9. PREGLED ELEMENTARNIH FUNKCIJA

- Pod elementarnim funkcijama najčešće ćemo podrazumijevati realne funkcije realne varijable

- Detaljnije ćemo u Matematici II analizirati funkcije koje se najčešće koriste u ekonomiji

- Realne funkcije najčešće dijelimo na:
  - algebarske i
  - transcedentne funkcije

1. ALGEBARSKE FUNKCIJE

- Funkcija je **algebarska** ako se pri računanju zavisne varijable *y* koriste samo algebarske operacije: zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i potenciranje

- Algebarske funkcije dijele se na:
  - cijele racionalne funkcije (polinomi),
  - razlomljene racionalne funkcije,
  - iracionalne funkcije

CIJELE RACIONALNE FUNKCIJE (POLINOMI)

- Funkcija $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana formulom

$$\boxed{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$

gdje je $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $a_i \in \mathbf{R}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ i $a_n \neq 0$ zove se **polinom *n*-tog stupnja** ili **cijela racionalna funkcija**.

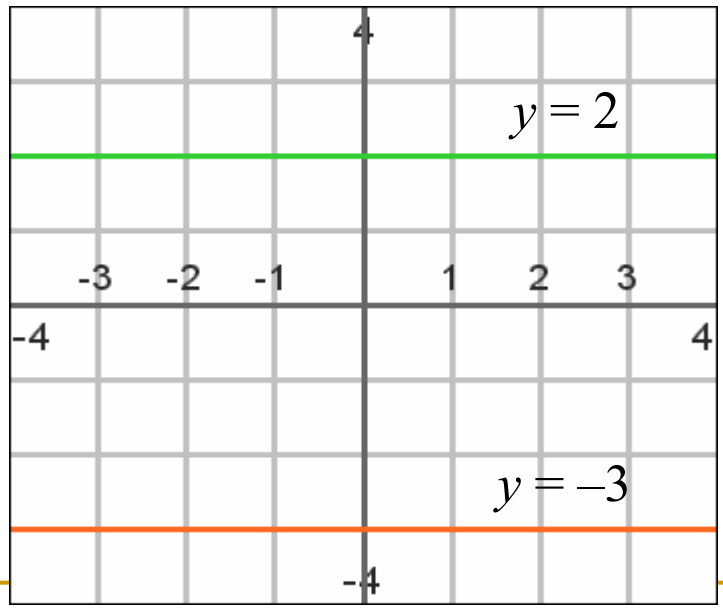
- Realni brojevi $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ nazivaju se **koeficijentima polinoma**. Koeficijent $a_n \neq 0$ naziva se **vodeći koeficijent**.

- Ako je $a_0 = 1$, za polinom se kaže da je **normiran**.

- **Polinom nultog stupnja** $P_0(x) = a_0$ je **konstantna funkcija**, odnosno funkcija oblika

$$f(x) = a_0 = const.$$

- Graf konstantne funkcije je pravac paralelan s osi apscisa koji siječe os ordinata u točki $(0, a_0)$



Primjer. Funkciju ukupnih trošova T možemo promatrati kao funkciju vremena t, $T = T(t)$. Promatramo li tu funkciju u razdoblju u kojem se ne odvija proizvodni proces, ukupni su troškovi upravo jednaki fiksnim troškovima c, tj. tada je

$$T(t) = c.$$

Dakle, u navedenom slučaju funkcija ukupnih troškova je konstantna funkcija.

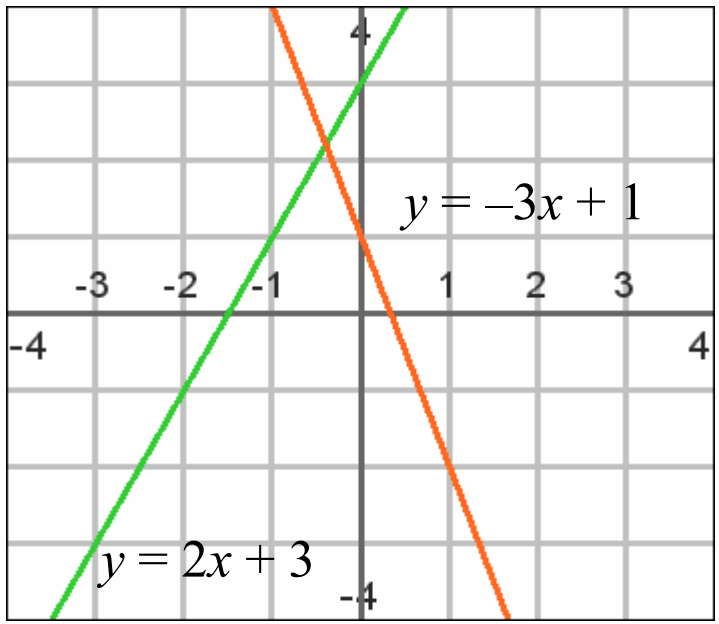
Primjer iz knjige: Šego, B., Matematika za ekonomiste, Narodne novine d.d., Zagreb, 2005.

- **Polinom prvog stupnja** $P_1(x) = a_1x + a_0$ je **linearna funkcija** čiji je graf pravac, tj. to je funkcija oblika

$$\boxed{f(x) = ax + b}$$

gdje je a **koeficijent smjera** (**nagib pravca**), a b **odsječak pravca na osi** y**.**

- Pravac je jednoznačno određen s dvije točke koje mu pripadaju



Primjer. Fiksni troškovi pri nekoj proizvodnji iznose 10000 kn, a svaki proizvedeni komad povećava ukupne troškove za 1000 kn. Odredimo analitički oblik funkcije ukupnih troškova T kao funkcije proizvodnje Q te njenu inverznu funkciju.

