Izračunati protok vektora

$$\vec{A}=(xy,\, yz,\, xz)$$

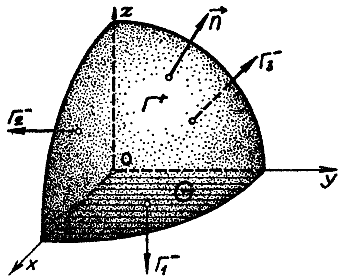
kroz površ Γ, koja je definisana relacijama:

$$x^2+y^2+z^2-1=0, \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0, \quad z\geqslant 0.$$

Rešenje.

Zadatak ćemo rešiti na tri načina. Pošto nije zadana strana površi Γ, to možemo uzeti u obzir na primer, njenu gornju stranu (u odnosu na Oz osu): Γ^+.

Protok vektora izračunava se po obrascu



$$I=\iint\limits_{\Gamma^+} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma$$

koji, u razvijenom obliku glasi

$$I=\iint\limits_{\Gamma^+} (xy\cos\alpha+yz\cos\beta+xz\cos\gamma)\, d\sigma=$$

$$=\iint\limits_{\Gamma^+} xy\, dy\, dz+yz\, dx\, dz+xz\, dx\, dy.$$

I način.

Napišimo protok I u obliku

$$I=I_1+I_2+I_3$$

gde je

$$I_1=\iint\limits_{\Gamma^+} xy\, dy\, dz, \quad I_2=\iint\limits_{\Gamma^+} yz\, dx\, dz \quad \text{i} \quad I_3=\iint\limits_{\Gamma^+} xz\, dx\, dy.$$

Izračunaćemo najpre integral I_3. Projekcija površi Γ na ravan xOy je oblast G, određena relacijama:

$$G:\ x^2+y^2-1\leqslant 0, \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0.$$

Kako je

$$\Gamma:\ z = \sqrt{1-x^2-y^2}, \atop G$$

to je

$$I_3 = \iint_{\Gamma^+} xz\,dx\,dy = +\iint_G x\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Koristeći polarne koordinate:

$$x = \rho\cos\varphi$$

$$y = \rho\sin\varphi,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\quad J = \rho,$$

i smenu $\rho = \sin t$, nalazimo

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\, d\rho = \int_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\, d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^2 t\ dt = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)\ dt = \frac{\pi}{16}.$$

Na potpuno isti način dobijamo

$$I_1 = I_2 = \frac{\pi}{16}.$$

Prema tome traženi protok je

$$I = \frac{3\pi}{16}.$$

II način. Odredimo jedinični vektor površi Γ^+. Kako je

$$\Gamma:\quad z = \sqrt{1-x^2-y^2},\quad z_x = \frac{-x}{z},\quad z_y = \frac{-y}{z},\ \left(z_x = \frac{\partial z}{\partial x},\quad z_y = \cdot\cdot\right)$$

sledi

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+(x/z)^2+(y/z)^2}}(x/z, y/z, 1).$$

Pošto je

$$d\sigma = \sqrt{1+(x/z)^2+(y/z)^2}\,dx\,dy,$$

to je

$$I = \iint_{\Gamma+} (\vec{A}\cdot\vec{n})\,d\sigma = \iint_{\Gamma+} \left(\frac{x^2 y}{z} + y^2 + xz\right) dx\,dy$$

a odatle, prelaskom na dvojni integral, sledi

$$I = + \iint_G \left[\frac{x^2 y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + y^2 + x\sqrt{1-x^2-y^2}\right] dx\,dy.$$

Korišćenjem polarnih koordinata, nalazimo

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \sin\varphi\,d\varphi \int_0^1 \frac{\rho^4\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} + \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\,d\varphi \int_0^1 \rho^3\,d\rho +$$

$$+ \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi \int_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho,$$

$$I = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\rho^4\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{\pi}{16} + \int_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho.$$

i dalje, putem smene $\rho = \sin t$, dobijamo

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^4 t\,dt + \frac{\pi}{16} + \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t\,dt$$

dakle

$$I = \frac{3\pi}{16}.$$

Pri integraciji korišćena je rekurentna formula $\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t\,dt.$

III način.

