -4$, a $u_2 = -9$, slijedi $r_{1,2} = \pm 2i$ i $r_{3,4} = \pm 3i$.

Prema retku 3 tablice

$$\underline{y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x}.$$

931. $\frac{d^3 s}{dt^3} + s = 0$.

$$r^3 + 1 = 0 \text{ ili } (r + 1)(r^2 - r + 1) = 0.$$

$$r_1 = -1:\quad r_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Prema recima 1 i 3 tablice

$$s_1=e^{-t};\quad s_2=e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t;\quad s_3=e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

$$\underline{s=C_1e^{-t}+e^{\frac{t}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).}$$

932. $y^{(6)}+64y=0.$

$$r^6+64=0;\quad r_{1,2}=\sqrt{3}\pm i;\quad r_{3,4}=\pm 2i;\quad r_{5,6}=-\sqrt{3}\pm i.$$

(vidi Dio I Repetitorija § 1, 2).

Prema retku 3 tablice:

$$\underline{y=\left(C_1e^{\sqrt{3}x}+C_5e^{-\sqrt{3}x}\right)\cos x+\left(C_2e^{\sqrt{3}x}+C_6e^{-\sqrt{3}x}\right)\sin x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x.}$$

933. $4y^{(4)}-3y''-y=0.$

$$4r^4-3r^2-1=0.$$

Pomoću $r^2=u$ dobivamo:

$$r_{1,2}=\pm 1\quad\text{i}\quad r_{3,4}=\pm\frac{1}{2}i$$

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos\frac{x}{2}+C_4\sin\frac{x}{2}. \qquad \text{(a)}$$

Kako je $\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x=e^x$, a $\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x=e^{-x}$ [vidi Dio I Repetitorija, formula (60)] dobivamo

$$C_1(\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x)+C_2(\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x)=$$

$$=\operatorname{ch}x\underbrace{(C_1+C_2)}_{C_1'}+\operatorname{sh}x\underbrace{(C_1-C_2)}_{C_2'}=C_1'\operatorname{ch}x+C_2'\operatorname{sh}x.$$

Uvrštenje u (a) daje

$$\underline{y=C_1'\operatorname{ch}x+C_2'\operatorname{sh}x+C_3\cos\frac{x}{2}+C_4\sin\frac{x}{2}.}$$

934. $y^{(7)}+2y^{(5)}+y'''=0.$

$$r^7+2r^5+r^3=0\quad\text{ili}\quad r^3(r^4+2r^2+1)=0\quad\text{ili}\quad r^3(r^2+1)^2=0.$$

Slijedi: $r_{1,2,3}=0;\quad r_{4,5}=\pm i;\quad r_{6,7}=\pm i$

$$\underline{y=C_1+C_2x+C_3x^2+(C_4+C_6x)\cos x+(C_5+C_7x)\sin x.}$$

935. $y'''+3y''+3y'+y=0$ i partikularno rješenje za početne uvjete $y(0)=1;\ y'(0)=2;\ y''(0)=3.$

$$r^3+3r^2+3r+1=0\quad\text{ili}\quad (r+1)^3=0,\quad\text{pa je}\quad r_{1,2,3}=-1.$$

Opće rješenje $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3x^2e^{-x}=\underline{e^{-x}(C_1+C_2x+C_3x^2).}$

Odatle $\qquad y'=e^{-x}[-C_1+C_2+(2C_3-C_2)x-C_3x^2],$

a $\qquad y''=e^{-x}[C_1-2C_2+2C_3+(C_2-4C_3)x+C_3x^2].$

Uvrštenje početnih uvjeta daje

$$-1=C_1$$

$$2=C_2+1,\quad\text{pa je}\quad C_2=1$$

$$3=(-1-2+2C_3),\quad\text{pa je}\quad C_3=3$$

partikularno rješenje $\qquad \underline{y=e^{-x}(-1+x+3x^2).}$

936. $\dfrac{d^2\rho}{d\varphi^2}+2a\dfrac{d\rho}{d\varphi}+a^2\rho=0$ i partikularno rješenje za $\rho(0)=a$ i $\rho'(0)=0.$

$$r^2+2ar+a^2=0;\quad r_{1,2}=-a.$$

$$\rho=C_1e^{-a\varphi}+C_2\varphi e^{-a\varphi}$$

ili $\qquad \underline{\rho=e^{-a\varphi}(C_1+C_2\varphi).}$ Opće rješenje.

$$\rho'=e^{-a\varphi}[C_2-a(C_1+C_2\varphi)].$$

Uvrštenje početnih uvjeta daje:

$$a=C_1;\quad 0=C_2-a^2,\quad\text{pa je}\quad C_2=a^2.$$

Partikularno rješenje: $\qquad \underline{\rho=ae^{-a\varphi}(1+a\varphi).}$

937. $\dddot{x}-3\ddot{x}+4x=0.$

$$r^3-3r^2+4=0\quad\text{ili}\quad r^3+r^2-4r^2+4=0,\quad\text{pa je}$$

$$r^2(r+1)-4(r^2-1)=0\quad\text{ili}\quad (r+1)(r^2-4r+4)=0$$

$$r_1=-1\quad r_{2,3}=2$$

$$\underline{x=C_1e^{-t}+e^{2t}(C_2+C_3t).}$$

938. $\dfrac{d^3y}{dx^3}+6\dfrac{d^2y}{dx^2}+25\dfrac{dy}{dx}=0.$ $\qquad [y=C_1+e^{-3x}(C_2\cos 4x+C_3\sin 4x)].$

939. $\dddot{s}+5\ddot{s}=0.$ $\qquad [s=C_1+C_2t+C_3e^{-5t}].$

940. $y^{(5)}+9y'''=0.$ $\qquad [y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4\cos 3x+C_5\sin 3x].$

941. $y^{IV}+18y''+81y=0.$ $\qquad [y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+x(C_3\cos 3x+C_4\sin 3x)].$

942. $y'''+y'=0;\quad y(0)=2,\quad y'(0)=0$ i $y''(0)=-1.$ $\qquad [y=1+\cos x].$

943. $y^{(4)}-2y''+y'=0.$ $\qquad \left[y=C_1+C_2e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{5}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)\right].$

944. $y^{V}-y'=0;$ za $x=0$ $y=0,$ $y'=1;$ $y''=0,$ $y'''=1$ i $y^{IV}=2.$ $\qquad [y=e^x+\cos x-2].$

2. Nehomogene linearne diferencijalne jednažbe s konstantnim koeficijentima

Opći oblik

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+\ldots+a_2y''+a_1y'+a_0y=f(x).$$

a) Rješavanje tih jednadžbi načinom neodređenih koeficijenata.

Pomoću te metode rješavaju se samo linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima i samo u dolje navedenim posebnim slučajevima. U općem slučaju treba primijeniti metodu varijacije konstanata integracije (vidi dalje b).

Opće rješenje glasi

$$y=y_0+\eta,$$

gdje je: y_0 opće rješenje pripadne prikraćene diferencijalne jednadžbe, tj. homogene jednadžbe, koja se dobije iz zadane jednadžbe tako da se desna strana $f(x)$ stavi jednakom nuli;

η je partikularno rješenje zadane nehomogene jednadžbe.

Prvo se rješava na gore navedeni način pripadna prikraćena jednadžba da se dobije y_0, a zatim se određuje partikularno rješenje η prema desnoj strani $f(x)$ zadane diferencijalne jednadžbe.

U ovisnosti o zadanoj funkciji $f(x)$ razlikujemo više slučajeva.

Prvi slučaj

Desna strana linearne diferencijalne jednadžbe je polinom n-tog stupnja.

Upute

η je također polinom i to stepena $r+n$, gdje je r red najniže derivacije koja ulazi u diferencijalnu jednadžbu (y se smatra derivacijom nultog reda pa se uzima $r=0$), dok je n stepen polinoma na desnoj strani zadane jednadžbe.

Zadaci

U zadacima **945** do **958** uklj. riješi zadane diferencijalne jednadžbe odredivši opće rješenje, odnosno i partikularno, ako su zadani početni uvjeti.

945. $$y''-2y'+2y=x^2.$$

$$y=y_0+\eta.$$

Prikraćena diferencijalna jednadžba

$$y''-2y'+2y=0$$

$$r^2-2r+2=0 \quad ; \quad r_{1,2}=1\pm i$$

$$y_0=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x). \qquad \text{(a)}$$

$\eta=?$ $r+n=0+2=2$, η je polinom stepena 2:

$$\eta=a_2x^2+a_1x+a_0, \qquad \text{(b)}$$

gdje su a_2, a_1 i a_0 koeficijenti koje treba odrediti uz pretpostavku da je η partikularno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe, vrijednosti η, η' i η'' moraju zadanu jednadžbu zadovoljavati.

Računamo:

$$\eta'=2a_2x+a_1$$

$$\eta''=2a_2.$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje

$$2a_2x^2+(-4a_2+2a_1)x+(2a_2-2a_1+2a_0)\equiv x^2.$$

Dva su polinoma identički jednaka kad su im jednaki koeficijenti istih potencija x.

Slijedi:

$$2a_2=1, \text{ pa je } \underline{a_2=\frac{1}{2}}$$

$$-4a_2+2a_1=0 \quad \text{ili} \quad -2+2a_1=0, \text{ pa je } \underline{a_1=1}$$

$$2a_2-2a_1+2a_0=0 \quad \text{ili} \quad 1-2+2a_0=0, \text{ pa je } \underline{a_0=\frac{1}{2}}.$$

Uvrštenje u (b) daje:

$$\eta=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x+1)^2. \qquad \text{(c)}$$

Uvrstimo li (a) i (c) u $y=y_0+\eta$, dobit ćemo traženo opće rješenje

$$\underline{y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{1}{2}(x+1)^2.}$$

946. $$y'''-4y''+5y'-2y=2x+3.$$

Riješimo pripadnu prikraćenu jednadžbu

$$r^3-4r^2+5r-2=0.$$

Lako se može pogoditi da je $r_1=1$, jer zadovoljava jednadžbu. Podijelivši jednadžbu s $(r-1)$ dobivamo $r^2-3r+2=0$, pa je $r_2=1$ i $r_3=2$.

Slijedi:

$$y_0=C_1e^x+C_2xe^x+C_3e^{2x}.$$

η je polinom stepena $r+n=0+1=1$, pa je

$$\eta=a_1x+a_0.$$

Računamo:

$$\eta'=a_1 \quad ; \quad \eta''=0 \quad \text{i} \quad \eta'''=0.$$

Uvrštenje u zadanu diferencijalnu jednadžbu daje

$$-2a_1x+(5a_1-2a_0)\equiv 2x+3.$$

Slijedi:

$$-2a_1=2\,,\ a_1=-1.$$

$$-5-2a_0=3\,,\ a_0=-4.$$

$$\eta=-x-4.$$

$$\underline{y=(C_1+C_2x)e^x+C_3e^{2x}-x-4.}$$

947. $$y^{(4)}+y''=x^2+x.$$

$$y^{(4)}+y''=0$$

$$r^4+r^2=0\,,\ r_{1,2}=0 \quad \text{i} \quad r_{3,4}=\pm i$$

$$y_0=C_1+C_2x+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

$$r+n=2+2=4, \quad \text{pa je}$$

$$\eta=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

$$\eta'=4a_4x^3+3a_3x^2+2a_2x+a_1$$

$$\eta''=12a_4x^2+6a_3x+2a_2$$

$$\eta'''=24a_4x+6a_3$$

$$\eta^{(4)}=24a_4.$$

Uvrštenje u zadanu diferencijalnu jednadžbu daje

$$12a_4x^2+6a_3x+(24a_4+2a_2)\equiv x^2+x.$$

Slijedi:
$$a_4=\frac{1}{12}\,,\quad a_3=\frac{1}{6}\,,\quad a_2=-1.$$

$$\eta=\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}-x^2,$$

pa je
$$\underline{y=C_1+C_2x+C_3\cos x+C_4\sin x+\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}-x^2.}$$

948. $y'''-y'=3(2-x^2)$ i partikularno rješenje uz početne uvjete za $x=0$, $y=1$, $y'=1$ i $y''=1$.

$$r^3-r=0;\quad r_1=0 \quad \text{i} \quad r_{2,3}=\pm 1.$$

$$y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}.$$

Kako je $r+n=1+2=3$ to je

$$\eta=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

$$\eta'=3a_3x^2+2a_2x+a_1$$

$$\eta''=6a_3x+2a_2$$

$$\eta'''=6a_3.$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje

$$6a_3-3a_3x^2-2a_2x-a_1\equiv -3x^2+6$$

$$-3a_3=-3, \quad \text{pa je} \quad a_3=1$$

$$-2a_2=0, \quad \text{pa je} \quad a_2=0$$

$$6-a_1=6, \quad \text{pa je} \quad a_1=0$$

$$\eta=x^3+a_0$$

$$\underline{y=C_1'+C_2e^x+C_3e^{-x}+x^3,}$$

gdje je $C_1'=C_1+a_0$.

Računamo:
$$y'=C_2e^x-C_3e^{-x}+3x^2$$

$$y''=C_2e^x+C_3e^{-x}+6x.$$

Uvrštenje početnih uvjeta daje

$$C_2=1,\quad C_3=0 \quad \text{i} \quad C_1'=0,$$

pa je

$$\underline{y=e^x+x^3}$$

traženo partikularno rješenje.

949. $2y''-y'=1$; $y(0)=0$ i $y'(0)=1$.

$$2r^2-r=0;\quad r_1=0,\quad r_2=\frac{1}{2}$$

$$y_0=C_1+C_2e^{\frac{x}{2}}.$$

$r+n=1+0=1$, jer je konstanta polinom nultog stupnja, pa je

$$\eta=a_1x+a_0,\quad \eta'=a_1 \quad \text{i} \quad \eta''=0.$$

Slijedi:
$$a_1=-1,$$

dok koeficijent a_0 može biti koji god realan broj; kako nama odgovara bilo koje partikularno rješenje to je najjednostavnije uzeti $a_0=0$. Partikularni integral je tada oblika:

$$\eta=-x$$

$$\underline{y=C_1+C_2e^{\frac{x}{2}}-x.}$$

$$y'=\frac{1}{2}C_2e^{\frac{x}{2}}-1$$

$$\left.\begin{aligned} y(0)&=C_1+C_2=0\\ y'(0)&=\frac{1}{2}C_2-1=1\end{aligned}\right|\quad C_2=4;\quad C_1=-4$$

$$\underline{y=4e^{\frac{x}{2}}-x-4.}$$

950. $y'''-4y=8x^3$. $\qquad [y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-2x^3-3x]$.

951. $y''-2y'=x^2-x$. $\qquad \left[y=C_1+C_2e^{2x}-\frac{x^3}{6}\right]$.

952. $\dddot{x}+\dot{x}=3t^2$. $\qquad [x=C_1+C_2\cos t+C_3\sin t-t^3+6t]$.

953. $y^{(4)}-2y''+y'=2x$. $\qquad \left[y=C_1+C_2e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{5}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)+x^2+4x\right]$.

954. $y''+6y'+5y=25x^2-2$; $y(0)=1$ i $y'(0)=1$.

$$\left[y=-\frac{1}{2}(e^{-5x}+21e^{-x})+5x^2-12x+12\right].$$

955. $y'''-y=x^3-1$. $\left[y=C_1e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-x^3-5\right]$.

956. $y''-3y'=3x+x^2$; $y(0)=0$ i $y'(0)=\frac{70}{27}$. $\left[y=e^{3x}-1-\frac{1}{9}x^3-\frac{11}{18}x^2-\frac{11}{27}x\right]$.

957. Lanac duljine 18 m, koji visi na glatkoj kuki, skliže pod djelovanjem vlastite težine. U početni moment s jedne strane kuke visjelo je 10 m lanca, a s druge strane 8 m. Odredi za koliko će vremena skliznuti s kuke čitav lanac, ako je u početni moment s jedne strane kuke visjelo 10 m lanca, a s druge 8 m i ako je brzina lanca bila jednaka nuli.

Očito je da je pokretna sila F lanca razlika težina dijelova lanca s jedne i druge strane kuke. Označimo s P kg težinu jednog tekućeg metra lanca, a sa x (u m) duljinu visećeg dijela lanca, koji visi ispod kuke iza t sek nakon početka gibanja. Očito je da je pokretna sila F lanca jednaka razlici težina dijelova lanca s jedne i s druge strane kuke, pa će prema slici 126 biti:

$$F_1=[x-(18-x)]P\,\text{kp}=(2x-18)P.$$

U drugu ruku prema drugom Newtonovu zakonu imamo:

masa lanca $M=\frac{18P}{g}\,\frac{\text{kp}}{\text{m}}\,\text{sek}^2$, dok je ubrzanje u moment t

$$a=\ddot{x}\,\text{m/sek}^2,\ \text{pa je}$$

$$F_2=M\cdot a=\frac{18P}{g}\cdot\ddot{x}.$$

Slijedi $F_1=F_2$, pa je

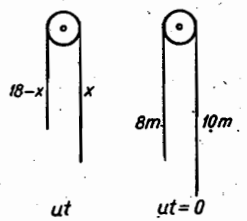
$$(2x-18)P=\frac{18P}{g}\ddot{x}\ \Big|\cdot\frac{g}{18P}$$

$$\ddot{x}-\frac{g}{9}x=-g. \qquad \text{(a)}$$

To je diferencijalna jednadžba gibanja težišta lanca.

Riješimo je uz početne uvjete : u $t=0$ $x=10$ i $\dot{x}=0$.

$x_0=?$ Prikraćena jednadžba: $\ddot{x}-\frac{g}{9}x=0$.



Slika 126

Karakteristična $r^2-\frac{g}{9}=0$, pa je $r=\pm\frac{\sqrt{g}}{3}$

$$x_0=C_1e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t}+C_2e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t}$$

$\eta=?$ $r+n=0+0=0$.

$\eta=a_0$, $\eta'=0$ i $\eta''=0$.

Uvrštenje u (a) daje

$$0-\frac{g}{9}a_0=-g;\quad a_0=9 \text{ i } \eta=9,$$

pa je $x=x_0+\eta=C_1e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t}+C_2e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t}+9.$

To je zakon gibanja težišta lanca.

