PROF. DR ING. BORIS APSEN

REPETITORIJ VIŠE MATEMATIKE

DIFERENCIJALI. ZAKRIVLJENOST KRIVULJA. INTEGRALI.
PRIMJENA INTEGRALNOG RAČUNA.
DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE. FOURIEROVI REDOVI.

DRUGI DIO

Peto izdanje

TEHNIČKA KNJIGA
ZAGREB

SADRŽAJ

Strana

Strana

§ 1. Diferencijal funkcije

1. Pojam diferencijala

Neka je zadana funkcija $y = y(x)$, koja ima u svakoj točki konačnu derivaciju:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

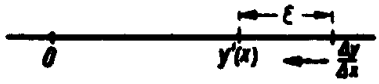
Do prijelaza na limes može se pisati:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) + \varepsilon \qquad \text{(a)}$$

gdje $\varepsilon \to 0$, kad $\Delta x \to 0$.

Na slici 1. prikazana je ta jednakost na brojnom pravcu.

Iz slike se jasno razabire, da kad $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ teži svome limesu $y'(x)$, ε, t. j. razlika između $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ i $y'(x)$, teži nuli.



Sl. 1.

Pomnožimo li obje strane jednakosti (a) s Δx, dobijemo:

$$\Delta y = y'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x \qquad \text{(b)}$$

Prvi član desne strane te jednakosti:

$$y'(x) \cdot \Delta x$$

zove se diferencijal funkcije y i bilježi se s dy (čitaj: „diferencijal y" ili „de y"), t. j.

$$dy = y'(x) \cdot \Delta x \qquad \text{(c)}$$

Primijenimo tu formulu (c) za funkciju $y(x) = x$. Kako je sada $y'(x) = 1$, a $y = x$, uvrštenje tih vrijednosti u (c) daje:

$$dx = \Delta x \qquad (1)$$

To znači: ako je x nezavisna promjenljiva, diferencijal x, t. j. dx, identičan je s Δx.

Uvrstivši $\Delta x = dx$ u (c) dobijemo definitivni izraz za diferencijal funkcije $y = y(x)$:

$$dy = y'(x) \cdot dx \qquad (2)$$

Diferencijal funkcije jednak je derivaciji funkcije pomnoženoj s diferencijalom argumenta.

Ako znamo derivirati, znamo i diferencirati, t. j. izračunati diferencijal funkcije: treba samo izračunati derivaciju pa je pomnožiti s diferencijalom argumenta.

Kako se vidi iz gore navedenog, slovo malo d je oznaka za diferencijal, pa se piše dy, dx, $df(x)$, $d \sin x$, $d \operatorname{arc\,tg} x$ i t. d., a to znači: diferencijal y, diferencijal x, diferencijal funkcije $f(x)$, diferencijal $\sin x$ i t. d., dok slovo veliko „D" je oznaka za derivaciju, na pr. $D_x \sin x = \cos x$, a $d \sin x = \cos x \cdot dx$.

Primjeri

$$y = x^3; \qquad dy = 3x^2 \cdot dx$$

$$y = \sin x; \qquad dy = \cos x \cdot dx$$

$$y = \arcsin x; \qquad dy = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$u = tg\, x; \qquad du = \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

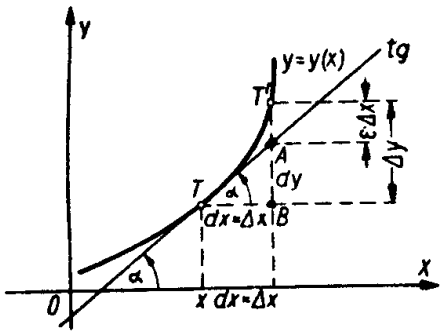
$$u = t^2 - 3t + 1; \qquad du = (2t - 3)\, dt$$

$$v = \ln u; \qquad dv = \frac{1}{u} \cdot du = \frac{du}{u}$$

Pomoću slike 2 prikažimo sada:

2. Geometrijsko značenje diferencijala funkcije $y = y(x)$

U točki T apscise x povučemo tangentu na krivulju $y = y(x)$, pa apscisi x te točke T dademo prirast $dx = \Delta x$. Tada će ordinata tangente dobiti prirast AB, a ordinata krivulje prirast $\Delta y = T'B$.



Sl. 2.

Iz pravokutnog trokuta TBA slijedi:

$$AB = TB \cdot \operatorname{tg} \alpha = dx \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Kako je gradijent tangente $\operatorname{tg} \alpha = y'(x)$, dobijemo:

$$AB = y'(x) \cdot dx$$

a to je naš izraz (2) za diferencijal funkcije, t. j.

$$AB = dy.$$

Prema tome diferencijal funkcije predočen je geometrijski prirastom ordinate tangente, kad x priraste za dx, odnosno za Δx, dok je Δy prirast ordinate krivulje.

Iz slike 2 razabiremo dalje, da je prema (b) mala dužina $T'A = \varepsilon \cdot \Delta x$ i da ta dužina teži nuli, kad $\Delta x \to 0$ i to mnogo brže nego Δx, jer i $\varepsilon \to 0$. Kaže se u tom slučaju, da je $\varepsilon \cdot \Delta x$ beskonačno mala veličina bar drugog reda, ako Δx smatramo beskonačno malom veličinom prvoga reda.

3. Derivacija kao diferencijalni kvocijent

Podijelimo izraz za dy

$$dy = y'(x) \cdot dx$$

s dx. Dobijemo:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{2a}$$

Derivaciju funkcije prikazali smo u obliku diferencijalnog kvocijenta $\frac{dy}{dx}$. To je posve formalni prikaz, jer derivacija nije kvocijent, već limes kvocijenta diferencija $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, kad $\Delta x \to 0$, ali taj prikaz derivacije u obliku kvocijenta ima tu veliku praktičnu prednost, da se iz samog kvocijenta neposredno vidi, po kojoj je promjenljivoj funkcija derivirana, i da se s diferencijalnim kvocijentom može postupati kao s običnim razlomkom. Na pr., kako je brzina derivacija puta s po vremenu t, pišemo je sada ovako:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Ako je gibanje materijalne točke zadano parametarski, t. j. svojim projekcijama u koordinatne osi X i Y:

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

gdje je parametar t vrijeme, bit će:

$$v_x = x'(t) = \frac{dx}{dt}$$
$$v_y = y'(t) = \frac{dy}{dt}$$

brzina projekcije u smjeru osi X, odnosno osi Y ili projekcije brzine u te osi.

Kako je derivacija inverzne funkcije $x(y)$ jednaka recipročnoj vrijednosti derivacije direktne funkcije $y(x)$, pišemo je u obliku:

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{dx}{dy}$$

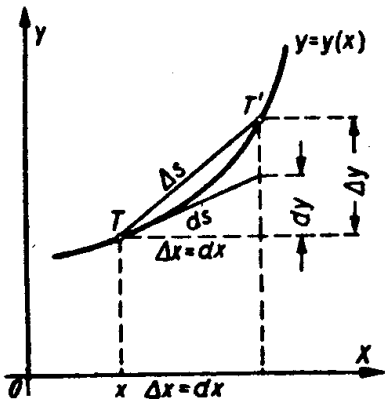
Isto tako lako dolazimo do izraza za derivaciju $y'(x)$ složene funkcije $y = y(u)$, gdje je $u = u(x)$, ako diferencijalni kvocijent $\frac{dy}{dx}$ množimo i dijelimo s du:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

t. j. izderiviravši y po u množimo tu derivaciju s derivacijom u po x.

4. O vrijednostima diferencijala dx i dy

Iz vrijednosti $\frac{dy}{dx} = y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha =$ gradijent tangente jasno slijedi, da diferencijali dx i dy nisu neke određene vrijednosti, jer je $\operatorname{tg} \alpha$ omjer kateta $dy = AB$ i $dx = \Delta x = TB$ (vidi sl. 2), a iz goniometrije znamo, da vrijednost $\operatorname{tg} \alpha$ ovisi jedino o kutu α, a ne ovisi o uzetoj po volji kateti $dx = \Delta x$. Samo je kvocijent diferencijala dx i dy, t. j. $\frac{dy}{dy}$, stalan u svakoj točki funkcije i jednak je njenoj derivaciji $y'(x)$ u toj točki. Međutim, pri rješavanju mnogih problema iz matematike, fizike, čvrstoće i t. .d. često je zgodno uzeti, da su prirast argumenta Δx, a dakle i njemu pripadni prirast funkcije Δy male veličine, a diferencijali dx i dy da su beskonačno male veličine, t. j. promjenljive veličine, koje teže nuli. U tom slučaju izrazi za Δx i Δy daju približne formule za veličinu, koja se pomoću njih određuje, a te formule su to točnije, što su Δx i Δy manji, dok izrazi s diferencijalima dx i dy daju točne formule. Postupajući na taj način možemo znatno pojednostaviti izvod mnogih formula, a također i mnoge račune.



