Tomislav Došlić

Elementarne funkcije

Dodatak skripti

E. Schumacher

Matematika za agronome

Predgovor

Dugogodišnji problem nedostatka odgovarajuće literature za matematičke kolegije na Agronomskom fakultetu djelomično je riješen prošle godine prijevodom skripte "Mathematik für Agrarwissentschaftler" autora Dr. Ericha Schumachera sa Sveučilišta u Hohenheimu. Prva dva poglavlja te skripte pokrivaju najveći dio gradiva modula Matematika I. Svrha ovog dodatka je osigurati elektronički dostupan nastavni materijal i za preostali dio modula. U **Dodatku** je izloženo gradivo koje je predavano u nastavnoj cjelini "Pregled elementarnih funkcija" modula Matematika I.

Unatoč svom naslovu, ovaj materijal ne daje potpun i iscrpan pregled elementarnih funkcija, već ostaje u okviru gradiva obuhvaćenog modulom. Tako se, primjerice, ne promatraju detaljno trigonometrijske, ciklometrijske, hiperboličke i area funkcije. Studenta zainteresiranog za to gradivo upućujemo na bilo koji standardni udžbenik za gimnazije ili prve godine tehničkih fakulteta. Također, u **Dodatku** se ne iznose sadržaji vezani za diferencijalni račun i njegove primjene jer ni oni nisu obuhvaćeni modulom Matematika I. Zainteresirani studenti mogu više informacija o tom materijalu naći u trećem poglavlju Schumacherove skripte ili u nastavnim materijalima za modul Matematika II.

Slike u **Dodatku** nacrtane su programskim sustavom *Mathematica*. Kako Sveučilište ima licencu za taj program, koristim priliku pozvati zainteresirane studente da se upoznaju s mogućnostima koje im *Mathematica* nudi. Eksperimentirajući u *Mathematici* može se produbiti poznavanje elementarnih funkcija i lakše usvojiti gradivo modula.

Dodatak je pisan s težnjom da se na najmanju mjeru svede potreba za vanjskim referencama. Pretpostavlja se samo osnovno predznanje o skupovima i operacijama s njima koje bi svaki student trebao imati nakon završenih nižih razreda srednje škole. Kratko podsjećanje na te sadržaje može se naći i na početku prvog poglavlja u skripti.

U Zagrebu, ožujka 2006.

Tomislav Došlić

Pregled elementarnih funkcija

Podsjetimo se prvo na definiciju funkcije: **Funkcija** je uređena trojka $(\mathcal{D}, \mathcal{R}, f)$ koju čine skupovi $\mathcal{D}$ i $\mathcal{R}$ te pravilo f koje propisuje kako se svakom elementu iz $\mathcal{D}$ pridružuje točno jedan element iz $\mathcal{R}$. Skup $\mathcal{D}$ je **područje definicije** ili **domena**, a skup $\mathcal{R}$ je **područje vrijednosti** ili **slika** funkcije f. Činjenicu da elementu $x \in \mathcal{D}$ funkcija f pridružuje element $y \in \mathcal{R}$ zapisujemo u matematičkoj notaciji ovako:

$$y = f(x).$$

Veličinu x je uobičajeno nazivati **argumentom** ili **nezavisnom varijablom**; y je **zavisna varijabla**, jer se njene vrijednosti mijenjaju u ovisnosti o vrijednostima varijable x. Kako nas najviše zanimaju funkcije koje opisuju ovisnosti kvantitativnih veličina, u daljem ćemo tekstu smatrati da su $\mathcal{D}$ i $\mathcal{R}$ podskupovi skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Takve funkcije zovemo realnim funkcijama realne varijable. Želimo li naglasiti da se skupovi $\mathcal{D}$ i $\mathcal{R}$ odnose na funkciju f, pišemo $\mathcal{D}(f)$ i $\mathcal{R}(f)$.

Funkcije se zorno prikazuju grafovima. Graf funkcije f je krivulja u ravnini koja sadrži točke čije su koordinate vezane funkcijom f. Formalnije to pišemo ovako:

Definicija
Graf funkcije $f : \mathcal{D}(f) \to \mathcal{R}(f)$ je skup

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)); x \in \mathcal{D}(f)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Pri tome je $\mathcal{D}(f) = \Gamma_x(f)$ (projekcija grafa na x-os) i $\mathcal{R}(f) = \Gamma_y(f)$ (projekcija grafa na y-os).

Drugim riječima, graf funkcije f sadrži sve točke ravnine (x, y) za koje je $y = f(x)$.

Neka je f realna funkcija definirana na nekim intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da funkcija f **raste** na intervalu I ako za svake dvije vrijednosti $x_1, x_2 \in I$ za koje je $x_1 \leq x_2$ vrijedi $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ako za takve dvije vrijednosti $x_1, x_2 \in I$ vrijedi $f(x_1) \geq f(x_2)$, kažemo da funkcija f **pada** na I. Ako su nejednakosti između $f(x_1)$ i $f(x_2)$ stroge, kažemo da je funkcija f **strogo rastuća**, odnosno **strogo padajuća** na I. Funkcija raste (pada) u točki $x_0 \in \mathbb{R}$ ako raste (pada) na nekom intervalu I koji sadrži točku x_0.

1 Polinomi i racionalne funkcije

Za svaki realan broj x moguće je izračunati svaku njegovu potenciju s nenegativnim cjelobrojnim eksponentom x^k, $k \geq 0$. Zbrajajući konačno mnogo takvih članova dolazimo do pojma polinoma.

Polinomi su konceptualno najjednostavije funkcije. Vrijednost polinoma $P(x)$ može se izračunati konačnim brojem operacija zbrajanja i množenja za svaki realan broj x. Dakle je svaki polinom definiran na cijelom skupu $\mathbb{R}$. Dijeljenjem polinoma izlazimo iz te klase funkcija, slično kao što dijeljenjem prirodnih (ili cijelih) brojeva dobivamo brojeve koji (općenito) nisu prirodni. Po analogiji s racionalnim brojevima, kvocijente dvaju polinoma nazivamo **racionalnim funkcijama**. Za razliku od polinoma, racionalne funkcije općenito nisu definirane na cijelom skupu $\mathbb{R}$ jer se njihove vrijednosti ne mogu izračunati u točkama u kojima im se nazivnik poništava. Naravno, postoje i racionalne funkcije kojima se nazivnik nigdje ne poništava; takve su definirane na cijelom $\mathbb{R}$. Polinomi su specijalni slučaj racionalnih funkcija kojima je polinom u nazivniku jednak 1.

Prvo ćemo se upoznati s osnovnim gradivnim blokovima polinoma i racionalnih funkcija i s nekim specijalnim slučajevima.

1.1 Linearna funkcija

Linearne funkcije su polinomi prvog stupnja. Primjer takve funkcije je ovisnost opsega kruga O o polumjeru r:

$$O(r) = 2\pi r.$$

Ovakva je ovisnost primjer proporcionalne ovisnosti.

Definicija

Veličina y je **izravno proporcionalna** ili **izravno razmjerna** veličini x ako postoji konstanta $k \in \mathbb{R}$ takva da je $y = kx$. Veličina y je **obrnuto proporcionalna** ili **obrnuto razmjerna** veličini x ako postoji konstanta $k \in \mathbb{R}$ takva da je $y = \frac{k}{x}$. U tom je slučaju y izravno proporcionalna recipročnoj vrijednosti od x i umnožak veličina x i y je konstantan, $xy = k$.

Izravna proporcionalnost je specijalni slučaj linearne ovisnosti. Kod linearne ovisnosti imamo jednoliku promjenu zavisne varijable, u smislu da jednake promjene nezavisne varijable rezultiraju jednakim promjenama zavisne varijable. Kod funkcija koje nisu linearne to nije slučaj. Na primjer, kod funkcije $f(x) = x^2$, pomaknemo li se iz $x = 0$ u $x = 1$, vrijednost funkcije se promijeni za 1; pomaknemo li se iz $x = 3$ u $x = 4$ (dakle za isti iznos), promjena vrijednosti funkcije je $16 - 9 = 7$.

Opći oblik linearne funkcije je $f(x) = ax + b$.

Primjer

Mjesečna pretplata kod nekog operatera mobilne telefonije je 75 kn, a cijena minute razgovora je 1 kn. Kako iznos mjesečnog računa ovisi o vremenu telefoniranja u tom mjesecu? Koliko će morati platiti osoba koja je u danom mjesecu telefonirala 60 minuta?

Rješenje

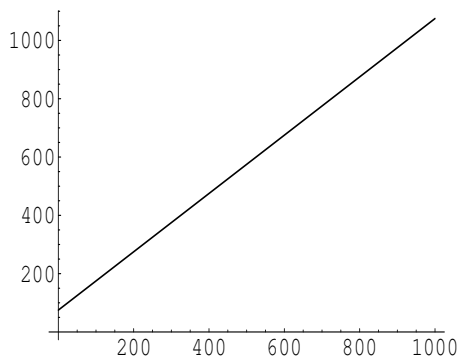
Označimo s t vrijeme (u minutama) ukupnog trajanja svih poziva u danom mjesecu, a s i iznos računa. Vrijedi

$$i(t) = 1 \cdot t + 75.$$

Ako je netko telefonirao 60 minuta, iznos računa je $i(60) = 135$ kn.

Graf linearne funkcije je pravac s koeficijentom smjera a i odsječkom na osi y jednakim b. Za $a = 0$ imamo konstantnu funkciju $f(x) = b$.

Graf funkcije iz gornjeg primjera prikazan je na slici 1.



Slika 1: Graf funkcije $f(x) = x + 75$.

Primjer (funkcija troškova)

U nekom proizvodnom pogonu fiksni trošak dnevne proizvodnje (režijski troškovi, plaće i doprinosi) je 1000 kn, a varijabilni troškovi (materijal, pakiranje, transport) iznose 250 kn po jednom proizvodu. Kako ukupni dnevni troškovi proizvodnje $T(n)$ ovise o količini (broju) proizvedenih proizvoda? Koliki je ukupni dnevni trošak ako je proizvedeno 150 komada proizvoda?

Rješenje

Ukupni dnevni trošak dan je izrazom $T(n) = 150n + 1000$. Za proizvedenih 250 komada to iznosi $T(250) = 150 \cdot 250 + 1000 = 38500$ kn.