Uvedimo početne uvjete: $x(0)=10$ i $\dot{x}(0)=0$:

$$\dot{x}=C_1\frac{\sqrt{g}}{3}e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t}-C_2\frac{\sqrt{g}}{3}e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t}$$

$$\left.\begin{aligned}10&=C_1+C_2+9\\0&=\frac{\sqrt{g}}{3}(C_1-C_2)\end{aligned}\right|\ C_1=C_2=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t}+e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t}}{2}+9$$

$$x=\text{ch}\left(\frac{\sqrt{g}}{3}t\right)+9. \qquad \text{(b)}$$

To je jednadžba gibanja težišta lanca niz kuku.

Da odredimo vrijeme T za koje će čitav lanac skliznuti, uvrstimo u (b) $t=T$ i $x=18$:

$$18=\text{ch}\left(\frac{\sqrt{g}}{3}T\right)+9$$

ili $\frac{\sqrt{g}}{3}T=\text{Arch}\,9$, a prema (80) iz dijela I Repetitorija:

$$T=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln(9+\sqrt{81-1})=\frac{3}{\sqrt{9{,}81}}\ln(9+4\sqrt{5})=\underline{2{,}76\ \text{sek.}}$$

958. Riješi zadatak 957 uzevši sad u obzir i trenje lanca na kuki, ako je sila trenja jednaka težini 1 m′ lanca.

$$\left[\text{Jednadžba gibanja težišta lanca glasi } 18\ddot{x}=gx-(18-x)g-g\cdot 1;\right.$$
$$\left.T=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln(17+12\sqrt{2})=3{,}46\ \text{sek.}\right].$$

Drugi slučaj

Desna strana linearne diferencijalne jednadžbe je eksponencijalna funkcija ili algebar zbroj tih funkcija

Upute

Partikularno rješenje η glasi za desnu stranu oblika $f(x)=ke^{bx}$

$$\eta=\frac{ke^{bx}}{P(b)} \qquad \text{(A)}$$

ako eksponent b **nije korijen** karakteristične jednadžbe, tj. ako je

$$b \neq r_1,\ b \neq r_2, \ldots .$$

$$\eta = \frac{kxe^{bx}}{P'(b)} \qquad \text{(B)}$$

ako je b **jednostruki korijen** karakteristične jednadžbe, tj. ako je

$$b = r_1,\ b \neq r_2,\ b \neq r_3, \ldots .$$

$$\eta = \frac{kx^2e^{bx}}{P''(b)} \qquad \text{(C)}$$

ako je b **dvostruki korijen** karakteristične jednadžbe, tj. ako je

$$b = r_1,\ b = r_2,\ b \neq r_3,\ b \neq r_4, \ldots ,$$

itd.

$P(b)$ je lijeva strana karakteristične jednadžbe, u koju je uvršteno $r=b$, a $P'(b)$, $P''(b)$ itd. su derivacije tog polinoma.

Zadaci

U zadacima **959** do **973** uklj. riješi zadane diferencijalne jednadžbe odredivši opća rješenja, odnosno partikularna, ako su zadani početni uvjeti.

959.

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = e^{-2t}.$$

$$y = y_0 + \eta,\ y_0 = ?\quad r^2 + 4r + 4 = 0\ ;\ r_{1,2} = -2$$

$$y_0 = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t}.$$

$$\eta = ?\quad b = -2 = r_{1,2} \rightarrow \text{slučaj (C)}.$$

$$\eta = \frac{1 \cdot t^2e^{-2t}}{P''(b)}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(b) = b^2 + 4b + 4 \\ P'(b) = 2b + 4 \\ P''(b) = 2 \end{array}\right| \quad \eta = \frac{t^2e^{-2t}}{2}$$

$$x = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t} + \frac{t^2}{2}e^{-2t}$$

ili

$$\underline{x = \left(C_1 + C_2t + \frac{t^2}{2}\right)e^{-2t}.}$$

960.

$$y''' + 8y = e^{-2x}.$$

$$r^3 + 8 = 0\ ;\ (r+2)(r^2 - 2r + 4) = 0\ ;\ r_1 = -2\ ;\ r_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

$$y_0 = C_1e^{-2x} + \left(C_2 \cos(\sqrt{3}\,x) + C_3 \sin(\sqrt{3}\,x)\right)e^x$$

$$\eta = ?\quad b = -2 = r_1 \neq r_{2,3} \rightarrow \text{slučaj (B)}.$$

$$\eta = \frac{xe^{-2x}}{P'(-2)}.$$

$$P(b) = b^3 + 8$$

$$P'(b) = 3b^2\ ;\ P'(-2) = 12,\ \text{pa je}\ \eta = \frac{xe^{-2x}}{12}.$$

$$\underline{y = \left(C_1 + \frac{x}{12}\right)e^{-2x} + \left(C_2 \cos(\sqrt{3}\,x) + C_3 \sin(\sqrt{3}\,x)\right)e^x.}$$

961.

$$y^{(4)} - 81y = 27e^{-3x}.$$

$$r^4 - 81 = 0\ ;\ (r^2+9)(r^2-9) = 0\ ;\ r_{1,2} = \pm 3\ ;\ r_{3,4} = \pm 3i$$

$$y_0 = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$$

$$\eta = ?\quad b = -3 = r_2 \neq r_1 \neq r_{3,4} \rightarrow \text{slučaj (B)}$$

$$\eta = \frac{27xe^{-3x}}{P'(-3)}$$

$$P(b) = b^4 - 81\ ;\ P'(b) = 4b^3\ ;\ P'(-3) = -108$$

$$\eta = -\frac{1}{4}xe^{-3x}$$

$$\underline{y = C_1e^{3x} + \left(C_2 - \frac{x}{4}\right)e^{-3x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x.}$$

962.

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x.$$

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = (r-1)^3 = 0\ ;\ r_{1,2,3} = 1.$$

$$y_0 = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x.$$

$$\eta = ?\quad b = 1 = r_{1,2,3} \rightarrow \text{slučaj (D)}.$$

$$\eta = \frac{x^3e^x}{P'''(b)}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(b) = b^3 - 3b^2 + 3b - 1 \\ P'(b) = 3b^2 - 6b + 3 \\ P''(b) = 6b - 6 \\ P'''(b) = 6 \end{array}\right| \quad \eta = \frac{x^3e^x}{6}$$

$$\underline{y = \left(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \frac{x^3}{6}\right)e^x.}$$

963. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$. Početni uvjeti: za $x=0$ $y=0$ i $y'=1$

$$r^2 - 8r + 16 = 0;\quad r_{1,2} = 4.$$

$$y_0 = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x}$$

$$\eta = \frac{kx^2e^{4x}}{P''(b)} = \frac{x^2e^{4x}}{2}$$

$$b=4=r_{1,2}\rightarrow \text{slučaj (C)}.$$

$$\eta=\frac{x^2e^{4x}}{P''(b)}.$$

$$P=b^2-8b+16;\quad P'=2b-8;\quad P''=2,\quad \text{pa je}\quad \eta=\frac{x^2e^{4x}}{2}$$

$$y=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}+\frac{1}{2}x^2e^{4x}=\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2\right)e^{4x}.$$

$$y'=4C_1e^{4x}+4C_2xe^{4x}+C_2e^{4x}+2x^2e^{4x}+xe^{4x}.$$

Uvrstimo $y(0)=0$ i $y'(0)=1$:

$$0=C_1$$

$1=C_2$, pa je traženo partikularno rješenje

$$y=\frac{1}{2}x(x+2)e^{4x}.$$

964. $y''-3y'+2y=e^x.$ $\quad [y=C_1e^{2x}+(C_2-x)e^x]$.

965. $y''-2y'+y=e^{2x}.$ $\quad [y=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{e^{2x}}{2}]$.

966. $\dfrac{d^2r}{d\varphi^2}-6\dfrac{dr}{d\varphi}+9r=4e^{3\varphi}.$ $\quad [r=e^{3\varphi}(C_1+C_2\varphi+2\varphi^2)]$.

967. $y'''-5y''+3y'+9y=5e^{3x}.$ $\quad \left[y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)e^{3x}+\frac{5}{8}x^2e^{3x}\right]$.

968. $y''-4y'+3y=e^{5x};\quad y(0)=3\quad \text{i}\quad y'(0)=9.$ $\quad \left[y=\frac{1}{8}(e^{5x}+22e^{3x}+e^x)\right]$.

Važna primjedba. Ako je desna strana diferencijalne jednadžbe algebarski zbroj eksponencijalnih funkcija, tada na temelju superpozicionog stavka partikularno rješenje η odredi se za svaku eksponencijalnu funkciju posebno, a opće rješenje glasi

$$y=y_0+\eta_1+\eta_2+\dots.$$

969. $y''+5y'+6y=e^{-x}+e^{-2x}.$

$y_0=?\qquad r^2+5r+6=0;\quad r_1=-2\quad \text{i}\quad r_2=-3.$

$$y_0=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}.$$

$\eta_1=?$	$\eta_2=?$
$y''+5y'+6y=e^{-x}$	$y''+5y'+6y=e^{-2x}$
$b=-1\neq r_1\neq r_2\rightarrow$ slučaj (A).	$b=-2=r_1\neq r_2\rightarrow$ slučaj (B).
$P(b)=b^2+5b+6$	$P'(b)=2b+5$
$P(-1)=2$	$P'(-2)=1$
$\eta_1=\dfrac{e^{-x}}{2}.$	$\eta_2=\dfrac{xe^{-2x}}{1}.$

$$y=y_0+\eta_1+\eta_2.$$

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+\frac{1}{2}e^{-x}+xe^{-2x}.$$

970. $y''-5y'+6y=e^{2x}+4e^x;$ početni uvjeti: $y(0)=0$ i $y'(0)=1.$

$y_0=?\qquad r^2-5r+6=0;\quad r_{1,2}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2},\quad r_1=3\quad \text{i}\quad r_2=2.$

$$y_0=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}.$$

$\eta_1=?$	$\eta_2=?$
$y''-5y'+6y=e^{2x}$	$y''-5y'+6y=4e^x$
$b=2=r_2\neq r_1\rightarrow$ slučaj (B)	$b=1\neq r_1\neq r_2\rightarrow$ slučaj (A)
$\eta_1=\dfrac{xe^{2x}}{P'(b)}$	$\eta=\dfrac{4e^x}{P(1)}$
$P(b)=b^2-5b+6$	$P(1)=2$
$P'(b)=2b-5$	
$P'(2)=-1$	
$\eta_1=\dfrac{xe^{2x}}{-1}$	$\eta_2=\dfrac{4e^x}{2}.$

$$y=y_0+\eta_1+\eta_2$$

$$y=C_1e^{3x}+(C_2-x)e^{2x}+2e^x.$$

Da odredimo traženi partikularni integral, računamo

$$y'=3C_1e^{3x}+2C_2e^{2x}-2xe^x-e^{2x}+2e^x$$

$$y(0)=C_1+C_2+2=0$$

$$y'(0)=3C_1+2C_2-1+2=1$$

ili

$$\begin{aligned}C_1+C_2&=-2\\3C_1+2C_2&=0\end{aligned}\quad\Big|\quad C_1=4\quad\text{i}\quad C_2=-6$$

$$y=4e^{3x}-(6+x)e^{2x}+2e^x.$$

971. $\dddot{x}-3\ddot{x}+2\dot{x}=4e^{2t}-3e^{3t}.$

$y_0=?\qquad r^3-3r^2+2r=0;\quad r_1=0,\quad r_2=2\quad \text{i}\quad r_3=1$

$$y_0=C_1+C_2e^{2t}+C_3e^t$$

$$y=y_0+\eta_1+\eta_2.$$

$\eta_1 = ?$

$\dddot{x} - 3\ddot{x} + 2\dot{x} = 4e^{2t}$

$b = 2 = r_2 \neq r_1 \neq r_3 \rightarrow$ slučaj (B)

$$\eta_1 = \frac{4te^{2t}}{P'(2)}$$

$P(b) = b^3 - 3b^2 + 2b$

$P'(b) = 3b^2 - 6b + 2$

$P'(2) = 2$

$$\eta_1 = \frac{4te^{2t}}{2}.$$

$\eta_2 = ?$

$\dddot{x} - 3\ddot{x} + 2\dot{x} = -3e^{3t}$

$b = 3 \neq r_1 \neq r_2 \neq r_3 \rightarrow$ slučaj (A)

$$\eta = \frac{-3e^{3t}}{P(3)}$$

$P(3) = 6$

$$\eta_2 = \frac{-3e^{3t}}{6}$$

$$y = C_1 + (C_2 + 2t)e^{2t} + \frac{1}{2}(2C_3 - 1)e^{3t}.$$

972. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x} + 7e^{2x}$. $\left[y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 e^{-x} + \frac{7}{9}e^{2x}\right]$.

973. $y'' - 3y' + 2y = 2e^x - e^{-2x}$. $\left[y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2xe^x - \frac{1}{12}e^{-2x}\right]$.

Treći slučaj

Desna strana linearne diferencijalne jednadžbe ima oblik

$$k \sin(mx) \quad \text{ili} \quad k \cos(mx).$$

Upute

U tom slučaju partikularno rješenje η što ulazi u opće rješenje $y = y_0 + \eta$ ima oblik

$$\eta = A \cos(mx) + B \sin(mx),$$

gdje su A i B konstante koje treba odrediti iz pretpostavke da je η partikularno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe pa je mora zadovoljavati, dok je m kao i k, konstanta koja ulazi u zadanu diferencijalnu jednadžbu.

Ako desna strana diferencijalne jednadžbe ima oblik

$$k_1 \sin(mx) + k_2 \cos(mx) + \ldots,$$

gdje su $k_1, k_2, \ldots, m$ zadane konstante, tada se partikularno rješenje η odredi za svaku trigonometrijsku funkciju posebno, a opće rješenje glasi

$$y = y_0 + \eta_1 + \eta_2 + \ldots.$$

Zadaci

U zadacima **974** do **1000** uklj. riješi zadane diferencijalne jednadžbe odredivši opća rješenja, odnosno partikularna, ako su zadani početni uvjeti.

974. $y'' + y = 5 \sin 2x$.

$y = y_0 + \eta$.

$y_0 = ?$ $\quad r^2 + 1 = 0; \quad r_{1,2} = \pm i,$

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

$\eta = ?$ Kako je $m = 2$ uzimamo

$$\eta = A \cos 2x + B \sin 2x \qquad \text{(a)}$$

$$\eta' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$$

$$\eta'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje nakon uređenja

$$-3A \cos 2x - 3B \sin 2x \equiv 5 \sin 2x.$$

Izjednačimo koeficijente uz odgovarajuće trigonometrijske funkcije

$$-3A = 0, \quad \text{pa je} \quad A = 0$$

$$-3B = 5, \quad \text{pa je} \quad B = -\frac{5}{3}.$$

Uvrštenje u (a) daje

$$\eta = -\frac{5}{3} \sin 2x$$

$$y = y_0 + \eta = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{5}{3} \sin 2x.$$

975. $y'' - 2y' + 10y = 37 \cos 3x$

$r^2 - 2r + 10 = 0; \; r_{1,2} = 1 \pm 3i$

$y_0 = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Kako je $m = 3$, pišemo

$$\eta = A \cos 3x + B \sin 3x$$

$$\eta' = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x$$

$$\eta'' = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x.$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje nakon uređenja

$$(A-6B)\cos 3x+(6A+B)\sin 3x\equiv 37\cos 3x.$$

Slijedi: $\begin{array}{l|l} A-6B=37 & A=1 \\ 6A+B=0 & B=-6 \end{array}$

pa je $\eta=\cos 3x-6\sin 3x$

i $\underline{y=(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)e^x+\cos 3x-6\sin 3x.}$

976. $y''+y=\cos 3x$. Početni uvjeti: $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$ i $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

$r^2+1=0 \quad r_{1,2}=\pm i$

$y_0=C_1\cos x+C_2\sin x$

$\eta=A\cos 3x+B\sin 3x$

$\eta'=-3A\sin 3x+3B\cos 3x$

$\eta''=-9A\cos 3x-9B\sin 3x.$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje

$$-8A\cos 3x-8B\sin 3x=\cos 3x$$

$-8A=1$, pa je $A=-\frac{1}{8}$

$-8B=0$, pa je $B=0$

$$\eta=-\frac{1}{8}\cos 3x.$$

Opće rješenje $\underline{y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{8}\cos 3x.}$

$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{3}{8}\sin 3x$$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$:

$$4=C_1\cos\frac{\pi}{2}+C_2\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{8}\cos\frac{3\pi}{2}$$

$$1=-C_1\sin\frac{\pi}{2}+C_2\cos\frac{\pi}{2}+\frac{3}{8}\sin\frac{3\pi}{2}.$$

Slijedi: $\begin{array}{l|l} 4=C_2 & C_2=4 \\ 1=-C_1-\frac{3}{8} & C_1=-\frac{11}{8} \end{array}$

Partikularno rješenje $\underline{y=-\frac{11}{8}\cos x+4\sin x-\frac{1}{8}\cos 3x.}$

977. $y''-5y'+6y=13\sin 3x.$ $\left[y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{6}(5\cos 3x-\sin 3x)\right].$

978. $y''+y'+\frac{5}{2}y=25\cos 2x.$ $\left[y=\left(C_1\cos\frac{3}{2}x+C_2\sin\frac{3}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}-6\cos 2x+8\sin 2x\right].$

979. $2y''+5y'=29\cos x.$ $\left[y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+5\sin x-2\cos x\right].$