Sl. 3.

Tako na pr. prema slici 3 možemo po Pitagorinu poučku napisati:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad (3)$$

Prva jednakost daje približnu vrijednost kvadrata dužine luka TT' krivulje $y = y(x)$, koja je to točnija, što je Δx, a dakle i Δy manji. Druga jednakost daje točnu vrijednost kvadrata diferencijala luka ds krivulje, naravno uz uvjet, da su dx i dy beskonačno male veličine. Kako ćemo kasnije u primjeni integralnog računa vidjeti, iz te formule lako dobijemo formulu za duljinu s luka krivulje $y = y(x)$.

Smatrajući Δx malom veličinom dolazimo do praktički vrlo važnog pravila:

5. Određivanje pogreške veličine izračunate iz podataka mjerenja

Svi podaci mjerenja sadržavaju i uz najveću pažnju opažača slučajne pogreške uzrokovane nesavršenstvom naših čutila i mjeraćih sprava. Jasno je, da ne znamo niti veličine niti predznaka tih pogrešaka, ali znamo granične vrijednosti ili međe tih pogrešaka. Tako na pr. mjereći neku kraću dužinu pomoću mjerila s noniusom, kojega je podatak 0,1 mm, znamo da će pogreška izmjerene dužine ležati između —0,1 i +0,1 mm. Zadaća se sastoji u tome, da se izračuna granična vrijednost pogreške one veličine, koju smo izračunali iz podataka mjerenja.

Uzmimo općenito, da imamo izračunati vrijednost funkcije $y = y(x)$ za neku vrijednost x, koju smo izmjerili na $\pm \Delta x$ točno, i odrediti graničnu vrijednost Δy pogreške te izračunate vrijednosti. Ta tražena apsolutna pogreška bit će:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \qquad (4)$$

Iz jednadžbe (b) na str. 11:

$$\Delta y = y'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$$

uz $y'(x) \cdot \Delta x = dy$ slijedi:

$$\Delta y - dy = \varepsilon \cdot \Delta x$$

Pokazali smo već: ako Δx teži nuli, $\varepsilon \cdot \Delta x$ još brže teži nuli, pa možemo za male Δx približno uzeti, da je:

$$\Delta y - dy \doteq 0$$

ili

$$\Delta y \doteq dy$$

a kako je $dy = y'(x) \cdot dx = y'(x) \cdot \Delta x$, jer je $dx = \Delta x$, dobijemo:

$$\text{apsolutna pogreška } \Delta y \doteq dy = y'(x) \cdot \Delta x \qquad (5)$$

pri čemu je ta jednakost to točnija, što je Δx manji.

Pomoću te formule računa se obično apsolutna pogreška veličine, ako je jedan podatak, pomoću kojeg se ta veličina računa, izmjeren s izvjesnom točnosti, jer je mnogo jednostavnije izračunati tu pogrešku po formuli (5) nego prema (4), dok je razlika u točnosti računa obično toliko malena, da nema praktički nikakvog značenja.

Primjer

Izračunaj površinu P kvadrata i njenu apsolutnu pogrešku ΔP, a također relativnu i procentualnu pogrešku, ako je za stranicu kvadrata dobiveno mjerenjem $a = 5{,}21$ cm $\pm \Delta a$, gdje je $\Delta a = 0{,}1$ mm.

1. Točni račun prema (4):

$$P = a^2$$
$$\Delta P = (a + \Delta a)^2 - a^2 = a^2 + 2a \cdot \Delta a + \Delta a^2 - a^2$$
$$\underline{\Delta P = 2a \cdot \Delta a + \Delta a^2}$$

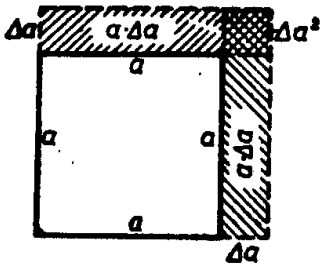
Na slici 4 prikazana su oba člana pogreške ΔP.

Uvrštenje $a = 5{,}21$ cm, $\Delta a = +0{,}1$ mm $= +0{,}01$ cm daje:

$$P = 5{,}21^2 = 27{,}1441 \text{ cm}^2$$

$$\Delta P = 2 \cdot 5{,}21 \cdot 0{,}01 + 0{,}01^2 = 0{,}1042 + 0{,}0001 = 0{,}1043$$

$$\Delta P = 0{,}1043 \text{ cm}^2 \doteq 0{,}1 \text{ cm}^2$$



Sl. 4.

Kako rezultat smije sadržavati samo zajamčene znamenke osim posljednje, koja može biti nesigurna za jedinicu, odbacimo u vrijednosti dobivene za P sve decimale osim prve, pa dobijemo:

$$\underline{P = 27{,}1 \text{ cm}^2 + 0{,}1 \text{ cm}^2}$$

To znači: prava vrijednost površine P kvadrata leži između 27,0 i 27,2 cm².

Kako vidimo, računanje druge, treće i četvrte decimale u P i ΔP bilo je posve suvišno.

Relativna pogreška: $\frac{\Delta P}{P} = \frac{0{,}1\ \text{cm}^2}{27{,}1\ \text{cm}^2} = 0{,}0037$

Procentualna pogreška: $\frac{\Delta P}{P} \cdot 100\% = 0{,}0037 \cdot 100\% = 0{,}37\%$

2. Približni račun pomoću diferencijala, t. j. prema (5):

$$P = a^2$$
$$\Delta P \doteq dP = 2a \cdot \Delta a$$
$$\underline{\Delta P \doteq 2a \cdot \Delta a}$$

Usporedimo li ovaj rezultat s prije dobivenim $\Delta P = 2a \cdot \Delta a + \Delta a^2$, vidimo, da smo izgubili drugi član $\Delta a^2 = 0{,}01^2 = 0{,}0001\ \text{cm}^2$, t. j. kvadratić prikazan na slici 4, koji za naš račun nema praktički nikakvog značenja.

Uvrštenje $a = 5{,}21$ cm i $\Delta a = 0{,}01$ cm daje:

$$\Delta P = 10{,}42 \cdot 0{,}01 = 0{,}1042$$
$$\underline{\Delta P = 0{,}1042\ \text{cm}^2 \doteq 0{,}1\ \text{cm}^2}$$

Dobili smo isti rezultat:

$$\underline{P = 27{,}1\ \text{cm}^2 \pm 0{,}1\ \text{cm}^2}$$

t. j.

$$\underline{27{,}0\ \text{cm}^2 < P < 27{,}2\ \text{cm}^2}$$

Da smo naš račun površine P kvadrata počeli s određivanjem apsolutne pogreške ΔP, mogli bismo vrijednost P izračunati pomoću logatiramskog računala ili načinom skraćenog množenja*) samo na jednu decimalu točno i tako skratiti računski rad:

$$\begin{array}{r} 5{,}21 \\ \underline{1\ 25} \\ 26\ 05 \\ 1\ 04 \\ \underline{5} \\ 27{,}14 \end{array} \qquad \underline{P = 27{,}1\ \text{cm}^2 \pm 0{,}1\ \text{cm}^2}$$

Za relativnu i procentualnu pogrešku dobijemo iste gore navedene vrijednosti.

6. Diferencijal konstante. Diferencijal zbroja, razlike, umnoška i kvocijenta funkcija

Kako je diferencijal funkcije jednak umnošku derivacije te funkcije i diferencijala argumenta, sva pravila za deriviranje vrijede i za diferenciranje.

Tako za diferencijal konstante $y = C$ prema $dy = y'(x) \cdot dx$ dobijemo:

$$dy = dC = 0 \cdot dx = 0$$
$$dC = 0 \tag{6}$$

Diferencijal konstante jednak je nuli.

Isto tako za diferencijal zbroja, odnosno razlike funkcija imamo:

$$d[u(x) \pm v(x)] = du \pm dv \tag{7}$$

Pokažimo, da pravilo za deriviranje produkta vrijedi i za diferencijal produkta.

*) Vidi od istog pisca: Logaritamsko računalo, IV. izdanje, 1957. i Repetitorij elementarne matematike, III. izdanje, 1954. Tehnička knjiga, Zagreb.