Funkcija ukupnih troškova je zbroj fiksnih i varijabilnih troškova

$$T(Q) = 1000Q + 10000 \quad (*)$$

Ako želimo znati koliko proizvoda treba proizvesti da bi ukupni troškovi bili T, onda je potrebno odrediti inverznu funkciju funkcije (*)

$$T^{-1}(Q) = \frac{1}{1000}Q - 10$$

Primjer iz knjige: Šego, B., Matematika za ekonomiste, Narodne novine d.d., Zagreb, 2005.

- **Polinom drugog stupnja** $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ je **kvadratna funkcija**, tj. funkcija oblika

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

čiji je graf parabola.

- Graf kvadratne funkcije možemo opisati u ovisnosti o vrijednosti koeficijenta a, diskriminante $D = b^2 - 4ac$, nultočaka x_1 i x_2 i tjemena $T(x_T, y_T)$:

1. Za $a > 0$, graf funkcije je otvorom okrenut prema gore i funkcija ima minimum (najmanju vrijednost) u tjemenu,

za $a < 0$, graf funkcije je otvorom okrenut prema dolje i funkcija ima maksimum (najveću vrijednost) u tjemenu.

2. Tjeme je u točki $T(x_T, y_T)$, gdje je $\boxed{x_T = -\frac{b}{2a}, \quad y_T = \frac{4ac - b^2}{4a}}$

3. Sjecište parabole s y osi dobijemo za $x = 0$:

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

$\Rightarrow$ parabola siječe os y u točki $(0, c)$

4. Sjecište parabole s osi x dobijemo za $y = 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su dana formulom:

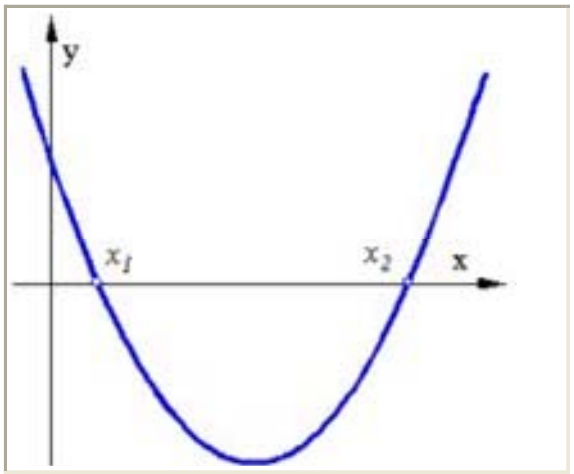
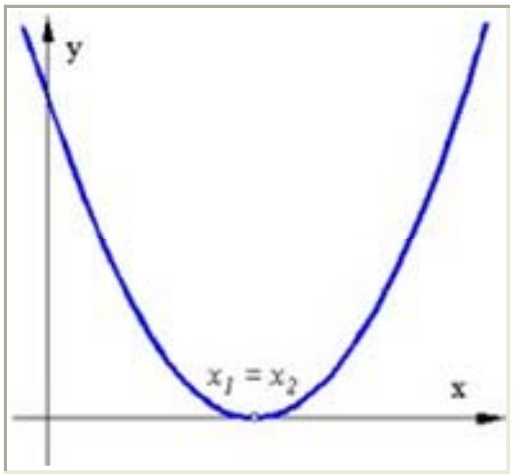
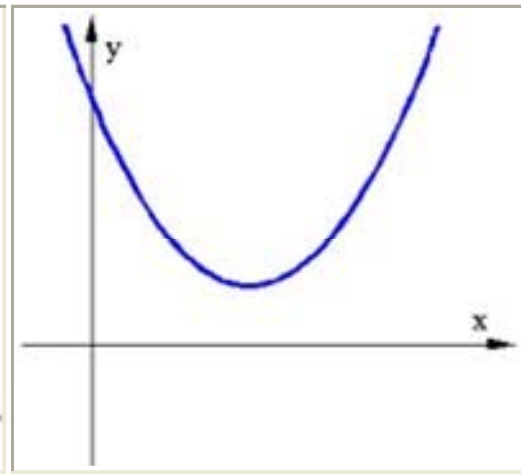
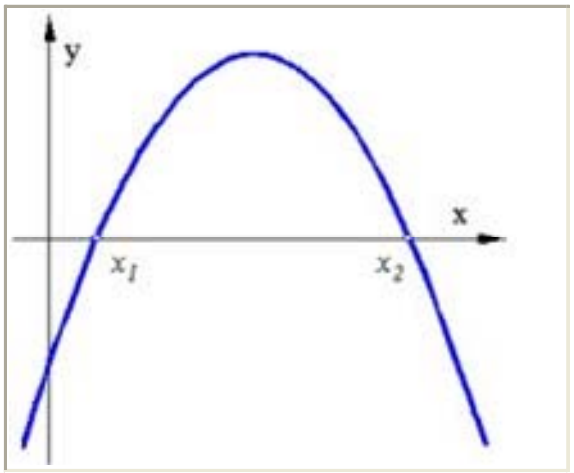
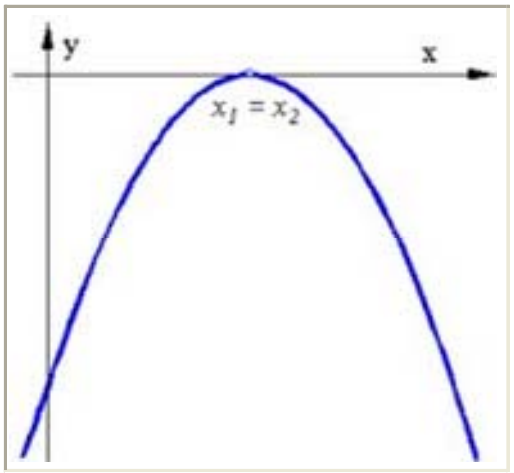
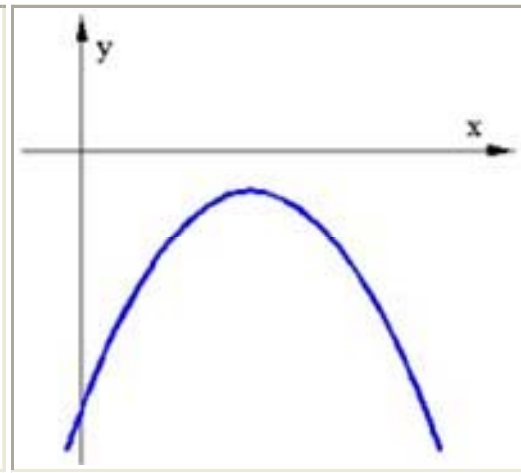
$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