980. $\dddot{s}-3\dot{s}-2s=\sin t+2\cos t.$

$s_0=?$

$$r^3-3r-2=0$$

$$r^3-4r+r-2=0$$

$$r(r-2)(r+2)+(r-2)=0$$

$$(r-2)(r^2+2r+1)=0;\quad r_1=2;\quad r_{2,3}=-1.$$

$$s_0=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}+C_3te^{-t}.$$

$\eta_1=?$ $\dddot{s}-3\dot{s}-2s=\sin t$ (a)

$$\eta_1=A_1\cos t+B_1\sin t$$

$$\dot{\eta}_1=-A_1\sin t+B_1\cos t$$

$$\ddot{\eta}_1=-A_1\cos t-B_1\sin t$$

$$\dddot{\eta}_1=A_1\sin t-B_1\cos t.$$

Uvrštenje u (a) daje nakon uređenja:

$$(-2A_1-4B_1)\cos t+(4A_1-2B_1)\sin t\equiv\sin t \qquad \text{(b)}$$

$\begin{array}{l|l} -2A_1-4B_1=0 & A_1=\frac{1}{5},\quad B_1=-\frac{1}{10} \\ 4A_1-2B_1=1 & \end{array}$

$$\eta_1=\frac{1}{5}\cos t-\frac{1}{10}\sin t$$

$\eta_2=?$ $\dddot{s}-3\dot{s}-2s=2\cos t.$

Prema (b) $(-2A_2-4B_2)\cos t+(4A_2-2B_2)\sin t\equiv 2\cos t$

$\begin{array}{l|l} -2A_2-4B_2=2 & A_2=-\frac{1}{5};\quad B_2=-\frac{2}{5}. \\ 4A_2-2B_2=0 & \end{array}$

$$\eta_2=-\frac{1}{5}\cos t-\frac{2}{5}\sin t$$

$s=s_0+\eta_1+\eta_2.$

$$\underline{s=C_1e^{2t}+(C_2+C_3t)e^{-t}-\frac{1}{2}\sin t.}$$

981. $$y''-6y'+25y=2\sin x+3\cos x$$

$y_0=?$ $$r^2-6r+25=0 \quad ; \quad r_{1,2}=3\pm 4i$$

$$y_0=e^{3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x).$$

$\eta_1=?$ $$y''-6y'+25y=2\sin x \qquad (a)$$

$$\eta_1=A_1\cos x+B_1\sin x$$

$$\eta'_1=-A_1\sin x+B_1\cos x$$

$$\eta_1''=-A_1\cos x-B_1\sin x.$$

Uvrštenje u (a) daje nakon uređenja:

$$(24A_1-6B_1)\cos x+(6A_1+24B_1)\sin x\equiv 2\sin x \qquad (b)$$

$$\begin{array}{l|l} 24A_1-6B_1=0 & A_1=\dfrac{1}{51} \quad ; \quad B_1=\dfrac{4}{51}. \\ 6A_1+24B_1=2 & \end{array}$$

$$\eta_1=\frac{1}{51}\cos x+\frac{4}{51}\sin x.$$

$\eta_2=?$ $$y''-6y'+25y=3\cos x.$$

Prema (b):

$$(24A_2-6B_2)\cos x+(6A_2+24B_2)\sin x\equiv 3\cos x.$$

$$\begin{array}{l|l} 24A_2-6B_2=3 & A_2=\dfrac{2}{17} \quad ; \quad B_2=-\dfrac{1}{34}. \\ 6A_2+24B_2=0 & \end{array}$$

$$\eta_2=\frac{2}{17}\cos x-\frac{1}{34}\sin x$$

$$y=y_0+\eta_1+\eta_2:$$

$$\underline{y=e^{3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)+\frac{1}{102}(14\cos x+5\sin x).}$$

982. $y''+3y'+2y=\sin 2x+2\cos 2x.$ $$\left[y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\right].$$

983. $y'''-2y''+y'=4(\sin x+\cos x)$. Partikularno rješenje: za $x=0$ $y=1$, $y'=0$ i $y''=-1$.

$$[y=C_1+(C_2+C_3x)e^x+2\cos x+2\sin x\ ;$$

$$y=4+(-5+3x)e^x+2(\cos x+\sin x)].$$

984. $y^{IV}-2y''+y=3\sin mx+4\cos mx.$

$$\left[y=(C_1+C_2x)e^x+(C_3+C_4x)e^{-x}+\frac{1}{(1+m^2)^2}(3\sin mx+4\cos mx)\right].$$

Važne primjedbe

1. Ako diferencijalna jednadžba ima oblik

$$y''+m^2y=k\sin(mx) \quad \text{ili} \quad y''+m^2y=k\cos(mx)$$

(npr. $y''+4y=\cos 2x$; $y''+9y=4\sin 3x$; $y''+y=5\cos x$ i sl.) supstitucija $\eta=A\cos(mx)+$ $+B\sin(mx)$ ne vodi cilju, jer uvrštenje vrijednosti za η, η' i η'' u diferencijalnu jednadžbu pretvara lijevu stranu jednadžbe u nulu, pa koeficijenti A i B ostaju neodređeni.

Isto vrijedi za jednadžbe, kojima je desna strana ista, dok je lijeva strana $y^{IV}-m^2y$, odnosno $y^{IV}+2m^2y''+m^4y$ i sl.

U tom slučaju moramo $\sin(mx)$, odnosno $\cos(mx)$ prikazati prema Eulerovim formulama u obliku

$$\sin(mx)=\frac{e^{mix}-e^{-mix}}{2i}$$

$$\cos(mx)=\frac{e^{mix}+e^{-mix}}{2} \qquad (166)$$

(vidi Dio I. § 21) pa na taj način svodimo slučaj 3. na drugi, tj. na slučaj, kad je $f(x)$ eksponencijalna funkcija.

2. Sadrži li desna strana diferencijalne jednadžbe hiperbolne funkcije sinusa i kosinusa prelazimo pomoću formula

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad (58)$$

(vidi Dio I. § 4, 6.) na eksponencijalne funkcije.

3. Predočuje li desna strana diferencijalne jednadžbe umnožak trigonometrijskih funkcija sinusa i kosinusa, prelazimo na njihov zbroj, odnosno razliku pomoću poznatih formula iz trigonometrije.

985. $y''+4y=\cos 2x$. Početni uvjeti $y(0)=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

$y_0=?$ $\qquad r^2+4=0 \;;\; r_{1,2}=\pm 2i$

$$y_0=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$$

$\eta=?$ Kako je $m=2$, a $m^2=4$ uzimamo prema (166)

$$y''+4y=\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}.$$

$\eta_1=?$	$\eta_2=?$
$y''+4y=\frac{1}{2}e^{2ix}$	$y''+4y=\frac{1}{2}e^{-2ix}$
$b=2i=r_1\neq r_2\to$ sl. (B)	$b=-2i=r_2\neq r_1\to$ sl. (B)
$\eta_1=\frac{1}{2}\frac{xe^{2ix}}{P'(b)}$	
$P(b)=b^2+4$	
$P'(b)=2b$	
$P'(2i)=4i$	$P(-2i)=-4i$
$\eta_1=\frac{x\cdot e^{2ix}}{8i}.$	$\eta_2=-\frac{xe^{-2ix}}{8i}.$

$$\eta_1+\eta_2=\frac{x}{4}\,\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}=\text{prema (166)}=\frac{x}{4}\sin 2x.$$

$$\underline{y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{x}{4}\sin 2x.}$$

Uvrštenje $y(0)=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ u opće rješenje daje $\underline{y=\frac{1}{16}(4x-\pi)\sin 2x.}$

986. $y''+y=3\sin x$.

$y_0=?$ $\qquad r^2+1=0;\; r_{1,2}=\pm i$

$$y_0=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

$\eta=?$ $\qquad$ Kako je $m=1$, a $m^2=1$, uzimamo prema (166)

$$y''+y=3\,\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

$\eta_1=?$	$\eta_2=?$
$y''+y=\frac{3}{2i}e^{ix}$	$y''+y=-\frac{3}{2i}e^{-ix}$
$P(b)=b^2+1$	
$P'(b)=2b$	
$P'(i)=2i$	$P'(-i)=-2i$
$\eta_1=\frac{3}{2i}\frac{xe^{ix}}{2i}=-\frac{3}{4}xe^{ix}.$	$\eta_2=-\frac{3}{2i}\cdot\frac{xe^{-ix}}{-2i}=-\frac{3}{4}xe^{-ix}.$

$$\eta_1+\eta_2=-\frac{3}{2}x\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=-\frac{3}{2}x\cos x$$

$$\underline{y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{3}{2}x\cos x.}$$

987. $y^{(4)}+5y''+4y=3\sin x$.

$y_0=?$ $\qquad r^4+5r^2+4=0;\; r_{1,2}=\pm i,\; r_{3,4}=\pm 2i.$

$$y_0=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x.$$

Kako uvrštenje $\eta=A\cos x+B\sin x$ u lijevu stranu zadane diferencijalne jednadžbe daje nulu (pokaži to!), pišemo prema (166) diferencijalnu jednadžbu u obliku

$$y^{(4)}+5y''+4y=3\,\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

$\eta_1=?$	$\eta_2=?$
$b=i=r_1\neq r_2\neq r_{3,4}\to$ sl. (B)	$b=-i=r_2\neq r_1\neq r_{3,4}\to$ sl.(B)
$\eta_1=\frac{3}{2i}\frac{xe^{ix}}{P'(b)}$	$\eta_2=-\frac{3}{2i}\frac{xe^{-ix}}{P'(b)}$
$P(b)=b^4+5b^2+4$	
$P'(b)=4b^3+10b$	
$P'(i)=-4i+10i=6i$	$P'(-i)=4i-10i=-6i$
$\eta_1=\frac{3}{2i}\frac{xe^{ix}}{6i}=-\frac{1}{4}xe^{ix}.$	$\eta_2=-\frac{3}{2i}\frac{xe^{-ix}}{-6i}=-\frac{1}{4}xe^{-ix}.$

$$\eta_1+\eta_2=-\frac{1}{2}x\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=-\frac{1}{2}x\cos x.$$

$$\underline{y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos x.}$$

988. $y''+y=\cos x.$ $\left[y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x\right].$

989. $y''-8y'+16y=\sin 4x.$ $\left[y=e^{4x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{32}\cos 4x\right].$

990. $\frac{d^2x}{dt^2}+9x=6\sin 3t.$ $[x=C_1\sin 3(t-C_2)-t\cos 3t].$

991. $y^{(4)}-y=\cos x.$ $\left[y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-\frac{1}{4}x\sin x\right].$

992. $2y''+5y'=3\,\mathrm{ch}\,\frac{5}{2}x.$

Prema (58) pišemo zadanu jednadžbu u obliku

$$2y''+5y'=\frac{3}{2}\left(e^{\frac{5}{2}x}+e^{-\frac{5}{2}x}\right)$$

$\eta_0=?$ $\qquad 2r^2+5r=0;\quad r_1=0,\quad r_2=-\frac{5}{2}.$

$$y_0=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}.$$

$2y''+5y'=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}x}$	$2y''+5y'=\frac{3}{2}e^{-\frac{5}{2}x}$
$b=\frac{5}{2}\neq r_1\neq r_2\rightarrow$ sl. (A)	$b=-\frac{5}{2}\neq r_2=r_1\rightarrow$ sl. (B),
$\eta_1=\frac{3}{2}\frac{e^{\frac{5}{2}x}}{P\left(\frac{5}{2}\right)}$	$\eta_2=\frac{3}{2}\frac{xe^{-\frac{5}{2}x}}{P'\left(-\frac{5}{2}\right)}$
$P(b)=2b^2+5b$	$P'(b)=4b+5$
$P\left(\frac{5}{2}\right)=25$	$P'\left(-\frac{5}{2}\right)=-5$
$\eta_1=\frac{3}{2}\frac{e^{\frac{5}{2}x}}{25}.$	$\eta_2=\frac{3}{2}\frac{xe^{-\frac{5}{2}x}}{-5}.$

$$y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{5}e^{\frac{5}{2}x}-xe^{-\frac{5}{2}x}\right).$$

993. $y''-4y'+4y=\mathrm{sh}\,x+\sin x.$

$y_0=?$ $\qquad r^2-4r+4=0;\qquad r_{1,2}=2.$

$$y_0=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}=(C_1+C_2x)e^{2x}.$$

Prema (58): $\qquad y''-4y'+4y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$\eta_1=?$	$\eta_2=?$
$y''-4y'+4y=\frac{1}{2}e^x$	$y''-4y'+4y=-\frac{1}{2}e^{-x}$
$b=1\neq r_{1,2}\rightarrow$ sl. (A)	$b=-1\neq r_{1,2}\rightarrow$ sl. (A)
$P(b)=b^2-4b+4$	
$P(1)=1$	$P(-1)=9$
$\eta_1=\frac{e^x}{2}$	$\eta_2=-\frac{1}{9}\cdot\frac{e^{-x}}{2}$

$\eta_3=?$ $\qquad y''-4y'+4y=\sin x$ (a)

$$\eta_3=A\cos x+B\sin x$$
$$\eta_3'=-A\sin x+B\cos x$$
$$\eta_3''=-A\cos x-B\sin x.$$

Uvrštenje u (a) daje nakon uređenja

$$(3A-4B)\cos x+(4A+3B)\sin x\equiv\sin x$$

slijedi: $\quad \begin{array}{l|l} 3A-4B=0 & A=\frac{4}{25};\quad B=\frac{3}{25}. \\ 4A+3B=1 & \end{array}$

$$\eta_3=\frac{1}{25}(4\cos x+3\sin x).$$

$y=y_0+\eta_1+\eta_2+\eta_3$: $\quad y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{2}\left(e^x-\frac{1}{9}e^{-x}\right)+\frac{1}{25}(4\cos x+3\sin x).$

994. $y''+y=\mathrm{ch}\,x.$ $\left[y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}\mathrm{ch}\,x\right].$

995. $y''-4y'=2\,\mathrm{sh}\,2x.$ $\left[y=C_1+C_2e^{4x}-\frac{1}{6}(2\,\mathrm{ch}\,2x+\mathrm{sh}\,2x)\right].$

996. $y''-4y'+4y=\mathrm{sh}\,2x.$ $\left[y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{4}\left(x^2e^{2x}-\frac{1}{8}e^{-2x}\right)\right].$

997. $y''+y=\cos x\cdot\cos 2x.$

Prema formuli $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ pišemo zadanu jednadžbu u obliku

$$y''+y=\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)$$

$y_0=?$ $\qquad r^2+1=0;\qquad r_{1,2}=\pm i$

$$y_0=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

$$y''+y=\frac{1}{2}\cos 3x$$

$$\eta_1=A\cos 3x+B\sin 3x$$

$$\eta_1'=-3A\sin 3x+3B\cos 3x$$

$$\eta_1''=-9A\cos 3x-9B\sin 3x.$$

Uvrštenje daje

$$-9A\cos 3x-9B\sin 3x+$$

$$+A\cos 3x+B\sin 3x\equiv\frac{1}{2}\cos 3x.$$

Odatle je $A=-\frac{1}{16}$ i $B=0$

$$\eta_1=-\frac{1}{16}\cos 3x$$

$$y''+y=\frac{1}{2}\cos x$$

$$m=1;\quad m^2=1.$$

$$y''+y=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}.$$

Na poznati nam način dobivamo iz

$$y''+y=\frac{1}{4}e^{ix}$$

i $$y''+y=\frac{1}{4}e^{-ix}$$

$$\eta_2=\frac{1}{4}\cdot\frac{xe^{ix}}{2i}\quad\text{i}\quad\eta_3=-\frac{1}{4}\cdot\frac{xe^{-ix}}{2i}.$$

pa je $\eta_2+\eta_3=+\frac{1}{4}x\sin x.$

$y=y_0+\eta_1+\eta_2+\eta_3$:

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{4}\left(x\sin x-\frac{1}{4}\cos 3x\right).$$

998. $y''-4y'+4y=\sin x\cdot\cos 2x.$

Prema formuli $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ imamo.

$$y''-4y'+4y=\frac{1}{2}(\sin 3x-\sin x)$$

$$r^2-4r+4=0;\quad r_{1,2}=2.$$

$$y_0=e^{2x}(C_1+C_2x).$$

$$y''-4y'+4y=\frac{1}{2}\sin 3x$$

$$\eta_1=A_1\cos 3x+B_1\sin 3x$$

Vrijednosti η_1, η_1' i η_1'' uvrštene u jednadžbu daju nakon uređenja i izjednačenja

$$-5A_1-12B_1=0$$

$$12A_1-5B_1=\frac{1}{2}$$

a odatle je $A_1=\frac{6}{169}$ i $B_1=-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{169}$,

pa je

$$\eta_1=\frac{1}{169}\left(6\cos 3x-\frac{5}{2}\sin 3x\right).$$

$$y''-4y'+4y=-\frac{1}{2}\sin x$$

$$\eta_2=A_2\cos x+B_2\sin x$$

Postupajući na isti način dobivamo

$$3A_2-4B_2=0$$

$$4A_2+3B_2=-\frac{1}{2}$$

a odatle je $A_2=-\frac{2}{25}$ i $B_2=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{25}$,

pa je

$$\eta_2=-\frac{1}{50}(4\cos x+3\sin x).$$

$$y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{169}\left(6\cos 3x-\frac{5}{2}\sin 3x\right)-\frac{1}{50}(4\cos x+3\sin x).$$

999. $y''+9y=2\sin x\cdot\sin 2x$. Početni uvjeti $y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

$$\left[y=\frac{1}{8}\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x-\frac{1}{6}x\sin 3x+\frac{\pi}{12}\sin 3x\right]$$

1000. $y''-4y=\sin\frac{3}{2}x\cdot\sin\frac{1}{2}x$. Početni uvjeti: $y(0)=1$; $y'(0)=0$.

$$\left[y=\frac{83}{160}(e^{2x}+e^{-2x})-\frac{1}{10}\cos x+\frac{1}{16}\cos 2x\right].$$

Četvrti slučaj

Desna strana $f(x)$ diferencijalne jednadžbe je zbroj polinoma, eksponencijalne funkcije i funkcije sinusa ili kosinusa, tj. ima oblik

$$f(x)=P_n(x)+K_1e^{bx}+K_2\sin(m_1x)+K_3\cos(m_2x).$$

Uputa

Na temelju superpozicionog stavka određuju se na gore navedene načine posebno za svaki pojedini član desne strane diferencijalne jednadžbe partikularna rješenja $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$, pa opće rješenje ima oblik

$$y=y_0+\eta_1+\eta_2+\eta_3+\ldots.$$

Zadaci

U zadacima **1001** do **1008** riješi zadane diferencijalne jednadžbe odredivši opća rješenja i partikularna, ako su zadani početni uvjeti.

