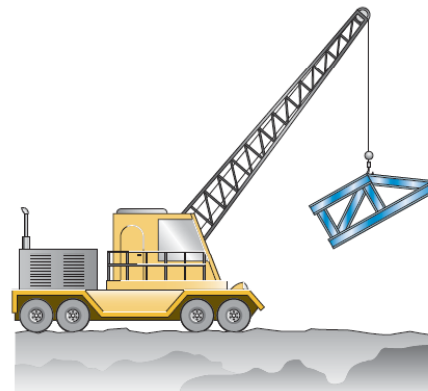
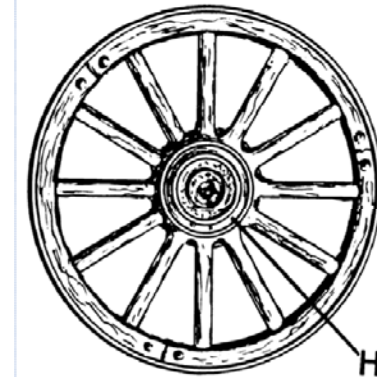


Aksijalno naprezanje*

Aksijalno napregnuti elementi su elementi izloženi samo na zatezanje ili pritisak.

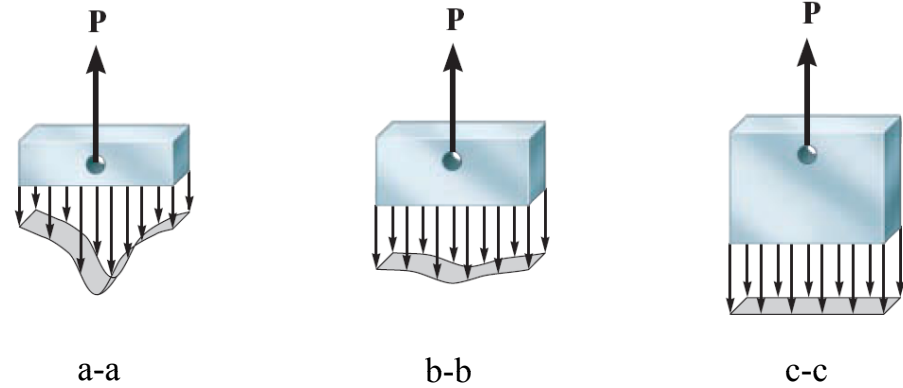
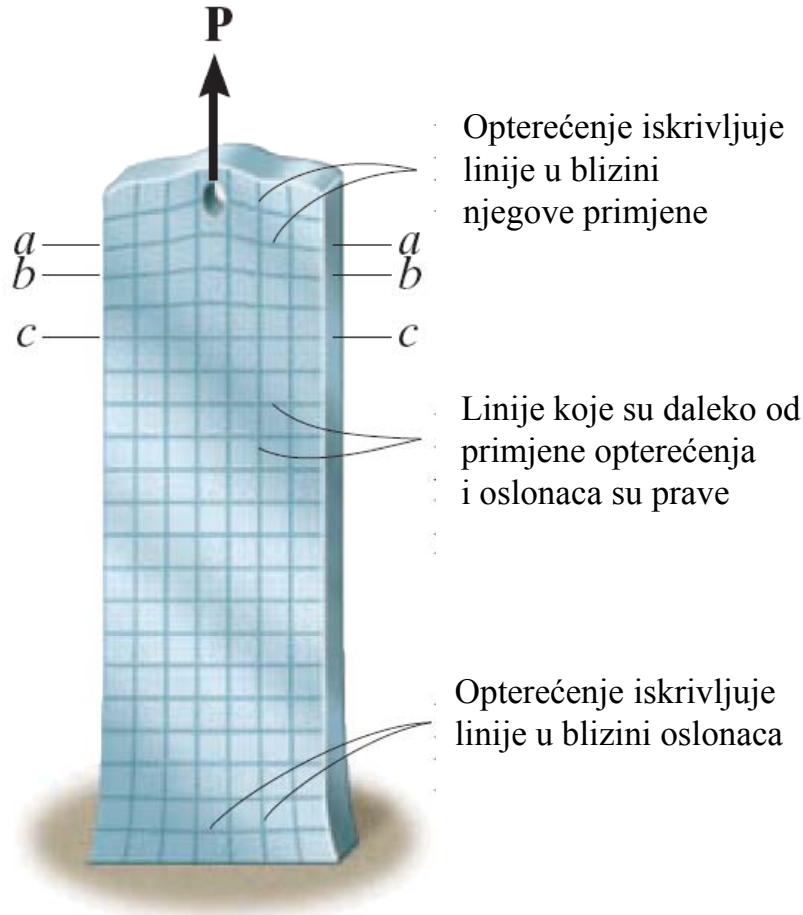


JM Gere, BJ Goodno, *Mechanics of Materials*, Cengage Learning, Seventh Edition, 2009.

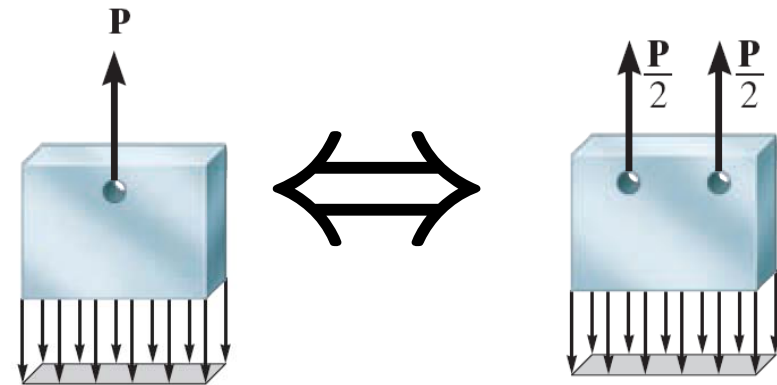
*RC Hibbeler, *Mechanics of Materials*, Prentice Hall, Eight Edition, 2011.

Aksijalno naprezanje

Saint-Venant-ov (Sen-Venan) princip



Napon i deformacija koji se javljaju u tačkama tijela koje su dovoljno daleko od područja primjene tog opterećenja biće isti kao napon i deformacija bilo kojeg opterećenja koje ima istu, statički ekvivalentnu, rezultantu i koji su primijenjeni u istoj oblasti.