Znamo:

$$(u \cdot v)' = uv' + vu' \quad / \cdot dx$$
$$(u \cdot v)' \cdot dx = uv'dx + vu'dx$$

Po definiciji diferencijala imamo:

$$(uv)'dx = d(u \cdot v); \quad v'dx = dv \quad \text{i} \quad u'dx = du$$

Uvrštenje daje:

$$d(u \cdot v) = udv + vdu \tag{8}$$

Analogno dobijemo:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \tag{9}$$

Primjeri

1. $d(x^2 \cdot \sin x) = x^2 \cos x\, dx + \sin x \cdot 3x^2 dx = x^2 \cos x\, dx + 3x^2 \sin x\, dx =$
$\underline{= x^2 (x \cos x + 3 \sin x)\, dx}$

2. $y = \dfrac{x+3}{x^2+3}$

$$dy = \frac{(x^2+3) \cdot d(x+3) - (x+3) \cdot d(x^2+3)}{(x^2+3)^2} = \frac{(x^2+3) \cdot dx - (x+3) \cdot 2x \cdot dx}{(x^2+3)^2} =$$

$$= \frac{(x^2+3-2x^2-6x)\, dx}{(x^2+3)^2} = \underline{\frac{3-6x-x^2}{(x^2+3)^2} dx}$$

3. Odredi dx iz $2x = t$.
Diferencirajući lijevu stranu po x, a desnu po t dobijemo:

$$2 \cdot 1\, dx = 1 \cdot dt$$

a odatle je:

$$\underline{dx = \frac{1}{2} dt}$$

4. Odredi dr iz $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.
Postupajući na isti način dobijemo:

$$2r\, dr = -a^2 \cdot 2 \sin 2\varphi \cdot d\varphi$$

a odatle:

$$\underline{dr = -\frac{a^2 \sin 2\varphi}{r} d\varphi}$$

5. Odredi dy iz $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

$$2b^2 x\, dx - 2a^2 y\, dy = 0$$

Odatle:

$$\underline{dy = \frac{b^2 x}{a^2 y} dx}$$

7. Diferencijali višega reda

Slično tome kako je druga derivacija derivacija od prve derivacije, tako je i drugi diferencijal d^2y (čitaj „drugi diferencijal y“ ili „de dva y“) funkcije $y = y(x)$ diferencijal od prvog diferencijala, t. j.

$$d^2y = d(dy)$$

Uvrštenje $dy = y'(x) \cdot dx$ daje

$$d^2y = d[y'(x) \cdot dx] \quad .$$

Imamo diferencirati produkt prema (8):

$$d^2y = y'(x) \cdot d(dx) + dx \cdot y''(x) \cdot dx$$

Kako je dx, t. j. diferencijal nezavisne promjenljive x, veličina uzeta po volji i to neovisno o x, ona je konstanta, pa je prema (6)

$$d(dx) = 0$$

Ostaje

$$d^2y = y''(x) \cdot dx^2 \tag{10}$$

Drugi diferencijal funkcije ili diferencijal drugog reda jednak je drugoj derivaciji funkcije pomnoženoj s kvadratom diferencijala argumenta.

Na pr. za $y = \sin x$

$$d^2y = -\sin x \cdot dx^2$$

Podijelimo li formulu (10) za drugi diferencijal funkcije s dx^2 dobijemo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''(x)$$

ili

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{11}$$

Sada smo i drugu derivaciju formalno prikazali u obliku drugog diferencijalnog kvocijenta.

Kako je druga derivacija funkcije derivacija od njene prve derivacije, možemo drugi diferencijalni kvocijent pisati i ovako:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{11a}$$

Na pr. za $y = \sin x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\sin x)'}{dx} = \frac{d(\cos x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

Analogno dobijemo treći diferencijal funkcije $y = y(x)$:

$$d^3y = y'''(x) \cdot dx^3 \tag{12}$$

i treću derivaciju u obliku trećeg diferencijalnog kvocijenta:

$$y'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} \tag{13}$$

i t. d.

Kako je ubrzanje (akceleracija) a druga derivacija puta $s = s(t)$ po vremenu t, pišemo je obično u obliku:

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Ako je pak put s materijalne točke zadan parametarski, t. j. svojim projekcijama u koordinatne osi X i Y:

$$x = x(t) \quad \text{i} \quad y = y(t)$$

tada su:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \text{i} \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

akceleracije gibanja projekcije točke u smjeru osi X i osi Y, odnosno projekcije akceleracije a u obje koordinatne osi.

8. Diferencijali složene funkcije

Neka je zadana složena funkcija

$$y = y(u), \text{ gdje je } u = u(x), \text{ t. j. } y = y[u(x)]$$

Prvi diferencijal složene funkcije građen je tako, kako da je u argument a ne funkcija, t. j.

$$dy = y'(u) \cdot du \tag{14}$$

a kako je $y'(u) = \frac{dy}{du}$, a za $u = u(x)$ $du = u'(x) \cdot dx = \frac{du}{dx} \cdot dx$, dobijemo

$$dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} dx \tag{15}$$

Složena se funkcija diferencira tako, da se izračuna njena derivacija pa se pomnoži s diferencijalom argumenta.

Primjer

$$d\,[\arcsin(3t - 4t^3)] = \frac{3 - 12t^2}{\sqrt{1 - (3t - 4t^3)^2}} dt = \frac{3(1 - 4t^2)}{\sqrt{1 - t^2(3 - 4t^2)^2}} dt$$

Prelazimo na drugi diferencijal složene funkcije

$$y = y(u), \quad \text{gdje je} \quad u = u(x)$$

$d^2y = d(dy) =$ prema (14) $= d[y'(u) \cdot du] =$ prema (8) $=$
$= y'(u) \cdot d(du) + du \cdot y''(u) \cdot du$

Kako u nije nezavisna promjenljiva, već je funkcija od x, du nije konstanta, pa je $d(du) \neq 0$, već je $d(du) = d^2u$. Imamo dakle:

$$d^2y = y''(u) \cdot du^2 + y'(u) \cdot d^2u \tag{16}$$

Ako je u nezavisna promjenljiva, $du = C$, $d^2u = d(du) = dC = 0$, pa je

$$d^2y = y''(u) \cdot du^2$$

a to je naša formula (10).

Podijelimo li formulu (16) sa dx^2, dobijemo izraz za drugu derivaciju složene funkcije:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''(u) \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + y'(u) \frac{d^2u}{dx^2} \tag{16a}$$

Primjeri

1. Izračunaj d^2y za $y = \sin x^3$, t. j. za $y = \sin u$, gdje je $u = x^3$.
Računamo prema (16) uvrstivši $u = x^3$

$$d^2y = -\sin x^3 \cdot (dx^3)^2 + \cos x^3 \cdot d^2(x^3) = -\sin x^3 (3x^2 \cdot dx)^2 + \cos x^3 \cdot (x^3)'' \cdot dx^2 =$$
$$= -\sin x^3 \cdot 9x^4 \cdot dx^2 + \cos x^3 \cdot 6x \cdot dx^2 = \underline{3x(2\cos x^3 - 3x^3 \sin x^3) \cdot dx^2}$$

Jednostavnije dolazimo do istog rezultata, ako izračunamo drugu derivaciju zadane složene funkcije pa je pomnožimo s kvadratom diferencijala argumenta, jer d^2y dobijemo iz $\frac{d^2y}{dx^2}$ tako, da taj kvocijent pomnožimo s dx^2.

Naš primjer 1:

$$y = \sin x^3$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \cdot \cos x^3$$
$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 3(-x^2 \cdot \sin x^3 \cdot 3x^2 + \cos x^3 \cdot 2x)$$

ili

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x(-3x^3 \sin x^3 + 2\cos x^3) \,/\, \cdot dx^2$$
$$\underline{d^2y = 3x(2\cos x^3 - 3x^3 \sin x^3) \cdot dx^2}$$

2. Izračunaj d^2y za $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} \cdot 1 - x \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} =$$
$$= \frac{1+x^2-x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1 \cdot 2x}{(1+x)^2} \,/\, \cdot dx^2$$
$$\underline{d^2y = -\frac{2x}{(1+x)^2} dx^2}$$

Sada kada smo uveli pojam diferencijala i pojam derivacije kao diferencijalnog kvocijenta, možemo riješiti niz pitanja u vezi s krivuljama zadanim u parametarskom obliku, odnosno u polarnim koordinatama (vidi Dio I. § 5 i § 3, 6).

§ 2. Jednadžbe tangente i normale na krivulju, kojoj je jednadžba zadana u parametarskom obliku

Tražimo jednadžbe tangente i normale na krivulju

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \qquad t_1 \leqq t \leqq t_2 \qquad \text{(a)}$$

u točki T_1 parametra t_1.