1001. $y''-4y'+4y=8(x^2+e^{2x}+\sin 2x).$

$y_0=?$ $\qquad r^2-4r+4=0;\ r_{1,2}=2.$

$$y_0=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}=(C_1+C_2x)e^{2x}.$$

$\eta_1 = ?$

$y'' - 4y' + 4y = 8x^2$

1. slučaj $\quad 0+2=2$

$\eta_1 = a_2x^2 + a_1x + a_0$

$\eta_1' = 2a_2x + a_1$

$\eta_1'' = 2a_2.$

Uvrštenje daje:

$4a_2x^2 + (-8a_2 + 4a_1)x + (2a_2 - 4a_1 + 4a_0) \equiv 8x^2.$

Slijedi: $a_2 = 2,\ a_1 = 4$ i $a_0 = 3.$

$\eta_1 = 2x^2 + 4x + 3.$

$\eta_2 = ?$

$y'' - 4y' + 4y = 8e^{2x}$

2. slučaj: $\quad b = 2 = r_{1,2} \rightarrow$ prema (C).

$P(b) = b^2 - 4b + 4\ ;\ P' = 2b - 4;\ P'' = 2$

$$\eta_2 = \frac{8x^2e^{2x}}{2} = 4x^2e^{2x}.$$

$\eta_3 = ?$

$y'' - 4y' + 4y = 8 \sin 2x$

3. slučaj: $m = 2,\ m^2 = 4:$

$$8 \sin 2x = 8\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}$$

$b = 2i \neq r_{1,2}$

prema (A)

$P(2i) = -8i$

$$\eta_3' = \frac{e^{2ix}}{2}$$

$b = -2i \neq r_{1,2}$

$P(-2i) = 8i$

$$\eta_3'' = \frac{e^{-2ix}}{2}$$

$$\eta_3 = \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} = \cos 2x.$$

$$\underline{y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + 2x^2 + 4x + 3 + \cos 2x.}$$

1002. $y'' - 5y' + 6y = 6 + 2e^x + e^{2x}$; početni uvjeti $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

$r^2 - 5r + 6 = 0\ ;\ r_1 = 3$ i $r_2 = 2$

$y_0 = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}.$

$\eta_1 = ?$

$y'' - 5y' + 6y = 6$

$n = 0;\quad P_0(x) = a_0$

$\eta_1 = a_0,\quad 6a_0 = 6$

$a_0 = 1$

$\eta_1 = 1$

$\eta_2 = ?$

$y'' - 5y' + 6y = 2e^x$

$b = 1 \neq r_1 \neq r_2$

$$\eta_2 = 2\frac{e^x}{P(1)} = e^x.$$

$\eta_3 = ?$

$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$

$b = 2 = r_2 \neq r_1$

$$\eta_3 = \frac{xe^{2x}}{P'(2)} = -xe^{2x}.$$

$$\underline{y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + 1 + e^x - xe^{2x}.}$$

Partikularno rješenje za $y(0) = 0$ i $y'(0) = 1$

$$\underline{y = 5e^{3x} - 7e^{2x} + 1 + e^x - xe^{2x}.}$$

1003. $y^{(5)} + 4y''' = 1 + e^x + 3 \sin 2x.$

$r^5 + 4r^3 = 0;\quad r_{1,2,3} = 0$ i $r_{4,5} = \pm 2i.$

$y_0 = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x.$

$\eta_1 = ?$

$y^{(5)} + 4y''' = 1$

$n = 3$

$\eta_1 = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$\eta_1''' = 6a_3;\quad \eta_1^{(5)} = 0$

$4 \cdot 6a_3 = 1;\quad a_3 = \frac{1}{24}$

$$\eta_1 = \frac{1}{24}x^3.$$

$\eta_2 = ?$

$y^{(5)} + 4y''' = e^x$

$b = 1 \neq r_{1,2,3} \neq r_{4,5}$

$P(1) = 1 + 4 = 5$

$$\eta_2 = \frac{e^x}{5}.$$

$\eta_3 = ?$

$y^{(5)} + 4y''' = 3 \sin 2x.$

Prelazimo na

$$y^{(5)} + 4y''' = 3\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}.$$

Dobivamo:

$$\eta_3' = \frac{3xe^{2ix}}{2i \cdot 32}$$

$$\eta_3'' = -\frac{3xe^{-2ix}}{2i \cdot 32}$$

$$\eta_3 = \frac{3}{32}x \sin 2x.$$

$$\underline{y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4 \cos 2x + C_5 \sin x + \frac{x^3}{24} + \frac{e^x}{5} + \frac{3}{32}x \sin 2x.}$$

1004. $y'' + y = \sin x - 2e^x.$ $\quad \left[y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x - e^{-x}\right].$

1005. $5y'' - 6y' + 5y = 2x^3 - x + 2 + e^{2x}.$

$$\left[y = e^{\frac{3}{2}x}\left(C_1 \cos \frac{4}{5}x + C_2 \sin \frac{4}{5}x\right) + \frac{1}{13}e^{2x} + \frac{1}{5}\left(2x^3 + \frac{36}{5}x^2 + \frac{107}{25}x - \frac{908}{125}\right)\right].$$

1006. $4y''' + y' = 3e^x + 2 \sin \frac{x}{2}.$ $\quad \left[y = C_1 + C_2 \cos \frac{x}{2} + C_3 \sin \frac{x}{2} + \frac{3}{5}e^x - x \sin \frac{x}{2}\right].$

1007. $y'' + 4y = 1 + \sin 2x$; početni uvjeti: $y(0) = \frac{1}{4}$; $y'(0) = 0.$

$$\left[y = \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{4}(x \cos 2x - 1)\right].$$

1008. $y^{IV} + 4y = 2 \sin 2x + 1 + 3x^2 + 4e^x.$

$$\left[y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^x + (C_3 \cos x + C_4 \sin x)e^{-x} + \frac{1}{16} \sin 2x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4} + \frac{4}{5}e^x\right].$$

Peti slučaj

Desna strana $f(x)$ linearne diferencijalne jednadžbe je umnožak polinoma i eksponencijalne funkcije, tj. ima oblik

$$f(x)=(A_n x^n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_1 x+A_0)e^{bx}.$$

Uputa

Kao obično $y=y_0+\eta$, gdje je

$$\eta=x^s(a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0)e^{bx}.$$

Tu je

$s=0$, pa je $x^s=x^0=1$, ako b nije korijen karakteristične jednadžbe, tj. ako je

$$b\neq r_1,\ b\neq r_2,\ b\neq r_3,\ldots$$

$s=1$, ako je b jednostruki korijen karakteristične jednadžbe, tj. ako je

$$b=r_1,\ b\neq r_2,\ b\neq r_3,\ldots$$

$s=2$, ako je b dvostruki korijen karakteristične jednadžbe, tj. ako je

$$b=r_1=r_2,\ b\neq r_3,\ b\neq r_4,\ldots$$

itd.

Vidimo da u η ulazi polinom istog stepena n kao i zadani, dok koeficijente tog polinoma $a_n, a_{n-1},\ldots, a_1, a_0$ treba odrediti iz pretpostavke da je η kao partikularno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe mora zadovoljavati.

Zadaci

U zadacima **1009** do **1017** uklj. riješi zadane diferencijalne jednadžbe odredivši opća rješenja i partikularna, ukoliko su zadani početni uvjeti.

1009. $y'''-3y'+2y=(4x^2+4x-10)e^{-x}$.

$y_0=?$ $\quad r^3-3r+2=0$ ili $r^3-4r+r+2=0$, pa je

$$(r+2)(r^2-2r+1)=0\ ;\ r_1=-2,\ r_{2,3}=1$$

$$y_0=C_1e^{-2x}+(C_2+C_3x)e^x.$$

$\eta=?$ $\quad b=-1\neq r_1\neq r_{2,3}$, pa je $s=0$.

$$\eta=(a_2x^2+a_1x+a_0)e^{-x}.$$

Računamo:

$$\eta'=e^{-x}[-a_2x^2+(2a_2-a_1)x+(a_1-a_0)]$$

$$\eta''=e^{-x}[a_2x^2-(4a_2-a_1)x+(2a_2-2a_1+a_0)]$$

$$\eta'''=e^{-x}[-a_2x^2+(6a_2-a_1)x-(6a_2-3a_1+a_0)].$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje nakon uređenja:

$$e^{-x}[4a^2x^2+4a_1x+(-6a_2+4a_0)]=(4x^2+4x-10)e^{-x}.$$

Slijedi:

$$\begin{array}{r|l} 4a_2=4 & a_2=1 \\ 4a_1=4 & a_1=1 \\ -6a_2+4a_0=-10 & a_0=-1 \end{array}$$

$$\eta=(x^2+x-1)e^{-x}.$$

$$\underline{y=C_1e^{-2x}+(C_2+C_3x)e^x+(x^2+x-1)e^{-x}.}$$

1010. $y''-2y'+y=xe^x$.

$y_0=?$ $\quad r^2-2r+1=0\ ;\ r_{1,2}=1.$

$$y_0=C_1e^x+C_2xe^x$$

$\eta=?$ $\quad s=2$, jer je $b=1=r_{1,2}$, pa je

$$\eta=x^2(a_1x+a_0)e^x=(a_1x^3+a_0x^2)e^x$$

$$\eta'=e^x[a_1x^3+(3a_1+a_0)x^2+2a_0x]$$

$$\eta''=e^x[a_1x^3+(6a_1+a_0)x^2+(6a_1+3a_0)x+2a_0].$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje:

$$a_0x^2+(6a_1-a_0)+2a_0\equiv xe^x\ ,\ \text{pa je}\ a_1=\frac{1}{6},\ \text{a}\ a_0=0.$$

$$\eta=\frac{x^3}{6}e^x.$$

$$\underline{y=e^x\left(C_1+C_2x+\frac{x^3}{6}\right).}$$

1011. $y''+3y'-10y=xe^{-2x}$.

$y_0=?$ $\quad r^2+3r-10=0\ ;\ r_1=2\ \text{i}\ r_2=-5$

$$y_0=C_1e^{2x}+C_2e^{-5x}.$$

$\eta=?$ $\quad s=0$, jer je $b=-2\neq r_1\neq r_2$.

$$\eta=(a_1x+a_0)e^{-2x}$$

$$\eta'=e^{-2x}(-2a_1x+a_1-2a_0)$$

$$\eta''=e^{-2x}(4a_1x-4a_1+4a_0).$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje

$$e^{-2x}(-12a_1x-a_1-12a_0)\equiv xe^{-2x}.$$

Slijedi:

$$\begin{array}{r|l} -12a_1=1 & a_1=-\frac{1}{12}\ ;\quad a_0=\frac{1}{144}. \\ -a_1-12a_0=0 & \end{array}$$

$$\eta=\left(-\frac{1}{12}x+\frac{1}{144}\right)e^{-2x}$$

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-5x}+\frac{1}{144}(1-12x)\,e^{-2x}.$$

1012. $y''-3y'+2y=e^x(3-4x)$. $\quad [y=C_1e^x+C_2e^{2x}+e^x(2x^2+x)]$.

1013. $y''-9y'+20y=x^2e^{4x}$. $\quad \left[y=C_1e^{5x}+C_2e^{4x}-\left(\frac{1}{3}x^3+x^2+2x\right)e^{4x}\right]$.

1014. $y^{(4)}-y=xe^x$. $\quad \left[y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x+\frac{x^2-3x}{8}e^x\right]$.

1015. $y''+y=2e^{-x}+xe^x$. $\quad \left[y=C_1\cos x+C_2\sin x+e^{-x}+\frac{1}{2}(x-1)e^x\right]$.

1016. $y''-2y'+4y=(x+2)e^{3x}$. $\quad \left[y=e^x(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)+e^{3x}\left(\frac{1}{7}x+\frac{10}{49}\right)\right]$.

1017. $\ddot{x}-6\dot{x}+13x=e^t(t^2-2t+2)$. $\quad \left[x=e^{3t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)+e^t\left(\frac{1}{8}t^2-\frac{1}{2}t-\frac{1}{32}\right)\right]$.

Šesti slučaj

Desna strana $f(x)$ diferencijalne jednadžbe je umnožak eksponencijalne funkcije i unkcije sinusa ili kosinusa, tj. ima oblik

$$f(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x$$

ili

$$f(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

ili

$$f(x)=e^{\alpha x}(\cos\beta x+\sin\beta x).$$

Uputa

Partikularno rješenje η glasi:

$$\eta=x^s e^{\alpha x}(a_0\cos\beta x+b_0\sin\beta x).$$

Tu je

$s=0$, ako $\alpha\pm i\beta$ nije par konjugirano kompleksnih korijena karakteristične jednadžbe

$s=1$, ako je $\alpha\pm i\beta$ jednostruki par,

$s=2$, ako je $\alpha\pm i\beta$ dvostruki par korijena karakterističke jednadžbe.

a_0 i b_0 su koeficijenti koji treba odrediti iz pretpostavke da je η partikularno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

Zadaci

U zadacima **1018** do **1023** uklj. riješi zadane nehomogene diferencijalne jednadžbe.

1018. $y''-2y'+2y=e^x\sin x$.

$y_0=?$ $\quad r^2-2r+2=0\,;\,r_{1,2}=1\pm i.$

$$y_0=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

$\eta=?$ $\quad$ Za naš zadatak: $\alpha=1,\ \beta=1$ tj. $\alpha\pm i\beta=1\pm i$, pa je $s=1$.

$\eta=xe^x(a_0\cos x+b_0\sin x).$

Računamo: $\eta'=e^x\{[(-a_0+b_0)x+b_0]\sin x+[(a_0+b_0)x+a_0]\cos x\}$

$$\eta''=e^x\{[-2a_0x+(-2a_0+2b_0)]\sin x+[2b_0x+(2a_0+2b_0)]\cos x\}.$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje

$$e^x(\{[-2a_0x+(-2a_0+2b_0)]\sin x+[2b_0x+(2a_0+2b_0)]\cos x\}-$$
$$-2\{[(-a_0+b_0)x+b_0)\sin x+[(a_0+b_0)x+a_0]\cos x\}+2x(a_0\cos x+b_0\sin x))\equiv e^x\sin x$$

a nakon uređenja dobivamo

$$-2a_0\sin x+2b_0\cos x\equiv\sin x.$$

Izjednačenje koeficijenata od $\sin x$ i $\cos x$ daje

$$-2a_0=1,\ \text{pa je}\ a_0=-\frac{1}{2},\ 2b_0=0\ \text{a}\ b_0=0.$$

Uvrštenje u η daje

$$\eta=-\frac{1}{2}xe^x\cos x,$$

a opće rješenje glasi:

$$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)-\frac{1}{2}xe^x\cos x.$$

1019. $y''-4y'+13y=e^{2x}\cos 3x$.

$y_0=?$ $\quad r^2-4r+13=0;\quad r_{1,2}=2\pm 3i$

$$y_0=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

$\eta=?$ $\quad \alpha=2,\ \beta=3\quad \alpha\pm i\beta=2\pm 3i$, pa je $s=1$.

$$\eta=xe^{2x}(a_0\cos 3x+b_0\sin 3x).$$

Računamo η' i η'' te nakon uređenja dobivamo

$$\eta'=e^{2x}[(-3a_0x+2b_0x+b_0)\sin 3x+(3b_0x+2a_0x+a_0)\cos 3x].$$

$$\eta''=e^{2x}[(-6a_0+4b_0-12a_0x-5b_0x)\sin 3x+$$

$$+(4a_0+6b_0-5a_0x+12b_0x)\cos 3x].$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje nakon uređenja

$$e^{2x}(-6a_0\sin 3x+6b_0\cos 3x)\equiv e^{2x}\cos 3x.$$

Slijedi $\begin{array}{l|l} -6a_0=0 & a_0=0 \text{ i } b_0=\frac{1}{6} \\ 6b_0=1 & \end{array}$

$$\eta=\frac{1}{6}xe^{2x}\sin 3x$$

i

$$\underline{y=e^{2x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{x}{6}\sin 3x\right).}$$

1020. $y''-3y'+2y=2e^x\cos\frac{x}{2}.$

$$y_0=?\quad r^2-3r+2=0;\quad r_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2};r_1=2 \text{ i } r_2=1$$

$$y_0=C_1e^{2x}+C_2e^x.$$

$\eta=?$ $s=0$, jer su r_1 i r_2 realni, pa je $x^0=1$.

$$\eta=e^x\left(a_0\cos\frac{x}{2}+b_0\sin\frac{x}{2}\right).$$

Računamo: $$\eta'=e^x\left[\left(\frac{b_0}{2}+a_0\right)\cos\frac{x}{2}+\left(-\frac{a_0}{2}+b_0\right)\sin\frac{x}{2}\right].$$

$$\eta''=e^x\left[\left(\frac{3}{4}a_0+b_0\right)\cos\frac{x}{2}+\left(\frac{3}{4}b_0-a_0\right)\sin\frac{x}{2}\right].$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje:

$$e^x\left[\left(-\frac{1}{4}a_0-\frac{1}{2}b_0\right)\cos\frac{x}{2}+\left(\frac{a_0}{2}-\frac{1}{4}b_0\right)\sin\frac{x}{2}\right]\equiv 2e^x\cos\frac{x}{2}.$$

Slijedi: $\begin{array}{l|l} -\frac{1}{4}a_0-\frac{1}{2}b_0=2 & a_0=-\frac{8}{5} \\ \frac{a_0}{2}-\frac{1}{4}b_0=0 & b_0=-\frac{16}{5} \end{array}$

pa je $$\eta=e^x\left(-\frac{8}{5}\cos\frac{x}{2}-\frac{16}{5}\sin\frac{x}{2}\right)$$

i $$\underline{y=C_1e^{2x}+C_2e^x-\frac{8}{5}e^x\left(\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\right).}$$

1021. $5y''-6y'+5y=e^{\frac{3}{5}x}\sin\frac{4}{5}x.$ $\left[y=e^{\frac{3}{5}x}\left(C_1\cos\frac{4}{5}x+C_2\sin\frac{4}{5}x\right)-\frac{1}{8}xe^{\frac{3}{5}x}\cos\frac{4}{5}x\right].$

1022. $y'''-2y'+4y=e^x\cos x.$ $\left[y=C_1e^{-2x}+e^x(C_2\cos x+C_3\sin x)+\frac{x}{20}e^x(\sin x-\cos x)\right].$

1023. $y'''+4y'=8e^{2x}+5e^x\sin x.$ $\left[y=C_1+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x+\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}e^x(\sin x-3\cos x)\right].$

Sedmi slučaj

Desna strana $f(x)$ linearne diferencijalne jednadžbe je umnožak polinoma i funkcije sinusa ili kosinusa, tj. ima oblik

$$f(x)=P_n(x)\cos\beta x$$

ili

$$f(x)=P_n(x)\sin\beta x$$

ili $$f(x)=P_n(x)\cos\beta x+P_m(x)\sin\beta x.$$

Uputa

Partikularno rješenje η za sva 3 oblika $f(x)$ glasi

$$\eta=x^s[Q_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\sin\beta x],$$

pri čemu za treći oblik treba u η uzeti polinom stepena, koji je jednak višem od stepena polinoma $P_n(x)$ i $P_m(x)$.