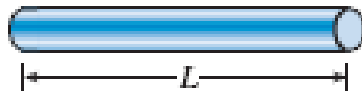
Aksijalno naprezanje*

Izduženje aksijalno opterećenog elementa

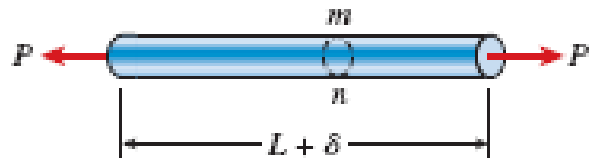
I) konstantan poprečni presjek i opterećenje



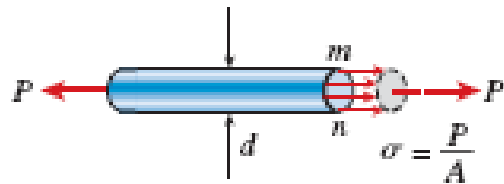
(a)



(b)



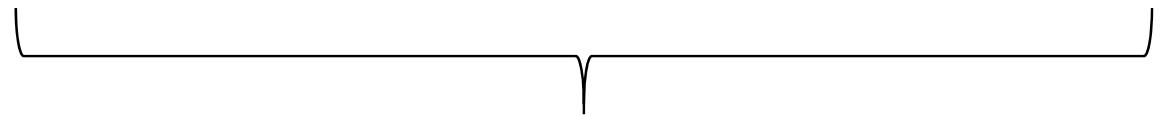
(c)



$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$



$$\delta = \varepsilon L = \frac{\sigma}{E} L$$

$$\delta = \frac{FL}{EA} \quad (2.1)$$

*RC Hibbeler, *Mechanics of Materials*, Prentice Hall, Eight Edition, 2011.

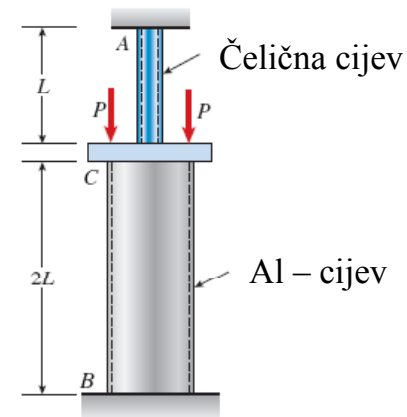
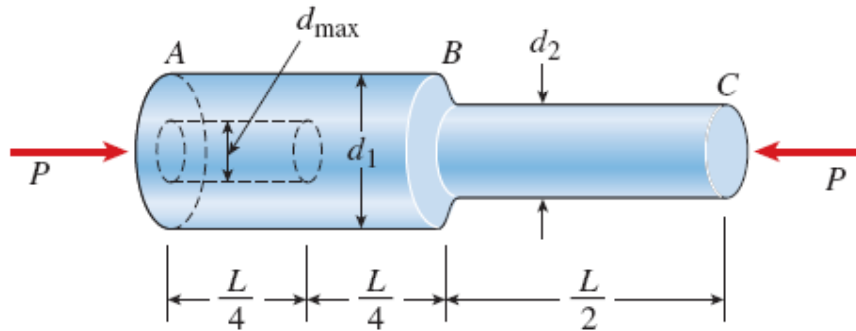
Aksijalno naprezanje

Izduženje aksijalno opterećenog elementa

II) promjena parametara po segmentima

Ukoliko je šipka podijeljena na nekoliko aksijalnih sila uzdužno, ili se mijenja poprečni presjek ili modul elastičnosti, ukupno izduženje je jednako zbiru izduženja pojedinačnih segmenata u kojima su ove veličine konstantne.

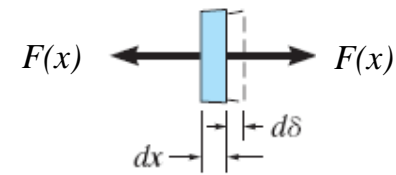
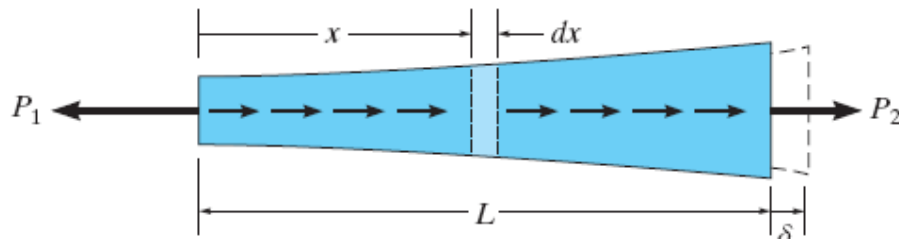
$$\delta = \sum_i \frac{F_i L_i}{A_i E_i} \tag{2.2}$$



Aksijalno naprezanje

Izduženje aksijalno opterećenog elementa

III) proizvoljan poprečni presjek i opterećenje



$$\sigma = \frac{F(x)}{A(x)}$$

$$\sigma = \varepsilon E$$

$$\varepsilon = \frac{d\delta}{dx}$$



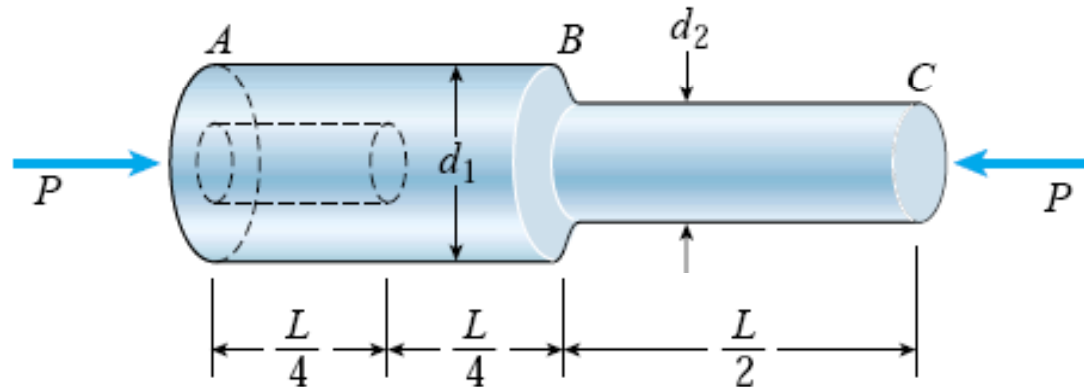
$$d\delta = \frac{F(x)dx}{A(x)E}$$

$$\delta = \int_0^L \frac{F(x)dx}{A(x)E} \quad (2.3)$$

Aksijalno naprezanje

Primjer 2.1: Element ABC na slici, dužine L , sastavljen je od dva dijela iste dužine (0.6 m), ali različitih prečnika, i izložen sili od $P=110$ kN. Dio AB ima prečnik $d_1=100$ mm, a segment BC $d_2=60$ mm. Segment AB je uzdužno izbušen do polovine dužine (0.3 m). Dio je napravljen od plastike modula elastičnosti $E=4$ MPa.

