ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

§ 1. Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент

Скалярным полем называется плоская или пространственная область, с каждой точкой M которой связано определенное значение некоторой скалярной физической величины $u = u(M)$. Задание поля скалярной величины u равносильно заданию скалярной (числовой) функции $u(M)$.

Функция $u(M)$, определяющая плоское скалярное поле, как функция точки $M(x, y)$, зависит от двух переменных $u = u(x, y)$, а функция, определяющая пространственное скалярное поле, как функция точки $M(x, y, z)$, зависит от трех переменных $u = u(x, y, z)$.

Линией уровня плоского скалярного поля называется совокупность точек плоскости, в которых функция этого поля имеет одинаковые значения. Линия уровня, во всех точках которой функция поля $u(x, y)$ имеет одно и то же значение C, определяется уравнением $u(x, y) = C$; различным постоянным значениям $C_1, C_2, C_3, \dots$ функции поля соответствуют различные линии уровня: $u(x, y) = C_1$, $u(x, y) = C_2$, $u(x, y) = C_3, \dots$

Поверхностью уровня пространственного скалярного поля называется совокупность точек пространства, в которых функция этого поля имеет одинаковые значения. Поверхность уровня, во всех точках которой функция поля $u(x, y, z)$ имеет одно и то же значение C, определяется уравнением $u(x, y, z) = C$.

Через каждую точку проходит только одна поверхность (линия) уровня; они заполняют всю рассматриваемую область и не пересекаются между собой.

Производной функции $u(M)$ по направлению $\overline{MP}$ называется предел отношения разности $u(M_1) - u(M)$ к величине направленного отрезка MM_1, когда точка M_1 стремится к точке M, оставаясь на прямой MP.

Производная функции u по направлению $\overline{l}$ обозначается $\frac{\partial u}{\partial l}$

или u'_l:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=u'_l=\lim_{M_1\to M}\frac{u(M_1)-u(M)}{MM_1}$$

и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\overline{N}\cdot\overline{l}^0, \qquad (a)$$

где $\overline{N}\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$—нормальный вектор к поверхности уровня, $\overline{l}^0\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$—единичный вектор направления $\overline{l}$.

Производная u'_l определяет величину скорости изменения функции $u(M)$ при перемещении точки M по направлению $\overline{l}$.

В каждой точке, где функция дифференцируема, она имеет производную по любому направлению.

Производные функции $u(x,\ y,\ z)$ по положительным направлениям осей координат Ox, Oy, Oz равны ее частным производным u'_x, u'_y и u'_z.

Производные по прямо противоположным направлениям отличаются только по знаку.

Производная функции $u(x,\ y)$ по направлению линии уровня (касательному к линии уровня) *и производная функции $u(x,\ y,\ z)$ по направлению любой линии, лежащей на поверхности уровня* (по любому направлению, касательному к поверхности уровня), *равны нулю.*

Градиентом функции (поля) $u(M)$ называется вектор

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}. \qquad (б)$$

Направление вектора $\operatorname{grad} u$ в каждой точке M совпадает с направлением нормали к поверхности (линии) уровня, проходящей через эту точку.

Из всех производных функции $u(M)$, взятых по различным направлениям, наибольшее значение всегда имеет производная по направлению градиента функции

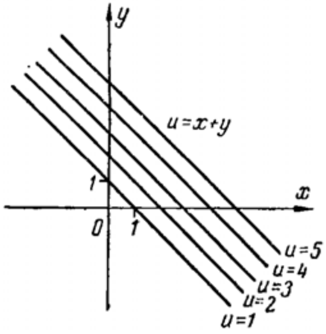
$$\frac{\partial u}{\partial l_{gr}}=|\operatorname{grad} u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Градиент есть вектор скорости наибыстрейшего возрастания функции.

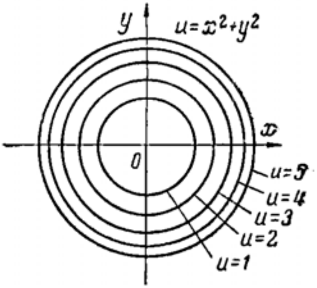
933. Построить линии уровня плоских скалярных полей:

1) $u=x+y$, 2) $u=x^2+y^2$, 3) $u=\frac{2y}{x^2}$, соответствующие значениям $u=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

Решение. 1) Полагая $u=1, 2, 3, 4, 5$, получим уравнения соответствующих линий уровня: $x+y=1$; $x+y=2$; $x+y=3$; $x+y=4$; $x+y=5$. Построив эти линии в прямоугольной системе координат xOy, получим прямые, параллельные биссектрисе 2-го и 4-го координатных углов (черт. 197).