Za s vrijedi isto pravilo kao u 6. slučaju.

Zadaci

U zadacima **1024** do **1030** uklj. riješi zadane linearne diferencijalne jednadžbe.

1024. $2y''+5y'=29x\sin x$

$$y_0=?\quad 2r^2+5r=0;\quad r_1=0\quad \text{i}\quad r_2=-\frac{5}{2}.$$

$$y_0=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}.$$

$\eta=?$ $s=0$, pa je $x^0=1$, jer karakteristična jednadžba nema konjugirano kompleksnih korijena

$n=1$ i $\beta=1$, pa je $P_n(x)=P_1(x)=a_1x+a_0$, dok je $Q_1(x)=b_1x+b_0$.

$$\eta=(a_1x+a_0)\cos x+(b_1x+b_0)\sin x.$$

Računamo: $\eta'=(-a_1x-a_0+b_1)\sin x+(b_1x+a_1+b_0)\cos x.$

$\eta''=(-b_1x-2a_1-b_0)\sin x+(-a_1x-a_0+2b_1)\cos x.$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje:

$$(-5a_1x-2b_1x-4a_1+5b_1-5a_0-2b_0)\sin x+$$
$$+(-2a_1x+5b_1x+5a_1+4b_1-2a_0+5b_0)\cos x\equiv 29x\sin x.$$

Odatle

$$(-5a_1-2b_1)x+(-4a_1+5b_1-5a_0-2b_0)\equiv 29x$$
$$(-2a_1+5b_1)x+(5a_1+4b_1-2a_0+5b_0)\equiv 0.$$

Slijedi:
$$\left.\begin{aligned}-5a_1-2b_1&=29\\-4a_1+5b_1-5a_0-2b_0&=0\\-2a_1+5b_1&=0\\5a_1+4b_1-2a_0+5b_0&=0\end{aligned}\right|$$

Iz tih jednadžbi slijedi:

$$a_1=-5,\quad b_1=-2,\quad a_0=-\frac{16}{29}\quad \text{i}\quad b_0=\frac{185}{29}.$$

$$\eta=\left(-5x-\frac{16}{29}\right)\cos x-\left(2x-\frac{185}{29}\right)\sin x$$

$$\underline{y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\left(-5x-\frac{16}{29}\right)\cos x-\left(2x-\frac{185}{29}\right)\sin x.}$$

1025. $y''+y=4x\sin x.$

$y_0=?$ $\qquad r^2+1=0;\quad r_{1,2}=\pm i$

$$y_0=C_1\cos x+C_2\sin x$$

$s=1$, pa je

$$\eta=x[(a_1x+a_0)\cos x+(b_1x+b_0)\sin x].$$

Računamo: $\eta'=x[(-a_1x-a_0+b_1)\sin x+(b_1x+a_1+b_0)\cos x]+$

$+(a_1x+a_0)\cos x+(b_1x+b_0)\sin x,$

ili

$$\eta'=(-a_1x^2-a_0x+2b_1x+b_0)\sin x+$$
$$+(b_1x^2+2a_1x+b_0x+a_0)\cos x$$
$$\eta''=(-b_1x^2-4a_1x-b_0x-2a_0+2b_1)\sin x+$$
$$+(-a_1x^2+4b_1x-a_0x+2b_0+2a_1)\cos x.$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje

$$(-4a_1x-2a_0+2b_1)\sin x+(4b_1x+2b_0+2a_1)\cos x\equiv 4x\sin x.$$

Slijedi

$$-4a_1x-2a_0+2b_1\equiv 4x$$
$$4b_1x+2b_0+2a_1\equiv 0,$$

pa je

$$-4a_1=4;\quad -2a_0+2b_1=0$$
$$4b_1=0;\quad 2b_0+2a_1=0.$$

Odatle

$$a_1=-1;\quad b_1=0;\quad a_0=0;\quad b_0=1$$
$$\eta=x(-x\cos x+\sin x)$$
$$\underline{y=C_1\cos x+C_2\sin x-x^2\cos x+x\sin x.}$$

1026. $y''-2y'+10y=x\cos 2x.$

$$\left[y=e^x(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+\left(\frac{3}{26}x-\frac{29}{338}\right)\cos 2x+\left(-\frac{1}{13}x-\frac{1}{169}\right)\sin 2x\right].$$

1027. $y^{(4)}+2y'''+y'=2x\sin x.$ $\qquad [y=C_1+C_2x+(C_3-C_4x)e^{-x}+(x-1)\cos x-3\sin x].$

1028. $y''-y=2x\sin x.$ $\qquad [y=C_1e^x+C_2e^{-x}-x\sin x-\cos x].$

1029. $y'''+9y=2x\sin x+xe^{3x}.$

$$\left[y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{4}x\sin x-\frac{1}{16}\cos x+\frac{1}{54}(3x-1)e^{3x}\right].$$

1030. $y''+y=2x\cos x\cos 2x.$

$$\left[y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{x}{4}\cos x+\frac{x^2}{4}\sin x-\frac{x}{8}\cos 3x+\frac{3}{32}\sin 3x\right].$$

Osmi slučaj

Desna strana linearne diferencijalne jednadžbe je umnožak polinoma, eksponencijalne funkcije i funkcije sinusa ili kosinusa, tj. ima oblik

$$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$$

ili

$$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

ili

$$f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x].$$

Uputa

Partikularno rješenje η glasi:

$$\eta = x^s e^{\alpha x}\,[Q_n(x)\cos\beta x + R_n(x)\sin\alpha x].$$

Kao u 7. slučaju: $s=0$, ako $\alpha \pm i\beta$ nije par konjugirano kompleksnih korijena karakteristične jednadžbe,

$s=1$, ako je $\alpha \pm i\beta$ jednostruki par itd.

(vidi 6. slučaj).

U trećem obliku $f(x)$ uzima se u η polinom višeg stupnja kao u 7. slučaju.

Zadaci

U zadacima **1031** do **1033** uklj. riješi zadane linearne diferencijalne jednadžbe.

1031. $y'' - 2y = 2xe^x(\cos x - \sin x)$.

$y_0 = ?$ $\qquad r^2 - 2 = 0;\quad r_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$

$$y_0 = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x}.$$

$\eta = ?$ $\qquad s=0$, pa je $x^0 = 1$.

$\alpha = 1,\ \beta = 1$, dok su $Q_n(x)$ i $R_n(x)$ polinomi prvog stupnja.

Računamo: $\eta = e^x[(a_1x + a_0)\cos x + (b_1x + b_0)\sin x]$.

$$\eta' = e^x[(-a_1x - a_0 + b_1 + b_1x + b_0)\sin x + (b_1x + b_0 + a_1 + a_1x + a_0)\cos x].$$

$$\eta'' = e^x[(-2a_1x - 2a_1 - 2a_0 + 2b_1)\sin x + (2b_1x + 2b_1 + 2b_0 + 2a_1)\cos x].$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje nakon uređenja:

$$e^x\{[(-a_1 - b_1)x + b_1 - a_0 - b_0 - a_1]\sin x + [(b_1 - a_1)x + a_1 - a_0 + b_0 + b_1]\cos x\} \equiv e^x(x\cos x - x\sin x).$$

Slijedi: $\quad (-a_1 - b_1)x + b_1 - a_0 - b_0 - a_1 = -x$

$$(b_1 - a_1)x + a_1 - a_0 + b_0 + b_1 = x,$$

pa je

$$\left.\begin{aligned} -a_1 - b_1 &= -1 \\ b_1 - a_1 &= 1 \end{aligned}\right| \quad a_1 = 0,\quad b_1 = 1$$

$$\left.\begin{aligned} b_1 - a_0 - b_0 - a_1 &= 0 \\ a_1 - a_0 + b_0 + b_1 &= 0 \end{aligned}\right| \quad \text{ili} \quad \left.\begin{aligned} 1 - a_0 - b_0 &= 0 \\ 1 - a_0 + b_0 &= 0 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} a_0 &= 1 \\ b_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\eta = e^x(\cos x + x\sin x)$$

$$\underline{y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + e^x\cos x + xe^x\sin x.}$$

1032. $y'' - 2y' + 5y = e^x(4\cos 2x - 3x\sin 2x)$.

$y_0 = ?$ $\qquad r^2 - 2r + 5 = 0;\quad r_{1,2} = 1 \pm 2i$

$$y_0 = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$$

$\eta = ?$ $\qquad \alpha = 1,\quad \beta = 2$, pa je $\alpha \pm i\beta = 1 \pm 2i = r_{1,2} \to s = 1$.

$4 = P_0(x),\quad -3x = P_1(x)$, tj. višeg stupnja, pa je

$$\eta = xe^x[(a_1x + a_0)\cos 2x + (b_1x + b_0)\sin 2x].$$

Računamo:

$$\eta' = e^x\{[(-2a_1 + b_1)x^2 + (-2a_0 + 2b_1 + b_0)x + b_0]\sin 2x + [(2b_1 + a_1)x^2 + (2a_1 + 2b_0 + a_0)x + a_0]\cos 2x\}$$

$$\eta'' = e^x\{[(-4a_1 - 3b_1)x^2 + (-8a_1 + 4b_1 - 4a_0 + 3b_0)x + (2b_1 - 4a_0 + 2b_0)]\sin 2x + [(-3a_1 + 4b_1)x^2 + (4a_1 + 8b_1 - 3a_0 + 4b_0)x + (2a_1 + 2a_0 + 4b_0)]\cos 2x\}.$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje nakon uređenja:

$$e^x\{[-8a_1x + (2b_1 - 4a_0)]\sin 2x + [8b_1x + (2a_1 + 4b_0)]\cos 2x\} \equiv e^x(4\cos 2x - 3x\sin 2x).$$

Slijedi:

$$-8a_1x + (2b_1 - 4a_0) = -3x$$

$$8b_1x + (2a_1 + 4b_0) = 4.$$

Odatle

$$\left.\begin{aligned} -8a_1 &= -3 \\ 8b_1 &= 0 \end{aligned}\right| \quad a_1 = \frac{3}{8};\quad b_1 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} 2b_1 - 4a_0 &= 0 \\ 2a_1 + 4b_0 &= 4 \end{aligned}\right| \quad \text{ili} \quad \left.\begin{aligned} -4a_0 &= 0 \\ \frac{3}{4} + 4b_0 &= 4 \end{aligned}\right| \quad a_0 = 0;\quad b_0 = \frac{13}{16},$$

pa je

$$\eta = xe^x\left(\frac{3}{8}x\cos 2x + \frac{13}{16}\sin 2x\right)$$

i

$$\underline{y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + xe^x\left(\frac{3}{8}x\cos 2x + \frac{13}{16}\sin 2x\right).}$$

1033. $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}\cos x$.

$$[y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + e^{-x}\{(-x^2 + 6)\cos x + 4x\sin x\}].$$

b. Rješavanje linearnih nehomogenih diferencijalnih jednadžbi Lagrangeovim načinom varijacije konstanata

Uputa

U zadacima **816** do **818** uklj. prikazano je, kako se rješavaju načinom varijacije konstanata linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda. Na isti način možemo rješavati i linearne nehomogene diferencijalne jednadžbe viših redova i to ne samo gore navedenih tipova, već i one koji u te tipove ne spadaju.

Zadaci

U zadacima **1034** do **1044** uklj. riješi načinom varijacije konstanata zadane linearne nehomogene diferencijalne jednadžbe.

1034. $$y''+y=\operatorname{tg} x$$

$y_0=?$ $$r^2+1=0;\quad r_{1,2}=\pm i$$

$$y_0=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Pretpostavimo da su C_1 i C_2 funkcije od x, tj.

$$C_1=C_1(x)\quad\text{i}\quad C_2=C_2(x),$$

pa smatramo da je

$$y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x \tag{a}$$

opće rješenje zadane nehomogene diferencijalne jednadžbe, koje će tu jednadžbu zadovoljavati.

Računamo: $$y'=(-C_1\sin x+C_2\cos x)+(C_1'\cos x+C_2'\sin x).$$

Budući da tražimo dvije funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$, vrijednost jednog njihova odnosa možemo uzeti po volji, pa stavimo

$$C_1'\cos x+C_2'\sin x=0. \tag{b}$$

Ostaje $$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x, \tag{c}$$

pa je $$y''=-C_1\cos x-C_1'\sin x-C_2\sin x+C_2'\cos x. \tag{d}$$

Uvrštenje (d) i (a) u diferencijalnu jednadžbu daje s obzirom na (b):

imali smo (b) $$-C_1'\sin x+C_2'\cos x=\operatorname{tg} x$$ $$C_1'\cos x+C_2'\sin x=0.$$

Odatle imamo $$C_2'=\sin x.$$

Integriramo $$C_2=-\cos x+B.$$

Uvrštenje u (b) daje

$$C_1'\cos x+\sin^2 x=0,$$

odatle je

$$C_1'=-\frac{1}{\cos x}+\cos x.$$

i

$$C_1=-\int\frac{dx}{\cos x}+\int\cos x\,dx+A,$$

pa je

$$C_1=-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\sin x+A.$$

Uvrštenje u (a) vrijednosti za C_1 i C_2 daje traženo opće rješenje

$$\underline{y=\cos x\ln\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+A\cos x+B\sin x,}$$

gdje su A i B konstante po volji.

1035. $$y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}.$$

$y_0=?$ $$r^2-2r+1=0,\quad r_{1,2}=1$$

$$y_0=C_1e^x+C_2xe^x.$$

Neka je $$y=C_1(x)e^x+C_2(x)xe^x \tag{a}$$

opće rješenje.

Računamo: $$y'=e^x[(C_1+C_2x+C_2)+(C_1'+xC_2')].$$

Stavimo $$C_1'+xC_2'=0 \tag{b}$$

ostaje $$y'=e^x(C_1+C_2x+C_2) \tag{c}$$

odatle $$y''=e^x(C_1+C_2x+C_2+C_1'+C_2'x+C_2'+C_2').$$

Uvrštenje (a), (c) i (d) u diferencijalnu jednadžbu daje nakon uređenja

$$e^x(C_1'+C_2'+C_2'x)=\frac{e^x}{x}$$

ili

$$C_1'+C_2'+C_2'x=\frac{1}{x}.$$

Imali smo (b) $C_1'+xC_2'=0$

odatle slijedi

$$C_2'=\frac{1}{x}.$$

pa je

$$C_2=\ln|x|+B.$$

Uvrštenje $C_2'=\frac{1}{x}$ u (b) daje

$$C_1'+1=0\quad\text{i}\quad C_1=-x+A,$$

pa uvrštenje u (a) daje traženo opće rješenje

$$\underline{y=e^x(-x+A+Bx)+xe^x\ln|x|.}$$

1036. $$y''+y=\frac{1}{\sin x}.$$

$y_0=?$ $$r^2+1=0;\quad r_{1,2}=\pm i$$

$$y_0=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Opće rješenje: $$y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x.$$

$$y'=-C_1\sin x+C_1'\cos x+C_2\cos x+C_2'\sin x$$

ili $$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+(C_1'\cos x+C_2'\sin x).$$

Stavimo $$C_1'\cos x+C_2'\sin x=0 \tag{b}$$

ostaje $$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x,$$

pa je $$y''=-C_1\cos x-C_1'\sin x-C_2\sin x+C_2'\cos x.$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje nakon uređenja

$$-C_1'\sin x+C_2'\cos x=\frac{1}{\sin x}$$

Imali smo (b) $C_1'\cos x+C_2'\sin x=0.$

Odatle je

$$C_1'=-1\quad\text{i}\quad C_1=-x+A,$$

a uvrštenje u (b) daje

$$-\cos x+C_2'\sin x=0,$$

pa je

$$C_2=\ln|\sin x|+B.$$

Nakon uvrštenja u (a) vrijednosti koje smo dobili za $C_1(x)$ i $C_2(x)$, dobivamo traženo opće rješenje:

$$\underline{y=A\cos x+B\sin x-x\cos x+\sin x\cdot\ln|\sin x|.}$$

1037. $y''-y'=e^{2x}\cos e^x.$

$y_0=?$ $\quad r^2-r=0;\ r_1=0$ i $r_2=1.$

$$y_0=C_1+C_2e^x.$$

Opće rješenje: $\quad y=C_1(x)+C_2(x)e^x.$ (a)

Računamo $\quad y'=C_1'+C_2e^x+C_2'e^x$

ili $\quad y'=C_2e^x+(C_1'+C_2'e^x).$

Stavimo: $\quad C_1'+C_2'e^x=0,$ (b)

ostaje $\quad y'=C_2e^x,$ (c)

a odatle je $\quad y''=C_2e^x+C_2'e^x.$ (d)

Uvrštenje (c) i (d) u diferencijalnu jednadžbu daje

$$C_2'=e^x\cos e^x. \qquad \text{(e)}$$

To uvrstimo u (b)

$$C_1'+e^{2x}\cos e^x=0,$$

pa je

$C_1=-\int e^{2x}\cos e^x\,dx=(e^x=t,\ dt=e^x\,dx)=-\int t\cdot\cos t\,dt=$ (nakon parcijalnog integriranja) $=-e^x\sin e^x-\cos e^x+A.$

Prema (e): $\quad C_2=\int e^x\cos e^x\,dx=\int\cos t\,dt=\sin e^x+B.$

Uvrštenje vrijednosti dobivenih za $C_1(x)$ i $C_2(x)$ u (a) daje traženo opće rješenje

$$\underline{y=A+Be^x-\cos e^x.}$$

1038. $\quad y''+y=3\sin x.$

$y_0=?$ $\quad r^2+1=0\ ;\ r_{1,2}=\pm i$

$$y_0=C_1\cos x+C_2\sin x$$

$y=?$ $\quad y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$ (a)

$$y'=-C_1\sin x+C_1'\cos x+C_2\cos x+C_2'\sin x$$

ili $\quad y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+(C_1'\cos x+C_2'\sin x).$

Stavimo $\quad C_1'\cos x+C_2'\sin x=0,$ (b)

ostaje $\quad y'=-C_1\sin x+C_2\cos x,$

pa je $\quad y''=-C_1\cos x-C_1'\sin x-C_2\sin x+C_2'\cos x.$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje:

$$-C_1'\sin x+C_2'\cos x=3\sin x$$

imali smo (b) $\quad C_1'\cos x+C_2'\sin x=0.$

Slijedi: $\quad C_2'=3\sin x\cos x,$

pa je $\quad C_2=\frac{3}{2}\sin^2 x+B_1.$

Prema (b): $\quad C_1'\cos x+3\sin^2 x\cos x=0,$

a odatle je $\quad C_1=-3\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)+A,$

ili $\quad C_1=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\sin x\cos x+A.$

Prema (a):

$$y=-\frac{3}{2}x\cos x+\frac{3}{2}\sin x\cos^2 x+A\cos x+\frac{3}{2}\sin^3 x+B_1\sin x,$$

ili

$$y=A\cos x+B_1\sin x-\frac{3}{2}x\cos x+\frac{3}{2}\sin x-\frac{3}{2}\sin^3 x+\frac{3}{2}\sin^3 x,$$

ili

$$\underline{y=A\cos x+B\sin x-\frac{3}{2}x\cos x,}$$

gdje je $B=B_1+\frac{3}{2}.$

Taj zadatak već smo riješili prema 3. slučaju. Vidi zadatak 986.