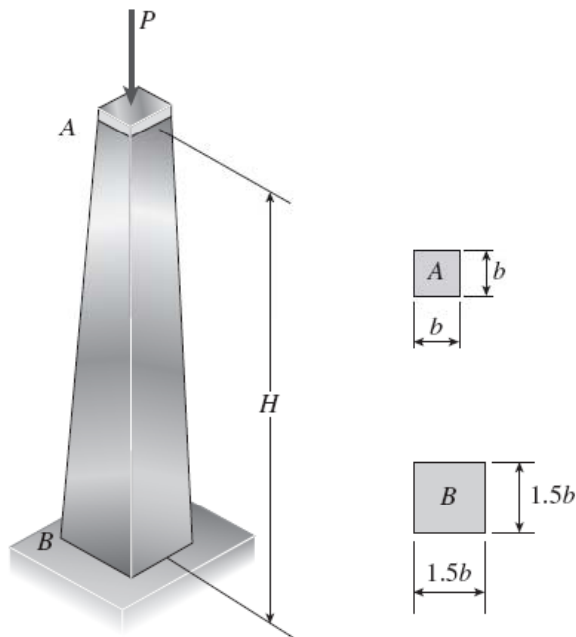
- Ukoliko je dozvoljeno sabijanje dijela 8mm, koliko je maksimalno dozvoljeni prečnik rupe?
- Ako je maksimalni prečnik rupe jednak $d_2/2$, na kojoj udaljenosti od tačke C treba primijeniti silu P da se šipka ne skрати 8 mm.
- Ako je maksimalni prečnik rupe jednak $d_2/2$, a sila primijenjena na krajevima, koja je dozvoljena dubina rupe ako je skraćenje ograničeno na 8 mm.



Aksijalno naprezanje

Primjer 2.2: Stub koji se koristi kao oslonac za opremu u laboratoriji je obrađen uniformno kao na slici čitavom dužinom H . Svaki poprečni presjek stuba je kvadrat, pri čemu je vrh dimenzija $b \times b$, a baza $1.5b \times 1.5b$.

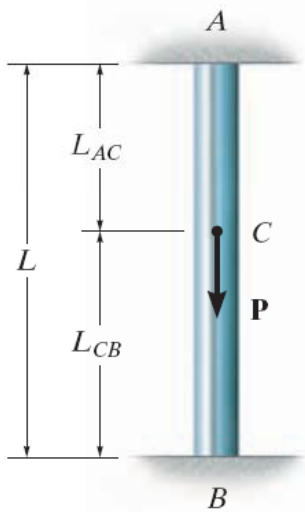
Izvesti formulu za deformaciju d usljed sile P koja djeluje na vrh. Pri tome pretpostaviti da je ugao zakošenja mali i da težina stuba nema uticaj na defromaciju.



Aksijalno naprezanje

Statički neodređeni aksijalno opterećeni elementi

Problem je statički neodređen ako jednačine ravnoteže nisu dovoljne da bi se odredile sile reakcije.



$$\Sigma F = 0 \quad F_B - F_A - P = 0 \quad \text{Nedovoljno da bi se odredile reakcije!!!}$$

Dodatni uslov za određivanje sile reakcije su:

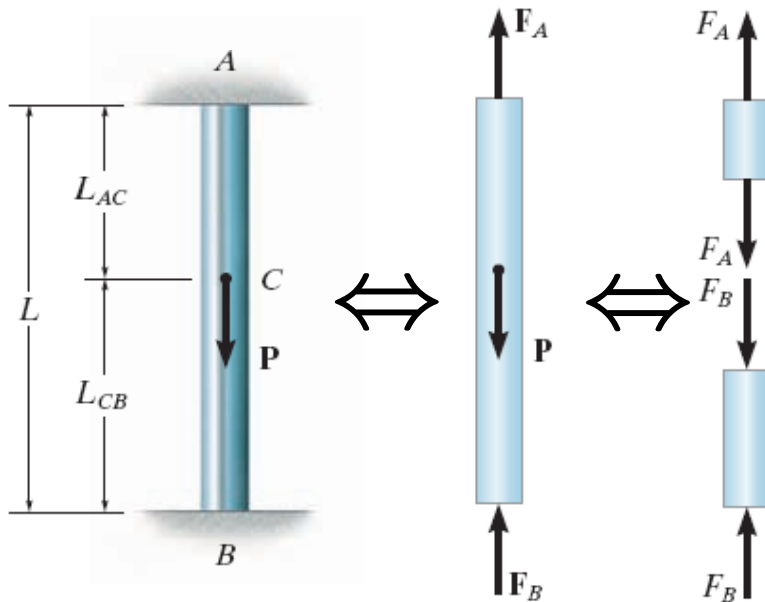
uslovi kompatibilnosti ili kinematski uslovi

specificiraju ograničenja u pomjeranju koja se javljaju u osloncima ili bilo kojoj drugoj tački u elementu.

$$\delta_A = \delta_B = 0$$

Aksijalno naprezanje

Statički neodređeni aksijalno opterećeni elementi



$$\Sigma F = 0 \quad F_B - F_A - P = 0$$

$$\delta_A = \delta_B = 0$$

$$\frac{F_A L_{AC}}{AE} - \frac{F_B L_{CB}}{AE} = 0$$

$$F_A = P \frac{L_{CB}}{L} \quad F_B = P \frac{L_{AC}}{L}$$

Aksijalno naprezanje

Statički neodređeni aksijalno opterećeni elementi

Princip superpozicije

Princip superpozicije: rezultujući naponi ili pomjeranja u nekoj tački mogu se odrediti algebarskim sabiranjem napona ili pomjeranja koja su uzrokovana svakom komponentom pojedinačno.

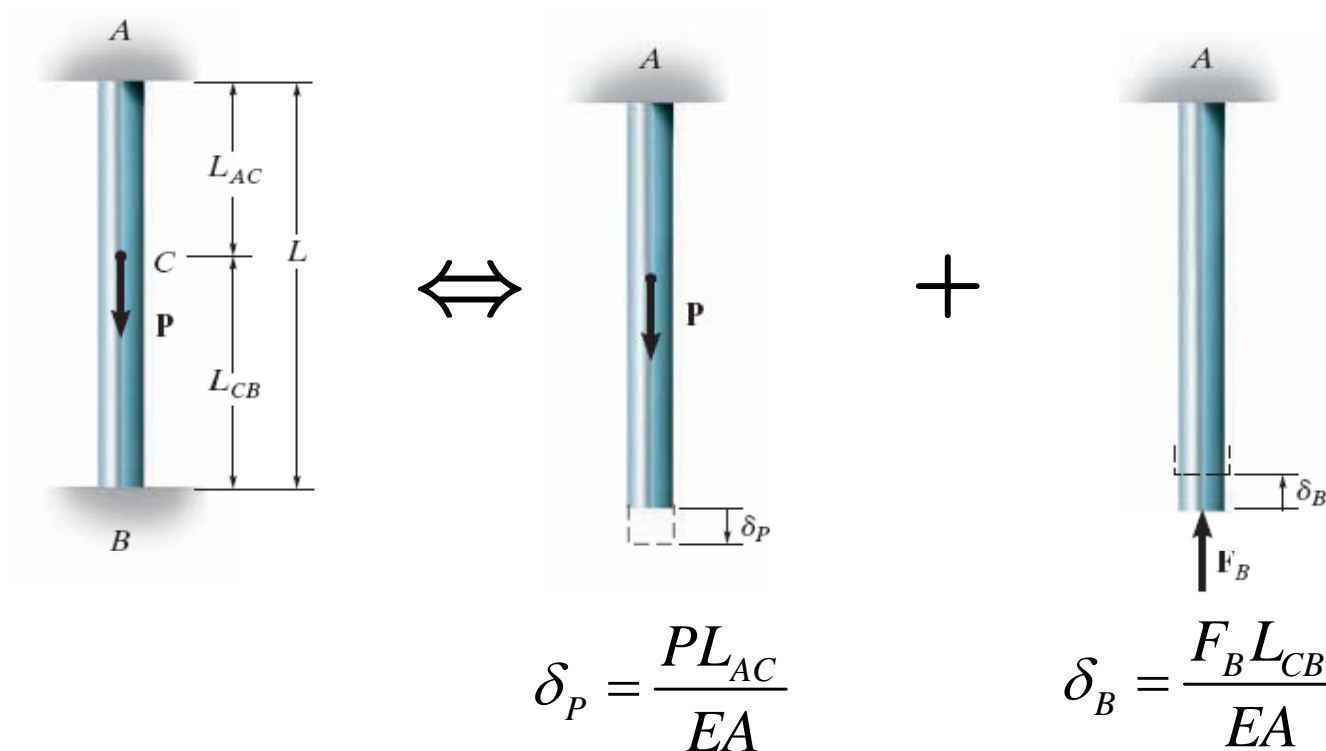
Uslovi za primjenu uslova superpozicije:

1. Opterećenje mora biti linearno u odnosu na napon ili pomjeranje koje treba odrediti
2. Opterećenje ne smije značajno promijeniti početnu geometriju ili konfiguraciju elementa na koji djeluje

Aksijalno naprezanje

Statički neodređeni aksijalno opterećeni elementi

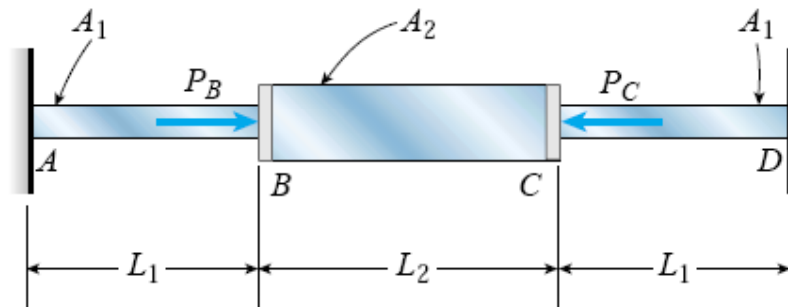
Metod fleksibilnosti ili metod sila (jednačina kopatibilnosti predstavljena principom superpozicije)



Aksijalno naprezanje

Primjer 2.3: Dio ABCD s fiksiranim krajevima sastoji se od tri prizmatična segmenta, kao na slici. Krajnji segmenti imaju površinu poprečnog presjeka od $A_1=840 \text{ mm}^2$ i dužinu $L_1=200 \text{ mm}$. Srednji segment ima površinu poprečnog presjeka od $A_2=1260 \text{ mm}^2$ i dužinu $L_2=250 \text{ mm}$. Opterećenja su: $P_B=25.5 \text{ kN}$ i $P_C=17.0 \text{ kN}$.

- Odrediti reakcije R_A i R_D u fiksiranim osloncima.
- Odrediti pritisnu aksijalnu silu F_{BC} u srednjem segmentu.

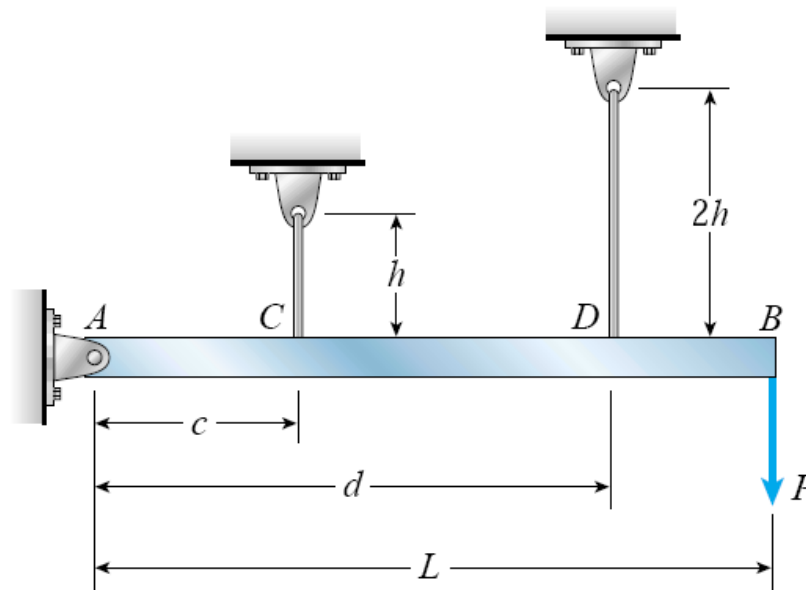


Aksijalno naprezanje

Primjer 2.4: Kruta šipka AB dužine L oslonjena je u tački A i ovješana pomoću dvije vertikalne žice u tačkama C i D . Obe žice imaju isti poprečni presjek A , i izrađene su od istog materijala modula elastičnosti E .

- Odrediti napone σ_C i σ_D u žicama usljed opterećenja P koje djeluje u tački B .
- Naći pomjeranje tačke B .

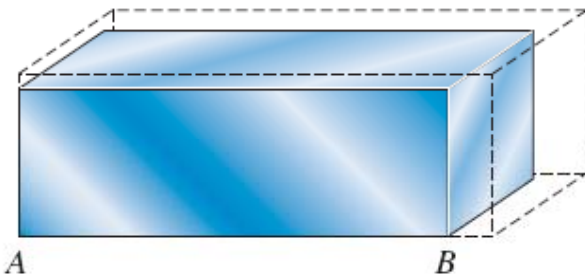
Podaci: $L=1700$ mm, $A=18$ mm², $E=210$ GPa, $h=450$ mm, $c=500$ mm, $d=1250$ mm, $P=750$ N.



Aksijalno naprezanje

Izduženje aksijalno opterećenog elementa: utjecaj temperature

Promjene temperature u elementu proizvode širenje ili skupljanje elementa, stvarajući tako tzv. termičke deformacije i napone.



$$\text{Defromacija: } \varepsilon_T = \alpha \Delta T \quad (2.4)$$

α – koeficijent termalnog širenja materijala, [1/K]

$$\text{Napon: } \sigma_T = \varepsilon_T E = \alpha(\Delta T)E \quad (2.5)$$

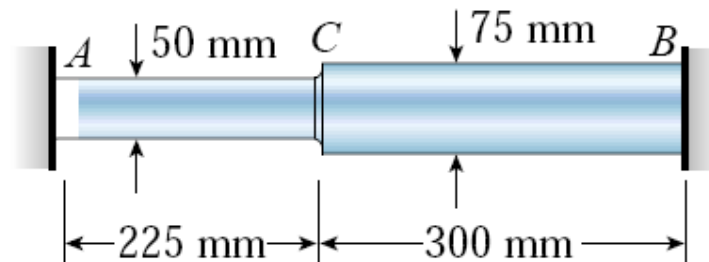
$$\text{Izduženje: } \delta_T = \varepsilon_T L = \alpha(\Delta T)L \quad (2.6)$$

Aksijalno naprezanje

Primjer 2.5: Plastična šipka ACB sačinjena od dva različita puna dijela cilindričnog poprečnog presjeka nalazi se između dva kruta oslonca kao na slici. Šipka je izložena povećanju temperature od 30°C .