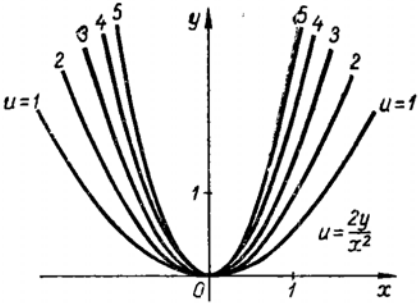


Черт. 197



Черт. 198

2) Написав уравнения линий уровня: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2$, $x^2+y^2=3$, $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=5$ и построив их в плоскости xOy, получим концентрические окружности с центром в начале координат (черт. 198).



Черт. 199

3) Линии уровня $2y=x^2$, $y=x^2$, $2y=3x^2$, $y=2x^2$, $2y=5x^2$ представляют параболы, симметричные оси Oy с общей вершиной в начале координат (черт. 199).

934. Найти производную функции $u=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $A(3; 4)$:

1) по направлению биссектрисы первого координатного угла;

2) по направлению радиуса-вектора точки A;

3) по направлению вектора $\overline{q}\{4; -3\}$.

Решение. Находим частные производные функции u и вычисляем их значения в точке A:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\frac{3}{5};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\frac{4}{5}.$$

Подставляя в формулу (a), найдем производную функции u в точке A по любому направлению $\overline{l}\{\cos\alpha,\ \cos\beta\}$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A=\frac{3}{5}\cos\alpha+\frac{4}{5}\cos\beta.$$

Находим далее косинусы углов α и β, образованных заданным направлением дифференцирования с осями координат, и производную функции u по заданному направлению:

1) Для биссектрисы первого координатного угла: $\alpha=\beta=45°$, $\cos\alpha=\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l_1}\right|_A=\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

2) Для вектора $\overline{OA}\{3;\ 4\}$: $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$; $\left.\frac{\partial u}{\partial l_2}\right|_A=\frac{3^2}{5^2}+\frac{4^2}{5^2}=1$.

3) Для вектора $\overline{q}\{4;\ -3\}$: $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\frac{3}{5}$; $\left.\frac{\partial u}{\partial q}\right|_A=0$.

935. Найти производную функции $u=xy+yz+1$ по направлению вектора $\overline{l}\{12;\ -3;\ -4\}$ в любой точке и в точках $A(0;\ -2;\ -1)$ и $B(3;\ 3;\ 5)$.

Решение. Найдем частные производные функции u и направляющие косинусы вектора $\overline{l}$:

$$u'_x=y;\ u'_y=x+z;\ u'_z=y;$$
$$\cos\alpha=\frac{12}{13};\ \cos\beta=-\frac{3}{13};\ \cos\gamma=-\frac{4}{13}.$$

Подставляя в формулу (a), найдем производную функции u по направлению $\overline{l}$ в любой точке:

$$u'_l=\frac{12}{13}y-\frac{3}{13}(x+z)-\frac{4}{13}y=\frac{8y-3(x+z)}{13}.$$

Подставляя координаты точек A и B, получим $u'_l(A)=-1$; $u'_l(B)=0$.

936. С какой наибольшей скоростью может возрастать функция $u(M)=\frac{10}{x^2+y^2+z^2+1}$ при переходе точки $M(x,\ y,\ z)$ через точку $M_0(-1;\ 2;\ -2)$? В каком направлении должна двигаться точка M при переходе через точку $M_1(2;\ 0;\ 1)$, чтобы функция $u(M)$ убывала с наибольшей скоростью?

Решение. *Наибольшая по абсолютной величине скорость изменения* (возрастания или убывания) *функции $u(M)$ при переходе точки M через точку P численно равна модулю градиента функции в точке P*. При этом функция будет возрастать или убывать с наибольшей скоростью, смотря по тому, будет ли точка M при переходе через точку P двигаться по направлению градиента функции в точке P или по прямо противоположному направлению.

Руководствуясь этими положениями, находим частные производные функции u и по формуле (б) — ее градиент в любой точке:

$$\operatorname{grad} u = -\frac{20}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}).$$

Далее находим: 1) $\operatorname{grad} u(M_0) = \frac{1}{5}(\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k})$; его модуль, численно равный искомой наибольшей скорости возрастания функции $u(M)$ при переходе M через M_0, будет $|\operatorname{grad} u(M_0)| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$.

2) $\operatorname{grad} u(M_1) = -\frac{10}{9}\bar{i}-\frac{5}{9}\bar{k}$; искомый вектор, имеющий прямо противоположное направление, будет $-\operatorname{grad} u(M_1) = \frac{10}{9}\bar{i}+\frac{5}{9}\bar{k}$. Чтобы функция $u(M)$ убывала с наибольшей скоростью, при переходе через точку M_1 точка M должна двигаться в направлении вектора $-\operatorname{grad} u(M_1)$.