1039. $y''+2y'+y=\frac{e^{-x}}{x}.$ $\quad [y=(A+Bx)e^{-x}+xe^{-x}\ln|x|].$

1040. $y''+y=\frac{1}{\cos x}.$ $\quad [y=A\cos x+B\sin x+x\sin x-\cos x\ln|\cos x|].$

1041. $y''-y=\operatorname{th}x.$ $\quad [y=Ae^x+Be^{-x}+(e^x+e^{-x})\operatorname{arc\,tg}e^x].$

1042. $y''+4y=\operatorname{ctg}2x.$ $\quad \left[y=A\cos 2x+B\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\cdot\ln\operatorname{tg}2x\right].$

1043. $y''+4y=\sin x$; početni uvjeti: za $x=0$ $\ y=y'=1.$

$$\left[y=\cos 2x+\frac{1}{3}(\sin x+\sin 2x)\right].$$

1044. Riješi načinom varijacije konstanata zadatke 945, 974, 985, 997 i 1028.

3. Linearne diferencijalne jednadžbe s promenljivim koeficijentima, koje se svòde na linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima

Uzmimo poseban slučaj diferencijalnih jednadžbi toga tipa, a to je Eulerova diferencijalna jednadžba.

Opći oblik:

$$x^n y^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}x^{n-2}y^{(n-2)}+\ldots+a_2x^2y''+a_1xy'+a_0y=f(x)$$

ili

$$(ax+b)^n y^{(n)}+a_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_2(ax+b)^2y''+$$
$$+a_1(ax+b)y'+a_0y=f(x).$$

Ako je $f(x)=0$, Eulerova jednadžba je homogena. Pomoću podesnih supstitucija svodimo oba oblika Eulerove jednadžbe na linearnu diferencijalnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima.

a) Eulerove homogene diferencijalne jednadžbe

Uputa

Supstitucija

za prvi oblik Eulerove jednadžbe:

$$y=x^k,$$

pa je

$$y'=kx^{k-1}$$
$$y''=k(k-1)x^{k-2} \qquad \text{(A)}$$
$$y'''=k(k-1)(k-2)x^{k-3}$$

itd.

Za drugi oblik:

$$y=(ax+b)^k$$
$$y'=ak(ax+b)^{k-1} \qquad \text{(B)}$$
$$y''=a^2k(k-1)(ax+b)^{k-2}$$
$$y'''=a^3k(k-1)(k-2)(ax+2)^{k-3}$$

itd.

Pomoću navedenih supstitucija dobivamo jednadžbu u k. To je karakteristična jednadžba za diferencijalnu jednadžbu u t, gdje je $t=\ln x$, pa je $x=e^t$ [vidi dalje formule (108a)].

Zadaci

U zadacima **1045** do **1054** uklj. riješi zadane homogene Eulerove diferencijalne jednadžbe.

1045. $x^3y'''-3xy'+3y=0.$

Stavimo $y=x^k$ pa prema (A) imamo

$$x^3k(k-1)(k-2)x^{k-3}-3xkx^{k-1}+3x^k=0$$

ili

$$(k^3-3k^2-2k)x^k-3kx^k+3x^k=0$$
$$x^k(k^3-3k^2-k+3)=0.$$

Kako je $x^k\neq 0$, $k^3-3k^2-k+3=0$, pa je $k_1=3$, $k_2=1$ i $k_3=-1$.

Dobili smo karakterističnu jednadžbu i njene korijene za diferencijalnu jednadžbu u t, pa je

opće rješenje u t $\qquad y=C_1e^{3t}+C_2e^t+C_3e^{-t}.$

Kako je $e^t=x$,

$$\underline{y=C_1x^3+C_2x+C_2x^{-1}.}$$

1046. $x^2y''-xy'+y=0.$

Prema (A): $y=x^k$

$$x^2k(k-1)x^{k-2}-xkx^{k-1}+x^k=0$$
$$k(k-1)x^k-kx^k+x^k=0$$
$$x^k(k^2-2k+1)=0$$
$$x^k\neq 0 \quad k^2-2k+1=0; \quad k_{1,2}=1.$$
$$y=C_1e^t+C_2te^t$$

$e^t=x$, a odatle je $t=\ln x$.

Opće rješenje $\qquad \underline{y=C_1x+C_2x\ln x}.$

1047. $y''+\dfrac{y'}{x}+\dfrac{y}{x^2}=0.$

Prema (A): $k(k-1)x^{k-2}+\dfrac{kx^{k-1}}{x}+\dfrac{x^k}{x^2}=0$

$$(k^2-k)x^{k-2}+kx^{k-2}+x^{k-2}=0$$
$$x^{k-2}(k^2-k+k+1)=0$$
$$x^{k-2}\neq 0 \quad k^2+1=0; \quad k_{1,2}=\pm i$$
$$y=C_1\cos t+C_2\sin t$$
$$e^t=x; \quad t=\ln x$$
$$\underline{y=C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)}.$$

1048. $x^2y''-xy'+5y=0.$

$$x^2k(k-1)x^{k-2}-xkx^{k-1}+5x^k=0$$
$$(k^2-k)x^k-kx^k+5x^k=0$$
$$x^k(k^2-2k+5)=0$$
$$x^k\neq 0; \quad k^2-2k+5=0; \quad k_{1,2}=1\pm 2i$$
$$y=e^t(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)$$
$$\underline{y=x[C_1\cos(2\ln x)+C_2\sin(2\ln x)]}.$$

1049. $x^2y''-3xy'+4y=0.$

$$x^2k(k-1)x^{k-2}-3xkx^{k-1}+4x^k=0$$

$$(k^2-k)x^k-3kx^k+4x^k=0$$

$$x^k(k^2-4k+4)=0.$$

$k^2-4k+4=0;\ k_{1,2}=2$

$$y=C_1e^{2t}+C_2te^{2t}$$

$e^t=x$, pa je $\underline{y=C_1x^2+C_2x^2\ln x}$.

1050. $(4x-1)^2y''-2(4x-1)y'+8y=0.$

Prema (B): $y=(4x-1)^k,\ y'=4k(4x-1)^{k-1}$ i $y''=16k(k-1)(4x-1)^{k-2}$

$$16k(k-1)(4x-1)^k-8k(4x-1)^k+8(4x-1)^k=0$$

$$8(4x-1)^k(2k^2-3k+1)=0$$

$$2k^2-3k+1=0;\quad k_1=1,\quad k_2=\frac{1}{2}$$

$$y=C_1e^t+C_2e^{\frac{1}{2}t},$$

a kako je $e^t=4x-1$: $\underline{y=C_1(4x-1)+C_2\sqrt{4x-1}}$.

1051. $x^2y''+5xy'+4y=0.$ $[y=x^{-2}(C_1+C_2\ln x)].$

1052. $x^3y'''-3x^2y''-6xy'-6y=0.$ $[y=C_1x^{-1}+C_2x^3+C_3x^{-2}].$

1053. $y''=\dfrac{2y}{x^2}.$ $\left[y=C_1x^2+\dfrac{C_2}{x}\right].$

1054. $x^2y''+xy'+4y=0.$ $[y=C_1\cos(2\ln x)+C_2\sin(2\ln x)].$

b) Eulerove nehomogene diferencijalne jednadžbe

Uputa

Supstitucija:

$$x=e^t,\ \text{pa je}\ t=\ln x.$$

Računamo
$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\dot y\cdot\frac{1}{x}=\dot y x^{-1}=\dot y e^{-t} \tag{108a}$$

$$y''=\frac{d\dot y}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}(\dot y x^{-1})\cdot x^{-1}=(-\dot y x^{-1}+x^{-1}\ddot y)x^{-1}=(\ddot y-\dot y)e^{-2t}$$

$y'''=$ računajući na isti način $=(\dddot y-3\ddot y+2\dot y)e^{-3t}$.

Pazi! To su derivacije po t!

Zadaci

U zadacima **1055** do **1064** uklj. riješi zadane nehomogene Eulerove jednadžbe odredivši opća rješenja, odnosno partikularna, ako su zadani početni uvjeti.

1055. $x^2y''-xy'+y=\cos(\ln x).$

Stavimo $x=e^t$ i uzevši u obzir da je prema (108a) $y'=\dot y e^{-t}$, a $y''=(\ddot y-\dot y)e^{-2t}$, dok je $\ln x=t$, dobivamo zadanu diferencijalnu jednadžbu u promjenljivoj t:

$$e^{2t}(\ddot y-\dot y)e^{-2t}-e^t\dot y e^{-t}+y=\cos t$$

ili

$$\ddot y-2\dot y+y=\cos t.$$

To je 3. slučaj linearne nehomogene diferencijalne jednadžbe, ali u t.

$$y=y_0+\eta.$$

Karakteristična jednadžba:

$$r^2-2r+1=0;\quad r_{1,2}=1$$

$$y_0=C_1e^t+C_2te^t.$$

$$\eta=A\cos t+B\sin t$$

$$\eta'=-A\sin t+B\cos t$$

$$\eta''=-A\cos t-B\sin t.$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje

$$-2B\cos t+2A\sin t=\cos t.$$

Slijedi:

$$B=-\frac{1}{2}\ \text{i}\ A=0,\ \text{pa je}\ \eta=-\frac{1}{2}\sin t,\ \text{a}$$

$$y=C_1e^t+C_2te^t-\frac{1}{2}\sin t,$$

a kako je $e^t=x$ i $t=\ln x$

$$\underline{y=(C_1+C_2\ln x)x-\frac{1}{2}\sin(\ln x)}.$$

1056. $x^2y''-3xy'+4y=\dfrac{1}{2}x^3$. Početni uvjeti: $y(1)=\dfrac{1}{2},\ y(4)=0.$

Stavimo li $x=e^t$, pa je $t=\ln x$, a prema (108a) $y'=\dot y e^{-t}$ i $y''=(\ddot y-\dot y)e^{-2t}$, dobit ćemo diferencijalnu jednadžbu u nezavisnoj promjenljivoj t:

$$\ddot y-4\dot y+4y=\frac{1}{2}e^{3t}.$$

Riješimo tu linearnu nehomogenu jednadžbu prema 2. slučaju.

$y_0=?$ $\qquad r^2-4r+4=0;\quad r_{1,2}=2$

$$y_0=C_1e^{2t}+C_2te^{2t}$$

$\eta=?$ $\qquad \eta=\frac{1}{2}\frac{e^{3t}}{P(3)};\quad P(3)=9-12+4=1$

$$\eta=\frac{1}{2}e^{3t},$$

pa je

$$y=C_1e^{2t}+C_2te^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t}.$$

Uvrštenje $x=e^t$, odnosno $t=\ln x$ daje opće rješenje

$$\underline{y=(C_1+C_2\ln x)x^2+\frac{1}{2}x^3.}$$

Uvedimo uvjete

$$y(1)=\frac{1}{2}\ \text{ i }\ y(4)=0.$$

Dobivamo

$$\frac{1}{2}=C_1+\frac{1}{2}\ \text{ i }\ 0=(C_1+C_2\ln 4)\cdot 16+32,$$

pa je

$$C_1=0\ \text{ i }\ C_2=-\frac{2}{\ln 4}.$$

Partikularno rješenje:

$$\underline{y=\frac{1}{2}x^3-\frac{x^2}{\ln 2}\ln x.}$$

1057. $x^2y''+4xy'+12y=\ln x.$

Uz $x=e^t$ i $t=\ln x$ jednadžba prima oblik

$$\ddot{y}+3\dot{y}+12y=t.$$

Jednadžbu riješimo prema 1. slučaju.

$y_0=?$

$$r^2+3r+12=0;\quad r_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{39}}{2}i$$

$$y_0=C_1e^{-\frac{3}{2}t}\cdot\cos\frac{\sqrt{39}}{2}t+C_2e^{-\frac{3}{2}t}\cdot\sin\frac{\sqrt{39}}{2}t=e^{-\frac{3}{2}t}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{39}}{2}t+C_2\sin\frac{\sqrt{39}}{2}t\right).$$

$\eta=?$ $\qquad n+r=1$, pa je $\eta=a_1t+a_0$, a $\eta'=a_1$ i $\eta''=0$.

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje:

$$3a_1+12a_1t+12a_0\equiv t,$$

a odatle je

$$a_1=\frac{1}{12}\ \text{ i }\ a_0=-\frac{1}{48},\ \text{pa je}\ \eta=\frac{1}{12}t-\frac{1}{48}.$$

Uzevši u obzir da je $x=e^t$ i $t=\ln x$, dobivamo

$$\underline{y=x^{-\frac{3}{2}}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ln x\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ln x\right)\right]+\frac{1}{12}\ln x-\frac{1}{48}.}$$

1058. $x^2y''-3xy'+3y=3\ln^2x.$

Uvrštenje $\qquad x=e^t,\quad t=\ln x$ i prema (108a) $y'=\dot{y}e^{-t}$ i

$y''=(\ddot{y}-\dot{y})e^{-2t}$ daje

$$\ddot{y}-4\dot{y}+3y=3t^2.$$

Prema 1. slučaju:

$y_0=?$ $\qquad r^2-4r+3=0;\quad r_1=3$ i $r_2=1$

$$y_0=C_1e^{3t}+C_2e^t$$

$\eta=?$ $\qquad n+r=2+0=2$

$$\eta=a_2t^2+a_1t+a_0;\quad \eta'=2a_2t+a_1;\quad \eta''=2a_2.$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje

$$3a_2t^2-(8a_2-3a_1)t+(2a_2-4a_1+3a_0)\equiv 3t^2$$

$$3a_2=3;\quad a_2=1.$$

$$-8+3a_1=0;\quad a_1=\frac{8}{3}.$$

$$2-\frac{32}{3}+3a_0=0;\quad a_0=\frac{26}{9}.$$

$$\eta=t^2+\frac{8}{3}t+\frac{26}{9}.$$

$$y=C_1e^{3t}+C_2e^t+\frac{1}{9}(9t^2+24t+26),$$

a za $\qquad e^t=x$ i $t=\ln x$

$$\underline{y=C_1x^3+C_2x+\frac{1}{9}(9\ln^2x+24\ln x+26).}$$

1059. $(1+x)^2y''-3(1+x)y'+4y=(1+x)^3.$

Uvrštenje $1+x=e^t$, $t=\ln(1+x)$ i prema (108a) $y'=\dot{y}e^{-t}$ i $y''=(\ddot{y}-\dot{y})e^{-2t}$ daje

$$\ddot{y}-4\dot{y}+4y=e^{3t}.$$

Prema 2. slučaju:

$y_0=?$ $\qquad r^2-4r+4=0;\quad r_{1,2}=2$

$$y_0=C_1e^{2t}+C_2te^{2t}$$

$\eta=?$ $\qquad \eta=\frac{e^{3t}}{P(3)}=e^{3t}$, jer je $P(3)=9-12+4=1$

$$y=C_1e^{2t}+C_2te^{2t}+e^{3t},$$

pa je $\underline{y=[C_1+C_2\ln(1+x)](1+x)^2+(1+x)^3.}$

1060. $x^2y''+xy'+y=1.$ $[y=C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)+1]$.

1061. $x^2y''+xy'+y=\sin(2\ln x).$ $\left[y=C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)-\frac{1}{3}\sin(2\ln x)\right]$.

1062. $x^2y''+3xy'+y=\frac{1}{x}$. Početni uvjeti: $y(1)=1$, $y'(1)=0$. $\left[y=\frac{1}{2x}(\ln^2x+2\ln x+2)\right]$.

1063. $(2x+1)^2y''-2(2x+1)y'-12y=3x+1.$ $\left[y=C_1(2x+1)^3+C_2(2x+1)^{-1}-\frac{3}{16}x-\frac{5}{96}\right]$.

1064. $x^2y''-4xy'+6y=x^5$ $\left[y=\left(\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2\right)x^2\right]$.

E. MJEŠOVITI ZADACI ZA RJEŠAVANJE DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI RAZLIČITIH TIPOVA

U zadacima **1065** do **1074** uklj. odredi najprije tip zadane diferencijalne jednadžbe, a zatim riješi tu jednadžbu na način koji odgovara tom tipu.

1065. $y''+y=\operatorname{ctg}x.$ $\left[y=C_1\cos x+C_2\sin x+\sin x\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right]$.

1066. $y''-6y'+8y=3x^2+2x+1.$ $\left[y=C_1e^{4x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{64}(24x^2+52x+41)\right]$.