Linearna funkcija $f(x) = ax + b$ je rastuća ako je $a \geq 0$, a padajuća ako je $a \leq 0$. Ako su ove nejednakosti stroge, kažemo da je linearna funkcija strogo rastuća, odnosno strogo padajuća. Ponašanje linearne funkcije je isto na cijelom području definicije - ako raste u nekoj točki, raste na cijelom $\mathbb{R}$.

1.2 Potencije

Izraz oblika a^b zovemo **potencijom** s bazom a i eksponentom b. Za cjelobrojni pozitivni eksponent b potenciju s eksponentom b definiramo kao

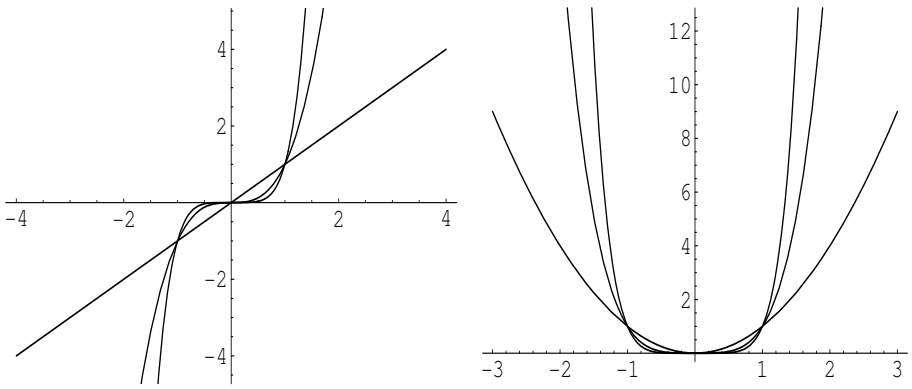
$$a^b = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a,$$

pri čemu se baza a pojavljuje b puta kao faktor u umnošku na desnoj strani gornje jednakosti.

Primjer funkcije u kojoj jedna veličina ovisi o potenciji druge veličine je ovisnost površine kruga o njegovom polumjeru:

$$P(r) = \pi \cdot r^2.$$

Promatrat ćemo kako se vrijednost izraza x^n mijenja u ovisnosti o vrijednosti x za konstantan $n \in \mathbb{N}$. Tim je izrazom zadana funkcija $f(x) = x^n$. Područje definicije takve funkcije je cijeli skup $\mathbb{R}$. Područje vrijednosti i oblik grafa potencije s pozitivnim cjelobrojnim eksponentom ovise o parnosti eksponenta. Grafovi funkcija $f(x) = x^n$ za $n = 1, 3$ i 5 prikazani su na slici 2 lijevo, a za $n = 2, 4$ i 6 na slici 2 desno. Svi ti grafovi prolaze kroz točku $(1, 1)$. Za $x > 1$ vrijedi $n > m \Longrightarrow x^n > x^m$, dok je za $0 < x < 1$ obratno, tj. $n > m \Longrightarrow x^n < x^m$.



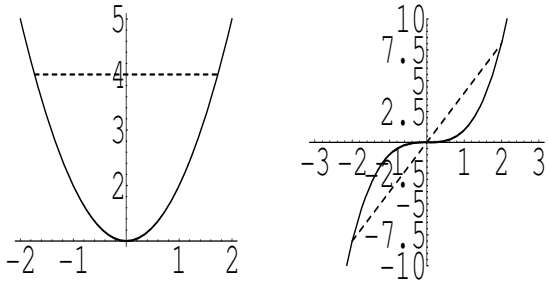
Slika 2: Grafovi funkcije $f(x) = x^n$ za neparni (lijevo) i parni (desno) n.

Za potencije s parnim eksponentom $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $(-x)^n = x^n$; za potencije s neparnim eksponentom $n \in \mathbb{N}$ imamo $(-x)^n = -(x^n)$. Takvim se ponašanjem u odnosu na promjenu predznaka argumenta odlikuju i neke druge funkcije.

Definicija

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi $f(-x) = f(x)$ se zove **parna funkcija**. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi $f(-x) = -f(x)$ zove se **neparna funkcija**.

Sa slike 2 možemo vidjeti da su grafovi parnih potencija krivulje koje su zrcalno simetrične s obzirom na os y, a grafovi neparnih potencija su krivulje centralno simetrične s obzirom na ishodište. To vrijedi i za grafove drugih parnih i neparnih funkcija. Primjeri su prikazani na slici 3. Odgovarajuće simetrije su naznačene crtkanim linijama.

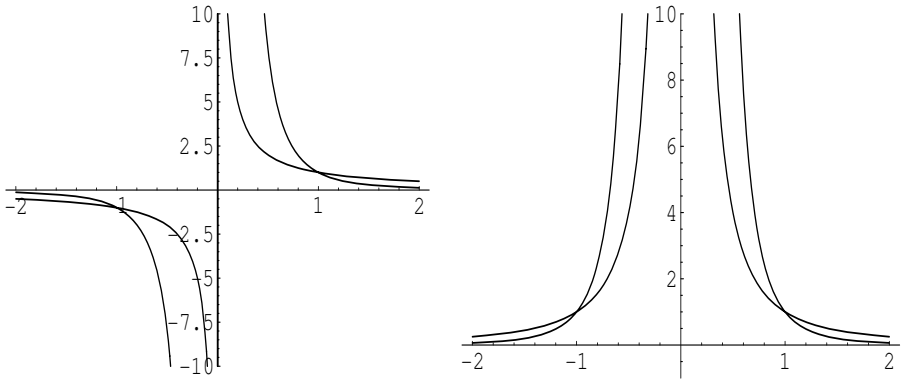


Slika 3: Primjer parne (desno) i neparne (lijevo) funkcije.

Nužan uvjet parnosti/neparnosti funkcije je simetričnost njenog područja definicije oko nule. Velika većina funkcija nije ni parna ni neparna. Važnost eventualne parnosti/neparnosti funkcije je u tome

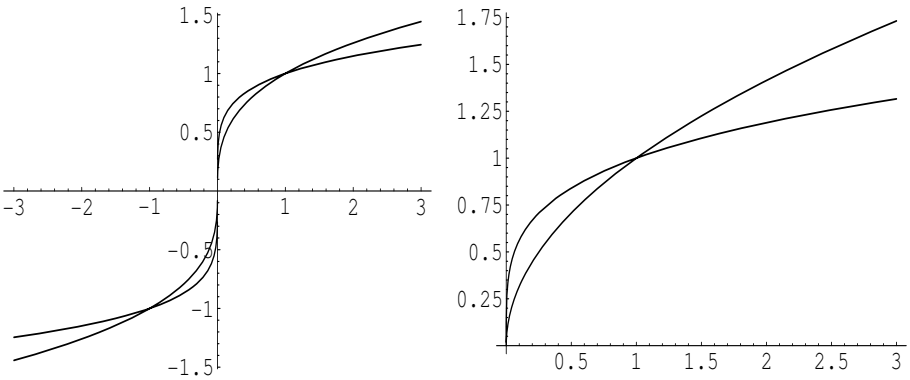
što njeno ponašanje moramo ispitivati samo na polovici njene domene, dok na drugoj polovici ono slijedi iz simetrije.

Ako je eksponent potencije negativan cijeli broj $-n$ za $n \in \mathbb{N}$, definiramo $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Takve potencije ne možemo izračunati kad je $x = 0$. Dakle je područje definicije funkcije $f(x) = x^{-n}$ cijeli skup $\mathbb{R}$ bez točke 0. Ponovo, područje vrijednosti i oblik grafa ovise o parnosti eksponenta n.



Slika 4: Grafovi funkcije $f(x) = x^{-n}$ za neparni (lijevo) i parni (desno) n.

Za razlomljene eksponente oblika $b = \frac{m}{n}$ pri čemu je $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, definiramo $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$. Za parne n takve su funkcije definirane samo za nenegativne vrijednosti nezavisne varijable x; za neparne n, definirane su na cijelom $\mathbb{R}$. Područje vrijednosti i oblik grafa prikazani su na slici 5.



Slika 5: Grafovi funkcije $f(x) = x^{1/n}$ za neparni (lijevo) i parni (desno) n.

Primjer

Masa M životinje je proporcionalna volumenu, a volumen je proporcionalan kubu neke karakteristične

duljine L, dakle $M = k_1 L^3$. Površina životinje je proporcionalna kvadratu te karakteristične duljine, tj. $P = k_2 L^2$. Kojeg je oblika ovisnost površine životinje o njenoj masi?

Rješenje

Tražimo formulu za funkciju $P(M)$. Znamo da je $M = k_1 L^3$. Odatle dobivamo $L = \sqrt[3]{\frac{M}{k_1}}$. Uvrštavanjem tog izraza u $P = k_2 L^2$ dobivamo $P(M) = \frac{k_2}{\sqrt[3]{k_1}} \sqrt[3]{M^2}$. Označavajući $\frac{k_2}{\sqrt[3]{k_1}}$ s k_3, dobivamo $P(M) = k_3 \sqrt[3]{M^2}$. Dakle je površina životinje proporcionalna trećem korijenu iz kvadrata mase.

Ovakvim odnosom mase i površine mogu se objasniti razne pojave vezane uz građu i metabolizam životinja. S porastom dimenzija životinje, njena masa raste brže od njene površine. To znači da količina topline generirane metabolizmom (koja je proporcionalna masi životinje) raste brže nego površina preko koje se ta toplina gubi u okoliš. Time se objašnjava činjenica da su podvrste koje žive u hladnim krajevima obično krupnije nego podvrste koje žive u toplijoj klimi. Također, sitnije životinje imaju brži metabolizam u usporedbi s krupnijim životinjama.

Potencije s razlomljenim eksponentima ne sudjeluju u izgradnji polinoma i racionalnih funkcija.

1.3 Polinomi

Definicija

Polinom n-tog stupnja u varijabli x je funkcija zadana formulom

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Ovdje podrazumijevamo da je $a_n \neq 0$. **Stupanj polinoma** je najviša potencija nezavisne varijable x u formuli za $P_n(x)$. Realne konstante $a_n, \ldots, a_1, a_0$ su **koeficijenti** polinoma $P_n(x)$. Koeficijent a_n je **vodeći**, a a_0 je **slobodni koeficijent**. Polinomi su definirani na cijelom $\mathbb{R}$.