937. Найти точки, в которых функция $z = e^x(x-y^3+3y)$ стационарна (т. е. точки, в которых производная по любому направлению равна нулю).

Решение. *Чтобы в некоторой точке P производная функции по любому направлению была равна нулю, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке все частные производные первого порядка функции одновременно обращались в нуль.* [Согласно формуле (а).]

Поэтому, найдя частные производные: $z'_x = e^x(x-y^3+3y+1)$, $z'_y = 3e^x(1-y^2)$ и решая систему уравнений $z'_x=0$, $z'_y=0$, получим две точки: $(-3;\ 1)$ и $(1;\ -1)$, в которых функция стационарна.

938. Построить линии уровня скалярных полей:

1) $z = x^2+2y$, 2) $z = \frac{4x}{x^2+y^2}$,

соответствующие значениям $z = -2, -1, 0, 1, 2$. Найти и построить градиент каждого поля в точках $A(1;\ -1)$ и $B(-2;\ -2)$.

939. Найти производную функции $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ по направлению вектора $\bar{l} = 3\bar{i}+4\bar{j}$ в любой точке и в точках $A(1;\ 3)$ и $B(2;\ 1)$. Построить линии уровня соответствующего скалярного поля, проходящие через точки A и B, и его градиент в этих точках.

940. Найти производную функции $u = xyz$ в точке $Q(1;\ -2;\ 2)$ по любому направлению и по направлению радиуса-вектора точки Q.

941. По какому направлению должна двигаться точка $M(x, y, z)$ при переходе через точку $M_0(-1;\ 1;\ -1)$, чтобы функция $F(M)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ возрастала с наибольшей скоростью?

942. С какой наибольшей скоростью может убывать функция $u(M)=\ln(x^2-y^2+z^2)$ при переходе точки $M(x,\ y,\ z)$ через точку $M_0(1;\ 1;\ 1)$?

943. Показать, что в точке $A(4;\ -12)$ производная функции $z=x^3+3x^2+6xy+y^2$ по любому направлению равна нулю (функция стационарна).

944. Найти точки, в которых функция $\varphi(x, y)=x^3+y^3+3xy$ стационарна.

§ 2. Векторное поле. Поток и дивергенция поля

Векторным полем называется плоская или пространственная область, с каждой точкой M которой связано определенное значение некоторой векторной физической величины $\bar{a}=\bar{a}(M)$.

Если векторное поле отнесено к прямоугольной системе координат $Oxyz$, то вектор $\bar{a}$ будет векторной функцией, а его проекции a_x, a_y, a_z на оси координат будут скалярными функциями от переменных x, y и z:

$$\bar{a}(M)=\bar{a}(x,\ y,\ z)=a_x(x,\ y,\ z)\,\bar{i}+a_y(x,\ y,\ z)\,\bar{j}+a_z(x,\ y,\ z)\,\bar{k}.$$

Поэтому задание поля векторной величины $\bar{a}$ равносильно заданию трех скалярных (числовых) функций a_x, a_y, a_z.

Векторной линией векторного поля называется кривая, направление которой в каждой точке M совпадает с направлением вектора, соответствующего этой точке поля.

Потоком векторного поля, образованного вектором $\bar{a}\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$ через поверхность σ называется поверхностный интеграл (скаляр)

$$K=\iint\limits_{\sigma} a_x\,dy\,dz+a_y\,dx\,dz+a_z\,dx\,dy. \tag{1}$$

Если вектор $\bar{a}$ определяет поле скоростей текущей жидкости, то интеграл K выражает количество жидкости, протекающей через поверхность σ за единицу времени. При этом если σ — замкнутая поверхность, ограничивающая область G, и если интеграл (1) берется по внешней стороне σ, то величина K называется потоком вектора $\bar{a}$ изнутри поверхности σ; она дает разность между количествами жидкости, вытекшей из области G и втекшей в эту область за единицу времени (предполагается, что жидкость может свободно протекать через поверхность σ).

При $K>0$ из области G вытекает жидкости больше, чем в нее втекает, что указывает на наличие в этой области источников, питающих поток жидкости. При $K<0$ из области G вытекает жидкости меньше, чем втекает, что означает наличие в этой области стоков, где жидкость удаляется из потока. При $K=0$ из области G вытекает жидкости столько же, сколько в нее и втекает.

Дивергенцией векторного поля, определяемого вектором $\bar{a}$, называется скаляр

$$\operatorname{div}\bar{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}. \qquad (2)$$

Если $\operatorname{div}\bar{a}(M_0)>0$, то точка M_0 называется источником, а если $\operatorname{div}\bar{a}(M_0)<0$, то точка M_0 называется стоком, ибо в первом случае в любой бесконечно малой области, окружающей точку M_0, жидкость возникает, а во втором случае она исчезает.