1067. $y'^2+yy''=yy'.$ $\left[C_1e^x+C_2=\frac{1}{2}y^2\right]$.

1068. $y'-y\operatorname{ctg}x=\sin x.$ $[y=(x+C)\sin x]$.

1069. $x^2y''-xy'+2y=0.$ $[y=x(C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x)]$.

1070. $y''-2y'-3y=e^{4x};\quad y(\ln 2)=1,\quad y(2\ln 2)=1.$ $\left[y=\frac{1}{5}e^{4x}+\frac{652}{75}e^{-x}-\frac{491}{600}e^{3x}\right]$.

1071. $(x-1)^3\,dy-(y-2)^2\,dx=0.$ $\left[\frac{1}{2-y}+\frac{1}{2(x+1)}=C\right]$.

1072. $y'''-3y'-2y-\sin x=2\cos x.$ $\left[y=e^{-x}(C_1+C_2x)+C_3e^{2x}-\frac{1}{2}\sin x\right]$.

1073. $y''+y=\frac{1}{\cos x}.$ $[y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\ln|\cos x|]$.

1074. $y''+y'=2x^2e^x;\quad y(0)=5,\quad y'(0)=\frac{1}{2}.$ $\left[y=\frac{3}{2}+e^x\left(x^2-3x-\frac{7}{2}\right)\right]$.

F. SUSTAVI OBIČNIH DIFERENCIJANIH JEDNADŽBI

Vidi zadatke **849** do **966** uklj. u zbirci „Riješeni zadaci iz više matematike“ uz Repetitorij III dio.

X. HARMONIČKA ANALIZA. FOURIEROVI REDOVI

A. POJAM

Pod harmoničkom analizom razumije se razvijanje zadane funkcije $f(x)$ u trigonometrijski red, jer se time postizava razvoj bilo koje složene periodske pojave u jednostavna harmonička titranja.

Određujemo li koeficijente tog trigonometrijskog reda po Fourierovim formulama, dobivamo za funkciju $f(x)$ njen Fourierov red, ukoliko ta funkcija odgovara uvjetima Dirichletova teorema. Taj teorem glasi: ako je funkcija u intervalu $[-l, l]$ neprekinuta, odnosno ima konačan broj tačaka diskontinuiteta prve vrste, monotona, odnosno ima samo konačan broj ekstrema, tada Fourierov red konvergira, tj. ima sumu $S(x)$ u svim tačkama tog intervala, pri čemu:

1. U svakoj tački x_d diskontinuiteta funkcije $f(x)$ red konvergira prema poluzbroju jednostranih limesa s lijeva i s desna, tj.

$$S(x_d)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_d-0} f(x)+\lim_{x\to x_d+0} f(x)\right].$$

2. Na krajevima intervala $[-l, l]$ red ima za sumu S poluzbroj jednostranih limesa funkcije $f(x)$ kad x teži ka graničnim tačkama intervala iznutra, tj.

$$S(-l)=S(l)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to -l+0} f(x)+\lim_{x\to l-0} f(x)\right].$$

a. Fourierov red za opću, parnu i neparnu funkciju $f(x)$ perioda 2π odnosno π

Formule i upute

Fourierov red ima oblik

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{110}$$

Fourierovi koeficijenti glase:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad \text{gdje je} \quad n=1, 2, 3\ldots \tag{111}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad \text{gdje je} \quad n=1, 2, 3\ldots \tag{112}$$

Primjedbe

1. Ako je funkcija $f(x)$ zadana s nekoliko izraza na različitim dijelovima intervala, tada treba pri računanju koeficijenata reda podijeliti interval integriranja, u kojem se mijenja analitički izraz funkcije, na dijelove i računati integral kao zbroj integrala izračunatih za pojedine dijelove intervala.

2. Ako je funkcija $f(x)$ parna, tj. ako je $f(-x)=f(x)$ pa je graf funkcije simetričan s obzirom na os Y, Fourierov red sadrži samo slobodni član a_0 i kosinus-članove, tj. ima oblik

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx.$$

Ako je funkcija $f(x)$ neparna, tj. $f(-x)=-f(x)$ pa je graf funkcije simetričan s obzirom na ishodište O koordinatnog sustava, Fourierov red sadrži samo sinus-članove, tj. ima oblik

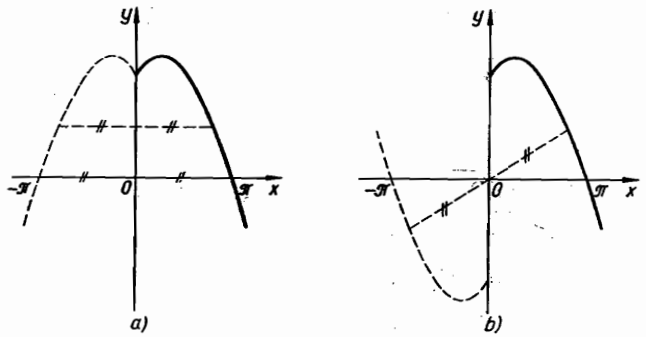
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx.$$

3. Funkciju $f(x)$ zadanu u intervalu $[0, \pi]$ možemo po volji produžiti u susjedni interval $[-\pi, 0]$ i to na dva načina:

a) graf funkcije produžimo za interval $(-\pi, 0)$ simetrično s obzirom na os Y,

b) graf produžimo simetrično s obzirom na ishodište O koordinatnog sustava.

U slučaju a) računamo za $f(x)$ samo slobodni član i koeficijente a_n za kosinus članove, jer su sinus-članovi jednaki nuli, dok u slučaju b) računamo samo koeficijente b_n za sinus-članove, jer su slobodni član i kosinus-članovi jednaki nuli.



Slika 127

4. Ako graf zadane funkcije $f(x)$ ima na osi X tačku simetrije, odnosno os simetrije, tada prenijevši u tu tačku ishodište O koordinatnog sustava dobivamo neparnu, od-

nosno parnu funkciju, pa razvoj u Fourierov red vršimo prema gore navedenim formulama za neparnu, odnosno parnu funkciju. Vidi sl. 127.

Primijetimo još na kraju, da Fourierovi redovi mogu služiti za određivanje suma mnogih brojčanih redova. Vidi npr. zadatke 1078, 1079 i dr.

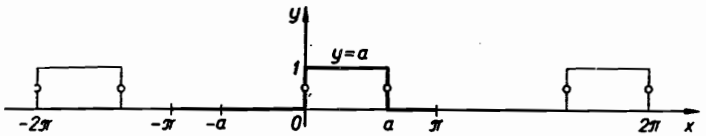
Zadaci

U zadacima **1075** do **1089** uklj. rastavi u Fourierov red zadane periodske funkcije prikazavši ih grafički.

1075. Funkcija perioda 2π određena je kako slijedi:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ za } -\pi\leq x<0 \\ 0 \text{ za } a<x\leq\pi \\ 1 \text{ za } 0<x<a \\ \frac{1}{2} \text{ za } x=0 \text{ i } x=a. \end{cases}$$

Vidi sl. 128.



Slika 128

Vidimo da zadana funkcija odgovara svim uvjetima Dirichletova teorema pa se rastavlja u konvergentni Fourierov red, kome je suma $S(x)$, dok je $S(0)=\frac{1}{2}(0+1)=\frac{1}{2}$ i $S(a)=\frac{1}{2}(1+0)=\frac{1}{2}$.

Računamo:

Prema (113):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dx+\int_{0}^{a} 1\cdot dx+\int_{a}^{\pi} 0\cdot dx\right)=\frac{1}{\pi}\left|x\right|_0^a=\frac{a}{\pi}.$$

Prema (111):

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^a 1\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left|\frac{\sin nx}{n}\right|_0^a=\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin na}{n}.$$

Prema (112):

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^a 1.\sin nx\,dx=-\frac{1}{\pi}\left|\frac{\cos nx}{n}\right|_0^a=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos na}{n}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1-\cos na}{\pi n}.$$

pa prema (110) Fourierov red glasi:

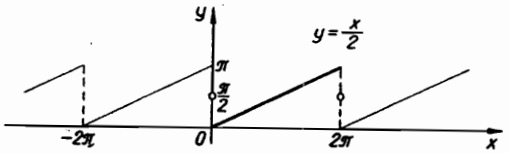
$$f(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{a}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na\cdot\cos nx+(1-\cos na)\sin nx}{n}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{a}{2}+\frac{1}{1}\left[\sin a\cdot\cos x+(1-\cos a)\sin x\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left[\sin 2a\cdot\cos 2x+(1-\cos 2a)\sin 2x\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{3}\left[\sin 3a\cdot\cos 3x+(1-\cos 3a)\sin 3x\right]+\ldots\right\}.$$

1076. Funkcija $f(x)=\frac{x}{2}$ perioda $(0;2\pi)$. Vidi sl. 129.



Slika 129

Prema (113): $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2\pi}\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^{2\pi}=\frac{1}{4\pi}\cdot 4\pi^2=\pi.$$

Prema (111): $$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\cos nx\,dx=\text{(parcijalno integriramo)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\left|\frac{x\sin nx}{n}\right|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[0+\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|_0^{2\pi}\right]=\frac{1}{2\pi n^2}(\cos 2n\pi-1)=0,$$ jer je

$\cos 2n\pi=1$ za sve n.

Prema (112): $$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\sin nx\,dx=\text{(parcijalno integriramo)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\left|\frac{-x\cos nx}{n}\right|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-2\pi\cos 2n\pi}{n}+\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|_0^{2\pi}\right]=-\frac{1}{n}+0=-\frac{1}{n}.$$

Prema (110) Fourierov red glasi:

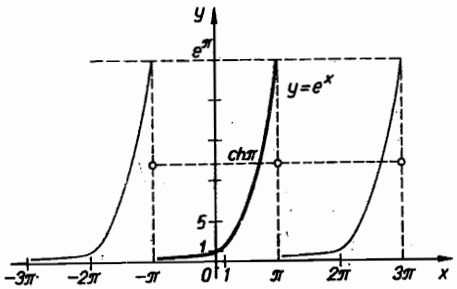
$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi}{2}-\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 3x}{3}-\dots.$$

Kako vidimo iz slike 129, u graničnim tačkama $x=0$ i $x=2\pi$ suma reda iznosi $S=\frac{\pi}{2}$, a to odgovara uvjetima Dirichletova teorema.

1077. Prekinuta funkcija perioda 2π određena je kako slijedi:

$$f(x)=\begin{cases} e^x \text{ za } -\pi<x<\pi \\ \operatorname{ch}\pi \text{ za } x=\pi. \end{cases}$$

Vidi sl. 130.



Slika 130

Funkcija odgovara uvjetima Dirichletova teorema, jer je

$\lim\limits_{x\to\pi-0} e^x=e^{\pi}$, a $\lim\limits_{x\to\pi+0} e^x=e^{-\pi}$, pa je $S(\pi)=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to\pi-0} e^x+\lim\limits_{x\to\pi+0} e^x\right)=$

$=\frac{1}{2}(e^{\pi}+e^{-\pi})=\operatorname{ch}\pi$ (vidi sliku).

Prema (113): $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\,dx=\frac{1}{\pi}\left|e^x\right|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\,\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi.$

Prema (111): $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left|\frac{e^x(n\sin nx+\cos nx)}{n^2+1}\right|_{-\pi}^{\pi}$?

$$=\frac{1}{\pi}\,\frac{e^{\pi}\cos n\pi-e^{-\pi}\cos n\pi}{n^2+1}=\frac{\cos n\pi}{\pi(n^2+1)}(e^{\pi}-e^{-\pi})=\frac{(-1)^n}{\pi(n^2+1)}2\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}=$$

$$=(-1)^n\frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi(n^2+1)}.$$

Prema (112): $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left|\frac{e^x(\sin nx-n\cos nx)}{n^2+1}\right|_{-\pi}^{\pi}=$

$$=\frac{1}{\pi(n^2+1)}(-e^{\pi}n\cos n\pi+e^{-\pi}n\cos n\pi)=$$

$$=-\frac{n\cos n\pi}{\pi(n^2+1)}\cdot 2\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}=\frac{n(-1)^{n+1}}{\pi(n^2+1)}2\operatorname{sh}\pi=(-1)^{n+1}\frac{2n\operatorname{sh}\pi}{\pi(n^2+1)}.$$

Uvrštenje u (110) daje:

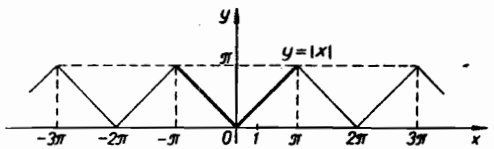
$$f(x)=\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}+2\operatorname{sh}\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx-n\sin nx}{\pi(n^2+1)}=$$

$$=\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}+\frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left\{-\frac{\cos x-\sin x}{2}+\frac{\cos 2x-2\sin 2x}{5}-\frac{\cos 3x-3\sin 3x}{10}+\dots\right\}.$$

1078. Funkcija perioda 2π

$$f(x)=|x| \text{ za } -\pi<x<\pi.$$

Vidi sl. 131.



Slika 131

Kako je $f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$, zadana je funkcija parna, pa je $b_n=0$, a mjesto da integriramo od $-\pi$ do $+\pi$ uzimamo $2\int_0^{\pi}$.

Prema (113): $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi}=\pi.$

Prema (111): $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=$ (parcijalno integriramo) $=$

$$=\frac{2}{\pi}\left|x\frac{\sin nx}{n}\right|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=0+\frac{2}{\pi n^2}\left|\cos nx\right|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-1).$$

Uvrštenje u (110) daje:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n-1}{n^2}.$$

Kako je $\cos \pi n = -1$ za n neparan, odnosno $+1$ za n paran, $\cos \pi n = 1$ primat će naizmjence vrijednosti -2 i 0, pa će Fourierov red glasiti:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left\{\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \ldots\right\}.$$

Pomoću izvedenog Fourierova reda za $|x|$ možemo dobiti sumu beskonačnog brojčanog reda, ako u gornji red uvrstimo $x=0$.

Dobivamo:

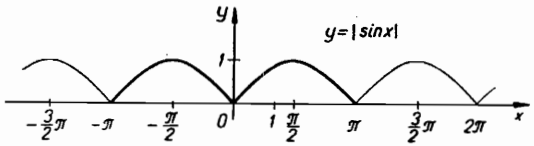
$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots\right),$$

a odatle je

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8},$$

a to znači da beskonačni red recipročnih vrijednosti kvadrata neparnih brojeva konvergira i da mu je suma $\frac{\pi^2}{8} \doteq 1{,}23$.

1079. Funkcija $f(x) = |\sin x|$ perioda $(-\pi, \pi)$. Vidi sl. 132.



Slika 132

Kako je $|\sin(-x)| = |\sin x|$, a također s obzirom na sliku zaključujemo da je zadana funkcija parna, pa je $b_n = 0$.
Računamo prema (113) i (111) i uzevši u obzir da je funkcija parna, integriramo od nule do π pomnoživši taj integral sa 2:

$$a_0 = 2 \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi}\Big| -\cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(1+1) = \frac{4}{\pi}.$$

$$a_n = 2 \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos(nx)\, dx = \text{ prema poznatoj trigonometrijskoj formuli } =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\sin(1+n)x + \sin(1-n)x]\, dx = \frac{1}{\pi}\left|\frac{\cos(1+n)x}{1+n} + \frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right|_{\pi}^{0} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(1+n)\pi}{1+n} + \frac{1-\cos(1-n)\pi}{1-n}\right].$$

Ako je n paran, tj. $n = 2k$, gdje je $k = 1, 2, 3, \ldots$, $\cos(1 \pm n)\pi = \cos(\pi \pm 2k\pi) =$

$$= -\cos 2k\pi = -1, \text{ pa je } a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1+1}{1+n} + \frac{1+1}{1-n}\right] = \frac{2}{\pi}\,\frac{1-n+1+n}{1-n^2} = \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{1-n^2} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{1-4k^2} \quad \text{za } n = 2k.$$

Ako je n neparan, tj. $n = 2k-1$,

$1 - \cos(1 \pm n)\pi = 1 - \cos[\pi \pm 2k\pi \mp \pi] = 1 - \cos 2k\pi = 0$ pa je $a_n = a_{2k+1} = 0$.

Slijedi prema (110):

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{1-4k^2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(1-2k)(1+2k)}.$$

Uzimajući za k vrijednosti $1, 2, 3, \ldots$, dobivamo traženi Fourierov red u obliku

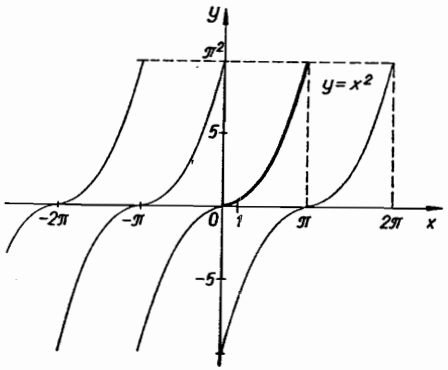
$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \ldots\right].$$

Uvrstimo li u taj red $x=0$, dobit ćemo brojčani red i njegovu sumu $S = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \ldots = \frac{1}{2}.$$

1080. Funkciju $f(x) = x^2$ u intervalu $(0, \pi)$ razvij u red po sinusima. Vidi sl. 133.

Da dobijemo u redu samo sinus-članove, nadopunimo funkciju tako da postane neparna, kako je to prikazano u slici 133. Zadana je funkcija sada neparna, jer joj je graf simetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava, pa je $a_0 = 0$ i $a_n = 0$, dok b_n računamo po formuli (112) integrirajući dvaput od 0 do π.