Koristićemo formulu Ostrogradskog. Za zatvorenu površ Γ^* uzećemo na primer površ koja je sastavljena od površi $\Gamma+$ i njenih projekcija na koordinatne ravni (videti sliku), dakle

$$\Gamma^* = \Gamma+ \cup \Gamma_1- \cup \Gamma_2- \cup \Gamma_3-.$$

Imamo

$$\oiint\limits_{\Gamma^*} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma = \iint\limits_{\Gamma+} + \iint\limits_{\Gamma_1-} + \iint\limits_{\Gamma_2-} + \iint\limits_{\Gamma_3-} = \iiint\limits_{\Phi} (x+y+z)\, dx\, dy\, dz.$$

Pošto je

$$\iint\limits_{\Gamma_1-} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma = -\iint\limits_{\Gamma_1+} (\vec{A}\cdot\vec{k})\, d\sigma = -\iint\limits_{G} (x\cdot 0)\, dx\, dy = 0,$$

$$\iint\limits_{\Gamma_2-} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma = 0 \quad \text{i} \quad \iint\limits_{\Gamma_3-} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma = 0,$$

to je

$$I = \iiint\limits_{\Phi} (x+y+z)\, dx\, dy\, dz.$$

Korišćenjem sfernih koordinata:

$$x = \rho\cos\varphi\sin\psi$$

$$y = \rho\sin\varphi\sin\psi$$

$$z = \rho\cos\psi$$

gde je

$$J = \rho^2 \sin\psi, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

dobijamo

$$I = \int_0^1 \rho^3\, d\rho \int_0^{\pi/2} \sin\psi\, d\psi \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\sin\psi + \cos\psi)\, d\varphi$$

$$I = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \left(2\sin^2\psi + \sin\psi\cos\psi\cdot\frac{\pi}{2}\right) d\psi = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

i konačno

$$I = \frac{3\pi}{16}.$$

Izračunati protok rotora vektora

$$\vec{A} = (x-y, z, xy)$$

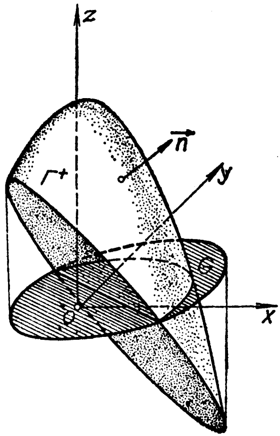
kroz spoljašnju stranu dela površi

$$\Gamma:\ z = 4 - x^2 - 2y^2$$

koji se nalazi iznad ravni $\mathscr{L}\ : x + 2y + z = 1.$

Rešenje.

Koristićemo obrazac



$$I = \iint\limits_{\Gamma^+} (\vec{B}\cdot\vec{n})\, d\sigma$$

gde je

$$\vec{B} = rot\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x-y & z & xy \end{vmatrix} = (x-1, -y, 1).$$

Kako je

$$\Gamma:\ z = 4 - x^2 - 2y^2, \quad z_x = -2x, \quad z_y = -4y$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+16y^2}}(2x, 4y, 1), \qquad d\sigma = \sqrt{1+4x^2+16y^2}\, dx\, dy$$

to je

$$(1) \qquad (\vec{B}\cdot\vec{n})\, d\sigma = (2x^2 - 2x - 4y^2 + 1)\, dx\, dy = [2(x-1/2)^2 - 4y^2 + 1/2]\, dx\, dy.$$

Eliminacijom promenljive z iz skupa jednačina

$$z=4-x^2-2y^2$$

$$x+2y+z=1$$

dobijamo jednačinu

$$x^2-x+2y^2-2y-3=0$$

konture oblasti G (G-projekcija površi Γ na ravan xOy). Svodeći prethodnu jednačinu na kanonski oblik, imamo

$$G:\quad \frac{(x-1/2)^2}{15/4}+\frac{(y-1/2)^2}{15/8}\leqslant 1.$$

Oblast G možemo preslikati na jedinični krug pomoću uopštenih polarnih koordinata:

$$(2)\qquad \begin{cases} x=1/2+\sqrt{15/4}\,\rho\cos\varphi \\ y=1/2+\sqrt{15/8}\,\rho\sin\varphi \\ 0\leqslant\rho\leqslant 1,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi \end{cases}$$

pri čemu je determinantna preslikavanja (Jakobijan) $J=\dfrac{15}{4\sqrt{2}}\rho$.