- Odrediti silu koja vlada u šipki,
- maksimalni napon u tački C ,
- pomjeranje u tački C .

Podaci: $E=6\text{ GPa}$, $\alpha=100\cdot 10^{-6}\text{ 1}^{\circ}\text{C}$.



Aksijalno naprezanje

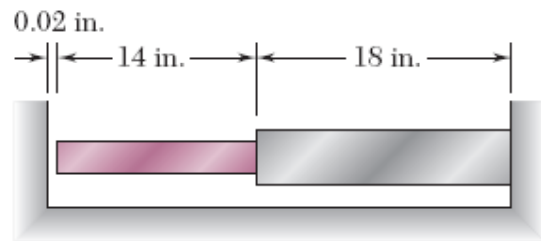
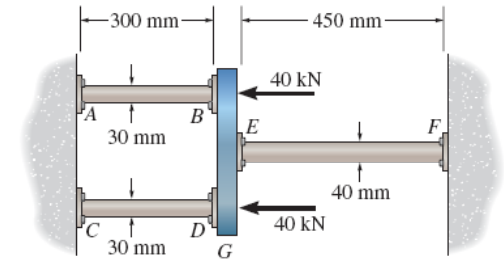
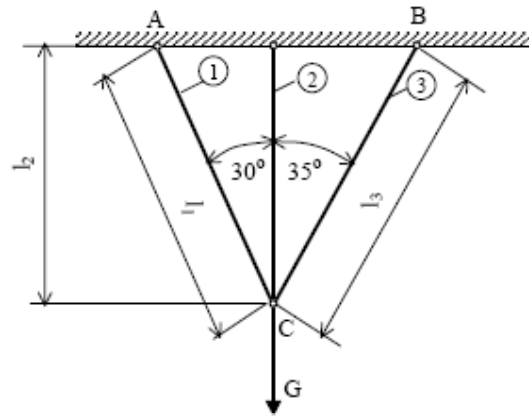
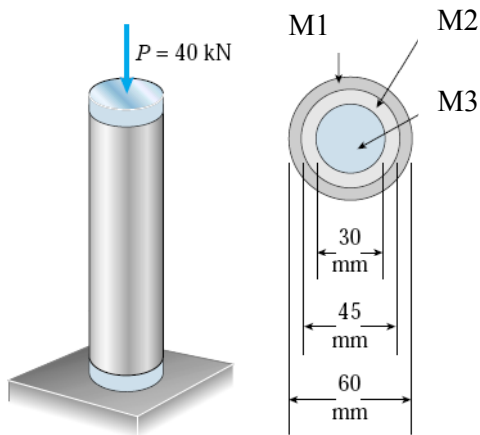
Statički neodređeni aksijalno opterećeni elementi – problemi

Opšti princip rješavanja statički neodređenih aksijalno opterećenih elemenata

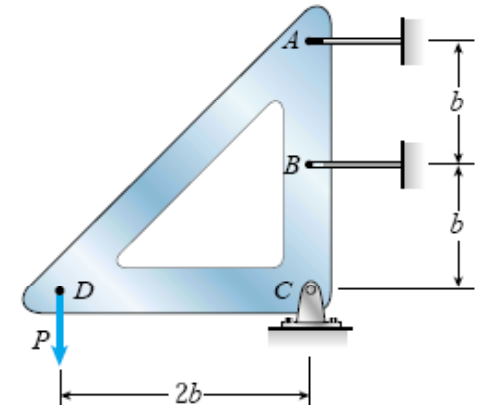
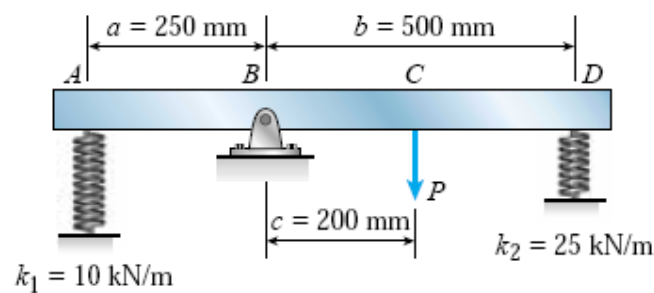
1. Postaviti jednačine ravnoteže (statičke, kinetičke jednačine)
2. Postaviti jednačine kompatibilnosti (geometrijske, kinematičke jednačine, jednačine konzistentne deformacije)
3. Postaviti relacije sila-deformacija (konstitutivne relacije)
4. Riješiti sistem jednačine dobiven kroz korake 1-3

Aksijalno naprezanje

Statički neodređeni aksijalno opterećeni elementi – problemi



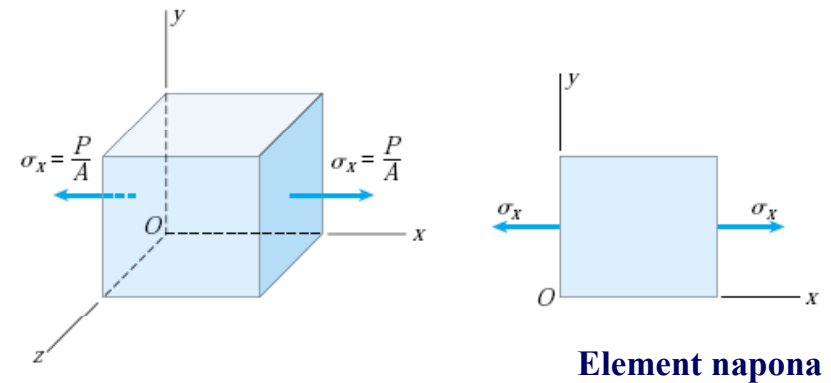
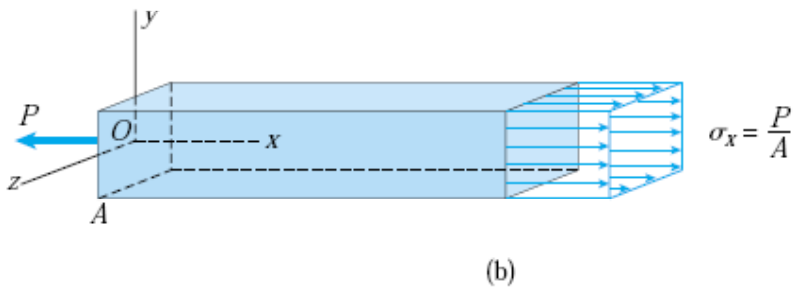
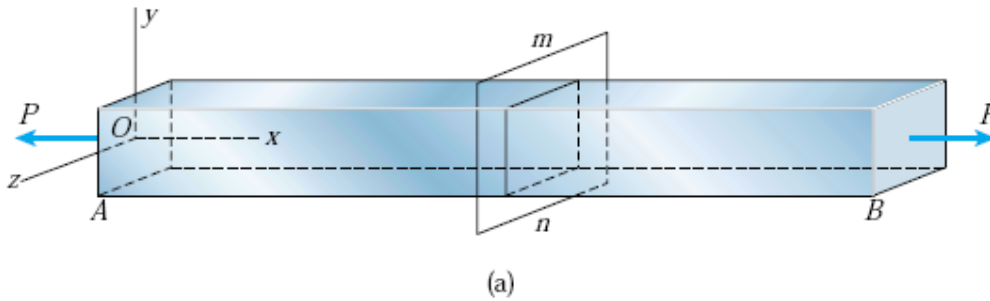
| | |
|---|---|
| Bronze | Aluminum |
| $A = 2.4 \text{ in.}^2$ | $A = 2.8 \text{ in.}^2$ |
| $E = 15 \times 10^6 \text{ psi}$ | $E = 10.6 \times 10^6 \text{ psi}$ |
| $\alpha = 12 \times 10^{-6}/^\circ\text{F}$ | $\alpha = 12.9 \times 10^{-6}/^\circ\text{F}$ |