5. Diskriminantom nazivamo izraz $D = b^2 - 4ac$. Diskriminanta je realan izraz, jer u njega ulaze realni brojevi a, b i c. Stoga postoje tri mogućnosti: $D > 0$, $D = 0$ ili $D < 0$.

- Ako je $D > 0$, jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ ima dva realna i različita rješenja, pa graf funkcije siječe os x u dvije točke: $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$.

- Ako je $D = 0$, jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ ima dvostruko realno rješenje, tj. $x_1 = x_2$. Graf dotiče os x.

- Ako je $D < 0$, jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ nema realnih rješenja, tj. rješenja su kompleksno konjugirani brojevi, pa graf ne siječe os x.

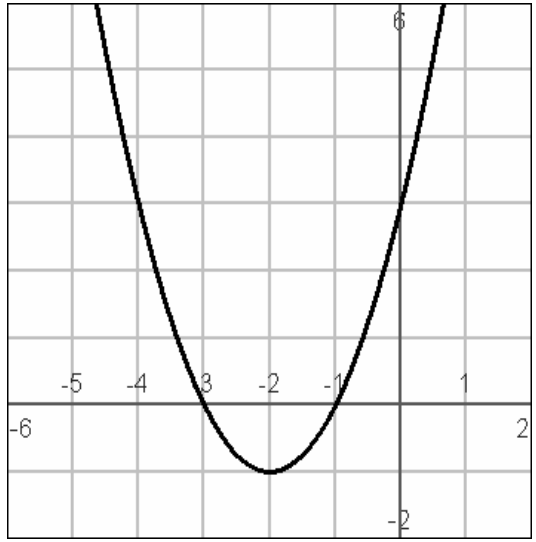
	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a>0$	 y x x_1 x_2	 y x $x_1 = x_2$	 y x
$a<0$	 y x x_1 x_2	 y x $x_1 = x_2$	 y x

- Nacrtajte parabole:

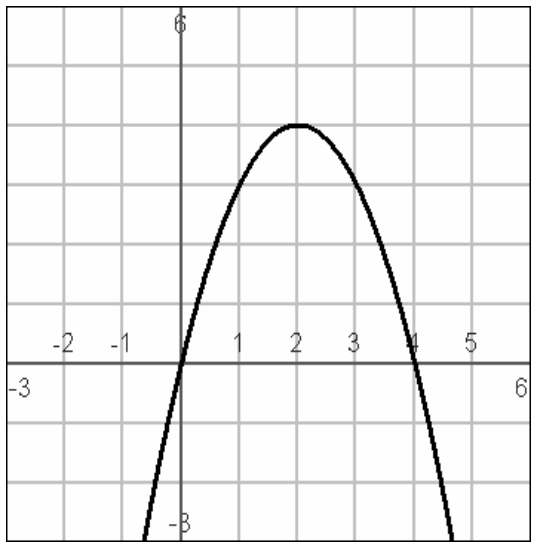
$$y = x^2 + 4x + 3$$

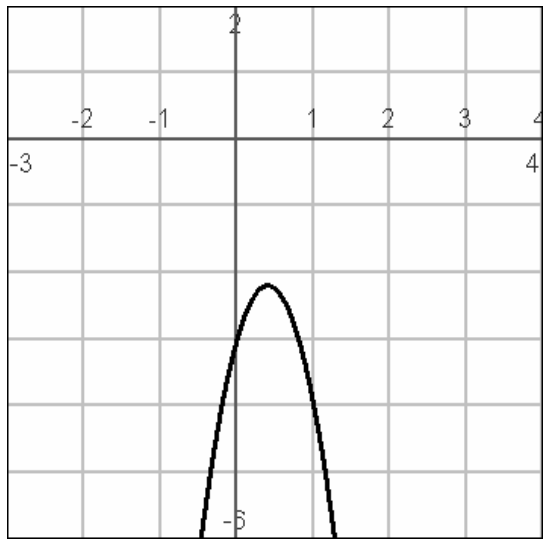
$$y = -x^2 + 4x$$

$$y = -5x^2 + 4x - 3$$



$$y = x^2 + 4x + 3$$





$$y = -x^2 + 4x$$

$$y = -5x^2 + 4x - 3$$

- Izjednači li se polinom $P_n(x)$ s nulom, dobije se **algebarska jednadžba** n-tog stupnja. Rješenje algebarske jednadžbe su **nultočke** ili **korijeni** pripadnog polinoma.