Ako bi jednadžba zadane krivulje bila zadana u običnom obliku $y = f(x)$, tada bi jednadžba tangente u istoj točki $T_1(x_1, y_1)$ glasila [vidi Dio I. formule (90) i (91)]:

$$y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1) \tag{b}$$

Kako je:

$$f'(x) \neq y'(t)$$

prikažimo $f'(x)$ u obliku diferencijalnog kvocijenta

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{c}$$

pa prema (a) računamo:

$$dy = y'(t) \cdot dt$$
$$dx = x'(t) \cdot dt$$

Uvrstivši to u (c) i skrativši s dt dobijemo:

$$f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \tag{17}$$

a u točki T_1 apscise x_1, kojoj odgovara parametar t_1

$$f'(x_1) = \frac{y'(t_1)}{x'(t_1)} \tag{d}$$

Uvrstimo li u (b) jednadžbu (d), a također $x_1 = x(t_1)$ i $y_1 = y(t_1)$, dobijemo:

$$y - y(t_1) = \frac{y'(t_1)}{x'(t_1)}[x - x(t_1)] \tag{18}$$

To je jednadžba tangente na krivulju

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= x(t) \end{aligned}\right| \quad \text{u točki } T_1 \ (t = t_1)$$

Kako je normala okomita na tangentu, bit će:

$$y - y(t_1) = -\frac{x'(t_1)}{y'(t_1)}[x - x(t_1)] \tag{18a}$$

jednadžba normale u istoj točki $T_1(t_1)$.

Primjeri

1. Napiši jednadžbe tangente i normale na elipsu $x = 6 \cos t$, $y = 4 \sin t$

u točki $T_1\left(t_1 = \frac{\pi}{6} = \text{arc } 30°\right)$.

Prema (18) računamo:

$$x(t_1) = 6 \cos \frac{\pi}{6} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$y(t_1) = 4 \sin \frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$x'(t) = -6 \sin t; \quad x'(t_1) = -6 \sin \frac{\pi}{6} = -3$$

$$y'(t) = 4 \cos t; \quad y'(t_1) = 4 \cos \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$$

Uvrštenje u (18) daje:

$$y - 2 = \frac{2\sqrt{3}}{-3}(x - 3\sqrt{3}) \ldots \quad \text{jednadžba tangente}$$

a prema (18a):

$$y - 2 = \frac{3}{2\sqrt{3}}(x - 3\sqrt{3}) \ldots \quad \text{jednadžba normale}$$

Nakon uređenja dobijemo:

$$\underline{y = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\,x + 8} \ \ldots\ldots \quad \text{jednadžbe tangente}$$

ili za $\sqrt{3} \doteq 1{,}73$

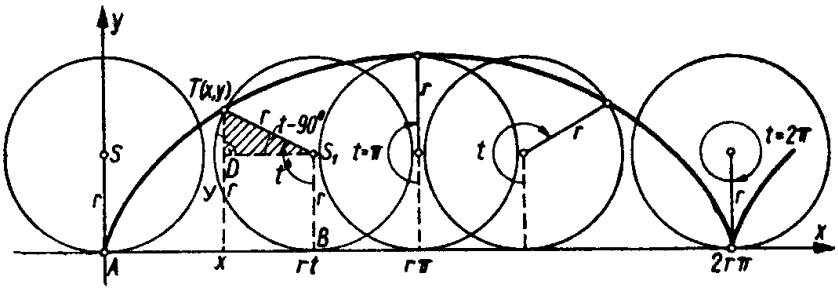
$$\underline{y = -1{,}15x + 8}$$

$$y = \frac{3}{2\sqrt{3}}x - \frac{9}{2} + 2$$

ili $$\underline{y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{5}{2}} \ \ldots\ldots \quad \text{jednadžba normale}$$

ili $$\underline{y = 0{,}87x - 2{,}5}$$

Sve račune vršimo pomoću logaritamskog računala.



Sl. 5.

2. Napiši jednadžbe tangente i normale na cikloidu u točki T_1 parametra $t = t_1$.

Cikloidu opisuje svaka čvrsta točka A na obodu kruga polumjera r, koji se bez klizanja kotrlja po nekom čvrstom pravcu (vidi sl. 5).

Uzevši za os X taj pravac, za ishodište koordinatnog sustava početni položaj te čvrste točke A, za parametar t kut zaokreta čvrstog polumjera SA, imamo prema slici 5 za neku točku $T(x, y)$ cikloide:

$$x = AB - DS_1$$

Uzevši u obzir, da je $AB = \widehat{BT} = rt$, a $DS_1 = r \cdot \cos(t - 90°)$ (vidi šrafirani trokut), dobijemo:

$$x = rt - r \cdot \cos(t - 90°) = rt - r\cos(90° - t) = rt - r\sin t = r(t - \sin t)$$

Slično prema slici 5 imamo:

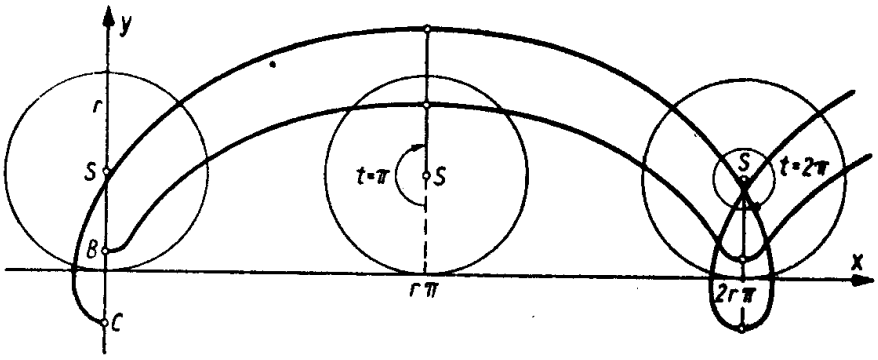
$$y = r + DT = r + r\sin(t - 90°) = r - r\sin(90° - t) = r - r\cos t = \\ = r(1 - \cos t)$$

Dakle:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(t - \sin t) \\ y &= r(1 - \cos t) \end{aligned}\right| \text{ jednadžba cikloide} \qquad (19)$$

Za jedan luk krivulje uzimamo $0 \leqq t \leqq 2\pi$.

Primjećujemo, da čvrsta točka B, koja leži unutar kruga, koji izvodi cikloidu, opisuje **prikraćenu cikloidu**, a čvrsta točka C, koja leži izvan toga kruga, opisuje **produljenu cikloidu** (sl. 6).



Sl. 6.

Kotrlja li se izvodni krug ne po čvrstom pravcu, već po čvrstoj kružnici, tada čvrsta točka A na obodu kruga opisuje **epicikloidu**, odnosno **hipocikloidu**, već prema tome, da li se krug kotrlja po kružnici izvana ili iznutra.

Kao primjer epicikloide navedimo **kardioidu**, koju opisuje početna točka A pomičnog kruga, ako pomični i čvrsti krug imaju isti promjer a (vidi dalje sl. 50, u kojoj je također prikazana jednostavna konstrukcija te krivulje).

Prelazimo na računanje jednadžbi tangente i normale na cikloidu

$$\left.\begin{aligned} x &= r(t - \sin t) \\ y &= r(1 - \cos t) \end{aligned}\right| \text{ u točki } T_1(t = t_1).$$

Prema (18) računamo:

$$x(t_1) = r(t_1 - \sin t_1)$$
$$y(t_1) = r(1 - \cos t_1)$$
$$x'(t) = r(1 - \cos t); \quad x'(t_1) = r(1 - \cos t_1)$$
$$y'(t) = r \sin t; \quad y'(t_1) = r \sin t_1$$

Uvrštenje u (18) daje:

$$y - r(1 - \cos t_1) = \frac{r \sin t_1}{r(1 - \cos t_1)} [x - r(t_1 - \sin t_1)]$$

ili

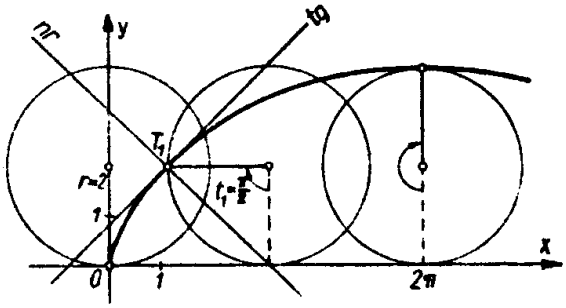
$$y - r(1 - \cos t_1) = \frac{2 \sin \frac{t_1}{2} \cdot \cos \frac{t_1}{2}}{2 \sin^2 \frac{t_1}{2}} [x - r(t_1 - \sin t_1)]$$

ili

$$y - r(1 - \cos t_1) = \operatorname{ctg} \frac{t_1}{2} [x - r(t_1 - \sin t_1)]$$ — jednadžba tangente.