Aksijalno naprezanje

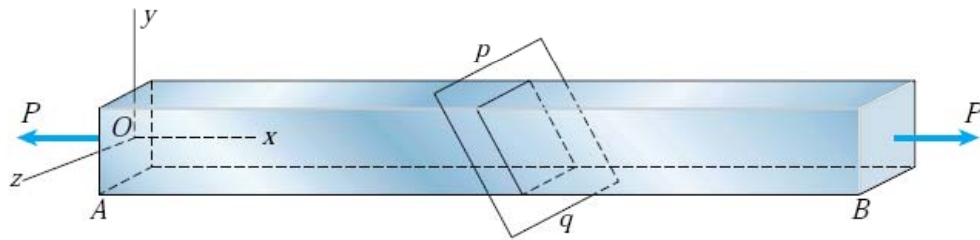
Napon u kosom presjeku

Pojam elementa napona – izolovani segment nekog elementa s ucrtanim naponima koji djeluju na njegove površine/stranice.

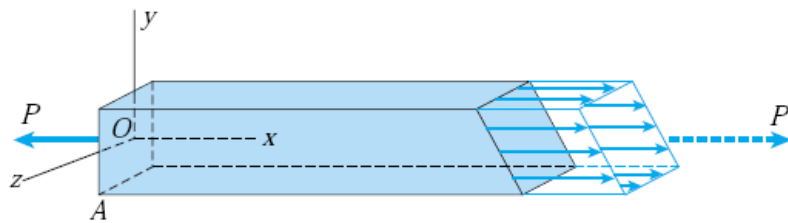


Aksijalno naprezanje

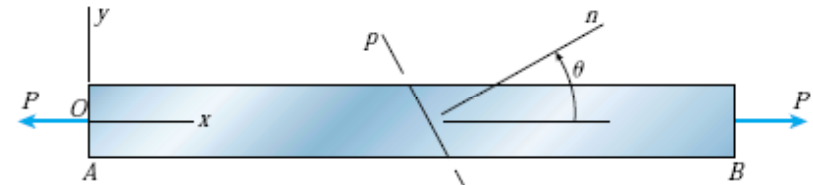
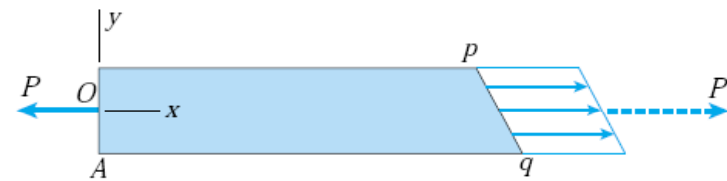
Napon u kosom presjeku



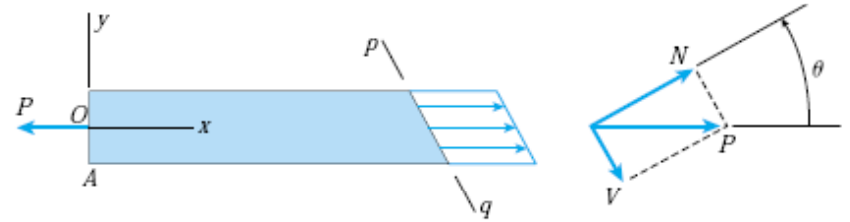
(a)



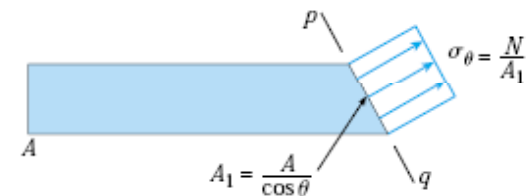
(b)



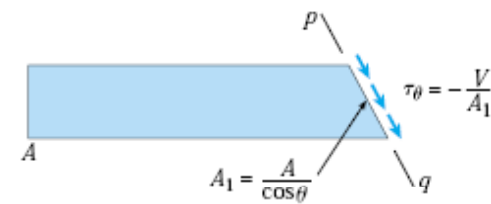
(a)



(b)

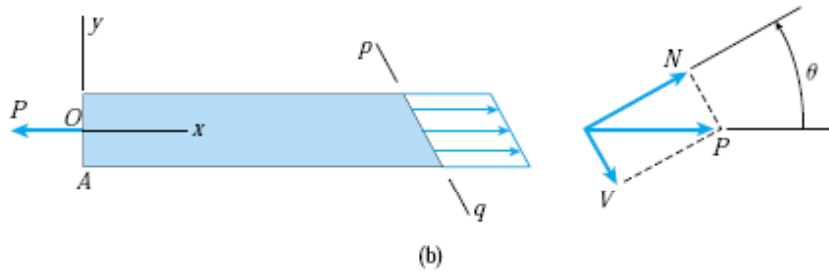
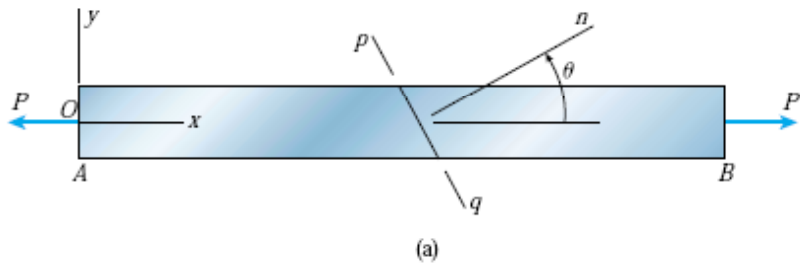


(c)

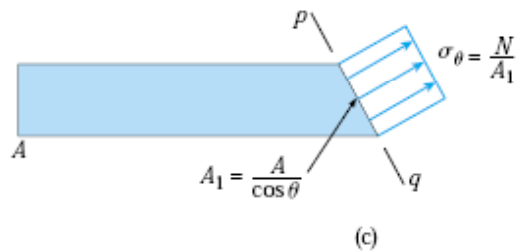


Aksijalno naprezanje

Napon u kosom presjeku

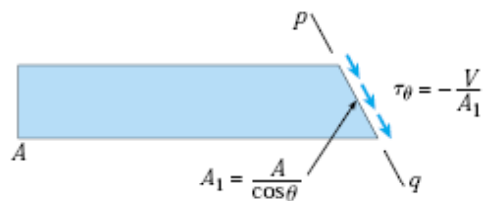


$$N = P \cos \theta \quad V = P \sin \theta$$



$$\sigma_{\theta} = \frac{N}{A_1} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta$$

Istezanje – pozitivan znak
Pritisak – negativan znak



$$\tau_{\theta} = -\frac{V}{A_1} = -\frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta$$

Pozitivan znak ako
tangencijalni napon teži
rotirati materijal suprotno
kretanju kazaljke na satu.