Абсолютная величина $\operatorname{div}\bar{a}(M_0)$ характеризует мощность источника или стока.

Векторное поле, во всех точках которого дивергенция равна нулю, называется соленоидальным. Поток такого поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Согласно формуле Остроградского—Гаусса (гл. VII, § 11) поток и дивергенция векторного поля связаны между собой равенством

$$\oiint\limits_{+\sigma} a_x\,dy\,dz+a_y\,dx\,dz+a_z\,dx\,dy=$$
$$=\iiint\limits_G\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz, \qquad (3)$$

которое имеет следующий смысл: *поток векторного поля через замкнутую поверхность* (σ) *равен тройному интегралу по области* (G), *ограниченной этой поверхностью, от дивергенции поля.*

945. Найти поток векторного поля $\bar{p}=x\bar{i}-y^2\bar{j}+(x^2+z^2-1)\bar{k}$ через поверхность $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (эллипсоид) изнутри этой поверхности.

Решение. Согласно формуле (1)

$$K=\oiint\limits_{+\sigma} x\,dy\,dz-y^2\,dx\,dz+(x^2+z^2-1)\,dx\,dy.$$

Расчленяем этот поверхностный интеграл (II типа) на три слагаемых интеграла и, пользуясь данным уравнением эллипсоида (σ), сводим их вычисление к вычислению двойных интегралов.

1) $K_1=\oiint\limits_{+\sigma} x\,dy\,dz=\iint\limits_{\sigma_1} x\,dy\,dz+\iint\limits_{\sigma_2} x\,dy\,dz,$

где σ_1 и σ_2—части данного эллипсоида, расположенные по разные стороны от плоскости yOz (см. черт. 98), которые имеют различные явные уравнения:

$$x_{\sigma_1} = -a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad x_{\sigma_2} = a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}.$$

Преобразуя эти поверхностные интегралы в двойные (по формуле, указанной в § 11 предыдущей главы), получим:

$$\iint_{\sigma_1} x\,dy\,dz = -\iint_{(\sigma_1)_{yz}} -a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dy\,dz,$$

так как поверхность σ_1 обращена в сторону отрицательного направления оси Ox;

$$\iint_{\sigma_2} x\,dy\,dz = \iint_{(\sigma_2)_{yz}} a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dy\,dz,$$

так как поверхность σ_2 обращена в сторону положительного направления оси Ox.

Проекции $(\sigma_1)_{yz}$ и $(\sigma_2)_{yz}$ поверхностей σ_1 и σ_2 на плоскость yOz представляют один и тот же эллипс $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$. Поэтому

$$K_1 = 2a\iint_{(\sigma_1)_{yz}} \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dy\,dz =$$

$$= 2a\int_{-b}^{b} dy \int_{-z_1}^{z_1} \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dz,$$

где z_1 — положительное значение z из уравнения эллипса $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Вычисляя двукратный интеграл, найдем $K_1 = \frac{4}{3}\pi abc$. $\Big($Внутренний интеграл легко найти по формуле (Б), гл. IV, § 5, полагая $a = \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$, $t = \frac{z}{c}$.$\Big)$

$$2)\ K_2 = \oiint_{+\sigma} y^2\,dx\,dz = \iint_{\sigma_3} y^2\,dx\,dz + \iint_{\sigma_4} y^2\,dx\,dz,$$

где σ_3 и σ_4 — части поверхности σ, расположенные по разные стороны от плоскости xOz, уравнения которых

$$y_{\sigma_3} = -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad y_{\sigma_4} = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}.$$

Преобразуя поверхностные интегралы в двойные, получим

$$K_2 = -\iint\limits_{(\sigma_3)_{xz}} b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dz + \\ + \iint\limits_{(\sigma_4)_{xz}} b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dz = 0,$$

так как проекции $(\sigma_3)_{xz}$ и $(\sigma_4)_{xz}$ поверхностей σ_3 и σ_4 на плоскость xOz одинаковы.

3) По аналогичной причине вследствие четности подынтегральной функции поверхностного интеграла K_3 и симметричности поверхности σ относительно плоскости xOy

$$K_3 = \oiint\limits_{+\sigma}(x^2+z^2-1)\,dx\,dy = 0.$$

Следовательно, $K = K_1 - K_2 + K_3 = \frac{4}{3}\pi abc.$

По формуле Остроградского—Гаусса эта задача решается проще: находим дивергенцию поля

$$\operatorname{div}\bar{p} = (x)'_x + (-y^2)'_y + (x^2+z^2-1)'_z = 1-2y+2z$$

и подставляем в формулу (3):

$$K = \iiint\limits_G \operatorname{div}\bar{p}\,dv = \iiint\limits_G (1-2y+2z)\,dx\,dy\,dz,$$

где область G—эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1.$

Полученный тройной интеграл расчленяем:

$$K = \iiint\limits_G dx\,dy\,dz - 2\iint\limits_{G_{xz}} dx\,dz\int\limits_{-y_1}^{y_1} y\,dy + 2\iint\limits_{G_{xy}} dx\,dy\int\limits_{-z_1}^{z_1} z\,dz,$$

где

$$y_1 = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}},\quad z_1 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Первый интеграл равен объему области G, т. е. объему эллипсоида $K_1 = \frac{4}{3}\pi abc$ (гл. V, § 4).