Primjer

Troškovi sjetve na kvadratičnoj njivi sa stranicom a i njenog ograđivanja dani su formulom

$$T(a) = C_2 a^2 + C_1 a + C_0.$$

Ovdje je C_2 trošak sjetve po jedinici površine, C_1 trošak ograđivanja po jedinici duljine, a C_0 režijski troškovi koji ne ovise ni o površini njive, ni o duljini ograde.

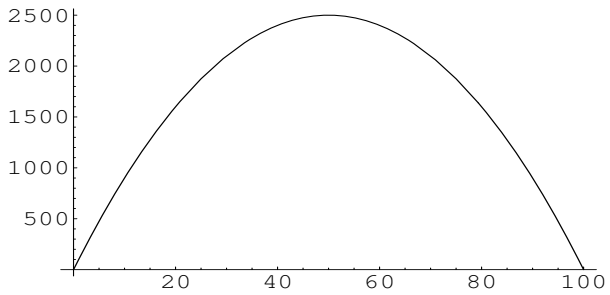
Funkcija iz gornjeg primjera je polinom drugog stupnja, ili kvadratna funkcija. Svojstva tog polinoma ste detaljno upoznali u srednjoj školi. Graf kvadratne funkcije je krivulja koja se zove **parabola**. Za kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$ pripadna parabola ima os paralelnu s osi y, otvor je okrenut prema gore ako je $a > 0$, a prema dolje ako je $a < 0$. Tjeme parabole ima koordinate $(-b/2a, -D/4a)$, gdje je D diskriminanta kvadratne funkcije $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$.

Primjer

Odredimo maksimalnu površinu pravokutne njive koju možemo ograditi ogradom ukupne duljine 200 m.

Rješenje

Površina pravokutne njive sa stranicama duljine x i y dana je formulom $P = x \cdot y$. Veličine x i y nisu nezavisne, povezane su relacijom $2x + 2y = 200$. Izražavajući jednu od njih pomoću druge, recimo y pomoću x, dobivamo $y = 100 - x$. Uvrštavajući ovaj izraz u formulu za površinu, dobivamo $P = x(100 - x)$. Kako bismo naglasili da površina ovisi o vrijednosti x, pišemo $P(x) = x(100 - x)$. Vidimo da je površina njive kvadratna funkcija duljine stranice x. Graf te funkcije prikazan je na slici 6. Maksimalnu vrijednost funkcija $P(x)$ postiže za vrijednost x koja odgovara apscisi tjemena parabole



Slika 6: Ovisnost površine pravokutne njive opsega 200 m o duljini stranice.

$P(x) = 100x - x^2$. Koristeći gornje formule za koordinate tjemena parabole, dobivamo $x_{max} = 50$. Odatle i $y_{max} = 50$, pa slijedi da je površina uz zadani opseg najveća kad su duljine stranica jednake, tj. kad je pravokutnik kvadrat. Vrijednost te površine je 2500 m^2, odnosno jedna četvrtina hektara.

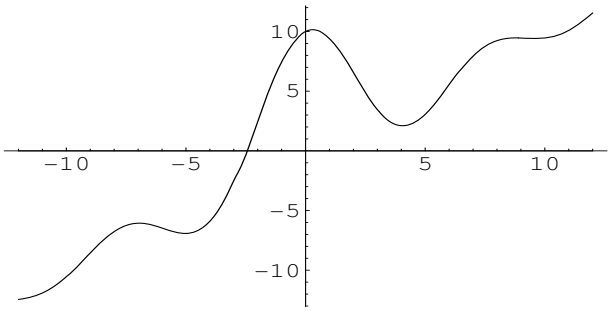
Promatrajući vrijednosti funkcije iz gornjeg primjera u okolini točke $x = 50$ vidimo da su one manje

nego u toj točki. Lokalno gledano, u točki $x = 50$ funkcija P ima maksimum. Ta nas situacija motivira za sljedeću definiciju.

Definicija

Ako za sve točke x iz neke okoline točke x_0 vrijedi $f(x) \leq f(x_0)$, kažemo da u točki x_0 funkcija f ima **lokalni maksimum**. Ako za sve točke x iz neke okoline točke x_0 vrijedi $f(x) \geq f(x_0)$, kažemo da u točki x_0 funkcija f ima **lokalni minimum**. Ako su nejednakosti stroge, govorimo o strogom lokalnom maksimumu odnosno minimumu. Lokalne maksimume i minimume jednim imenom nazivamo **lokalni ekstremi**.

Primjer funkcije s više lokalnih ekstrema prikazan je na slici 7. Na toj se slici može vidjeti da su



Slika 7: Primjer funkcije s lokalnim ekstremima.

promatrani ekstremi uistinu lokalni, tj. da su vrijednosti funkcije ekstremalne samo na nekoj dovoljno maloj okolini točke u kojoj se lokalni ekstrem postiže. Primjerice, vrijednosti funkcije blizu desnog ruba promatranog područja veće su od njenih vrijednosti u $x = 0$, gdje funkcija ima lokalni maksimum. Štoviše, vrijednost funkcije u lokalnom minimumu s apscisom $x = 4$ je veća od vrijednosti funkcije u lokalnom maksimumu s apscisom $x = -7$.

Ako je vrijednost funkcije u nekoj točki veća od vrijednosti funkcije u bilo kojoj drugoj točki njenog područje definicije, onda funkcija u toj točki ima **globalni maksimum**. Analogno se definira i globalni minimum.

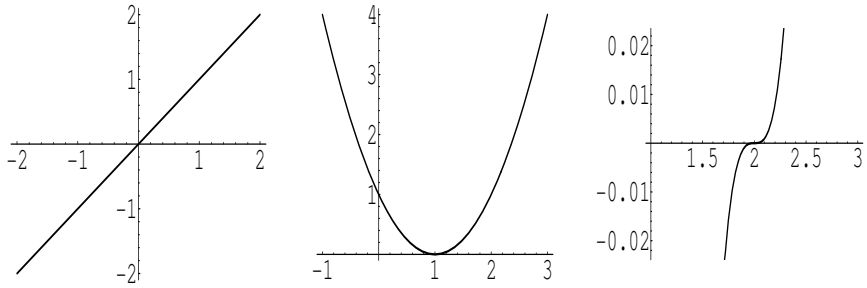
Problemi određivanja lokalnih i globalnih ekstrema među najčešćim su i najvažnijim problemima matematičkog modeliranja. Osim u rijetkim slučajevima, njihovo rješavanje zahtijeva primjenu diferencijalnog računa. Proučavanje diferencijalnog računa izlazi izvan okvira ovog pregleda i modula Matematika I.

Definicija

Broj $x_0 \in \mathbb{R}$ za koji je $P_n(x_0) = 0$ je **nultočka** polinoma P_n. (Pravilnije bi bilo reći da je takav broj nulište polinoma, a točka u kojoj graf polinoma siječe os x da je nultočka. Apscisa nultočke je nulište, a ordinata je, naravno, 0.) Kažemo da je x_0 nultočka k-tog reda polinoma P_n ako je

$$P_n(x) = (x - x_0)^k Q_{n-k}(x),$$

pri čemu je $Q_{n-k}(x_0) \neq 0$. Broj k zove se **red** ili **kratnost** nultočke x_0. Polinom prvog stupnja (linearna funkcija) ima točno jednu nultočku. Polinom n-tog stupnja može imati najviše n nultočaka. Polinom neparnog stupnja mora imati barem jednu nultočku, dok polinom parnog stupnja može i ne imati nultočke. Primjer je kvadratna funkcija čija je diskriminanta negativna.



Slika 8: Primjeri nultočaka različite kratnosti.

Primjer

Polinom $f(x) = x$ ima u $x = 0$ nultočku prvog reda (slika 8, lijevo). Polinom $f(x) = (x-1)^2$ ima u točki $x = 1$ nultočku drugog reda (slika 8, sredina). Polinom $f(x) = (x-2)^3$ na slici 8 desno ima u $x = 2$ nultočku trećeg reda.

Primijetimo da u nultočkama neparnog reda funkcija mijenja predznak, dok u nultočkama parnog reda nema promjene predznaka.

Kviz

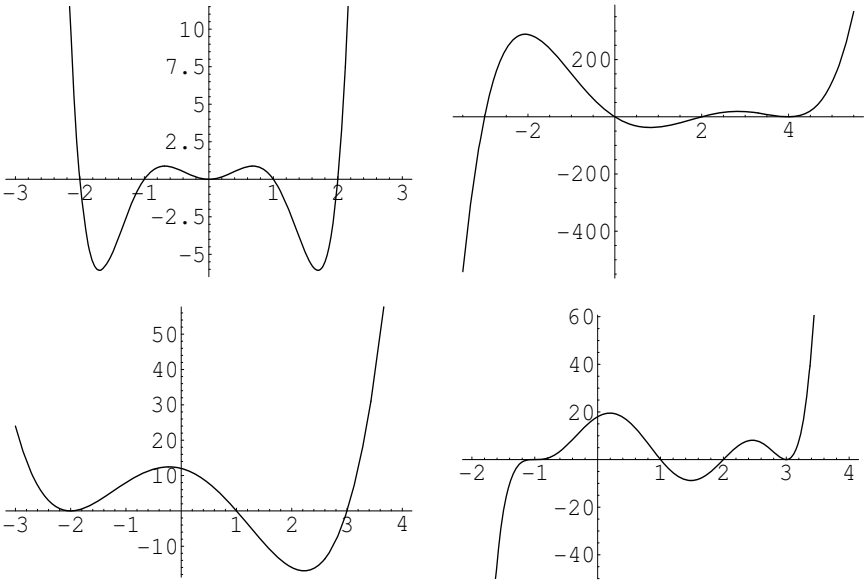
Pridružite svakom od sljedećih polinoma njegov graf sa slike 9.

a) $f_1(x) = x^2(x^2-1)(x^2-4)$

b) $f_2(x) = x(x-2)(x-4)^2(x+3)$

c) $f_3(x) = (x-1)(x-3)(x+2)^2$

d) $f_4(x) = (x+1)(x-1)^3(x-2)(x-3)^2$



Slika 9: Grafovi funkcija kojima treba pridružiti formule iz kviza

1.4 Racionalne funkcije

Zbroj, razlika i umnožak polinoma je ponovo polinom. Kvocijent dvaju polinoma općenito nije polinom.

Definicija

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **racionalna** ako je oblika

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

pri čemu su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi u x.