- Za polinome vrijede slijedeće tvrdnje:

<u>Teorem 1.</u> (*Osnovni teorem algebre):* Svaki polinom stupnja $n \in \mathbf{N}$ ima barem jednu realnu ili kompleksnu nultočku.

<u>Teorem 2.</u> Ako je kompleksan broj $z = a + bi$ nultočka polinoma $P_n(x)$, tada je i njemu konjugirano kompleksan broj $\bar{z} = a + bi$ također nultočka tog polinoma.

- **<u>Teorem 3.</u>** Polinom može imati najviše onoliko različitih nultočki koliko iznosi njegov stupanj. Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nultočke polinoma $P_n(x)$, tada se polinom može na jedinstven način prikazati u faktoriziranom obliku

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

Pri tome, ako su nultočke višestruke, vrijedi

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\cdots(x - x_m)^{k_m}$$

gdje su $k_1, k_2, \ldots, k_m$ prirodni brojevi za koje vrijedi da je $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, pri čemu je x_i nultočka polinoma $P_n(x)$, kratnosti k_i, $i = 1,2,\ldots,m$

<u>Teorem o dijeljenju polinoma</u>. Bilo koja dva polinoma $f(x)$ i $g(x)$ određuju jedinstvene polinome $s(x)$ i $r(x)$ takve da je $f(x) = s(x) \cdot g(x) + r(x)$, odnosno

$$\frac{f(x)}{g(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{g(x)},$$

gdje je stupanj $r(x) <$ stupanj $g(x)$. Polinom $s(x)$ zove se **kvocijent**, a polinom $r(x)$ **ostatak** dijeljenja. Ako je $r(x) = 0$, kažemo da $g(x)$ **dijeli** $f(x)$.

Ovaj teorem koristimo u slučaju kada je st $f(x) \geq$ st $g(x)$ *i u tom slučaju je*

st $s(x) =$ st $f(x) -$ st $g(x)$.

Primjer. Neka je $f(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 1$, $g(x) = x^2 - 2x$, pa nađimo $s(x)$ i $r(x)$.

$$\left(2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 1\right) : \left(x^2 - 2x\right) = 2x^2 + 5x + 7$$

$$\underline{2x^4 - 4x^3}$$

$$5x^3 - 3x^2 + x - 1$$

$$\underline{5x^3 - 10x^2}$$

$$7x^2 + x - 1$$

$$\underline{7x^2 - 14x}$$

$$15x - 1$$

Dakle, kvocijent je $s(x) = 2x^2 + 5x + 7$, a ostatak $r(x) = 15x - 1$.

RAZLOMLJENE RACIONALNE FUNKCIJE

- **Razlomljena racionalna funkcija** je kvocijent dvaju polinoma, dakle funkcija oblika

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0}$$

- Ako je polinom u brojniku manjeg stupnja nego polinom u nazivniku, odnosno $m < n$, $f(x)$ *se* zove **prava razlomljena racionalna funkcija**. U protivnom, ona se zove **neprava razlomljena racionalna funkcija**.

- Neprava razlomljena racionalna funkcija može se dijeljenjem brojnika sa nazivnikom prikazati u obliku zbroja polinoma i prave razlomljene racionalne funkcije.

- Domena razlomljene racionalne funkcije je čitav skup **R** osim nultočaka polinoma u nazivniku.

- Prava razlomljena racionalna funkcija može se prikazati u obliku zbroja **parcijalnih razlomaka**, odnosno u obliku zbroja razlomaka čiji su nazivnici faktori polinoma $P_n(x)$. Taj rastav ovisi o tome da li su nultočke nazivnika realni ili nisu realni brojevi.

Teorem. Neka je $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$ prava racionalna funkcija gdje su polinomi $P_m(x)$ i $P_n(x)$ relativno prosti, tj. bez zajedničkih nultočki.

1. Ako su nultočke nazivnika jednostruke i realne, tj. $P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, funkcija $f(x)$ se može napisati u obliku:

$$\boxed{f(x)=\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{P_m(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-x_n}}$$

gdje su A_i, $i = 1,2,\ldots,n$ realne konstante.

2. Ako su nultočke nazivnika višestruke i realne, tj.

$P_n(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_m)^{k_m}$, gdje je $k_1 + k_2 + \cdots k_m = n$, funkcija

$f(x)$ se može rastaviti na slijedeći način:

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_m)^{k_m}} =$$

$$= \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{x - x_2} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{B_{k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \cdots + \frac{M_1}{x - x_m} + \cdots + \frac{M_{k_m}}{(x - x_m)^{k_m}}$$

3. Ako su nultočke nazivnika par kompleksno konjugiranih brojeva višestrukosti k, tada funkciju $f(x)$ možemo rastaviti na slijedeći način:

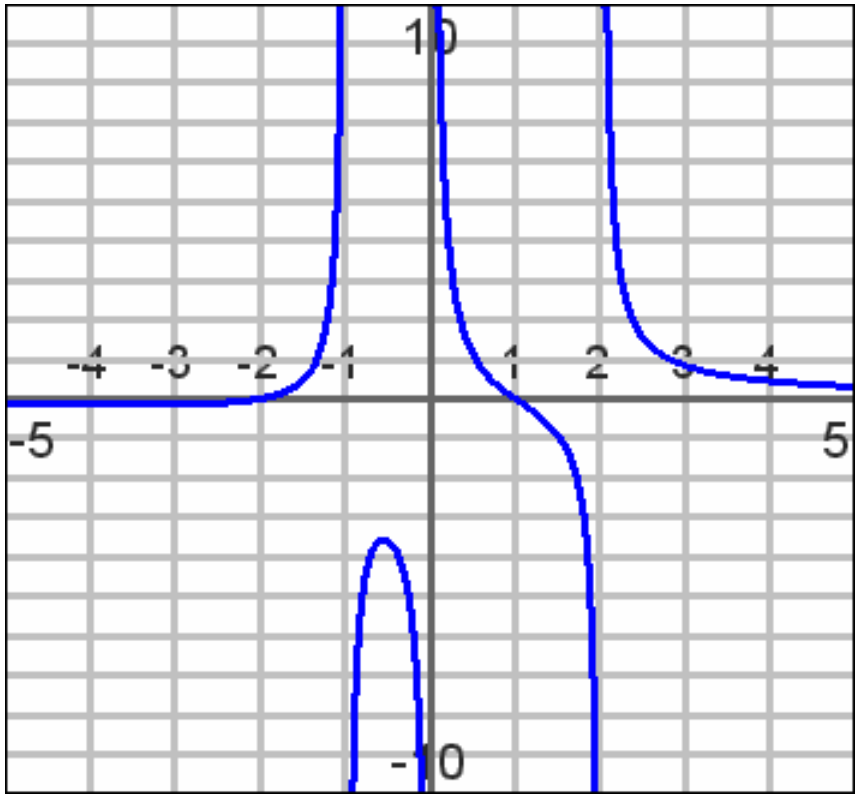
$$\boxed{f(x)=\frac{P_m(x)}{(ax^2+bx+c)^k}=\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}}$$

Koeficijente možemo određivati na dva načina:

a) uvrštavanjem nultočaka polinoma $P_n(x)$,

b) korištenjem teorema o jednakosti polinoma (koeficijenti uz odgovarajuće potencije moraju biti jednaki).

- ***Primjer.*** Graf funkcije $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^3-x^2-2x}$



IRACIONALNE FUNKCIJE

Kada se uz operacije koje vode do racionalne funkcije dopusti još i korjenovanje, dobivamo **iracionalne funkcije**.

Npr. $f(x) = 3x - \sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+1}}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{x-1}$,...

Problem određivanja domene iracionalnih funkcija svodi se uglavnom na rješavanje algebarskih jednadžbi i nejednadžbi.

Ako je korijen iz neke funkcije f parni broj tada treba voditi računa da veličina ispod korijena ne bude negativna, jer paran korijen iz negativnog broja je kompleksan broj.

$$\boxed{f(x) = \sqrt[2n]{g(x)} \;\Rightarrow\; D(f) = \{x \in \mathbf{R} : g(x) \geq 0\} \cap D(g)}$$

2. TRANSCEDENTNE FUNKCIJE

- Sve funkcije koje nisu algebarske zovemo transcedentnima. Najvažnije transcedentne funkcije su:
  - eksponencijalna funkcija,
  - logaritamska funkcija,
  - trigonometrijske funkcije,
  - ciklometrijske funkcije.

EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA

Neka je $a > 0, a \neq 1$ zadani realni broj. Funkciju $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ definiranu sa:

$$\boxed{f(x) = a^x}, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

nazivamo **eksponencijalnom funkcijom** baze a.

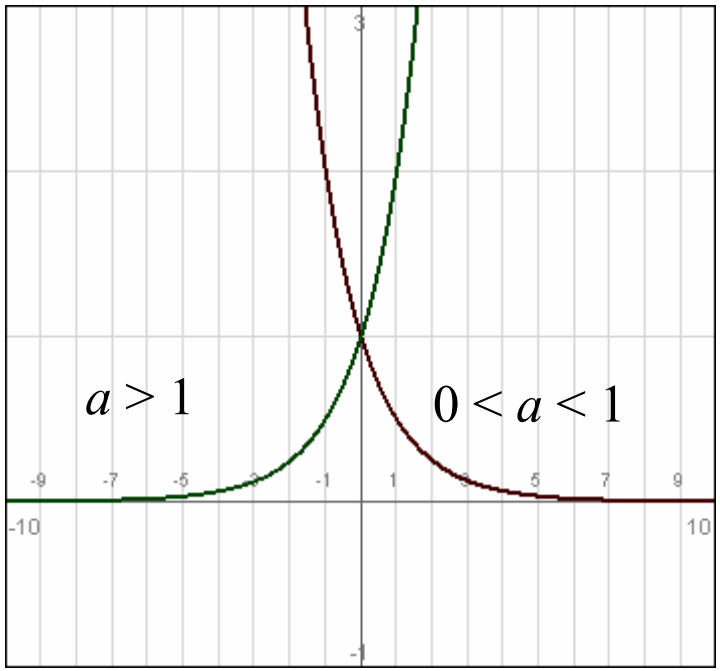
Područje definicije te funkcije su svi realni brojevi.