Prema (18a) dobijemo:

$$y - r(1 - \cos t_1) = - \operatorname{tg} \frac{t_1}{2} [x - r(t_1 - \sin t_1)]$$ — jednadžbe normale.



Sl. 7.

Na pr. za cikloidu, kojoj je polumjer izvodnog kruga $r = 2$, dobijemo u točki $T_1\left(t_1 = \frac{\pi}{2}\right)$ uzevši u obzir, da je $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, a $\sin \frac{\pi}{2} = 1$:

$$y - 2 = 1 \left[x - 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right]$$ .... jednadžba tangente

$$y - 2 = -1 \left[x - 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right]$$ ... jednadžba normale

ili $$y = x - \pi + 4$$
i $$y = -x + \pi$$

ili uzevši u obzir da je $\pi \doteq 3{,}14$:

$$\underline{y = x + 0{,}86}$$ ... jednadžba tangente
$$\underline{y = -x + 3{,}14}$$ .. jednadžba normale

(Vidi sl. 7).

§ 3. Jednadžbe tangente i normale na krivulju zadanu u polarnim koordinatama

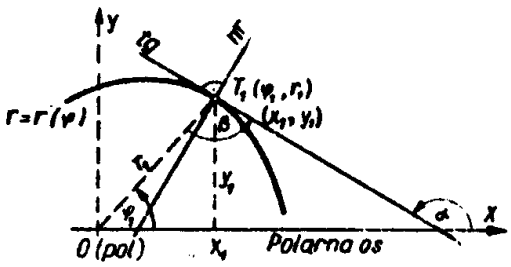
Tražimo jednadžbe tangente i normale na krivulje $r = r(\varphi)$ u točki $T_1(\varphi_1, r_1)$ (vidi sl. 8).

Opet polazimo od jednadžbe tangente na krivulju $y = y(x)$ u točki $T_1(x_1, y_1)$:

$$y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1) \qquad \text{(a)}$$

Prema slici 8:

$$x_1 = r_1 \cos \varphi_1 \qquad \text{(b)}$$
$$y_1 = r_1 \sin \varphi_1$$



Sl. 8.

Kako je:

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

računamo dx i dy prema:

$$x = r \cdot \cos \varphi$$
$$y = r \cdot \sin \varphi$$

po pravilu za diferenciranje produkta (8), jer r nije konstanta, već je funkcija od φ: $r = r(\varphi)$:

$$dx = -r \sin \varphi \cdot d\varphi + \cos \varphi \cdot 1 \cdot dr$$
$$dy = \quad r \cos \varphi \cdot d\varphi + \sin \varphi \cdot 1 \cdot dr$$

ili ako iz desnih strana tih jednadžbi izlučimo $\cos \varphi \cdot d\varphi$ dobijemo:

$$dx = \cos \varphi \cdot d\varphi \left(-r \operatorname{tg} \varphi + \frac{dr}{d\varphi}\right)$$
$$dy = \cos \varphi \cdot d\varphi \left(r + \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{dr}{d\varphi}\right)$$

Naša je krivulja zadana u obliku:

$$r = r(\varphi), \text{ pa } \frac{dr}{d\varphi} \text{ je derivacija } r \text{ po } \varphi, \text{ t. j. } \frac{dr}{d\varphi} = r'(\varphi)$$

Uzmemo li to u obzir i uvrstimo li gornje izraze za dx i dy u $y'(x) = \frac{dy}{dx}$, dobijemo:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{r + r' \operatorname{tg} \varphi}{r' - r \operatorname{tg} \varphi} \qquad (20)$$

a u točki $T_1(\varphi_1, r_1)$, (x_1, y_1)

$$y'(x_1) = \frac{r_1 + r_1' \operatorname{tg} \varphi_1}{r_1' - r_1 \operatorname{tg} \varphi_1} \qquad (20a)$$

Formule (20) i (20a) daju gradijent tangente na krivulju $r = r(\varphi)$ u nekoj točki T, odnosno u zadanoj točki T_1.

Uvrštenje (b) i (20a) u (a) daje:

$$y - r_1 \sin \varphi_1 = \frac{r_1 + r_1' \operatorname{tg} \varphi_1}{r_1' - r_1 \operatorname{tg} \varphi_1} (x - r_1 \cos \varphi_1) \tag{21}$$

To je jednadžba tangente na krivulju $r = r(\varphi)$ u točki $T_1(\varphi_1, r_1)$. Odatle slijedi jednadžba normale u istoj točki T_1:

$$y - r_1 \sin \varphi_1 = -\frac{r_1' - r_1 \operatorname{tg} \varphi_1}{r_1 + r_1' \operatorname{tg} \varphi_1} (x - r_1 \cos \varphi_1) \tag{21a}$$

Smjer tangente na krivulju $r = r(\varphi)$ određen je ne samo kutom α, što ga tangenta zatvara s polarnom osi, odnosno s osi X, već i kutom β, koji tangenta zatvara s radijvektorom povučenim u diralište (vidi sl. 8). Prema toj slici imamo:

$$\alpha = \beta + \varphi \tag{22}$$

(α je vanjski kut trokuta)

Odatle:

$$\beta = \alpha - \varphi \tag{22a}$$

ili

$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) =$ prema poznatoj trigonometrijskoj formuli =

$$= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi} \tag{a}$$

Znamo također, da je:

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{b}$$

a prema slici 8:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \tag{c}$$

i

$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{d}$$

(Poznate formule prijelaza od pravokutnih koordinata na polarne).
Uvrštenje (b) i (c) u (a) daje:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{y}{x}}$$

ili ako brojnik i nazivnik pomnožimo sa $x \cdot dx$, dobijemo:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x\,dx + y\,dy} \tag{e}$$

Sada izvršimo prijelaz na polarne koordinate najprije za brojnik, a zatim za nazivnik formule (e).

Iz (c) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ slijedi:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

Diferencirajmo tu jednakost po pravilima za diferenciranje kvocijenta (9) i složenih funkcija (15):

$$d\varphi = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2}$$

ili

$$d\varphi = \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2 + y^2}$$

Odatle:

$$xdy - ydx = (x^2 + y^2)d\varphi$$

a kako je prema (d)

$$x^2 + y^2 = r^2$$

dobijemo:

$$xdy - ydx = r^2 d\varphi \qquad \text{(f)}$$

To je brojnik formule (e) u polarnim koordinatama. Prelazimo na nazivnik. Diferenciramo li (d)

$$r^2 = x^2 + y^2$$

dobijemo:

$$2r\,dr = 2x\,dx + 2y\,dy$$

Odatle:

$$x\,dx + y\,dy = r\,dr \qquad \text{(g)}$$

To je nazivnik formule (e) u polarnim koordinatama. Uvrštenje (f) i (g) u (e) daje:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r^2 d\varphi}{r \cdot dr}$$

ili

$$\operatorname{tg} \beta = r \cdot \frac{d\varphi}{dr} \qquad \text{(h)}$$

Rekli smo već malo prije, da je za krivulju $r = r(\varphi)$

$$r' = \frac{dr}{d\varphi}$$

ili recipročno

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r'}$$

Uvrstimo li to u (h), dobijemo konačno:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{r'} \tag{23}$$

Prema tome jednadžbu tangente na krivulju $r = r(\varphi)$ u točki $T_1(\varphi_1, r_1)$ možemo obzirom na (21) napisati i u obliku:

$$y - r_1 \sin \varphi_1 = \operatorname{tg}(\beta_1 + \varphi_1)(x - r_1 \cos \varphi_1) \tag{24}$$

jer je $y'(x_1) = \operatorname{tg} \alpha_1 =$ prema (22) $= \operatorname{tg}(\beta_1 + \varphi_1)$, a kut β_1 se odredi prema (23) iz $\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{r_1}{r_1'}$.

Primjeri

1. Napiši jednadžbu tangente na Arhimedovu spiralu $r = a\varphi$ u točki T_1 amplitude φ_1.

Točka opisuje Arhimedovu spiralu, ako se polna poluzraka, t. j. poluzraka kroz pol, okreće jednoliko oko pola, a po njoj se jednoliko giba ta točka.

Najprije izračunajmo nekoliko točaka spirale i narišimo je uzevši za konstantu a neku vrijednost, na pr. 2.