Slika 133

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx \doteq \text{(vidi zadatak 211)} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left| -\frac{x^2 \cos nx}{n} + \frac{2}{n^2} x \sin nx + \frac{2}{n^3}\cos nx \right|_0^{\pi} =$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi^2}{n}\cos n\pi+0+\frac{2}{n^3}(\cos n\pi-1)\right].$$

Uzevši u obzir da je $\cos n\pi \begin{cases}=-1 \text{ za } n \text{ neparan}\\ =+1 \text{ za } n \text{ paran}\end{cases}$, pa je

$$\cos n\pi-1=\begin{cases}=-2 \text{ za } n \text{ neparan}\\ =\ \ 0 \text{ za } n \text{ paran}\end{cases},$$

možemo red napisati u obliku

$$x^2=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}[(-1)^n-1]\right\}\sin nx=$$

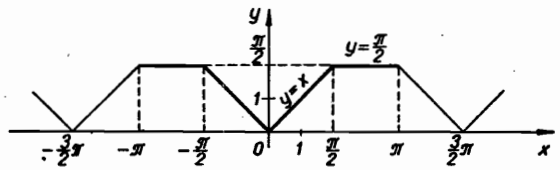
$$=\frac{2}{\pi}\left\{\left(\frac{\pi^2}{1}-\frac{4}{1}\right)\sin x-\frac{\pi^2}{2}\sin 2x+\left(\frac{\pi^2}{3}-\frac{4}{27}\right)\sin 3x-\frac{\pi^2}{4}\sin 4x+\dots\right\}.$$

1081. Zadanu funkciju

$$f(x)=\begin{cases} x \text{ za } 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2} \text{ za } \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$$

razvij u red po kosinusima.

Da dobijemo u redu samo kosinus-članove nadopunimo funkciju tako da postane parna tj. simetrična s obzirom na os Y. Vidi sliku 134.



Slika 134

Računamo uzevši u obzir da je $b_n=0$:

Prema (113): $$a_0=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}\left|x\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{4}\right)=\frac{3}{4}\pi.$$

Prema (111): $$a_n=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos nx\,dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\left|x\cdot\frac{\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}\left|\frac{\sin nx}{n}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}+\frac{1}{n^2}\left(\cos n\frac{\pi}{2}-1\right)-\frac{\pi}{2}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right]=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right).$$

Prema 110:

$$f(x)=\frac{3}{8}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)\cos nx=$$

$$=\left(\text{uzevši u obzir da je } \cos\frac{n\pi}{2}-1=\begin{cases}-1 \text{ za } n \text{ neparan}\\ -2 \text{ za } n \text{ paran}\end{cases}\right)=$$

$$=\frac{3}{8}\pi-\frac{2}{\pi}\left[\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right]-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 6x}{6^2}+\frac{\cos 10x}{10^2}+\dots\right].$$

1082. Funkcija perioda 2π

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ za } 0<x<\frac{\pi}{2}\\ -1 \text{ za } \frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi\\ 1 \text{ za } \frac{3}{2}\pi<x<2\pi\end{cases}$$

uz grafički prikaz.

$$\left[\text{Uzmi u obzir da je } \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}, \text{ gdje je } n \text{ neparan broj};\ f(x)=\right.$$

$$\left.=\frac{4}{\pi}\left(\cos x-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-\dots\right)\right].$$

1083. Funkcija $f(x)=\pi+x$ perioda $(-\pi, \pi)$.

$$\left[f(x)=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right].$$

1084. Funkciju $y=\sin x$ u intervalu $(0, \pi)$ razvij po kosinusima.

$$\left[\sin x=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\dots\right)\right].$$

1085. Funkcija $y=e^x$ perioda $(-\pi, \pi)$. Iz dobivenog reda izračunaj:

1) red za e^{-x},

2) red za $\operatorname{sh} x$,

3) red za $\operatorname{ch} x$.

$$\left[e^x=\frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos x}{1^2+1}+\frac{\cos 2x}{2^2+1}-\frac{\cos 3x}{3^2+1}+\dots\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1\cdot\sin x}{1^2+1}+\frac{2\sin 2x}{2^2+1}+\frac{3\sin 3x}{3^2+1}+\dots\right)\right\},$$

$$\operatorname{sh} x=\frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left(\frac{1\cdot\sin x}{1^2+1}-\frac{2\sin 2x}{2^2+1}+\frac{3\sin 3x}{3^2+1}-\dots\right),$$

$$\left.\operatorname{ch} x=\frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos x}{1^2+1}+\frac{\cos 2x}{2^2+1}-\frac{\cos 3x}{3^2+1}+\dots\right)\right].$$

1086. Funkciju perioda $(0, \pi)$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{3} & \text{za } 0<x<\frac{\pi}{3}\\ 0 & \text{za } \frac{\pi}{3}<x<\frac{2}{3}\pi\\ -\frac{\pi}{3} & \text{za } \frac{2}{3}\pi<x<\pi\end{cases}$$

razvij u red po kosinusima a zatim po sinusima uz grafički prikaz u oba slučaja.

$$\left[f_1(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 5x}{5}+\frac{\cos 7x}{7}-\frac{\cos 11x}{11}+\dots\right)\right.$$

$$\left.f_2(x)=\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 8x+\frac{1}{5}\sin 10x+\dots\right].$$

1087. Funkciju $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}$ perioda $(0, \pi)$ razvij po sinusima.

$$\left[f(x)=\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\dots\right].$$

1088. Funkciju $f(x)=\cos 2x$ u intervalu $(0, \pi)$ razvij u red po sinusima

$$\left[\cos 2x=-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{2^2-1}+\frac{3\sin 3x}{2^2-3^2}+\frac{5\sin 5x}{2^2-5^2}+\dots\right)\right].$$

1089. Funkciju $f(x)=\pi-2x$ u intervalu $(0, \pi)$ razvij u red 1) po kosinusima i 2) po sinusima.

$$\left[f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2};\ f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}\right].$$

b. Fourierov red za funkciju $f(x)$ bilo kojeg perioda $(a, a+L)$

Formule i upute

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{2n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{2n\pi}{L}x\right]. \tag{114}$$

Koeficijenti reda

$$a_0=\frac{2}{L}\int_a^{a+L}f(x)\,dx \tag{115}$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_a^{a+L}f(x)\cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx \tag{116}$$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_a^{a+L}f(x)\sin\frac{2n\pi}{L}x\,dx. \tag{117}$$

Za neparnu funkciju, koja je simetrična s obzirom na ishodište koordinatnog sustava u intervalu $\left(-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2}\right)$:

$$a_0=0\ ;\ a_n=0$$

$$b_n=\frac{4}{L}\int_0^{+\frac{L}{2}}f(x)\sin\frac{2n\pi}{L}x\,dx \tag{117a}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2n\pi}{L}x. \tag{114a}$$

Za parnu funkciju, koja je simetrična s obzirom na os Y u intervalu $\left(-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2}\right)$.

$$b_n=0$$

$$a_0=\frac{4}{L}\int_0^{+\frac{L}{2}}f(x)\,dx \tag{115a}$$

$$a_n=\frac{4}{L}\int_0^{+\frac{L}{2}} f(x)\cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx \tag{116a}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx. \tag{114b}$$

Kao u slučaju poluperioda $(0, \pi)$ možemo bez obzira da li je zadana funkcija $f(x)$ parna ili neparna ili ni jedno ni drugo razviti funkciju u intervalu $\left(0, \frac{L}{2}\right)$ u Fourierov red na tri načina:

1) samo pomoću sinus-članova nadomjestivši funkciju tako da bude u intervalu $\left(-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2}\right)$ neparna funkcija, tj. prema formulama (117a) i (114a).

2) samo pomoću kosinus-članova nadomjestivši funkciju u intervalu $\left(-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2}\right)$ do parne funkcije, tj. prema formulama (115a), (116a) i (114b).

3) pomoću sinus- i kosinus-članova prema općim formulama (114) do (117).

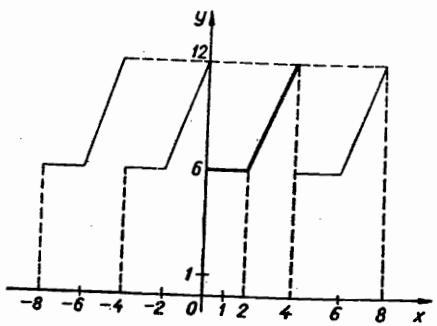
Zadaci

U zadacima 1090 do 1097 uklj. razvij zadane periodske funkcije u Fourierov red prikazavši ih grafički.

1090. Funkcija

$$f(x)=\begin{cases}6 & \text{za } 0<x<2\\ 3x & \text{za } 2<x<4\end{cases}$$

perioda $(0; 4)$,



Slika 135

Računamo prema slici 135 i formulama.

Prema (115):

$$a_0=\frac{2}{4}\left[\int_0^2 6\,dx+\int_2^4 3x\,dx\right]=\frac{1}{2}\left[6|x|_0^2+3\left|\frac{x^2}{2}\right|_2^4\right]=15,$$

prema (116):

$$a_n=\frac{2}{4}\left[6\int_0^2\cos\frac{2n\pi x}{4}dx+3\int_2^4 x\cos\frac{2n\pi x}{4}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[6\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx+3\int_2^4 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left|6\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right|_0^2+3\left|\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right|_2^4\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{12}{n\pi}\sin n\pi+3\left(\frac{8}{n\pi}\sin 2n\pi+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos 2n\pi-\frac{4}{n\pi}\sin n\pi-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi\right)\right].$$

Kako je $\sin n\pi=\sin 2n\pi=0$, a $\cos 2n\pi=1$, dobivamo

$$a_n=\frac{6}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi).$$

Prema (117):

$$b_n=\frac{1}{2}\left[6\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx+3\int_2^4 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{12}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+3\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_2^4\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{12}{n\pi}\cos n\pi+\frac{12}{n\pi}+3\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin 2n\pi-\frac{8}{n\pi}\cos 2n\pi-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{4}{n^2\pi^2}\sin n\pi+\frac{4}{n\pi}\cos n\pi\right)\right].$$

Kako je $\sin 2n\pi=\sin n\pi=0$, a $\cos 2n\pi=1$, dobivamo

$$b_n=\frac{1}{2}\left[-\frac{12}{n\pi}\cos n\pi+\frac{12}{n\pi}-\frac{24}{n\pi}+\frac{12}{n\pi}\cos n\pi\right]$$

ili

$$b_n=-\frac{6}{n\pi}.$$

Prema (114) dobivamo uzevši u obzir da je $L=4$ i da je

$$1-\cos n\pi = 1-(-1)^n = \begin{cases} 2 \text{ za } n \text{ neparan} \\ 0 \text{ za } n \text{ paran} \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{15}{2}+\frac{12}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{2}+\dots\right)-$$

$$-\frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\dots\right).$$

U intervalu $(0;2)$ suma reda $S(x)=6$, a u intervalu $(2;4)$ $S(x)=3x$.

U tački $x=2$ prekida funkcije suma reda $S(2)=\frac{1}{2}\left[\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)+\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)\right]=6$.

1091. Funkcija

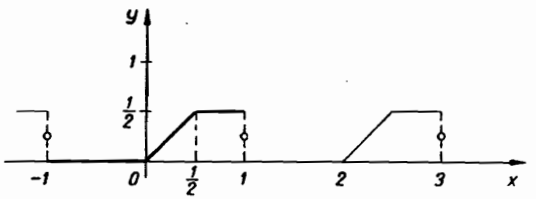
$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{za } -1<x<0 \\ x & \text{za } 0<x<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{za } \frac{1}{2}<x<1 \end{cases}$$

perioda $(-1, 1)$. Vidi sl. 136.

Računamo:

Prema (115) uzevši u obzir da je $L=2$:

$$a_0=\frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=1\left[0+\int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{2}\,dx\right]=\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^{\frac{1}{2}}+\left|\frac{x}{2}\right|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{3}{8}.$$



Slika 136

Prema (116):

$$a_n=\frac{2}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos\frac{2n\pi}{2}x\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{2}\cos\frac{2n\pi}{2}\,dx\right]=$$

$$=\left|\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x\right|_0^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\sin n\pi x\,dx+\frac{1}{2n\pi}\left|\sin n\pi x\right|_{\frac{1}{2}}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2\pi^2}\cdot\left|\cos n\pi x\right|_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2n\pi}\left(\sin n\pi-\sin\frac{n\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right).$$

Prema (117):

$$b_n=\int_0^{\frac{1}{2}} x\sin n\pi x\,dx+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sin n\pi x\,dx=$$

$$=\left|-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\right|_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\cos n\pi x\,dx-\frac{1}{2n\pi}\left|\cos n\pi x\right|_{\frac{1}{2}}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{2n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2\pi^2}\left|\sin n\pi x\right|_0^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2n\pi}\left(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{2n\pi}(-1)^n,\quad \text{gdje je}\quad (-1)^n=\cos n\pi.$$

Za $n=1$: $a_1=-\frac{1}{\pi^2}$; $\quad b_1=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{2\pi}=\frac{2+\pi}{2\pi^2}$.

Za $n=2$: $a_2=-\frac{1}{2\pi^2}$; $\quad b_2=-\frac{1}{4\pi}$.

Za $n=3$: $a_3=-\frac{1}{9\pi^2}$; $\quad b_3=-\frac{1}{9\pi^2}+\frac{1}{6\pi}=\frac{3\pi-2}{18\pi^2}$.

Za $n=4$: $a_4=0$; $\quad b_4=-\frac{1}{8\pi}$.

Za $n=5$: $a_5=-\frac{1}{25\pi^2}$; $\quad b_5=\frac{1}{25\pi^2}+\frac{1}{10\pi}=\frac{2+5\pi}{50\pi^2}$.

. . . . . .

$$f(x)=\frac{3}{16}+\left(-\frac{1}{\pi^2}\cos\pi x+\frac{2+\pi}{2\pi^2}\sin\pi x\right)+$$

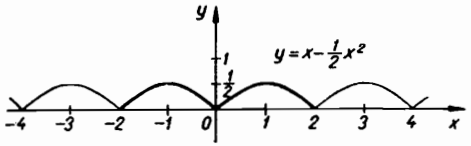
$$+\left(-\frac{1}{2\pi^2}\cos 2\pi x-\frac{1}{4\pi}\sin 2\pi x\right)+$$

$$+\left(-\frac{1}{9\pi^2}\cos 3\pi x+\frac{3\pi-2}{18\pi^2}\sin 3\pi x\right)+\dots$$

1092. Funkciju $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2$ u intervalu (0; 2) razvij

a) u red kosinusa i

b) u red sinusa.



Slika 137

Ad a) Računamo prema slici 137 i formulama (115a) i (114b) uzevši u obzir da je $b_n=0$.

$$a_0=\frac{4}{4}\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left|\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right|_0^2=\frac{2}{3}.$$

$$a_n=\frac{4}{4}\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\cos\frac{2n\pi}{4}x\,dx=\text{(parcijalno integriramo)}=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left|\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\right|_0^2-\frac{2}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}(1-x)\,dx=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}(1-x)\,dx=\text{(još jednom parcijalno integriramo)}=$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\left|(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\right|_0^2+\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{4}{n^2\pi^2}=$$

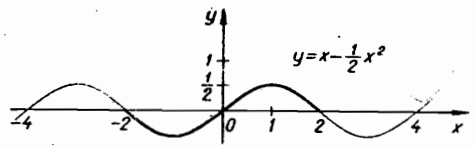
$$=-\frac{4}{n^2\pi^2}[1+(-1)^n],\ \text{jer je}\ \cos n\pi=\mp1=(-1)^n.$$

Prema (114b):

$$f(x)=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1+(-1)^n]}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\pi x+\frac{1}{4^2}\cos2\pi x+\frac{1}{6^2}\cos3\pi x+\dots\right).$$

Ad b) Vidi sl. 138.



Slika 138

Prema (117a) računamo b_n, dok je $a_0=0$ i $a_n=0$:

$$b_n=\frac{4}{4}\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\text{(parcijalno integriramo)}=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left|\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\cos\frac{n\pi x}{2}\right|_0^2+\frac{2}{n\pi}\int_0^2(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\int_0^2(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{4}{n^2\pi^2}\left|(1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\right|_0^2+\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

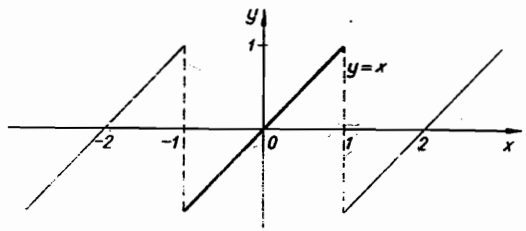
$$=-\frac{8}{n^3\pi^3}\left|\cos\frac{n\pi x}{2}\right|_0^2=-\frac{8}{n^3\pi^3}\cos n\pi+\frac{8}{n^3\pi^3}=\frac{8}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n].$$

Prema (114a):

$$f(x)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin\frac{n\pi}{2}x=$$

$$=\frac{16}{\pi^3}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^3}\sin\frac{5\pi x}{2}+\dots\right).$$

1093. Funkciju $f(x)=x$ razvij u intervalu (0; 1) u red sinusa.



Slika 139

$a_0=0$ i $a_n=0$.

Prema slici 139 i formuli (117a):

$$b_n=\frac{4}{2}\int_0^1 x\sin\frac{2n\pi x}{2}dx=2\left|-\frac{1}{n\pi}x\cos n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\right|_0^1=$$

$$=2\left(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi\right)=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1},\ \text{jer je}\ \cos n\pi=\begin{cases}-1\ \text{za}\ n\ \text{neparan.}\\+1\ \text{za}\ n\ \text{paran}\end{cases}$$

1096. Funkciju $f(x)=\begin{cases} x \text{ za } 0<x<1 \\ 2-x \text{ za } 1<x<2 \end{cases}$ perioda $(0;2)$

razvij u red po kosinusima.

$$\left[f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n+1)\pi x}{(2n+1)^2}\right].$$

1097. Funkciju $f(x)=x(5-x)$ perioda $(0;5)$ razvij u red po sinusima.

$$\left[f(x)=\frac{100}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{5}\right].$$

Prema (114a):

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n\pi x}{n}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\pi x}{1}-\frac{\sin 2\pi x}{2}+\frac{\sin 3\pi x}{1}-\dots\right).$$

1094. Funkcija $f(x)=x^2$ perioda $(-1;1)$.

$$\left[x^2=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x-\frac{\cos 2\pi x}{2^2}+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}-\frac{\cos 4\pi x}{4^2}+\dots\right)\right].$$

1095. Funkcija $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ za } -2<x<0 \\ x \text{ za } 0<x<2 \end{cases}$
perioda $(-2,2)$.

$$\left[f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{n}\right].$$