Kviz

Koje su od sljedećih funkcija racionalne?

a) $f_1(x) = \frac{x+2}{x^2-3}$

b) $f_2(x) = \frac{x \sin x}{x-1}$

c) $f_3(x) = \frac{x^7-5}{2-3x-x^3}$

d) $f_4(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x}}$

e) $f_5(x) = x - 13$

f) $f_6(x) = \frac{2}{2-3x}$

Racionalna funkcija $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je definirana u svim realnim brojevima osim u onima za koje se nazivnik poništava. Dakle,

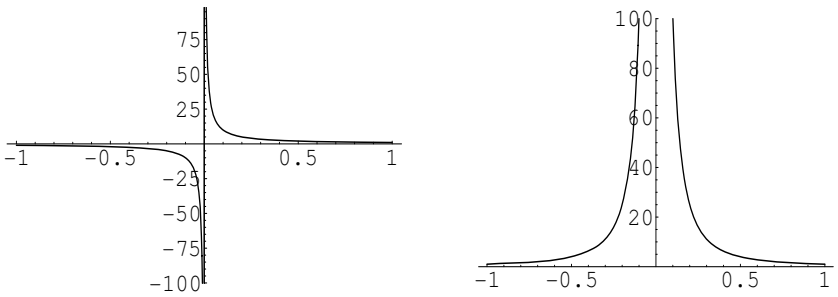
$$\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}; Q_m(x) \neq 0\}.$$

(Smatramo da je racionalna funkcija već skraćena, tj. da ne postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ koji je nultočka i brojnika i nazivnika.)

Nultočke racionalne funkcije su nultočke njenog brojnika. Dakle, $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0$ ako i samo ako je $P_n(x) = 0$.

Za određenu kombinaciju stupnjeva brojnika i nazivnika, kao i u točkama u kojima se nazivnik poništava, racionalna funkcija pokazuje ponašanje koje nismo nalazili kod polinoma - graf racionalne funkcije može imati asimptote. **Asimptota** neke krivulje je pravac kojemu se ta krivulja po volji blizu približava. Asimptote su vezane uz ponašanje funkcije blizu rubova domene.

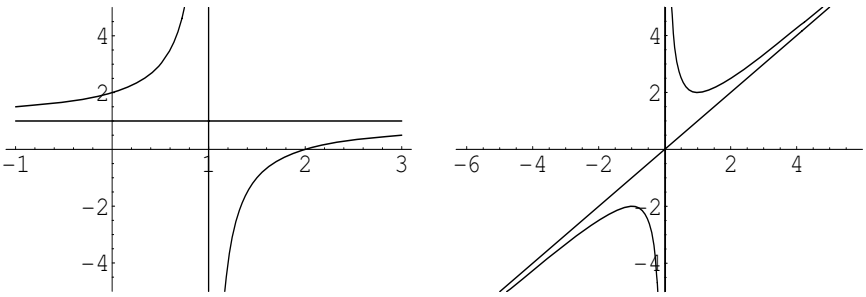
Nultočke polinoma u nazivniku racionalne funkcije zovemo njezinim **polovima**. Racionalna funkcija u polu ima **vertikalnu asimptotu**. Red pola je red odgovarajuće nultočke nazivnika. U okolini polova vrijednosti racionalne funkcije postaju po volji velike ili po volji male. Kažemo da u okolini polova vrijednosti racionalne funkcije teže prema beskonačnosti. Ako je pol parnog reda, tada vrijednosti funkcije s njegove lijeve i desne strane teže u istu beskonačnost, kao na slici 10 desno. Za polove neparnog reda, vrijednosti funkcije s lijeve i desne strane pola teže u suprotne beskonačnosti, kao na slici 10 lijevo.



Slika 10: Primjer pola neparnog i parnog reda.

Osim vertikalnih, racionalne funkcije mogu imati još i horizontalne i kose asimptote. Racionalna funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ ako je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika. Ako

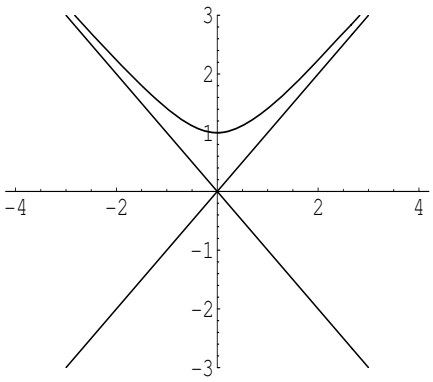
je stupanj brojnika jednak stupnju nazivnika, racionalna funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = c$, gdje je c jednak kvocijentu vodećih koeficijenata polinoma u brojniku i nazivniku. Ako je stupanj brojnika za točno 1 veći od stupnja nazivnika, racionalna funkcija ima kosu asimptotu. Za stupanj brojnika koji je barem za 2 veći od stupnja nazivnika, racionalna funkcija nema ni horizontalne ni kose asimptote. Primjeri racionalnih funkcija i njihovih asimptota prikazani su na slici 11. Na lijevoj



Slika 11: Primjeri racionalnih funkcija i njihovih asimptota.

slici vidimo racionalnu funkciju s horizontalnom asimptotom $y = 1$ i s vertikalnom asimptotom $x = 1$. Desna slika prikazuje racionalnu funkciju s vertikalnom asimptotom $x = 0$ i s kosom asimptotom $y = x$.

Racionalne funkcije imaju svojstvo da im je isti pravac horizontalna (ili kosa) asimptota na obje strane. Dakle, ako racionalna funkcija ima asimptotu $y = c$ kad x teži u $+\infty$, onda je isti pravac horizontalna asimptota i kad x teži u $-\infty$. Primjer na slici 12 pokazuje da to ne vrijedi za funkcije koje nisu racionalne; funkcije $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ ima kosu asimptotu $y = x$ kad x teži u $+\infty$ i kosu asimptotu $y = -x$ kad x teži u $-\infty$.



Slika 12: Primjer iracionalne funkcije i njenih asimptota.

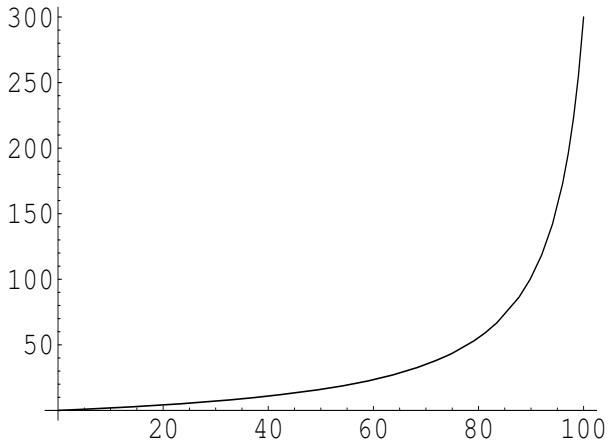
Racionalne se funkcije često koriste za aproksimacije i u matematičkom modeliranju.

Primjer (Funkcija cijene i koristi)

Cijena (u desetcima tisuća kuna) uklanjanja x postotaka zagađenja iz zraka dana je funkcijom $f(x) = \frac{18x}{106-x}$. Koliko košta smanjenje zagađenja za 50%?

Rješenje

Graf funkcije f prikazan je na slici 13. Odgovor na pitanje je dan formulom $10000 \cdot f(50) = 160714.29$ kn. Iz grafa vidimo da se glavnina zagađenja može otkloniti za razumnu cijenu, no da je potpuno uklanjanje zagađenja vrlo skupo.



Slika 13: Funkcija cijene uklanjanja zagađenja.

Promotrimo na istom primjeru i malo drugačiji problem: Koliko zagađenja možemo ukloniti raspolažemo li proračunom od 500000 kn? Prvi se problem svodio na uvrštavanje zadane vrijednosti argumenta u formulu za vrijednost funkcije. Ovaj se problem svodi na rješavanje jednadžbe $f(x) = 50$ (vrijednosti funkcije su u desetcima tisuća kuna). Rješenje je $x = 77.94\%$.

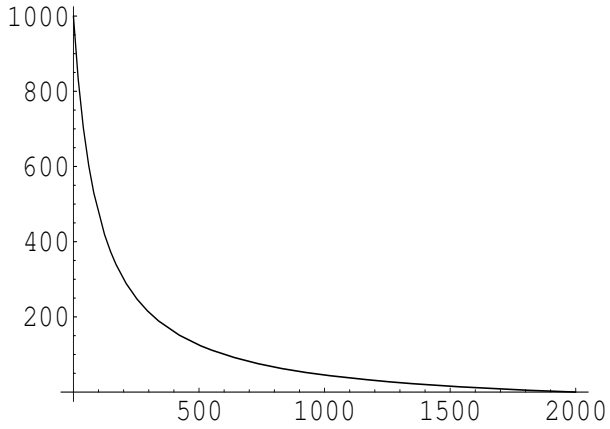
Primjer (Funkcija izmjene proizvoda)

Ova funkcija daje odnos između količina dvaju proizvoda koje mogu biti proizvedene u istom proizvodnom ciklusu ako se proizvodnje isključuju. Promatramo primjer vinarije koja u boce toči crno i bijelo vino. Ovisnost količine (u litrama) crnog vina (y) o količini (u litrama) bijelog vina x dana je funkcijom

$$y(x) = \frac{100000 - 50x}{100 + x}.$$

Rješenje

Nacrtajmo dio grafa u I kvadrantu (količine ne mogu biti negativne!) i odredimo koje su maksimalne količine pojedine vrste vina koje mogu biti utočene u boce.



Slika 14: Funkcija izmjene proizvoda - ovisnost količine crnog o količini bijelog vina.

$f(0) = 1000$ - točimo samo crno vino; $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 2000$ - točimo samo bijelo vino.

Na slikama 13 i 14, kao i na slici 1, crtali smo samo dijelove grafova koji odgovaraju fizikalno smislenim i zanimljivim vrijednostima argumenta: vrijeme, količine i postotci ne mogu biti negativni, postotak uklonjenog zagađenja ne može biti veći od 100, niti se u jednom mjesecu može telefonirati više od $31 \cdot 1440$ minuta.

2 Eksponencijalne funkcije

Eksponencijalne se funkcije prirodno javljaju kao matematički modeli situacija u kojima je promjena neke veličine proporcionalna toj veličini. Primjeri su rast populacije, prirast biomase, razmnožavanje bakterija, raspadanje radioaktivnih tvari, itd.

Definicija

Eksponencijalna funkcija s bazom a ($a > 0, \quad a \neq 1$) je definirana formulom $f(x) = a^x$.