Uzimajući u obzir (1) i (2), nalazimo

$$I=\iint_{\Gamma+}(\vec{B}\cdot\vec{n})\,d\sigma=+\iint_G [2(x-1/2)^2-4y^2+1/2]\,dx\,dy$$

$$I=\frac{15}{8\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(15\rho^3\cos 2\varphi-\rho-8\sqrt{15/8}\,\rho^2\sin\varphi)\,d\rho,$$

dakle

$$I=-\frac{15}{16}\sqrt{2}\,\pi.$$

\# Dati su:

vektor $\vec{A}=(x-z,\ y+z,\ x-y)$,

cilindrična površ $x^2+y^2=a^2$,

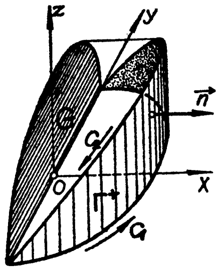
i ravni $z=x$, $z=0$.

1° Naći proticanje vektora $\vec{A}$ kroz spoljašnju stranu dela cilindrične površi koji isecaju date ravni, pri čemu je $z\geqslant 0$. Nacrtati sliku.

2° Naći cirkulaciju vektora $\vec{A}$ duž konture koja ograničava spomenuti deo cilindrične površi.

Rešenje.

1° Ako sa G obeležimo projekciju površi Γ na ravan yOz, tada je



$$\Gamma:\ x=\sqrt{a^2-y^2}$$

$$G:\ y^2+z^2-a^2\leqslant 0,\quad z\geqslant 0.$$

Jedinični vektor površi Γ^+ (gornja strana) je

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{1+(y/x)^2}}\,(1,\ y/x,\ 0).$$

Uzevši u obzir jednakost

$$d\sigma=\sqrt{1+(y/x)^2}\,dy\,dz, \quad \text{imamo}$$

$$I=\iint_{\Gamma^+}(\vec{A}\cdot\vec{n})\,d\sigma=\iint_{\Gamma^+}\left[x-z+\frac{(y+z)\,y}{x}\right]dy\,dz=$$

$$=+\iint_{G}\left[\sqrt{a^2-y^2}-z+\frac{y^2+yz}{\sqrt{a^2-y^2}}\right]dy\,dz.$$

$$I=\int_{-a}^{a} dy \int_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}} \left[\sqrt{a^2-y^2} - z + \frac{y^2+yz}{\sqrt{a^2-y^2}}\right] dz$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} (a^2+y^2+y\sqrt{a^2-y^2})\, dy$$

i konačno

$$I=\frac{4a^3}{3}.$$

2° Koristićemo Stokesovu formulu

$$I=\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}=\iint_{\Gamma+} (\vec{n}\cdot rot\,\vec{A})\, d\sigma.$$

Pošto je

$$rot\,\vec{A}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-z & y+z & x-y \end{vmatrix}=(-2,-2,0),$$

i kako su jedinični vektor površi $\Gamma+$ i njena ortogonalna projekcija na ravan yOz određeni u prethodnoj tački, to je

$$I=\iint_{\Gamma+}\left(-2-\frac{2y}{x}\right) dy\,dz=+\iint_G\left(-2-\frac{2y}{\sqrt{a^2-y^2}}\right) dy\,dz,$$

tj.