Второй и третий интегралы равны нулю, ибо равны нулю их указанные внутренние простые интегралы, как интегралы от нечетной функции (гл. V, § 2).

Следовательно, как и в первом решении, $K = \frac{4}{3}\pi abc.$

946. Найти дивергенцию векторного поля:

1) $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$; 2) $\bar{p} = \dfrac{\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}}{\sqrt[3]{(x+y+z)^2}}$;

3) $\bar{q} = e^{xy}(y\bar{j} - x\bar{i} + xy\bar{k})$.

Решение. Применяем формулу (2):

1) $\operatorname{div}\bar{r}(M) = \dfrac{\partial r_x}{\partial x} + \dfrac{\partial r_y}{\partial y} + \dfrac{\partial r_z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$

2) $p_x = p_y = p_z = (x+y+z)^{-\frac{2}{3}}$;

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} = \frac{\partial p_y}{\partial y} = \frac{\partial p_z}{\partial z} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(x+y+z)^5}};$$

$$\operatorname{div}\bar{p}(M) = -2(x+y+z)^{-\frac{5}{3}} = f(M).$$

3) $q_x = -xe^{xy}$; $q_y = ye^{xy}$; $q_z = xye^{xy}$;

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = -e^{xy}(1+xy) = -\frac{\partial q_y}{\partial y}; \quad \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0; \ \operatorname{div}\bar{q}(M) = 0.$$

Полученные результаты имеют следующий смысл:

1. Каждая точка поля радиус-вектора $\bar{r}$ является источником постоянной мощности.

2. Точка M поля вектора $\bar{p}$ в зависимости от ее координат может быть или источником, или стоком. Например, точка $M_1(0;\ 0;\ 1)$, в которой $\operatorname{div}\bar{p} = -2$, является стоком; точка $M_2(-1;\ 0;\ 0)$, в которой $\operatorname{div}\bar{p} = 2$, является источником.

3. В поле вектора $\bar{q}$ нет ни источников, ни стоков. Поток этого соленоидального поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

947. Найти поток радиус-вектора $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$: 1) через боковую поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $-H \leqslant z \leqslant H$ в сторону ее внешней нормали; 2) через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \leqslant 4z^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ в сторону ее внутренней нормали; 3) через полную поверхность куба $-a \leqslant x \leqslant a$, $-a \leqslant y \leqslant a$, $-a \leqslant z \leqslant a$ изнутри этой поверхности.

948. Найти поток векторного поля: 1) $\bar{p} = xy\bar{i} + yz\bar{j} + xz\bar{k}$ через расположенную в первом октанте часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, в сторону ее внешней нормали; 2) $\bar{q} = x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k}$ через полную поверхность конуса $x^2 + y^2 \leqslant z^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$ изнутри этой поверхности.

949. Найти дивергенцию векторного поля:

1) $\bar{a} = xy^2\bar{i} + x^2y\bar{j} + z^3\bar{k}$ в точке $A(1;\ -1;\ 3)$;

2) градиента функции $u = xy^2z^3$.

950. Проверить, что векторное поле $\bar{p}=yz(4x\bar{i}-y\bar{j}-z\bar{k})$ является соленоидальным.

951. Решить задачи 947 (3) и 948 (2), пользуясь формулой Остроградского — Гаусса.

§ 3. Циркуляция и вихрь векторного поля

Линейным интегралом вектора $\bar{a}$ вдоль линии l называется криволинейный интеграл

$$C=\int_l a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz. \tag{1}$$

В силовом поле он выражает работу сил поля при перемещении точки вдоль линии l (см. гл. VII, § 9).

В случае замкнутой кривой этот интеграл называется циркуляцией поля вектора $\bar{a}$ по контуру l. Циркуляция характеризует вращательную способность поля на контуре l.