Nezavisna varijabla se nalazi u eksponentu, odatle i ime. To je i temeljna razlika od polinoma u kojima se nezavisna varijabla nalazi u bazi potencije, a eksponenti su konstantni.

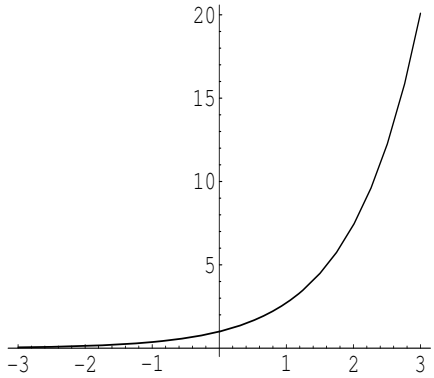
Temeljno svojstvo eksponencijalnih funkcija izdvaja od svih mogućih baza jednu kao najprirodniju. Naime, označimo li promjenu veličine a^x s $\Delta(a^x)$, uvjet proporcionalnosti se iskazuje kao

$$\Delta(a^x) = k \cdot a^x,$$

pri čemu je k neka konstanta. Najjednostavnija konstanta proporcionalnosti je $k = 1$. Može se pokazati da se ta konstanta postiže za točno jednu bazu. Tu bazu označavamo slovom e. Približna vrijednost broja e je

$$e = 2.718281828...$$

Broj e je jedna od fundamentalnih konstanta prirode, slično kao konstanta π. Kasnije ćemo pokazati da se svaka eksponencijalna funkcija može prikazati kao eksponencijalna funkcija s bazom e. Graf funkcije $f(x) = e^x$ prikazan je na slici 15.

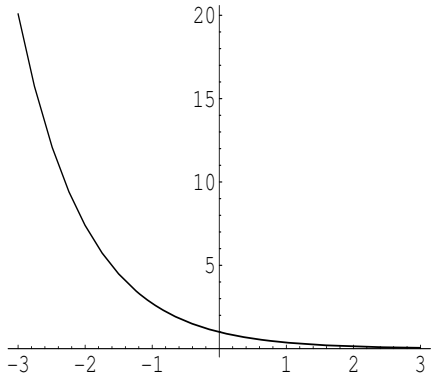


Slika 15: Graf funkcije $f(x) = e^x$.

Vrijednosti eksponencijalne funkcije mogu se izračunati za sve realne brojeve. Dakle je $\mathcal{D}(a^x) = \mathbb{R}$, za svaku bazu a. Vrijednosti eksponencijalne funkcije su strogo pozitivne; nije moguće potenciranjem pozitivne baze dobiti kao rezultat negativan broj ili nulu. To znači da je $\mathcal{R}(a^x) = \mathbb{R}^+ =< 0, \infty >$. Sa slike možemo vidjeti da je x-os jednostrana (lijeva) horizontalna asimptota grafa funkcije $f(x) = e^x$. Na desnu stranu funkcija raste vrlo brzo, brže od bilo kojeg polinoma.

Ponašanje eksponencijalnih funkcija s bazom većom od 1 je slično ponašanju funkcije e^x, i njihovi grafovi imaju kvalitativno isti oblik. Za baze $0 < a < 1$, graf funkcije $f(x) = a^x$ dobivamo iz grafa

funkcije $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ zrcaljenjem preko y-osi. (Za $0 < a < 1$ je $\frac{1}{a} > 1$). Graf funkcije $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ je prikazan na slici 16. Grafovi svih ostalih eksponencijalnih funkcija s bazom $0 < a < 1$ imaju sličan oblik. Zajedničko im je svojstvo da im je x-os jednostrana (desna) asimptota. Sve takve eksponencijalne funkcije su padajuće.



Slika 16: Graf funkcije $f(x) = (1/e)^x = e^{-x}$.

Grafovi svih eksponencijalnih funkcija prolaze kroz točku $(0, 1)$, jer je $a^0 = 1$ za svaki pozitivan broj a.

Osnovna svojstva eksponencijalne funkcije

1) $a^x = a^y \Longrightarrow x = y$

2) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

3) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

4) $(a^x)^y = a^{xy}$

5) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{a^y}$

Primjer

Netko uloži glavnicu C na štednju uz 10% godišnje kamate. Kolikim iznosom raspolaže nakon n godina ako je obračun kamate godišnji, složen i dekurzivan?

Rješenje

$$C(n) = C_n = C \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^n = C \cdot 1.1^n.$$

Primjer (Neograničeni eksponencijalni rast)

Broj jedinki neke vrste na nekom području se, pod povoljnim uvjetima, udvostručuje svake godine. Nakon t povoljnih godina od uvođenja vrste u to područje, brojno stanje populacije je $y(t) = 6 \cdot 2^t$.

(a) Odredite početni broj jedinki.

(b) Popunite tablicu i odredite broj jedinki po isteku četvrte godine od njihovog naseljavanja.

Rješenje

Početni broj jedinki dobijemo uvrštavanjem $t = 0$ u formulu. Dakle, $y_0 = y(0) = 6$. Brojno stanje na kraju četvrte godine je $y(4) = 96$ jedinki.

t	1	2	3	4	5
y	12	24	48	96	192

Tablica 1:

Primjer (Ograničeni eksponencijalni rast)

Prodaja nekog novog proizvoda u početku brzo raste, a zatim se tržište polako zasićuje. Na primjer, prodaja novog tipa otvarača za konzerve je opisana funkcijom

$$P(x) = 1000(1 - 3^{-x})$$

pri čemu x označava broj godina proteklih od pojave otvarača na tržištu. Izračunajmo količinu prodanih otvarača nakon prve, druge i treće godine.

$P(0) = 1000(1 - \frac{1}{3}) = 667$

$P(1) = 1000(1 - \frac{1}{9}) = 889$

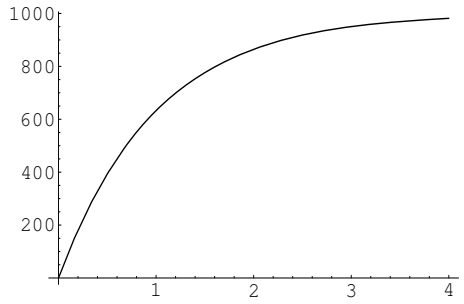
$P(2) = 1000(1 - \frac{1}{27} = 963.$

(Ovdje su vrijednosti zaokružene na najbliži cijeli broj.) Primjer funkcije prodaje je primjer funkcije ograničenog rasta. Isti oblik ima i **krivulja učenja**: novi radnik u početku uči brzo, no znanje (ili vještina) mu ostaje ispod neke gornje granice. To je karakteristika učenja vještine opetovanim ponavljanjem iste.

Primjer

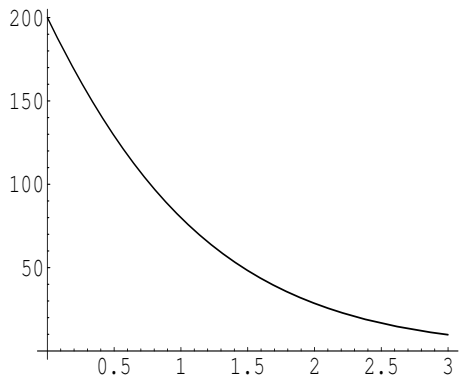
Funkcija koja opisuje ukupan broj učenjem zapamćenih činjenica u ovisnosti o vremenu proteklom od prestanka učenja dana je formulom

$$N(t) = y_0 \cdot \frac{1}{1 + 3^{t+1}}.$$



Slika 17: Funkcija prodaje novog otvarača za konzerve.

Ovdje je s t označen broj mjeseci proteklih od prestanka učenja, a s y_0 broj činjenica poznatih učeniku u trenutku prestanka učenja. Graf te funkcije prikazuje tzv. krivulju zaboravljanja.



Slika 18: Krivulja zaboravljanja.

Sličan oblik grafa imaju funkcije koje opisuju radioaktivni raspad.

Primjer

Izotop ugljika C^{14} je zastupljen u određenoj količini u svim živim bićima. Nakon prestanka izmjene tvari s okolinom, tj. nakon smrti organizma, radioaktivni C^{14} se više ne obnavlja i zatečena količina se počinje raspadati. Količina preostala nakon t godina je zadana formulom

$$C(t) = C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}.$$

Ovdje je C_0 količina izotopa C^{14} u živoj tvari. Koliko je star kostur u kojem ima 4 puta manje ugljika C^{14} nego u živoj kosti?

Rješenje

$$C(t) = \frac{C_0}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

Odavde je $t/5730 = 2$, odnosno $t = 11460$ godina.

Kao i u ranijim primjerima, na slikama 17 i 18 je crtan samo dio grafa za smislene i/ili zanimljive vrijednosti argumenta.

3 Logaritamska funkcija

Definicija

Neka je $a > 0$, $a \neq 1$. **Logaritam** pozitivnog realnog broja x po bazi a je broj c kojim treba potencirati bazu a da bi se dobio broj x.

$$c = \log_a x \Longleftrightarrow a^c = x.$$

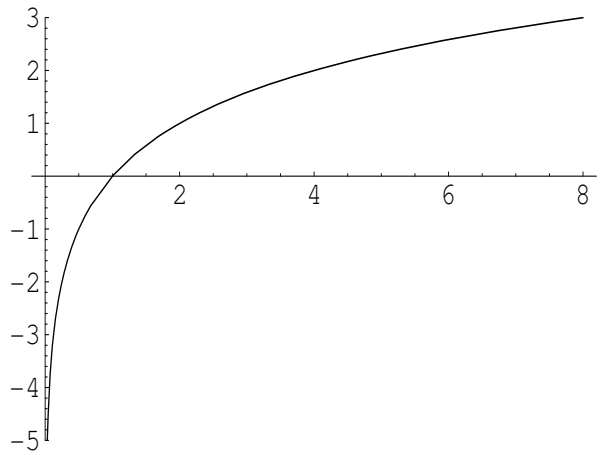
Logaritam po bazi e zovemo prirodnim i označavamo s $\ln x$. U primjenama su najčešći logaritmi s bazom 10. Takve logaritme zovemo dekadskima i označavamo s $\log x$, tj. ne pišemo bazu 10.

Iz definicije vidimo da logaritme možemo računati samo za pozitivne realne brojeve, jer potenciranjem pozitivne baze ne možemo dobiti negativan broj niti nulu.