φ	$r = 2\varphi$
0	0
45°	$2 \text{ arc } 45° = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}57$
90°	$2 \text{ arc } 90° = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \doteq 3{,}14$
180°	$2 \text{ arc } 180° = 2\pi \doteq 6{,}28$
270°	$2 \text{ arc } 270° = 2 \cdot \frac{3}{2}\pi = 3\pi \doteq 9{,}42$
360°	$2 \text{ arc } 360° = 2 \cdot 2\pi \doteq 12{,}56$
360° + 45°	$2 \text{ arc } (360° + 45°) = 2\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 4\pi + \frac{\pi}{2} \doteq$ $\doteq 12{,}56 + 1{,}57 = 14{,}13$
360° + 90°	$2 \text{ arc } (360° + 90°) = 2\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 4\pi + \pi =$ $= 5\pi \doteq 15{,}71$

i t. d.

Vidi sl. 9.

Iz križaljke s vrijednostima za φ i r, a također iz slike vidimo, da radijvektori Arhimedove spirale $r = a\varphi$, koji pripadaju istoj polnoj poluzraci, članovi su aritmetičke progresije, kojoj je diferencija $d = 2a\pi$ (Vidi Repetitorij elementarne matematike, I, § 12).

Tako na pr. Arhimedova spirala $r = 2\varphi$ odsjeca na polarnoj osi radijvektore $0, 2\cdot 2\pi, 2\cdot 4\pi, 2\cdot 6\pi, \ldots$, a to je aritmetička progresija diferencije $d = 4\pi - 0 = 8\pi - 4\pi = 12\pi - 8\pi = \ldots = 4\pi = 2\cdot 2\pi$ (vidi sl. 9).

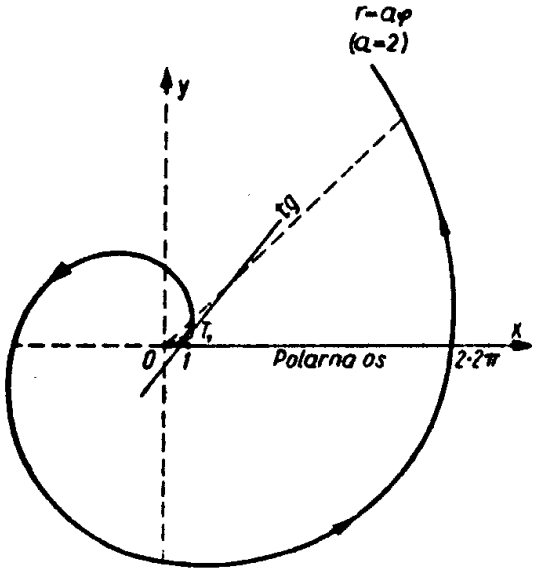
Primijetimo još, da linearna funkcija r od φ, t. j. $r = a\varphi$, predočuje u polarnim koordinatama Arhimedovu spiralu, dok linearna funkcija y od x, t. j. $y = ax$, predočuje u pravokutnim koordinatama pravac kroz ishodište.

Prelazimo na izračunavanje jednadžbe tangente na Athimedovu spiralu $r = a\varphi$ u točki T_1 amplitude φ_1.

Računamo prema (21):

$$r = a\varphi; \quad r_1 = a\varphi_1$$

$$r' = a; \quad r'_1 = a$$



Sl. 9.

Uvrštenje u (21) daje:

$$y - a\varphi_1 \sin\varphi_1 = \frac{a\varphi_1 + a\cdot \operatorname{tg}\varphi_1}{a - a\,\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_1}(x - a\varphi_1\cos\varphi_1)$$

ili

$$y - a\varphi_1 \sin\varphi_1 = \frac{a(\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_1)}{a(1 - \varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_1)}(x - a\,\varphi_1\cos\varphi_1)$$

ili, ako svedemo na zajednički nazivnik

$$y(1 - \varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_1) - a\,\varphi_1 \sin\varphi_1(1 - \varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_1) = (\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_1)x - (\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_1)\cdot a\,\varphi_1\cos\varphi_1$$

Odatle uzevši u obzir, da je $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}$, dobijemo:

$$y\,\frac{\cos\varphi_1 - \varphi_1\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1} - a\,\varphi_1\sin\varphi_1\,\frac{\cos\varphi_1 - \varphi_1\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1} =$$

$$= \frac{\varphi_1\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}\,x - \frac{\varphi_1\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}\cdot a\,\varphi_1\cos\varphi_1$$

ili

$$y(\cos\varphi_1 - \varphi_1\sin\varphi_1) - a\,\varphi_1\sin\varphi_1\cos\varphi_1 + a\,\varphi_1^2\sin^2\varphi_1 =$$
$$= (\varphi_1\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1)x - a\,\varphi_1^2\cos^2\varphi_1 - a\,\varphi_1\sin\varphi_1\cos\varphi_1$$

a odatle:

$$y(\cos\varphi_1 - \varphi_1\sin\varphi_1) - (\varphi_1\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1)x + a\,\varphi_1^2(\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1) = 0$$

i konačno:

$$(\sin\varphi_1 + \varphi_1\cos\varphi_1)x - (\cos\varphi_1 - \varphi_1\sin\varphi_1)\,y - a\,\varphi_1^2 = 0$$

To je tražena jednadžba tangente na Arhimedovu spiralu $r = a\varphi$ u točki $T_1(\varphi_1)$.

Za naš slučaj $r = 2\,\varphi$, na pr. za točku T_1 amplitude $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$, imamo:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6} \doteq \frac{3{,}14}{6} = 0{,}52$$

$$\varphi_1^2 = \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = 0{,}52^2 = 0{,}27$$

$$\sin\varphi_1 = \sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\cos\varphi_1 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq \frac{1{,}73}{2} = 0{,}87$$

$$a = 2.$$

Uvrštenje u jednadžbu tangente daje:

$$(0{,}5 + 0{,}52\cdot 0{,}87)x - (0{,}87 - 0{,}52\cdot 0{,}5)y - 2\cdot 0{,}27 = 0$$

ili

$$\underline{0{,}95\,x - 0{,}61\,y - 0{,}54 = 0}$$

a u eksplicitnom obliku:

$$y = \frac{0{,}95}{0{,}61}x - \frac{0{,}54}{0{,}61}$$

ili

$$\underline{y = 1{,}56\,x - 0{,}89}$$

(vidi sl. 9).

Izračunajmo za vježbu i kut β za tu točku $T_1\left(\varphi_1 = \frac{\pi}{6}\right)$

Prema (23):

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a\varphi}{a} = \varphi, \text{ a za točku } T_1\left(\varphi_1 = \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \varphi_1 = \frac{\pi}{6} \doteq 0{,}52.$$

Odatle:

$$\underline{\beta_1 \doteq 27{,}5^\circ = 27^\circ 30'}$$

(vidi sl. 9).

Izračunaj za vježbu jednadžbu iste tangente po formuli (24).

2. Napiši jednadžbu tangente na hiperbolnu spiralu $r = \frac{a}{\varphi}$ u točki $T_1(\varphi = \varphi_1)$.

Uzevši da je konstanta a jednaka na pr. 10, izračunajmo nekoliko točaka spirale i narišimo je (vidi sl. 10).

φ	$r = \frac{10}{\varphi}$
0	$\frac{10}{0}$ nema smisla, ali $\lim\limits_{\varphi \to 0} \frac{10}{\varphi} = \infty$
45°	$\frac{10}{\frac{\pi}{4}} = \frac{40}{3{,}14} = 12{,}73$
90°	$\frac{10}{\frac{\pi}{2}} = \frac{20}{3{,}14} = 6{,}36$
180°	$\frac{10}{\pi} = \frac{10}{3{,}14} = 3{,}18$
270°	$\frac{10}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{20}{9{,}24} = 2{,}12$
360°	$\frac{10}{2\pi} = \frac{5}{3{,}14} = 1{,}59$

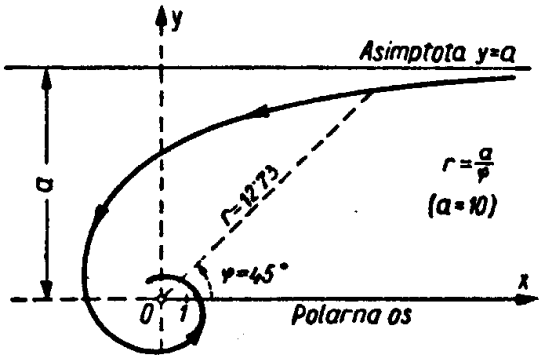
Iz naših računa, iz slike 10, a također iz $\lim\limits_{\varphi \to \infty} \frac{a}{\varphi} = 0$ vidimo, da hiperbolna spirala teži polu 0, kad φ teži u beskonačnost. Kaže se, da je pol 0 asimptotička točka hiperbolne spirale.