Вихрем (или ротором) векторного поля, определяемого вектором $\bar{a}$, называется вектор

$$\operatorname{rot}\bar{a}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\bar{k}. \tag{2}$$

Если через точку M поля $\bar{a}$ провести плоскость P, определяемую единичным нормальным вектором $\bar{n}$, то скалярное произведение $\operatorname{rot}\bar{a}(M)\cdot\bar{n}$ характеризует вращательную способность этого поля в точке M. Она зависит как от координат точки M, так и от направления плоскости P и достигает наибольшей величины, равной $|\operatorname{rot}\bar{a}(M)|$, когда плоскость P перпендикулярна вектору $\operatorname{rot}\bar{a}(M)$.

Векторное поле, во всех точках которого вихревой вектор равен нулю, называется потенциальным (или безвихревым). В потенциальном поле линейный интеграл (работа) не зависит от формы линии, соединяющей какие-либо две его точки, а циркуляция всегда равна нулю.

Векторное поле, являющееся одновременно и соленоидальным и потенциальным, называется гармоническим.

Согласно формуле Стокса (гл. VII, § 11) циркуляция и вихревой вектор поля связаны между собой равенством

$$\oint_l a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz=$$

$$=\iint_\sigma(\operatorname{rot}\bar{a})_x\,dy\,dz+(\operatorname{rot}\bar{a})_y\,dx\,dz+(\operatorname{rot}\bar{a})_z\,dx\,dy, \tag{3}$$

смысл которого заключается в следующем: *циркуляция вектора по замкнутому контуру (l) равна потоку вихря вектора через поверхность (σ), ограниченную этим контуром.*

952. Вычислить циркуляцию поля вектора:

1) $\bar{r}=x\bar{j}$ вдоль окружности $x=a\cos t$, $y=a\sin t$;

2) $\bar{p}=(x-2)\bar{i}+(x+y)\bar{j}-2z\bar{k}$ вдоль периметра треугольника с вершинами $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 1)$;

3) $\bar{q}\,\{xz,\ -yz^2,\ xy\}$ вдоль замкнутой линии (L) $z=x^2-y^2+2a^2$, $x^2+y^2=a^2$ (см. черт. 142, стр. 258) и вихревой вектор этого поля в точке $A(0,\ -a,\ a^2)$.

Решение. Применяя формулу (1), получим:

$$1)\ C=\oint_L x\,dy=a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}=\pi a^2.^*$$

$$2)\ C=\oint_{ABCA}(x-2)\,dx+(x+y)\,dy-2z\,dz.$$

Периметр $ABCA$ треугольника состоит из трех отрезков, которые лежат на прямых, имеющих различные уравнения. Поэтому криволинейный интеграл по контуру $ABCA$ вычисляем как сумму интегралов по отрезкам AB, BC и CA.

Составив уравнения прямой AB: $x+y=1$, $z=0$ и исходя из этих уравнений, преобразуем криволинейный интеграл по отрезку AB в обыкновенный интеграл с переменной x:

$$\int_{AB}=\int_1^0(x-3)\,dx=\frac{(x-3)^2}{2}\Big|_1^0=\frac{5}{2}.$$

Для отрезка BC: $y+z=1$, $x=0$; $\displaystyle\int_{BC}=\int_1^0(2-y)\,dy=-\frac{3}{2}$.

Для отрезка CA: $x+z=1$, $y=0$; $\displaystyle\int_{CA}=-\int_0^1 x\,dx=-\frac{1}{2}$.

Следовательно, $\displaystyle C=\oint_{ABCA}=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}=\frac{1}{2}$.

$$3)\ C=\oint_L xz\,dx-yz^2\,dy+xy\,dz.$$

Для вычисления этого интеграла преобразуем данные уравнения кривой L в параметрические: полагая $x=a\cos t$, получим $y=a\sin t$, $z=a^2(2+\cos 2t)$.

---

* Если выбрать другое направление обхода данного контура, то результат будет иметь противоположный знак.

Пользуясь этими уравнениями, преобразуем криволинейный интеграл C в обыкновенный интеграл с переменной t, затем вычисляем его:

$$C = -\frac{a^4}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos 2t)\sin 2t\,dt - \frac{a^6}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos 2t)^2\sin 2t\,dt -$$

$$-a^4\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt = \frac{a^4(2+\cos 2t)^2}{8} + \frac{a^6(2+\cos 2t)^3}{12} -$$

$$-\frac{a^4}{2}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = -\pi a^4.$$

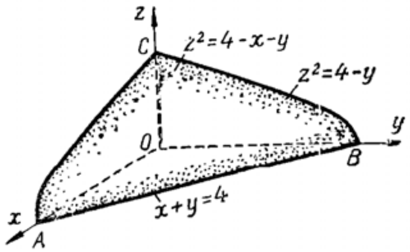
Вихревой вектор данного поля в любой его точке $M(x, y, z)$ находим по формуле (2):

$$\operatorname{rot}\bar{q}(M) = (x+2yz)\bar{i} + (x-y)\bar{j}.$$

В данной точке $A(0, -a, a^2)$, $\operatorname{rot}\bar{q} = a\bar{j} - 2a^3\bar{i}$.