Za eksponencijalnu funkciju vrijedi:

1. $f(x) = a^x > 0, \ \forall x \in \mathbf{R}$

2. Ako je $a > 1$, onda je f strogo rastuća,

a ako je $0 < a < 1$, onda je f strogo padajuća.



LOGARITAMSKA FUNKCIJA

Inverzna funkcija eksponencijalne funkcije $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ zove se **logaritamska funkcija** baze a koju označavamo:

$$\boxed{f(x) = \log_a x\,.}$$

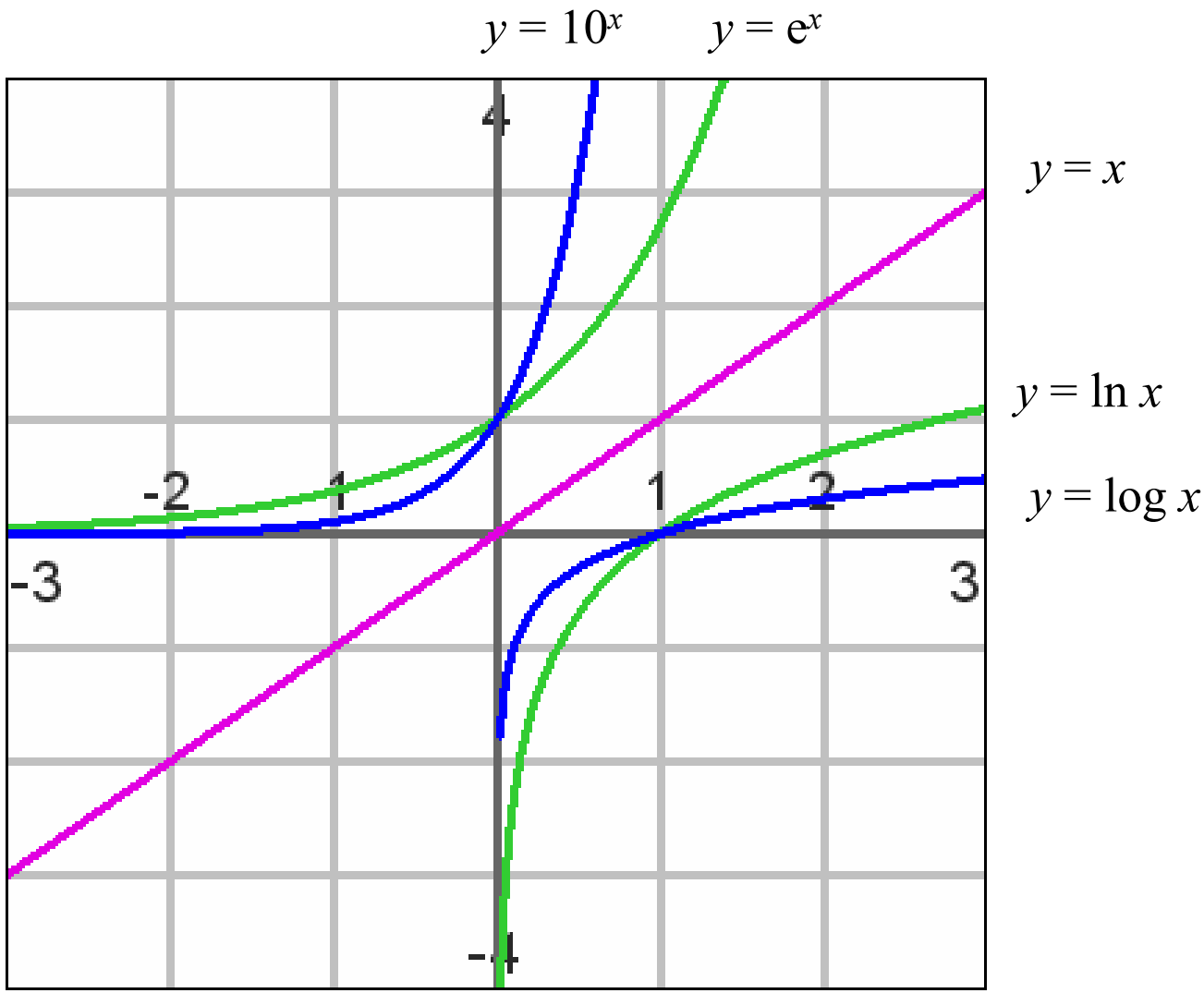
Logaritamska funkcija je definirana samo za $x > 0$ jer je kodomena eksponencijalne funkcije $\mathbf{R}^+$**.**

Graf logaritamske funkcije dobije se iz grafa eksponencijalne funkcije simetrijom s obzirom na pravac $y = x$.