Primjer

Na slici 19 je prikazan graf funkcije $f(x) = \log_2 x$. Taj je graf ilustrativan primjer grafa logaritamske funkcije s bazom većom od jedan. Sve takve funkcije imaju sljedeća svojstva:

- graf im prolazi kroz točku $(1, 0)$;
- rastuće su;
- domena im je skup $\mathbb{R}^+ =< 0, \infty >$;
- slika im je cijeli skup $\mathbb{R}$;
- vrijednosti funkcije teže u $-\infty$ kada vrijednosti argumenta teže u nulu;
- y-os je vertikalna asimptota.



Slika 19: Graf logaritamske funkcije s bazom 2.

Osnovna svojstva logaritamske funkcije

Neka su x i y pozitivni realni brojevi.

1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;

2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

3) $\log_a x^r = r \log_a x$;

4) $\log_a a = 1; \log_a 1 = 0$;

5) $\log_a a^y = y; a^{\log_a x} = x$;

6) $\log_{1/a} x = -\log_a x$;

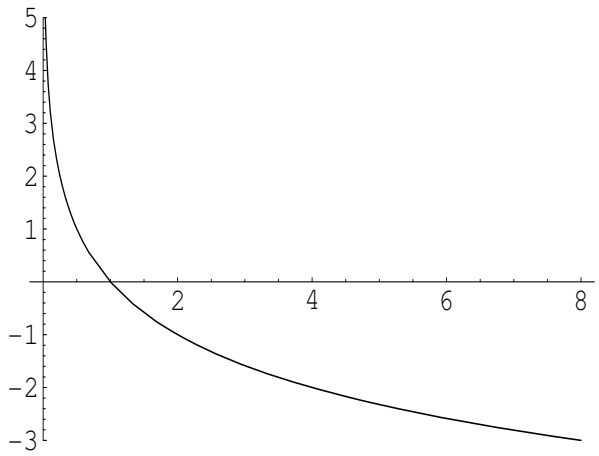
7) $\log_a x = \log_a y \Longrightarrow x = y$.

Iz svojstva 6 vidimo da graf logaritamske funkcije s bazom $0 < a < 1$ dobivamo zrcaljenjem preko osi x grafa logaritamske funkcije s bazom $1/a$. Primjer grafa takve logaritamske funkcije prikazan je na slici 20. Logaritamske funkcije s bazom $0 < a < 1$ su padajuće, i vrijednosti im teže u $+\infty$ kada vrijednosti argumenta teže u 0. Ostala svojstva su im ista kao i za logaritamske funkcije s bazom većom od 1.

Vrijednosti logaritma istog broja x po dvjema različitim bazama povezane su sljedećom formulom:

$$\log_a x = \log_a b \log_b x.$$

Vidimo da su vrijednosti logaritma proporcionalne. Konstantu proporcionalnosti $M = \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ zovemo **transformacijskim modulom**. Zahvaljujući gornjoj relaciji, dovoljno je poznavati vrijednosti logaritamske funkcije za jednu bazu; za sve ostale baze koristimo se odgovarajućim modulima



Slika 20: Graf logaritamske funkcije s bazom 1/2.

prijelaza.

Moduli prijelaza su korisni i pri svođenju funkcije $f(x) = a^x$ na funkciju e^x. Iz svojstava operacije potenciranja slijedi

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{Mx},$$

gdje je $M = \ln a$.

Najčešće korištene baze logaritamske funkcije su 10 (dekadski ili Briggsovi logaritmi), e (prirodni ili Napierovi logaritmi) i 2 (binarni logaritmi). Vrijednosti dekadskih logaritama su tabelirane u logaritamskim tablicama, koje su nekad bile nezaobilazno pomagalo svakog inženjera. S porastom dostupnosti elektroničkih računala važnost logaritama kao računalnih pomagala počela se smanjivati, no logaritamska funkcija je i dalje bitna za opis i razumijevanje mnogih prirodnih pojava.

Primjer

Neka je količina radioaktivne tvari nakon t dana zadana formulom $C_t = 1000 \cdot e^{-0.1t}$. Odredite vrijeme poluraspada te tvari.

Rješenje

Vrijeme poluraspada je vrijeme potrebno da se početna količina tvari smanji na polovicu. Tražimo, dakle, vrijeme t za koje je $C_t = \frac{C_0}{2}$. Uvrštavajući $t = 0$ dobivamo $C_0 = 1000$. Odatle je

$$C_t = 1000e^{-0.1t} = 500.$$

Za odrediti t moramo riješiti jednadžbu $e^{-0.1t} = \frac{1}{2}$. Logaritmirajući obje strane dobivamo jednadžbu

$$-0.1t = \ln \frac{1}{2},$$

a iz nje lako dobivamo $t = 6.9$. Dakle je vrijeme poluraspada jednako 6.9 dana.

Primjer

Richterova ljestvica služi za izražavanje i uspoređivanje jačina potresa. Potresu jačine I pridružuje se na Richterovoj ljestvici broj $j = \log \frac{I}{I_0}$, gdje je I_0 fiksna jačina vrlo slabog potresa kojeg još registriraju instrumenti. Izrazite brojevima s Richterove ljestvice jačine potresa $1000I_0$, $1000000I_0$ i $100000000I_0$. Koliko puta je potres jačine 7.3 po Richteru jači od potresa jačine 5.3?

Rješenje

Potresi su jačine 3, 6 i 9 na Richterovoj ljestvici. Ako je $j_1 = 7.3$, a $j_2 = 5.3$, to znači da je $I_1 = 10^{7.3}I_0$ i $I_2 = 10^{5.3}I_0$. Odatle, $I_1/I_2 = 10^2$. Dakle, pomak za 2 na Richterovoj ljestvici znači promjenu jačine za faktor $10^2 = 100$.

Primjer

Broj bakterija u nekoj kulturi opada po formuli $B(t) = 250000e^{-0.4t}$, gdje je t vrijeme izraženo u satima. Koliko će bakterija biti u kulturi nakon jednog sata? Nakon koliko sati će u kulturi ostati još samo 25000 bakterija?

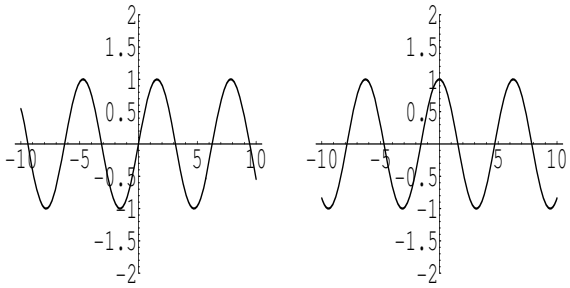
Rješenje

Prvo pitanje svodi se na uvrštavanje vremena $t = 1$ u formulu, dakle na računanje vrijednosti izraza $B(1)$. Odgovor je $B(1) = 250000e^{-0.4} = 167580$. Drugo se pitanje svodi na rješavanje jednadžbe $250000e^{-0.4t} = 25000$ po nepoznanici t. Logaritmiranjem dobivamo $-0.4t = \ln \frac{1}{10}$, odakle slijedi $t = 5.76$ sati.

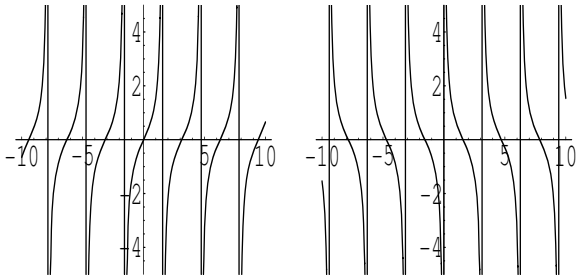
4 Ostale elementarne funkcije

Osim klasa funkcija koje smo spomenuli u ovom pregledu, važne su jos i **trigonometrijske**, **ciklometrijske**, **hiperboličke** i **area funkcije**, koje zajedno s ovdje opisanima čine klasu **elementarnih funkcija**. Osim elementarnih, postoje i **specijalne funkcije**, no njihovo proučavanje izlazi

izvan okvira ovog kolegija. Stoga ih ovdje samo ukratko spominjemo i dajemo njihove grafove.



Slika 21: Grafovi funkcija $f(x) = \sin x$ (lijevo) i $f(x) = \cos x$ (desno).



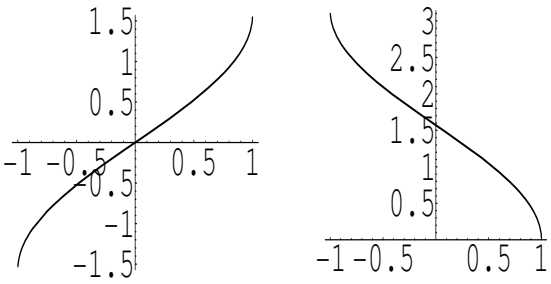
Slika 22: Grafovi funkcija $f(x) = \text{tg } x$ (lijevo) i $f(x) = \text{ctg } x$ (desno).

Trigonometrijske funkcije su **sinus**, **kosinus**, **tangens** i **kotangens**. Prvotno su bile definirane za šiljaste kutove u pravokutnom trokutu (odatle im i ime), no poslije su proširene na sve (u slučaju sinusa i kosinusa) ili gotovo sve (za tangens i kotangens) realne brojeve. Grafovi sinusa i kosinusa su prikazani na slici 21, a tangensa i kotangensa na slici 22.

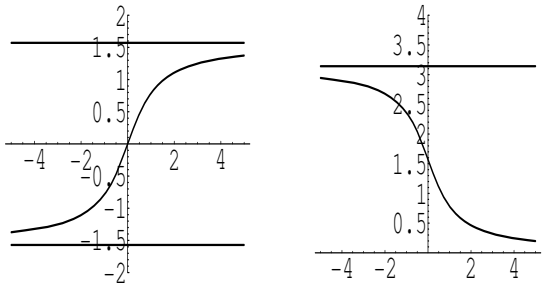
Prva stvar koju uočavamo s grafova trigonometrijskih funkcija je da se pomakom grafa u smjeru osi x za određeni iznos graf preslika sam na sebe. Funkcije s takvim svojstvom zovu se **periodičke**. Pomak u argumentu nakon kojeg se vrijednosti funkcije ponavljaju zove se **period** funkcije, a najmanji takav pomak je **temeljni period**. Sinus i kosinus imaju temeljni period od 2π, a tangens i kotangens maju temeljni period jednak π.