Odredimo sada, čemu teži ordinata y hiperbolne spirale, kad φ teži nuli.

$$r = \frac{a}{\varphi} \,/ \cdot \sin\varphi$$

$$r \sin\varphi = a \frac{\sin\varphi}{\varphi}$$

Uzevši u obzir, da je $r \cdot \sin\varphi = y$, prijeđimo na limes pustivši, da $\varphi \to 0$:



Sl. 10.

$$\lim_{\varphi \to 0} y = a \cdot \lim_{\varphi \to 0} \frac{\sin\varphi}{\varphi} = a \cdot 1 = a \qquad \text{(vidi Dio I. § 7).}$$

Vidimo da ordinata y teži k a, kad φ teži k nuli (vidi sl. 10), tj. $y = a$ je asimptota hiperbolne spirale, dok u polarnim koordinatama njena jednadžba glasi: $r = \frac{a}{\sin\varphi}$ (vidi dio I. drugo izdanje, § 9).

Primjećujemo još, da razlomljena racionalna funkcija $r = \frac{a}{\varphi}$ predočuje u polarnim koordinatama hiperbolnu spiralu, a u pravokutnim $y = \frac{a}{x}$ — istostranu hiperbolu. Odatle potječe naziv spirale — hiperbolna.

Prelazimo na računanje jednadžbe tangente na hiperbolnu spiralu $r = \frac{a}{\varphi}$ u točki T_1 amplitude φ_1.

Računamo prema (21):

$$r = \frac{a}{\varphi} \quad ; \quad r_1 = \frac{a}{\varphi_1}$$

$$r' = -\frac{a}{\varphi^2} \quad ; \quad r_1' = -\frac{a}{\varphi_1^2}$$

Uvrštenje u (21) daje:

$$y - \frac{a}{\varphi_1}\sin\varphi_1 = \frac{\frac{a}{\varphi_1} - \frac{a}{\varphi_1^2}\operatorname{tg}\varphi_1}{-\frac{a}{\varphi_1^2} - \frac{a}{\varphi_1}\operatorname{tg}\varphi_1}\left(x - \frac{a}{\varphi_1}\cos\varphi_1\right)$$

ili

$$y - \frac{a\sin\varphi_1}{\varphi_1} = -\frac{1 - \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\varphi_1}}{\frac{1}{\varphi_1} + \operatorname{tg}\varphi_1}\left(x - \frac{a\cos\varphi_1}{\varphi_1}\right)$$

ili

$$y - \frac{a\sin\varphi_1}{\varphi_1} = -\frac{\varphi_1\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1}{\cos\varphi_1 + \varphi_1\sin\varphi_1}\left(x - \frac{a\cos\varphi_1}{\varphi_1}\right)$$

ili

$$y(\cos\varphi_1 + \varphi_1\sin\varphi_1) - \frac{a\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\varphi_1} - a\sin^2\varphi_1 + (\varphi_1\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1)x -$$

$$- a\cos^2\varphi_1 + \frac{a\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\varphi_1} = 0$$

i konačno

$$\underline{(\varphi_1\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1)x + (\cos\varphi_1 + \varphi_1\sin\varphi_1)y - a = 0}$$

tražena jednadžba tangente na hiperbolnu spiralu $r = \frac{a}{\varphi}$ u točki $T_1(\varphi_1)$.

3. Napiši jednadžbu tangente na logaritamsku spiralu $r = e^{a\varphi}$ u točki $T_1(\varphi = \varphi_1)$.

Konstruirajmo spiralu uz $a = 1$.

φ	$r = e^{\varphi}$
0	$e^0 = 1$
$1 = \text{arc}\ \rho = \text{arc}\ 57{,}3^0$	$e^1 = e \doteq 2{,}72$
$2 = \text{arc}\ 2\rho = \text{arc}\ 114{,}6^0$	$e^2 \doteq 7{,}39$
$3 = \text{arc}\ 3\rho = \text{arc}\ 171{,}9^0$	$e^3 \doteq 20{,}09$
. . . . .	. . . . .
$-1 = \text{arc}\ (-\rho)$	$e^{-1} = \frac{1}{e} \doteq 0{,}37$
$-2 = \text{arc}\ (-2\rho)$	$e^{-2} = \frac{1}{e^2} \doteq 0{,}14$
$-3 = \text{arc}\ (-3\rho)$	$e^{-3} = \frac{1}{e^3} \doteq 0{,}05$
. . . . .	. . . . .

Osim toga vidimo: ako φ prima redom vrijednosti $0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$, r prima vrijednosti $1, e^{2\pi}, e^{4\pi}, e^{6\pi}, \ldots$, a to je geometrijska progresija kvocijenta $q = \frac{e^{2\pi}}{1} = \frac{e^{4\pi}}{e^{2\pi}} = \ldots = e^{2\pi}$, t. j. radijvektori logaritamske spirale $r = e^{a\varphi}$, koji pripadaju istoj polnoj poluzraci, članovi su geometrijske progresije kvocijenta $q = e^{2a\pi}$ (vidi sl. 11).

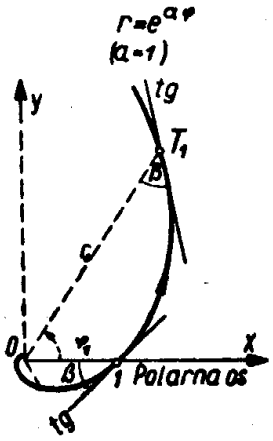
Da pokažemo još jedno svojstvo logaritamske spirale, izračunajmo prema (23)

$$\text{tg}\ \beta = \frac{r}{r'} = \frac{e^{a\varphi}}{e^{a\varphi} \cdot a} = \frac{1}{a} = \text{konstanta},$$

$$\beta = \text{arc tg}\ \frac{1}{a} = \text{konstanta}$$

t. j. tangenta na logaritamsku spiralu zatvara s radijvektorom u svim točkama spirale stalan kut β ili, drugim riječima: sve polne poluzrake sijeku logaritamsku spiralu pod istim kutom β.

Odredivši za zadanu logaritamsku spiralu taj stalni kut β, možemo za uzete po volji kutove φ izračunati pripadne r, pa prema navedenom svojstvu logaritamske spirale konstruirati tangente u tim točkama spirale, a i samu spiralu.



Sl. 11.

Prelazimo na račun tangente prema (21):

$$r = e^{a\varphi} \quad ; \quad r_1 = e^{a\varphi_1}$$

$$r' = a\,e^{a\varphi} \quad ; \quad r_1' = a\,e^{a\varphi_1}$$

Uvrštenje u (21) daje:

$$y - e^{a\varphi_1} \cdot \sin\varphi_1 = \frac{e^{a\varphi_1} + a\,e^{a\varphi_1}\,\text{tg}\,\varphi_1}{a\,e^{a\varphi_1} - e^{a\varphi_1}\,\text{tg}\,\varphi_1}(x - e^{a\varphi_1}\cos\varphi_1)$$

ili

$$y - e^{a\varphi_1} \cdot \sin \varphi_1 = \frac{1 + a \operatorname{tg} \varphi_1}{a - \operatorname{tg} \varphi_1} (x - e^{a\varphi_1} \cos \varphi_1)$$

ili

$$y - e^{a\varphi_1} \cdot \sin \varphi_1 = \frac{\cos \varphi_1 + a \sin \varphi_1}{a \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1} (x - e^{a\varphi_1} \cos \varphi_1)$$

ili

$$y(a \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1) - a\, e^{a\varphi_1} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + e^{a\varphi_1} \sin^2 \varphi_1 - (\cos \varphi_1 + a \sin \varphi_1)x + \\ + e^{a\varphi_1} \cdot \cos^2 \varphi_1 + a\, e^{a\varphi_1} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 = 0$$

ili konačno:

$$\underline{(\cos \varphi_1 + a \sin \varphi_1)x + (\sin \varphi_1 - a \cos \varphi_1)y - e^{a\varphi_1} = 0}$$

Jednadžba tražene tangente na logaritamsku spiralu $r = e^{a\varphi}$ u točki $T_1(\varphi_1)$.

Izračunajmo još kut β za spiralu $r = e^{\varphi}$.

Prema (23):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{r'} = \frac{e^{\varphi}}{e^{\varphi}} = 1$$

Odatle:

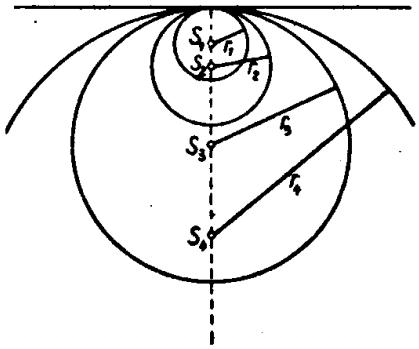
$$\underline{\beta = 45^\circ}$$

Sve tangente na spiralu $r = e^{\varphi}$ zatvaraju s radijvektorima povučenim u dirališta kut $\beta = 45^\circ$ (vidi sl. 11).