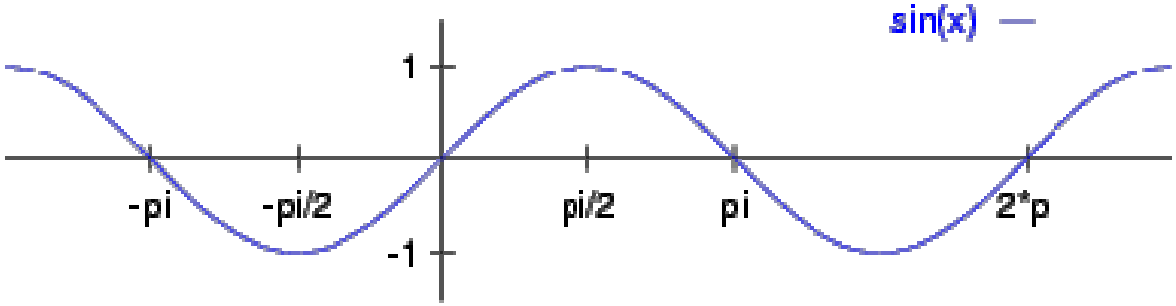
Posebno su važne sljedeće dvije logaritamske funkcije. Ako je baza $a = 10$, funkciju bilježimo sa $y = \log x$ i zovemo **dekadski logaritam**, ako je baza $a = e = 2.7182...$, funkciju bilježimo sa $y = \ln x$ i zovemo **prirodni logaritam**. Dakle, $\log_{10} x = \log x$, $\log_e x = \ln x$. Funkcija $y = \log x$ inverzna je funkciji $y = 10^x$, a funkcija $y = \ln x$ inverzna je funkciji $y = e^x$.

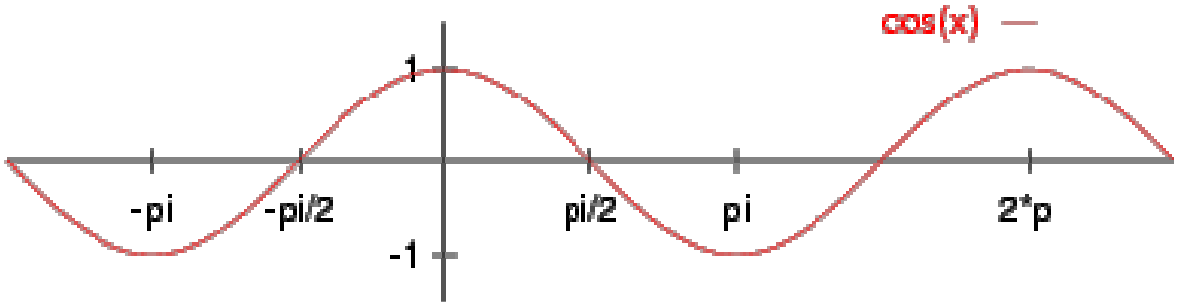
Svojstva logaritamske funkcije:

1. domena: $\mathbf{R}^+$
2. kodomena: $\mathbf{R}$
3. graf siječe x os u točki (1,0)
4. graf funkcije je rastući za $a > 1$, te padajući za $0 < a < 1$
5. graf funkcije se asimptotski približava negativnom dijelu osi y za $a > 1$,
6. graf funkcije se asimptotski približava pozitivnom dijelu osi y za $0 < a < 1$.


$y = 10^x$
$y = e^x$
$y = x$
$y = \ln x$
$y = \log x$
4
-2
-1
1
2
-3
3
-4

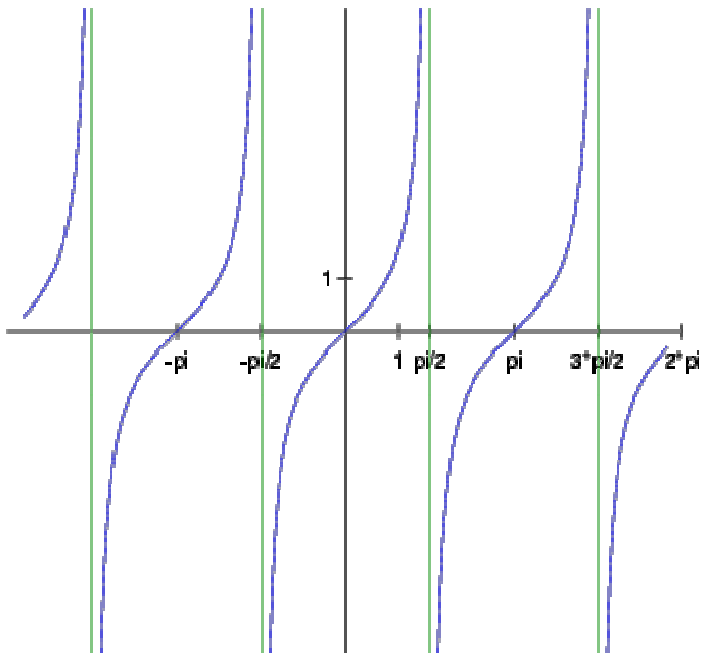
TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