Aksijalno naprezanje

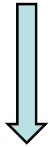
Napon u kosom presjeku

$$\sigma_{\theta} = \frac{N}{A_1} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta = \sigma_x \cos^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

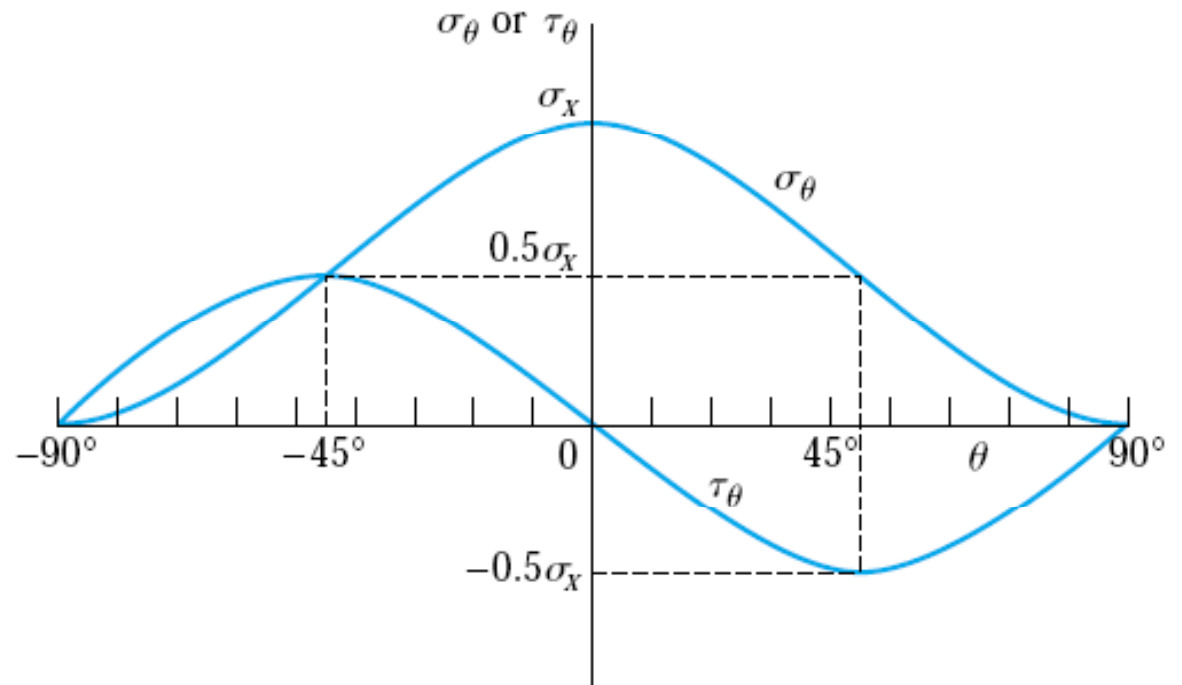
$$\tau_{\theta} = -\frac{V}{A_1} = -\frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$



$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad (2.7)$$

$$\tau_{\theta} = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta \quad (2.8)$$



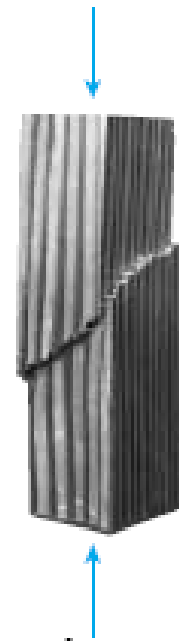
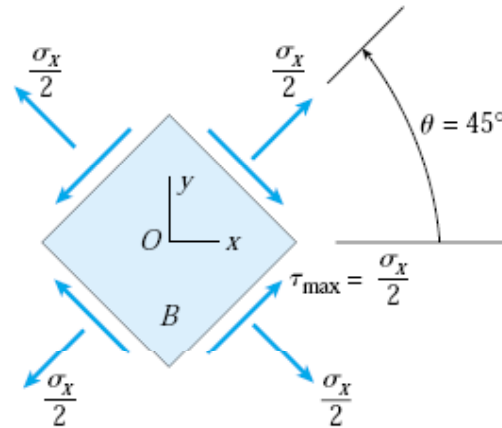
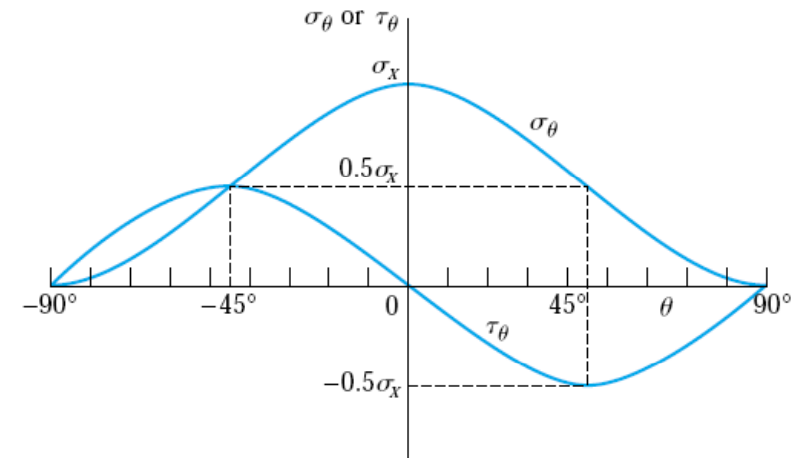
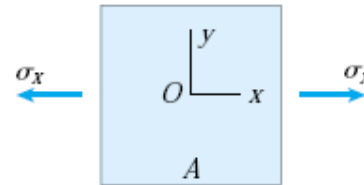
Aksijalno naprezanje

Napon u kosom presjeku

Maksimalni normalni i tangencijalni napon

$$\sigma_{\max} = \sigma_x \quad \text{za} \quad \theta = 0 \quad (\tau = 0)$$
$$\sigma_{\min} = 0 \quad \text{za} \quad \theta = \pm 90^\circ \quad (\tau = 0)$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} \quad \text{za} \quad \theta = 45^\circ \quad (\sigma = \frac{\sigma_x}{2})$$
$$\tau_{\min} = -\frac{\sigma_x}{2} \quad \text{za} \quad \theta = -45^\circ \quad (\sigma = \frac{\sigma_x}{2})$$