S grafova također vidimo da se vrijednosti sinusa i kosinusa nalaze u zatvorenom intervalu $[-1, 1]$. Tangens nije definiran u nultočkama kosinusa, a kotangens u nultočkama sinusa. U tim točkama te funkcije imaju vertikalne asimptote.

S trigonometrijskim su funkcijama usko vezane **ciklometrijske** ili **arkus** funkcije. One zadanoj vrijednosti trigonometrijske funkcije pridružuju vrijednost kuta za koju se ta vrijednost funkcije



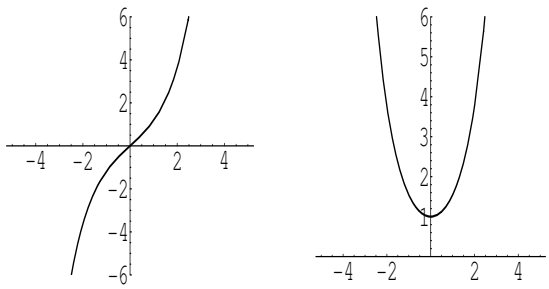
Slika 23: Grafovi funkcija $f(x) = \arcsin x$ (lijevo) i $f(x) = \arccos x$ (desno).



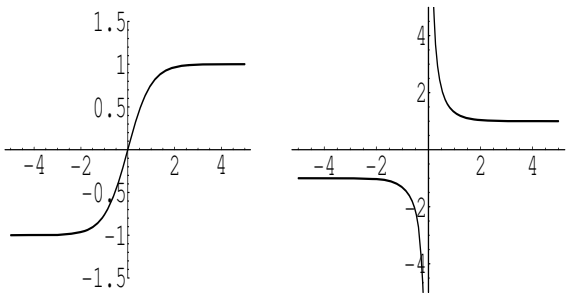
Slika 24: Grafovi funkcija $f(x) = \text{arctg } x$ (lijevo) i $f(x) = \text{arcctg } x$ (desno).

postiže. Svakoj trigonometrijskoj funkciji odgovara jedna arkus funkcija koja joj je inverzna. (Više o inverznim funkcijama reći ćemo pred kraj ovog **Dodatka**.) Grafovi arkus funkcija prikazani su na slikama 23 i 24.

Hiperboličke funkcije su po nekim svojstvima slične trigonometrijskim funkcijama, iako se definiraju u terminima eksponencijalne funkcije. Primjerice,



Slika 25: Grafovi funkcija $f(x) = \text{sh } x$ (lijevo) i $f(x) = \text{ch } x$ (desno).

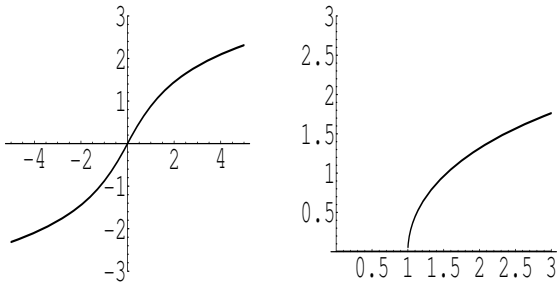


Slika 26: Grafovi funkcija $f(x) = \text{th } x$ (lijevo) i $f(x) = \text{cth } x$ (desno).

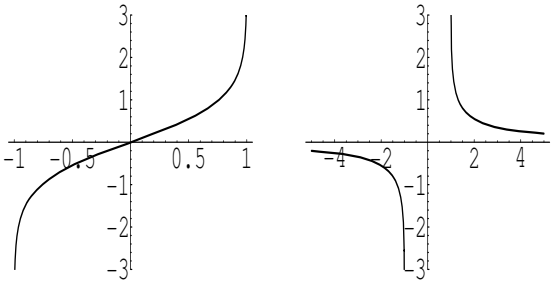
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Hiperbolički tangens i kotangens se definiraju kao i u trigonometrijskom slučaju, kao kvocijent hiperboličkih sinusa i kosinusa, odnosno kosinusa i sinusa. Grafovi hiperboličkih funkcija su prikazani na slikama 25 i 26.

Funkcije inverzne hiperboličkima zovu se **area funkcije**. Grafovi su im prikazani na slikama 27 i 28.

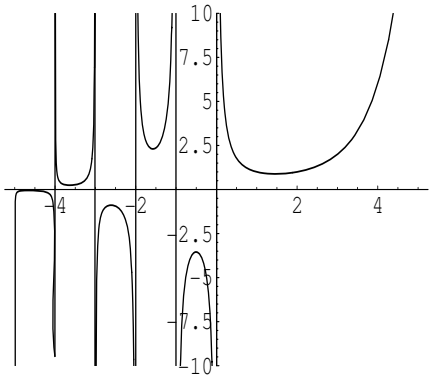


Slika 27: Grafovi funkcija $f(x) = \text{arsh } x$ (lijevo) i $f(x) = \text{arch } x$ (desno).

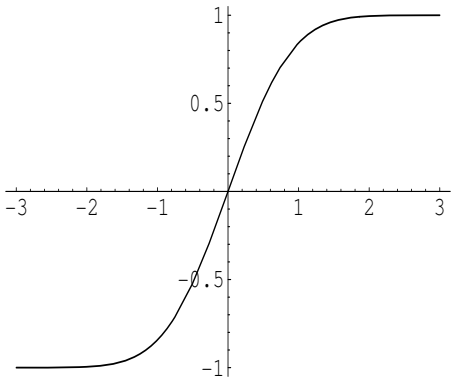


Slika 28: Grafovi funkcija $f(x) = \text{arth } x$ (lijevo) i $f(x) = \text{arcth } x$ (desno).

Area funkcijama završavamo pregled elementarnih funkcija. Osim elementarnih, u matematici i u njenim primjenama važnu ulogu igraju i **specijalne funkcije**. Razlika između elementarnih i specijalnih funkcija je samo pitanje konvencije. Od specijalnih funkcija spominjemo samo dvije, **gama funkciju** $\Gamma(x)$ i **integral vjerojatnosti** $\Phi(x)$. Gama funkcija je poopćenje na realne brojeve pojma faktorijela kojeg smo sreli u kombinatorici. Graf gama funkcije je prikazan na slici 29. Integral vjerojatnosti (prikazan na slici 30) igra važnu ulogu u statistici i teoriji vjerojatnosti kod opisivanja pojava



Slika 29: Graf funkcije $\Gamma(x)$.



Slika 30: Graf funkcije erf x.

koje se ravnaju po normalnoj raspodjeli.

Operacije s funkcijama

Osnovna svojstva funkcija

Pojam funkcije je vrlo općenit i obuhvaća sve moguće vrste ovisnosti jedne veličine o drugoj. Pokazuje se da najveći broj funkcija koje se pojavljuju u primjenama ima i neka dodatna svojstva. U ovom odjeljku dajemo pregled svojstava realnih funkcija realne varijable koja su za primjene najznačajnija.

Definicija

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **injekcija** ako za $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ uvjet $x_1 \neq x_2$ povlači $f(x_1) \neq f(x_2)$. Drugim riječima, injekcija različitim vrijednostima argumenta pridružuje različite funkcijske vrijednosti. (Kolokvijalno se još kaže i da f ne lijepi argumente.) Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **surjekcija** ako za svaki $y \in \mathcal{R}(f)$ postoji $x \in \mathcal{D}(f)$ takav da je $y = f(x)$. (Funkcija $f : \mathcal{D}(f) \to \mathcal{R}(f)$ je uvijek surjekcija.) Funkcija f je **bijekcija** ako je i injekcija i surjekcija.

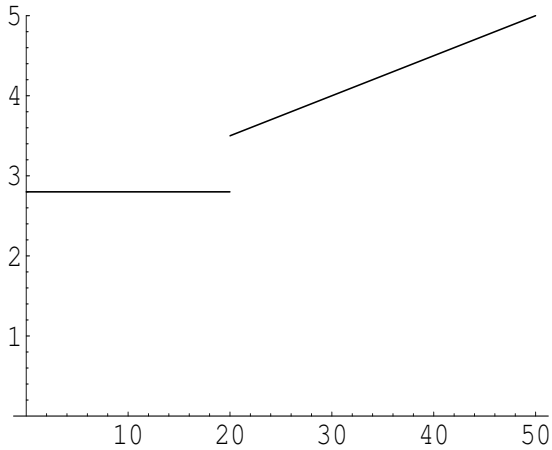
Injektivnost, surjektivnost i bijektivnost su važna svojstva realnih funkcija. S njima se najčešće susrećemo kod rješavanja jednadžbi. Surjektivnost osigurava postojanje rješenja, a injektivnost njegovu jedinstvenost.

Injektivnost se ponekad definira i uvjetom da jednakost slika povlači jednakost originala, tj. $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$. Taj je uvjet ekvivalentan onom iz naše definicije. Injektivnost funkcije se na njenom grafu manifestira činjenicom da se presjek grafa i pravca $y = c$ sastoji od najviše jedne točke, za bilo koji $c \in \mathbb{R}$.

Primjer

Funkcija $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, je injekcija za neparan n, ali ne i za paran n, jer pravac $y = 1$ siječe graf funkcije $f(x) = x^n$ za parno n u točkama $(-1, 1)$ i $(1, 1)$.

Sljedeće važno svojstvo realnih funkcija je svojstvo neprekidnosti. Za ilustraciju, promatrajmo funkciju koja opisuje visinu poštarine u ovisnosti o masi pošiljke. Neka je visina poštarine za pisma mase do (uključivo) 20 g jednaka 2.8 kn, a za pisma mase preko 20 g neka je poštarina dana formulom $c(m) = 3.5 + 0.05(m - 20)$ kn. Graf te funkcije prikazan je na slici 31. Promatrajmo ponašanje



Slika 31: Graf visine poštarine u ovisnosti o masi pošiljke.

vrijednosti funkcije $c(m)$ u okolini točaka $m = 10$, $m = 20$ i $m = 30$. Vidimo da je ponašanje u okolini točke $m = 20$ kvalitativno drugačije od ponašanja u okolini drugih dviju točaka. Naime, u točkama $m = 10$ i $m = 30$ (i u svim drugim točkama osim u $m = 20$) mala promjena vrijednosti argumenta rezultira malom promjenom vrijednosti funkcije. Za točke $m < 20$ nema nikakve promjene u vrijednosti funkcije, a za točke $m > 20$ promjena argumenta za neku malu vrijednost h rezultira promjenom funkcije za vrijednost $0.05h$. Želimo li promjenu vrijednosti funkcije održati manjom od nekog unaprijed zadanog broja Δc, moramo se pobrinuti da promjena argumenta bude manja od $20\Delta c$. S druge strane, proizvoljno mala promjena argumenta od vrijednosti 20 na $20+\Delta m$ će rezultirati skokom vrijednosti funkcije c za barem 0.7 kn, i ne postoji dovoljno mali Δm koji bi rezultirao manjom promjenom vrijednosti funkcije c. Vizualnom inspekcijom grafa vidimo da u točki $m = 20$ funkcija $c(m)$ ima skok, odnosno da graf funkcije ima prekid u toj točki.