$$I=\int_{-a}^{a}\left(-2-\frac{2y}{\sqrt{a^2-y^2}}\right) dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dz,$$

i konačno

$$I=-a^2\pi.$$

Napomena. Izračunati cirkulaciju vektora $\vec{A}$ duž krive $C=C_1\cup C_2$ direktnim putem, koristeći pri tome jednačine:

$$C_1:\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=0, \end{cases} \quad \frac{-\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}; \qquad C_2:\begin{cases} x=a\sin u \\ z=a\sin u \\ y=a\cos u, \quad 0\leqslant u\leqslant\pi. \end{cases}$$

\# Dato je vektorsko polje

$$\vec{A}=(xy-z,\ \ yz-x,\ \ xz-y).$$

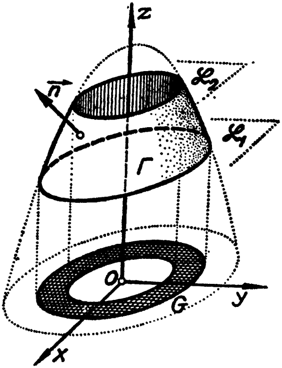
1° Izračunati protok vektora $\vec{A}$ kroz pojas površi

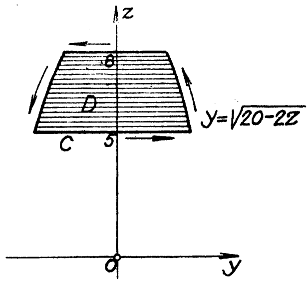
$$\Gamma:\ z=10-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

između ravni $\mathscr{L}_1$: $z=5$ i $\mathscr{L}_2$: $z=8$, u smeru spoljašnje normale na površ Γ.

2° Izračunati cirkulaciju datog vektorskog polja $\vec{A}$ po konturi C u koordinatnoj ravni yOz, koja je određena presekom te ravni sa površi Γ i ravnima $\mathscr{L}_1$ i $\mathscr{L}_2$, a orijentisana je tako da se, posmatrana sa pozitivnog dela Ox ose, obilazi u smislu suprotnom od kazaljke na satu.

Rešenja.





S obzirom na slike, imamo

$$\Gamma:\ z=10-\frac{x^2+y^2}{2},\ \ (x,y)\in G;$$

G: $4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 10$

$$D: \begin{cases} 5 \leqslant z \leqslant 8 \\ -\sqrt{20-2z} \leqslant y \leqslant \sqrt{20-2z}. \end{cases}$$

1° Pošto je jedinični vektor površi Γ^+

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,(x, y, 1),$$

i kako je

$$d\sigma = \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$$

to je

$$I = \iint_{\Gamma^+} (\vec{A}\cdot\vec{n})\,d\sigma = + \iint_G \left[y\,(x^2-x-1) + y^2\left(10 - \frac{x^2+y^2}{2}\right)\right] dx\,dy.$$

Pošto je funkcija $f(x, y) = y\,(x^2-x-1)$ neparna po y u oblasti integracije G, sledi

$$\iint_G y\,(x^2-x-1)\,dx\,dy = 0.$$

Uvođenjem polarnih koordinata:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 2 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{10}; \end{cases}$$

$$J = \rho,$$

dobijamo

$$I = \iint_G y^2\left(10 - \frac{x^2+y^2}{2}\right) dx\,dy = \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\,d\varphi \int_2^{\sqrt{10}} \left(10\rho^3 - \frac{\rho^5}{2}\right) d\rho,$$

dakle

$$I = 132\,\pi.$$

2° Pošto se kontura C oblasti D nalazi u ravni $yOz\,(x=0)$ i kako su ispunjeni uslovi za primenu formule Greena (funkcija $\vec{A}$ ima neprekidne izvode), to će biti

$$I=\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}=\oint_C yz\,dy-y\,dz=\iint_D (-1-y)\,dy\,dz.$$

Zbog toga što je oblast D simetrična prema Oz osi, sledi da je

$$\iint_D y\,dy\,dz=0.$$

Nastavljajući integraciju, dobijamo

$$I=-\int_5^8 dz\int_{-\sqrt{20-2z}}^{\sqrt{20-2z}} dy=\frac{2}{3}\,(8-10\sqrt{10}\,).$$

Izračunati protok vektora

$$\vec{A}=(xy^2,\quad yz^2,\quad zx^2)$$

kroz spoljnu stranu sfere $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Rezultat.

$$I=\frac{4\pi R^5}{5}.$$

Dat je vektor

$$\vec{A}=(xz,\,xy,\,yz).$$

Izračunati protok vektora $\vec{A}$ kroz zatvorenu površ, koja je definisana jednačinama: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$, i dobiveni rezultat proveriti pomoću formule Ostrogradskog. Šta se može reći o polju vektora $\operatorname{rot}\vec{A}$?