953. Пользуясь формулой Стокса, вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a} = x\bar{i} + xz\bar{j} + z\bar{k}$ по контуру $ACBA$ (черт. 200), образованному пересечением поверхности $z^2 = 4 - x - y$ с плоскостями координат.

Решение. По формуле (2) найдем вихревой вектор данного поля: $\operatorname{rot}\bar{a} = \bar{z}\bar{k} - x\bar{i}$. Подставляя его проекции в формулу (3), получим:



Черт. 200

$$C = \iint_\sigma z\,dx\,dy - x\,dy\,dz =$$

$$= \iint_\sigma z\,dx\,dy - \iint_\sigma x\,dy\,dz.$$

В качестве поверхности σ, ограниченной данным контуром, возьмем расположенную в первом октанте часть данной поверхности. Пользуясь ее уравнением, преобразуем поверхностные интегралы в двойные, учитывая при этом, что согласно формуле Стокса σ есть внутренняя сторона (обращенная к началу координат) указанной поверхности, на которой заданный обход контура $ACBA$ направлен против часовой стрелки:

$$C_1 = \iint_\sigma z\,dx\,dy = -\iint_{\sigma_{xy}}\sqrt{4-x-y}\,dx\,dy =$$

$$= \int_4^0 dx\int_0^{4-x}(4-x-y)^{\frac{1}{2}}dy = \frac{2}{3}\int_0^4 (4-x-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_{y=0}^{y=4-x}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_4^0 (4-x)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{4}{15}(4-x)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4 = -\frac{128}{15}$$

(σ_{xy} есть треугольник OAB);

$$C_2=\iint\limits_{\sigma} x\,dy\,dz=-\iint\limits_{\sigma_{yz}}(4-y-z^2)\,dy\,dz=$$

$$=\int\limits_4^0 dy\int\limits_0^{\sqrt{4-y}}(4-y-z^2)\,dz=\int\limits_4^0\left[(4-y)\,z-\frac{z^3}{3}\right]\Bigg|_{z=0}^{z=\sqrt{4-y}}dy=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_4^0(4-y)^{\frac{3}{2}}dy=\frac{4}{15}\;(4-y)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4=-\frac{128}{15}$$

(σ_{yz} есть криволинейный треугольник OBC).

Следовательно, искомая циркуляция $C=C_1-C_2=0$.

В потенциальном поле циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю. Но поле вектора $\bar{a}$ не потенциальное; его циркуляция по данному контуру равна нулю, а, например, по контуру окружности $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=1$ она равна не нулю, а $\pm\pi$.

954. Вычислить циркуляцию векторного поля:

1) $\bar{p}=x^2y^3\bar{i}+\bar{j}+z\bar{k}$ вдоль окружности $x^2+y^2=a^2$, $z=0$.

2) $\bar{q}=(x-2z)\,\bar{i}+(x+3y+z)\,\bar{j}+(5x+y)\,\bar{k}$ вдоль периметра треугольника ACB, данного в условии задачи 952 (2).

955. Найти вихревой вектор в любой точке векторного поля: 1) $\bar{p}=x\bar{i}-z^2\bar{j}+y^2\bar{k}$; 2) $\bar{q}=yz\bar{i}+xz\bar{j}+xy\bar{k}$.

956. Проверить, что векторное поле градиента функции $u=\sqrt{x}\,\sqrt[3]{y}\,\sqrt[4]{z}$ является потенциальным.

957. Проверить, что векторное поле вектора $\bar{a}=\dfrac{x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$ является гармоническим.

958. Решить задачи 954 (1, 2), пользуясь формулой Стокса.