Definicija

Funkcija f je **neprekidna** (ili neprekinuta) u točki $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$(|x - x_0| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

Funkcija je neprekidna na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako je neprekidna u svakoj točki skupa I.

Gornja je definicija samo tehnička formalizacija zahtjeva da mali pomaci u argumentu rezultiraju malim pomacima u vrijednosti funkcije.

Geometrijski, graf neprekidne funkcije se može nacrtati ne podižući olovku s papira.

Od funkcija koje smo do sada upoznali, polinomi i eksponencijalne funkcije su neprekidne na cijelom $\mathbb{R}$. Logaritamske funkcije su neprekidne na cijelom $\mathbb{R}^+$. Racionalne funkcije imaju prekide u polovima.

Zbroj, razlika i umnožak neprekidnih funkcija su neprekidne funkcije. Kvocijent dviju neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija svugdje osim u nultočkama nazivnika.

Većina funkcija koje opisuju prirodne pojave su neprekidne.

Definicija

Funkcija f je ograničena na skupu I ako postoje realni brojevi m i M takvi da je

$$m \leq f(x) \leq M$$

za sve $x \in I$.

Svaka funkcija neprekidna u točki x_0 je i ograničena na nekoj okolini te točke. Na okolini točke u kojoj ima prekid funkcija može ali i ne mora biti ograničena. Primjeri su ponašanje funkcije $c(m)$ iz primjera s poštarinom u okolini točke $m = 20$ i ponašanje funkcije $f(x) = 1/x$ u okolini točke $x = 0$.

5 Kompozicija funkcija

Primjer

Naftna mrlje kružnog oblika polumjera r ima površinu $P(r) = r^2\pi$. Polumjer mrlje raste s vremenom i porast je opisan formulom $r(t) = 1 + t$. Kako površina mrlje ovisi o vremenu?

Odgovor dobivamo uvrštavanjem formule za polumjer u formulu za površinu. Dakle, $P(t) = P(r(t)) = P(1 + t) = (1 + t)^2\pi$.

Gornji je primjer ilustracija načina kojim od poznatih funkcija možemo dobiti nove.

Definicija

Za zadane funkcije f i g definiramo njihovu **kompoziciju** $g \circ f$ formulom

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)].$$

Domena kompozicije $g \circ f$ dana je formulom

$$\mathcal{D}(g \circ f) = \{x \in \mathcal{D}(f); f(x) \in \mathcal{D}(g)\}.$$

Primjer

Odredimo kompozicije $g \circ f$ i $f \circ g$ funkcija $f(x) = 3x$ i $g(x) = \frac{2x}{x+1}$.

Rješenje

$$(g \circ f)(x) = g(3x) = \frac{2 \cdot 3x}{3x+1} = \frac{6x}{3x+1}.$$
$$(f \circ g)(x) = f(\frac{2x}{x+1}) = 3 \cdot \frac{2x}{x+1} = \frac{6x}{x+1}.$$

Iz ovog primjera vidimo da operacija kompozicije funkcija nije komutativna, tj. da je, općenito, $g \circ f \neq f \circ g$. Ako vrijednosti funkcije f padaju u njenu domenu, možemo funkciju f komponirati samu sa sobom. U takvom slučaju pišemo $f^2 = f \circ f$. Ovdje treba biti oprezan i ne brkati ovo s operacijom kvadriranja vrijednosti funkcije f.

Može se pokazati da je kompozicija dviju rastućih funkcija rastuća funkcija, a kompozicija rastuće i padajuće funkcije je padajuća funkcija. Kompozicija dviju padajućih funkcija je rastuća funkcija!

Važno je da se svojstvo neprekidnosti dobro nasljeđuje pri kompoziciji funkcija. Točnije, ako je funkcija f neprekidna u x_0, a funkcija g definirana i neprekidna u $f(x_0)$, onda je i kompozicija $g \circ f$ neprekidna u x_0.

Funkcija $i(x) = x$ ima s obzirom na operaciju kompozicije funkcija sličnu ulogu kao i broj 1 s obzirom na operaciju množenja realnih brojeva. Naime, za tu funkciju vrijedi $f \circ i = i \circ f = f$, za svaku funkciju f. Funkcija $i(x) = x$ se zove **identiteta**. Dakle, komponiranje bilo koje funkcije s identitetom ne mijenja tu funkciju.

6 Inverzna funkcija

Promatrajmo par funkcija $f(x) = 2x + 3$ i $g(x) = \frac{x-3}{2}$. Lako se vidi da je $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$. To znači da je ukupni učinak djelovanja obiju funkcija isti kao i da se ništa nije desilo s argumentom x. Drugim riječima, jedna od funkcija poništava učinak druge. Kažemo da su te funkcije jedna drugoj inverzne.

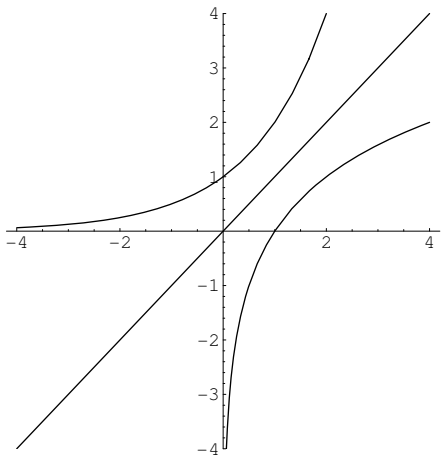
Definicija

Funkcija g je **inverzna** funkciji f ako je

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x.$$

Pišemo $g = f^{-1}$.

Nema svaka funkcija inverznu funkciju. Nužan i dovoljan uvjet postojanja inverzne funkcije za funkciju f je bijektivnost od f. Kako je svaka funkcija surjekcija na svojoj slici, postojanje inverzne funkcije je vezano uz injektivnost funkcije. Na primjer, funkcija $f(x) = x^2$ promatrana kao funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}_0^+$ nema inverznu funkciju, jer nije injektivna. Njena restrikcija, zadana istom formulom, ali promatrana kao funkcija s $\mathbb{R}_0^+$ na $\mathbb{R}_0^+$ je injektivna, i ima inverz koji je zadan formulom $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Slična je situacija i s trigonometrijskim funkcijama. Kad govorimo o njihovim inverzima, uvijek mislimo na inverze njihovih restrikcija na intervale na kojima su injektivne.



Slika 32: Graf funkcije $f(x) = 2^x$ i njoj inverzne funkcije $f^{-1}(x) = \log_2 x$.

Iz činjenice da je identiteta $i(x) = x$ rastuća funkcija, slijedi da inverzna funkcija rastuće funkcije

mora i sama biti rastuća, a inverzna funkcija padajuće funkcije mora biti padajuća.

Inverzna funkcija za eksponencijalnu funkciju a^x je logaritamska funkcija s istom bazom, $\log_a x$. Grafovi funkcije $f(x) = 2^x$ i $f^{-1}(x) = \log_2 x$ su prikazani na sljedećoj slici. Vidimo da su oni smješteni zrcalno simetrično s obzirom na pravac $y = x$. To vrijedi općenito za svaki par grafova inverznih funkcija.

Primjer

Odredimo inverznu funkciju za funkciju $f(x) = \ln(3x + 5)$.

Rješenje

Polazimo od definicije. Znamo da mora biti $(f \circ f^{-1})(x) = x$. Iz tog uvjeta dobivamo jednadžbu koju treba riješiti po nepoznanici $f^{-1}(x)$:

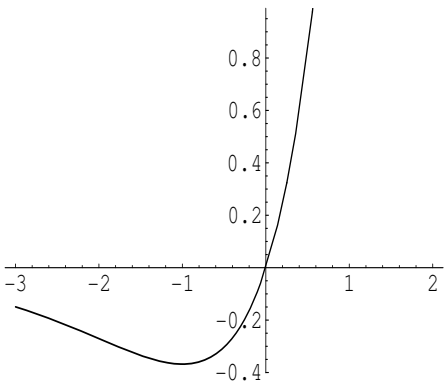
$(f \circ f^{-1})(x) = x$

$\ln(3f^{-1}(x) + 5) = x$

$3f^{-1}(x) + 5 = e^x$

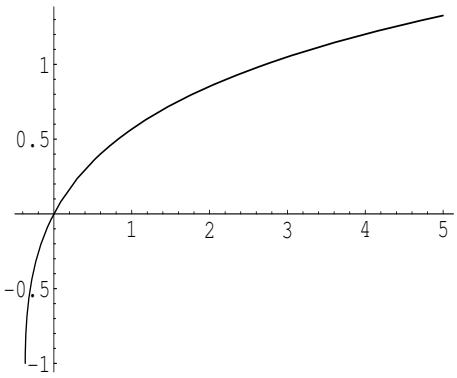
$f^{-1}(x) = \frac{e^x - 5}{3}$

Čak i za funkcije koje imaju inverze, nije uvijek moguće te inverzne funkcije eksplicitno zapisati pomoću elementarnih funkcija. Primjer takve funkcije je $f(x) = xe^x$, prikazana na slici 33. Restrikcija te funkcije na interval $[-1, +\infty >$ ima inverznu funkciju, no ona se ne može izraziti kao konačna



Slika 33: Graf funkcije $f(x) = xe^x$.

kombinacija elementarnih funkcija. Graf te inverzne funkcije prikazan je na slici 34. Unatoč činjenici da se ne da izraziti preko elementarnih funkcija, svojstva te funkcije dobro su istražena, i možemo se



Slika 34: Graf Lambertove W funkcije $W(x)$.

njome služiti kao i svakom drugom funkcijom. Ta se funkcija zove **Lambertova W funkcija**.