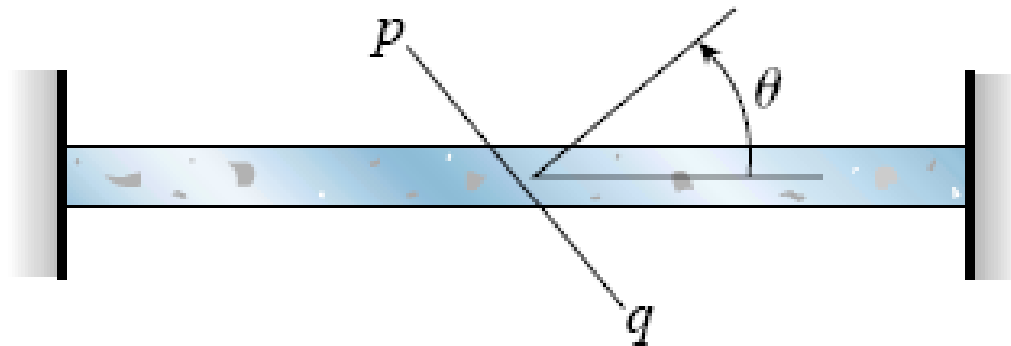
Aksijalno naprezanje

Primjer 2.6: Plastična šipka, pravougaonog poprečnog presjeka, je ugrađena između krutih oslonaca, ali bez početnog napona. Kada se temperatura u šipki poveća $40\text{ }^{\circ}\text{C}$, u ravni pq se javi pritisni napon od 12 MPa .

a) izračunati tangencijalni napon u ravni pq .

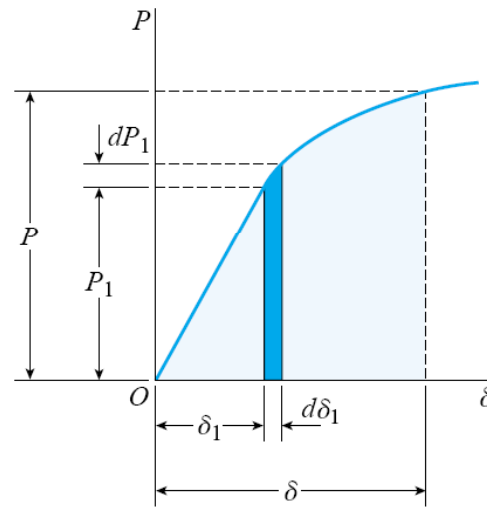
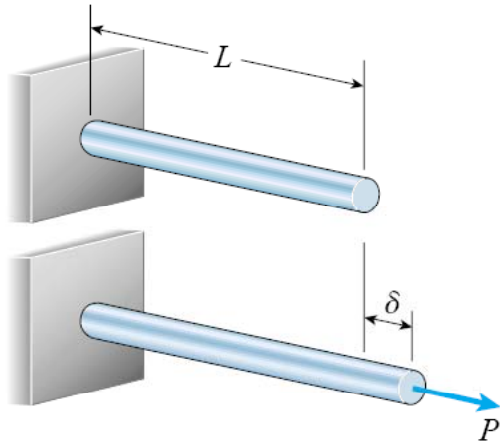
b) nacrtaj element napona orijentisan prema ravni pq i pokaži napone koji djeluju na sve površi elementa.

Podaci: $\alpha=108\cdot 10^{-6}\text{ }1/^{\circ}\text{K}$, $E=3\text{ GPa}$, $b=37.5\text{ mm}$, $h=75\text{ mm}$



Aksijalno naprezanje

Deformacioni rad



$$W = \int_0^{\delta} P_1 d\delta_1$$

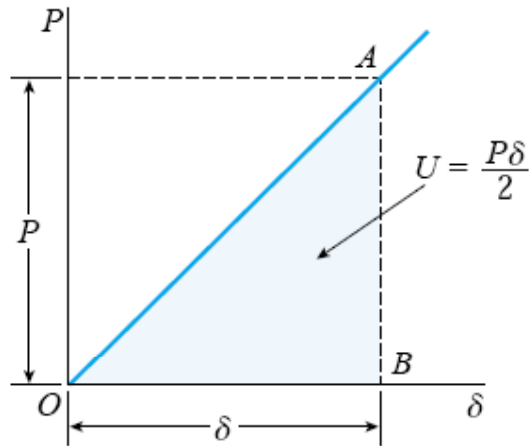
Izduženje šipke proizvodi deformaciju, čime se povećava energija šipke, tzv. **energiju deformacije ili deformacioni rad.**

$$U = W = \int_0^{\delta} P_1 d\delta_1 \quad (2.9)$$

Aksijalno naprezanje

Deformacioni rad

Linearno elastično ponašanje materijala



$$U = W = \int_0^{\delta} P_1 d\delta_1 = \frac{1}{2} P\delta \quad (2.10)$$

$$U = \frac{P^2 L}{2EA} \quad (2.11)$$

$$U = \frac{EA\delta^2}{2L} \quad (2.12)$$

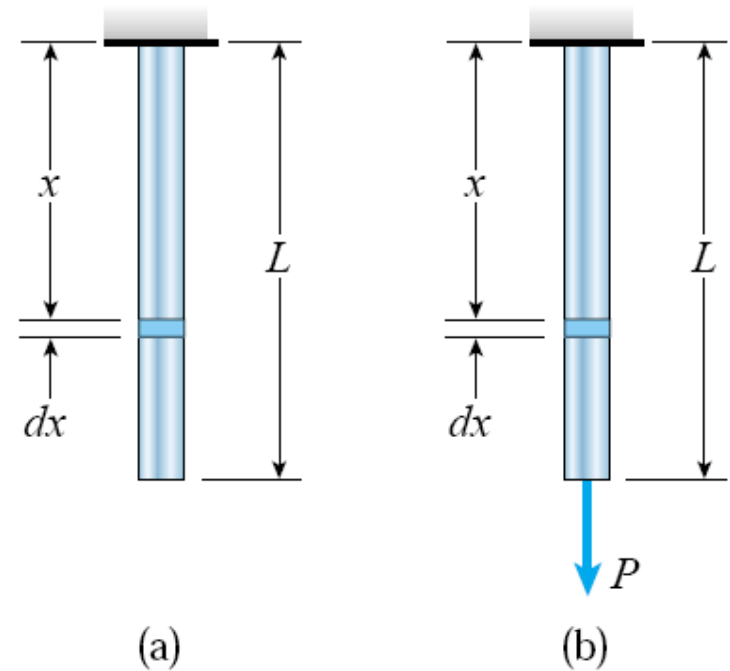
Nejednake šipke

$$U = \sum_i U_i = \frac{P_i^2 L_i}{2A_i E_i} \quad U = \int_0^L \frac{[P(x)]^2 dx}{2A(x)E} \quad (2.13)$$

Aksijalno naprezanje

Primjer 2.7: Odrediti deformacioni rad prizmatične šipke koja je učvršćena u svom gornjem dijelu, kao na slici, i to za slučajeve:

- a) usljed sopstvene težine,
- b) usljed sopstvene težine i djelovanja sile P .



Aksijalno naprezanje

Primjer 2.8: Odrediti okomito pomjerenje tačke B nosača na slici. Uzeti da oba štapa imaju istu aksijalnu krutost EA .