Rezultat.

$I=1/8$. Polje je vrtložno.

Telo ϕ ograničeno je površima:

$$\mathcal{L}_1:\ 2z-y-5R=0,$$
$$\mathcal{L}_2:\ x^2+y^2=R^2,$$
$$\mathcal{L}_3:\ z=0.$$

Izračunati cirkulaciju vektora

$$\vec{A}=(x^2y^3, 1, z)$$

duž presečne krive C površi $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$, kao i protok vektora

$$\vec{B}=\mathrm{rot}\,\vec{A}$$

kroz površ Γ, kojom je ograničeno telo ϕ.

Rezultati. $I_1=-\dfrac{R^6\pi}{8}$ (cirkulacija); $I_2=0$ (protok).

Dato je vektorsko polje

$$\vec{A}=\frac{\vec{r}}{r^3},\quad \text{gde je}\quad \vec{r}=(x, y, z)\quad \text{i}\quad r=|\vec{r}|.$$

1° Izračunati rad polja $\vec{A}$ duž linije L, koja je definisana jednačinama

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

2° Naći protok vektora $\vec{A}$ kroz spoljnu stranu sfere $x^2+y^2+z^2=R^2$

Rezultati.

1° $\quad 1-\dfrac{1}{\sqrt{1+4\pi^2}}.$ $\qquad$ 2°. 4π.

Dato je vektorsko polje

$$\vec{A}=(z^2-x^2,\quad x^2-y^2,\quad y^2-z^2).$$

1° Izračunati protok vektora rot $\vec{A}$ kroz gornju polovinu elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad z\geqslant 0$$

iz njegove unutrašnjosti na spoljnu stranu.

2° Izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\vec{A}$ duž linije C koja je definisana jednačinama

$$x^2+y^2+z^2=4$$

$$x^2+y^2=z^2,\qquad (z>0)$$

i orijentisana je tako da se, posmatrana iz tačke $T(0, 0, 3)$ obilazi u suprotnom smislu od kazaljke na satu.

Rezultati. 1° 0. 2° 0.

Dato je vektorsko polje

$$\vec{A}=(x^2-yz,\quad y^2-xz,\quad z^2-xy).$$

Odrediti vrstu vektorskog polja i naći protok vektora $\vec{A}$ kroz spoljnu stranu elipsoida

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}+(z-3)^2=1.$$

Rezultati. Polje je potencijalno (izvor D_2: $x+y+z>0$, ponor D_1: $x+y+z<0$ i Laplaceovo polje D_0: $x+y+z=0$). Protok vektora je 96π.

Uputstvo: Pri integraciji koristiti smene:

$$x=1+3\rho\cos\varphi\sin\psi$$

$$y=2+2\rho\sin\varphi\sin\psi$$

$$z=3+\rho\cos\psi,\quad J=6\rho^2\sin\psi,$$

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\psi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\rho\leqslant 1.$$

#

Vektorsko polje definisano je vektor-funkcijom

$$\vec{A}=(y-x,\ z-y,\ x-z).$$

1° Naći vektorske linije polja.

2° Naći protok vektora $\vec{A}$ kroz spoljnu stranu elipsoida

$$\Gamma:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Rešenja.