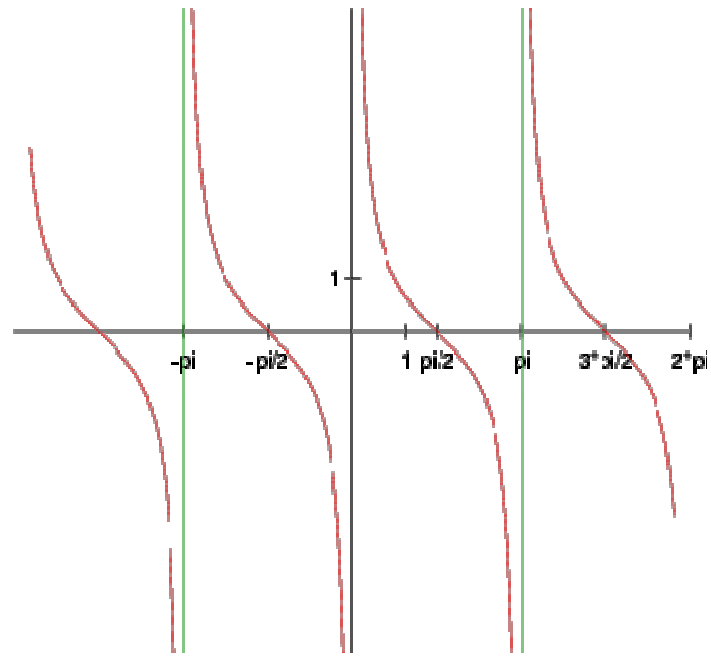




sin : **R** → **R** (**sinus funkcija)**

cos : **R** → **R** (**kosinus funkcija)**





$$tgt = \frac{\sin t}{\cos t}$$

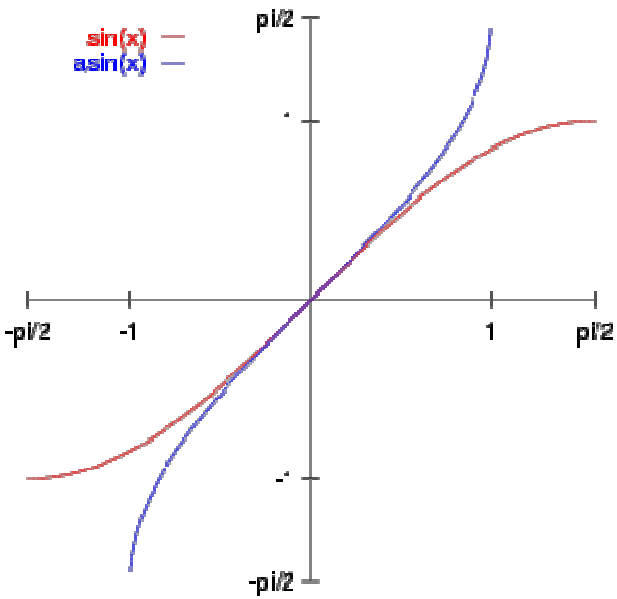
$$ctgt = \frac{\cos t}{\sin t}$$

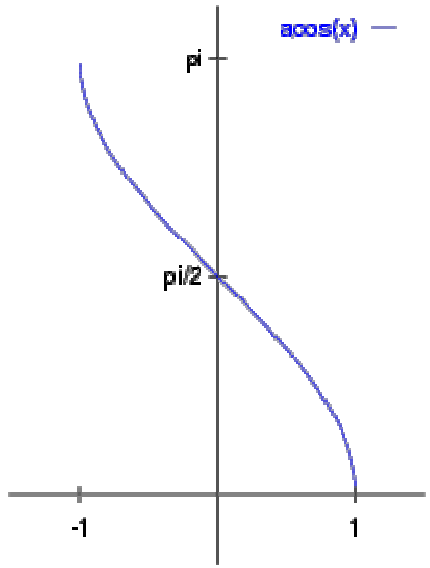
$$D = \left\{ \mathrm{R} \setminus (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathrm{Z} \right\}$$

$$D = \mathrm{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathrm{Z} \}$$

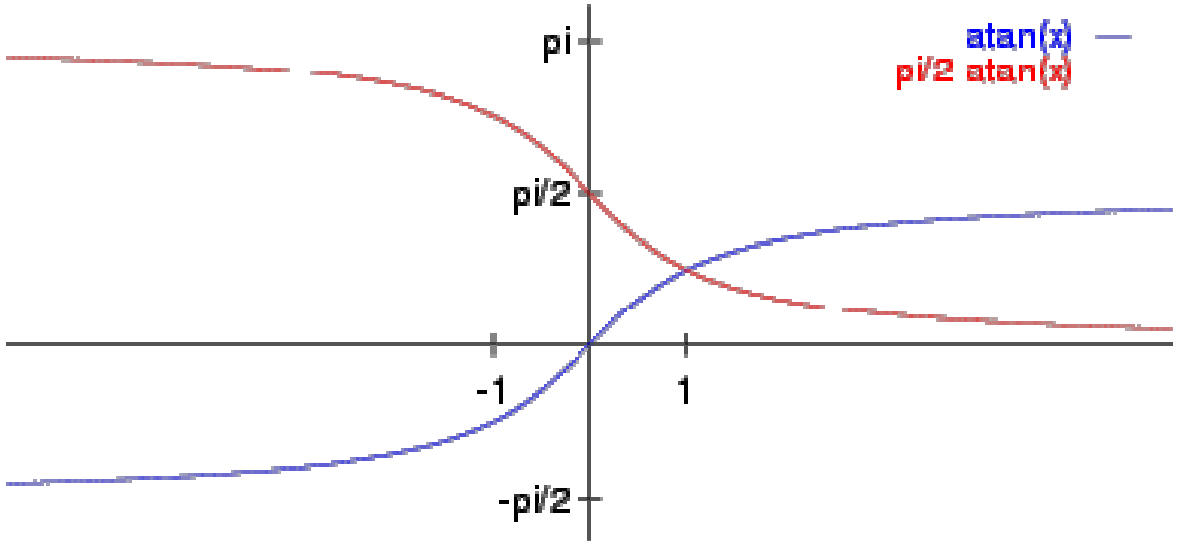
ARCUS FUNKCIJE

- Inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija zovu se **arcus funkcije** ili **ciklometrijske funkcije**.





Područje definicije funkcija arcsin$x$ i arccos$x$ zatvoreni je interval $[-1,1]$



Područje definicije funkcija arctg$x$ i arcctg$x$ cijeli je skup realnih brojeva.