$\frac{ab^3}{12}$. **843.** $\frac{5}{4}\pi R^4$; $\frac{3}{2}\pi R^4$. **844.** $\frac{a(3a^2+b^2)}{5(a^2+b^2)}$; $\frac{b(a^2+3b^2)}{5(a^2+b^2)}$, если катеты a и b лежат на осях координат Ox и Oy. **845.** $\left(\frac{8a}{15}, \frac{8b}{15}\right)$. **846.** $\left(0; 0, \frac{3a}{8}\right)$. **847.** $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$. **848.** $\left(\frac{3(a+b)(2R^2-a^2-b^2)}{4(3R^2-a^2-b^2-ab)}; 0; 0\right)$. **852.** $\frac{abc}{3}\times$ $\times(a^2+b^2+c^2)$; $\frac{a^3h}{6}$; $\frac{1}{12}$; 30. **853.** 11. **854.** $\frac{4\pi}{3}$. **855.** $\frac{4}{9}$. **856.** 3. **861.** $\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3}-5)$. **862.** 16. **863.** $\frac{32}{3}\pi$(G_{xy}—круг $x^2+y^2 \leqslant 4$). **864.** $\frac{2R^3(3\pi-4)}{9}$ (черт. 195). **865.** $\frac{\pi abc}{24}(5\sqrt{2}-4)$. **866.** $\frac{3}{2}a^4$. **867.** $\frac{k\pi hr^4}{2}$; $\frac{m(r^2+h^2)}{3}$. **868.** $\frac{k\pi R^4}{12}$ (G_{xy}—круг $x^2+y^2 \leqslant \frac{3}{4}R^2$). **869.** $(0, 0, c)$; $\left(\frac{3}{8}a, \frac{3}{8}b, \frac{3}{8}c\right)$; $\left(0, 0, \frac{2}{5}R\right)$. **870.** $14k$. **871.** $\frac{2(2-\sqrt{2})}{5}\pi\delta R^5$. **876.** $\frac{1}{3}$; $\frac{31}{30}$; $-\frac{8}{15}$. **877.** 2. **878.** $\ln\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$. **879.** 1,5; 1. **880.** 0. **881.** —0,5. **882.** 2. **883.** 0. **890.** $\frac{13}{3}$. **891.** $\frac{1}{2}\ln(e^2+e^{-2}) \approx 1,01$. **892.** 6π; $\frac{3}{8}\pi a^2$. **893.** $\frac{4}{3}$; $\frac{8}{15}$. **894.** $\frac{4}{9}k(63-5\sqrt{5})$; k. **895.** $(0, 0, m\pi)$. **896.** $\left(\frac{5a}{8}, \frac{15\pi a}{256}\right)$. **897.** $\pm 8a^2m$. **898.** $\frac{m}{2}(r_B^2-r_A^2)$. **900.** $x^3y+x-y+C$. **901.** $\sin x\cos y+\cos 2y+C$. **902.** $xy+$ $+\sin(xy)+C$. **903.** $ye^{xy}-3x+C$. **904.** $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+C$. **905.** $\ln|x+y|-\frac{y}{x+y}+$ $+C$. **910.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **911.** 0. **912.** $\frac{55+9\sqrt{3}}{65}$. **913.** $\frac{29\sqrt{2}}{8}\pi$. **914.** $\frac{\pi a^4}{2}$. **915.** 0. **916.** —3. **917.** $\frac{4}{3}\pi R^3$. **919.** 3; $\frac{32}{5}$. **924.** $3\pi R^2$. **925.** $4R^2$ (черт. 225). **926.** $8R^2$ (черт. 99). **927.** 42π. **928.** $2\pi a^2(3-\sqrt{3})$. **929.** $2\pi k\operatorname{arctg}\frac{H}{R}$. **930.** $\frac{3}{4}$. **931.** $\left(0, 0, \frac{3R}{8}\right)$. **932.** $\left(0, 0, \frac{2b}{3}\right)$. **938.** $2\bar{i}+2\bar{j}$; $2\bar{j}-4\bar{i}$; $2\bar{j}$; $-\frac{1}{2}\bar{i}$. **939.** $\frac{4x-3y}{5(x^2+y^2)^2}$. **940.** $2(\cos\beta-2\cos\alpha-\cos\gamma)$; $-\frac{4}{3}$. **941.** $\bar{l}\{1; 0; -1\}$. **942.** $2\sqrt{3}$. **944.** (0;0); (—1; —1). **947.** $4\pi R^2H$; -4π; $24a^3$. **948.** $\frac{3}{16}\pi$; $\frac{9}{10}\pi H^5$. **949.** 29; $2xz(z^2+3y^2)$. **954.** $\pm\frac{\pi a^6}{8}$; 3. **955.** $2(y+z)\bar{i}$; 0. **963.** Да. **964.** Нет. **965.** Да. **966.** Да.

967. Сходится. **968.** Расходится. **969.** Сходится. **970.** Сходится. **971.** Сходится. **972.** Расходится. **973.** Сходится. **974.** Сходится. **975.** Расходится. **976.** Сходится. **977.** Сходится. **978.** Расходится. **979.** Сходится. **980.** Расходится. **981.** Расходится. **982.** Сходится. **983.** Расходится. **984.** Сходится. **985.** Сходится. **986.** Сходится. **989.** Сходится абсолютно. **990.** Сходится не абсолютно. **991.** Расходится. **992.** Сходится абсолютно. **993.** Сходится не абсолютно. **994.** Сходится не абсолютно (сравнить с гармоническим рядом). **995.** Сходится абсолютно. **996.** При $|a|>1$ сходится абсолютно; при $|a|=1$ сходится не абсолютно; при $|a|<1$ расходится. **997.** 0,96. **998.** 0,04.