1° Iz sistema diferencijalnih jednačina vektorskih linija

$$\frac{dx}{y-x}=\frac{dy}{z-y}=\frac{dz}{x-z}$$

sledi

$$\frac{dx+dy+dz}{0}=\frac{dz}{x-z} \quad \Rightarrow \quad dx+dy+dz=0 \quad \Rightarrow \quad x+y+z=C_1.$$

Zamenivši $z=C_1-x-y$ u prvoj jednačini sistema diferencijalnih jednačina, dobijamo

$$\frac{dy}{dx}=\frac{C_1-x-2y}{y-x}.$$

Pomoću smena:

$$X=x+\alpha$$

$$Y=y+\beta;\quad \alpha=\beta=\frac{1}{3}C_1,$$

prethodna diferencijalna jednačina svodi se na homogenu jednačinu

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+2Y}{X-Y}$$

čije je opšte rešenje

$$\ln (Y^2+XY+X^2)-2\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2Y+X}{X\sqrt{3}}=C_2.$$

Skup jednačina

$$\begin{cases} x+y+z=C_1 \\ \ln (Y^2+XY+X^2)-2\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{2Y+X}{X\sqrt{3}}=C_2. \end{cases}$$

gde je

$$X=\frac{4x+y+z}{3}, \quad Y=\frac{4y+x+z}{3}$$

određuje dvoparametarsku familiju vektorskih linija datog polja $\vec{A}$.

2° Pošto je

$$div\,\vec{A}=-3$$

$$m\,(\Phi)=V=\frac{4}{3}\,abc\,\pi, \quad (V \text{ zapremina elipsoida})$$

primenom formule Ostrogradskog, nalazimo

$$I=\oiint_{\Gamma}(\vec{A}\cdot\vec{n})\,d\sigma=\iiint_{\Phi} div\,\vec{A}\,dv=-3\iiint_{\Phi} dx\,dy\,dz=-3m(\Phi)$$

odnosno

$$I=-4\,abc\,\pi.$$

\# Dato je vektorsko polje

$$\vec{A} = (2x(y^2+z^2)+yz,\ \ 2y(z^2+x^2)+xz,\ \ 2z(x^2+y^2)+xy).$$

1° Pokazati da je polje potencijalno i odrediti mu potencijal.

2° Izračunati protok vektorskog polja $\vec{A}$ kroz spoljnu stranu polusfere

$$\Gamma:\ x^2+y^2+z^2-2z=0,\quad y \geqslant 0.$$

Rešenje.

1° Definicioni domen vektorske funkcije $\vec{A}$ je trodimenzionalni prostor E_3. Dokazaćemo da je $\underset{E_3}{\operatorname{rot}} \vec{A}(M) \equiv 0$, tj. da je dato polje potencijalno. Neka je $M(x, y, z)$ proizvoljna tačka prostora E_3, i neka je dalje

$$P = 2x(y^2+z^2)+yz$$

$$Q = 2y(z^2+x^2)+xz$$

$$R = 2z(x^2+y^2)+xy.$$

Kako je

$$R_y - Q_z = 4yz + x - (4yz + x) = 0$$

$$P_z - R_x = 4xz + y - (4xz + y) = 0$$

$$Q_x - P_y = 4xy + z - (4xy + z) = 0,$$

i pošto je

$$\operatorname{rot} \vec{A} = (R_y - Q_z,\quad P_z - R_x,\quad Q_x - P_y)$$

to je

$$\underset{E_3}{\operatorname{rot}} \vec{A}(M) \equiv 0.$$

Po definiciji, vektorsko polje $\vec{A}$ je potencijalno polje. Njegov potencijal, koji ćemo označiti $F = F(M)$, izračunava se po obrascu

$$F(M)=\int_{M_0}^{M} \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

pri čemu je M_0 bilo koja fiksirana tačka polja (integracija totalnog diferencijala). Uzmimo na primer da je M_0, koordinatni početak. Poznatim postupkom integracije totalnog diferencijala, dobijamo

$$F(M)=\int_0^x P(x,0,0)\,dy+\int_0^y Q(x,y,0)\,dx+\int_0^z R(x,y,z,)\,dz$$

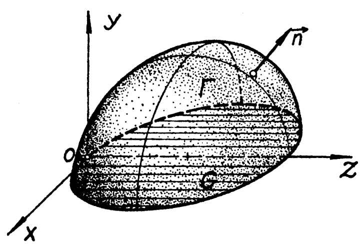
$$F(M)=\int_0^x O\cdot dx+\int_0^y 2yx^2\,dy+\int_0^z [2z(x^2+y^2)+xy]\,dz$$

tj.

$$F(M)=F(x,y,z)=x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+xyz+C$$

gde je C proizvoljna konstanta. Napominjemo da se u fizici za potencijal često uzima $-F(M)$.

2°



Izračunaćemo protok polja $\vec{A}$ pomoću formule Ostrogradskog. Za zatvorenu površ uzećemo na primer, površ

$$\Gamma^*=\Gamma\cup G^-$$

gde je

$$\Gamma:\ y=\sqrt{2z-x^2-z^2},\quad (x,z)\in G$$

$$G:\ x^2+z^2-2z\leqslant 0,\quad y=0,\quad (G^+=G).$$

Vektor funkcija $\vec{A}$ ima neprekidne parcijalne izvode. Ispunjeni su dakle svi uslovi za primenu formule Ostrogradskog. Stoga imamo

$$\oiint_{\Gamma^*} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma = \iint_{\Gamma} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma + \iint_{G^-} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma = \iiint_{\Phi} div\vec{A}\, dv,$$

tj.

$$I = \iint_{\Gamma} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma = \iint_{G^+} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma + \iiint_{\Phi} div\vec{A}\, dv,$$

odnosno

$$I = 4 \iiint_{\Phi} (x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz,$$

jer je

$$\operatorname{div}\vec{A} = 2\,(y^2+z^2) + 2\,(z^2+x^2) + 2\,(x^2+y^2),$$

i $$\iint_{G+} (\vec{A}\cdot\vec{n})\, d\sigma = \iint_{G+} (\vec{A}\cdot\vec{j})\, d\sigma = \iint_{G} Q\,(x, 0, z)\, dx\, dz = \iint_{G} xz\, dx\, dz = 0$$

pošto je oblast G simetrična prema Oz osi, a integrand je neparna funkcija po promenljivoj x. Za integraciju integrala (1) koristićemo sferne koordinate:

$$x = \rho \sin\varphi \sin\psi$$

(2) $$z = \rho \cos\varphi \sin\psi$$

$$y = \rho \cos\psi, \quad J = \rho^2 \sin\psi.$$

Pri tome se oblast Φ preslikava u oblast Φ^*, koja je određena relacijama:

(3) $$\Phi^* \begin{cases} \dfrac{-\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant \psi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant \rho \leqslant 2\cos\varphi \sin\psi. \end{cases}$$

Na osnovu svega izloženog, imamo

$$I = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{0}^{\pi/2} \sin\psi \; d\psi \int_{0}^{2\cos\varphi\,\sin\psi} \rho^4\, d\rho = \frac{8\;32}{5}\int_{0}^{\pi/2} \cos^5\varphi\, d\varphi \int_{0}^{\pi/2} \sin^6\psi\, d\psi$$

i najzad

$$I = \frac{62}{15}\pi.$$

Napominjemo, da je pri integraciji poslednjeg integrala korišćena rekurentna formula:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad \text{gde je} \quad I_n = \int_{0}^{\pi/2} \cos^n t\, dt \quad \text{ili} \quad I_n = \int_{0}^{\pi/2} \sin^n t\, dt.$$

Dato je vektorsko polje

$$\vec{A} = (e^x z - 2\,xy, \;\; 1 - x^2, \;\; e^x + z)$$

1° Pokazati da je polje $\vec{A}$ potencijalno i odrediti mu potencijal.

2° Izračunati integral

$$I = \int_{L} \vec{A} \cdot \vec{dr}$$

gde je L duž PQ, $P\,(0, 1, -1)$, $Q\,(2, 3, 0)$, orijentisana od P prema Q.

Rezultati.

1° $\quad F\,(x, y, z) = (1 - x^2)\,y + ze^x + \dfrac{z^2}{2} + C.$

2°. $\quad I = -\dfrac{19}{2}.$