§ 4. Zakrivljenost krivulja

1. Zakrivljenost kružnice

Iz slike 12 vidimo, da je zakrivljenost kružnice stalna u svim točkama iste kružnice i da je zakrivljenost to veća, što je polumjer kružnice r manji. Drugim riječima: zakrivljenost k kružnice obratno je razmjerna njenom polumjeru r, t. j.



Sl. 12.

$$k = \frac{1}{r} = \text{konstanta} \qquad (25)$$

zakrivljenost kružnice polumjera r.

Pravac možemo smatrati kružnicom polumjera $r = \infty$, pa je zakrivljenost pravca $k = 0$.

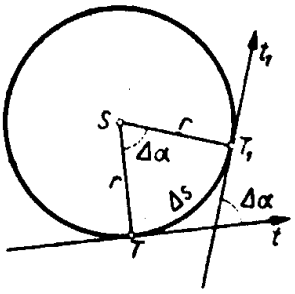
Zakrivljenost možemo također mjeriti kutom zaokreta tangente. Od točke T, u kojoj kružnica ima tangentu t, prijeđimo na neku susjednu točk u T_1 kružnice s tangentom t_1. Kako se vidi iz slike 13, tangenta se kod toga zaokrenula za kut $\Delta\alpha$, koji je jednak središnjem kutu TST_1. Označivši duljinu luka TT_1 s Δs, imamo:

$$\Delta s = r \cdot \Delta\alpha \;/\; : \Delta\alpha \qquad \text{(vidi Dio I. § 4)}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta\alpha} = r$$

ili recipročno:

$$\frac{1}{r} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$



Sl. 13.

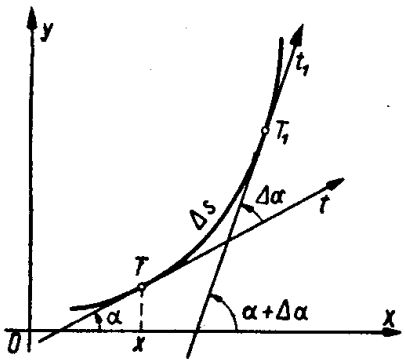
Kako je $\frac{1}{r} = k$, dobili smo nov izraz za zakrivljenost kružnice:

$$k = \frac{1}{r} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\text{kut zaokreta tangente}}{\text{pripadna duljina luka}} = \text{konstanta} \qquad (25a)$$

2. Zakrivljenost krivulje zadane u pravokutnim koordinatama

a) Jednadžba krivulje zadana je u eksplicitnom obliku $y = y(x)$

Za sve krivulje osim kružnice zakrivljenost nije stalna, već se mijenja od točke do točke, ona je, dakle, funkcija od x. Prema tome odredimo zakrivljenosti zadane krivulje $y = y(x)$ u jednoj zadanoj točki T apscise x.



Sl. 14.

Postupajmo kao kod kružnice, t. j. odredimo prema (25a) kut zaokreta tangente i pripadni luk.

Prema slici 14 imamo: $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$, ali to nije više zakrivljenost zadane krivulje u točki T apscise x, već samo srednja zakrivljenost luka TT_1 krivulje, jer vrijednost tog kvocijenta ovisi ne samo o zadanoj točki T, već i o po volji uzetoj točki T_1.

Da dobijemo pravu zakrivljenost krivulje $y = y(x)$ u točki T apscise x, koju ćemo slično kao kod kružnice označivati s $\frac{1}{\rho}$, pamteći, da ρ nije konstanta već je funkcija od x, pustimo da točka T_1 idući po krivulji teži prema točki T, t. j. pustimo da Δs teži nuli, i odredimo graničnu vrijednost kvocijenta $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$.

Tada je

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} \qquad \text{(a)}$$

tražena zakrivljenost krivulje $y(x)$ u točki T apscise x.

Odredimo sada $d\alpha$ i ds.

Prema slici 14 α je kut, što ga tangenta t u točki T krivulje zatvara s + osi X, dakle je:

$$y'(x) = \operatorname{tg} \alpha$$

odatle

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} y'(x)$$

Diferenciramo:

$$d\alpha = \frac{1}{1 + y'^2(x)} \cdot d[y'(x)] = \frac{1}{1 + y'^2(x)} \cdot y''(x) \cdot dx = \frac{y''(x)}{1 + y'^2(x)} dx \qquad \text{(b)}$$

Za kvadrat diferencijala luka imali smo već formulu (3):

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Odatle:

$$ds^2 = dx^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)$$

ili

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx^2$$

a kako je $\frac{dy}{dx} = y'(x)$, dobijemo konačno

$$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)} \cdot dx \qquad \text{(c)}$$

Uvrštenje (b) i (c) u (a) daje:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''(x)dx}{[1 + y'^2(x)]\sqrt{1 + y'^2(x)} \cdot dx}$$

ili

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''(x)}{[1 + y'^2(x)]^{3/2}} \qquad (26)$$

To je zakrivljenost krivulje $y(x)$ u točki T apscise x.

Uzmemo li ispred drugog korijena predznak +, predznak zakrivljenosti $\frac{1}{\rho}$ ovisit će prema (26) jedino o predznaku y''. Prema tome krivulja ima u nekoj svojoj točki T pozitivnu zakrivljenost, ako je u toj točki konkavna (kao na sl. 14), odnosno negativnu zakrivljenost, ako je u toj točki konveksna (vidi Dio I. § 15, 3).

Primijetimo još, da u točkama infleksije krivulja nije zakrivljena, jer je u tim točkama $y'' = 0$, pa je prema (26) zakrivljenost $\frac{1}{\rho} = 0$.

Uzmemo li recipročnu vrijednost formule (26), dobijemo:

$$\rho = \frac{[1 + y'^2(x)]^{3/2}}{y''(x)} \tag{27}$$

To je polumjer zakrivljenosti krivulje $y = y(x)$ u točki T apscise x, koji ima naravno isti predznak kao i zakrivljenost $\frac{1}{\rho}$, ali se obično uzima po svojoj apsolutnoj vrijednosti.

Ako je $y'(x)$ tako mala veličina, da je možemo zanemariti, formula (26) prima jednostavan oblik:

$$\frac{1}{\rho} \doteq y''(x)$$

t. j. zakrivljenost krivulje u nekoj njenoj točki približno je jednaka vrijednosti njezine druge derivacije u toj točki, ako joj tangenta zatvara malen kut s osi X.

Na pr. progib opterećene grede praktički je uvijek toliko malen (ne smije prekoračiti $^1/_{50}$ duljine grede), da tangente na elastičnu liniju, t. j. na savinutu os nosača (spojnicu težišta poprečnih presjeka grede), zatvaraju sa spojnicom ležaja grede vrlo malene kutove Θ, pa je $y'(x) = \operatorname{tg}\Theta \doteq 0$, a zakrivljenost $\frac{1}{\rho} \doteq y''$. Ta formula se uvijek upotrebljava u čvrstoći za određivanje jednadžbe elastične linije nosača.

Iz teorije savijanja poznato je, da je zakrivljenost grede u nekoj njenoj točki

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

gdje je M moment savijanja grede, a EI njena krutost.

Uvrštenje $\frac{1}{\rho} = y''$ daje:

$$y'' = \frac{M}{EI}$$

ili

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \tag{28}$$

To je diferencijalna jednadžba elastične linije nosača. (Primjer za elastičnu liniju vidi dalje § 10, 3).

Primjeri

1. Odredi zakrivljenost i polumjer zakrivljenosti lančanice $y = \operatorname{ch} x$ u nekoj točki T po volji apscise x.

Računamo prema (26):

$$y = \operatorname{ch} x$$
$$y' = \operatorname{sh} x$$
$$y'' = \operatorname{ch} x$$

Uvrštenje u (26) daje:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{(1 + \operatorname{sh}^2 x)^3}}$$

a kako je $\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{ch} x$ [vidi Dio I. formula (62)], imamo:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^3 x}$$

ili

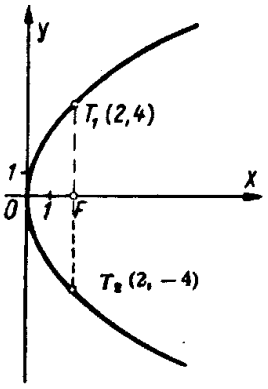
$$\underline{\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}$$ zakrivljenost lančanice u nekoj točki T apscise x.

Odatle je:

$$\underline{\rho = \operatorname{ch}^2 x}$$ polumjer zakrivljenosti u toj točki T.

2. Odredi zakrivljenost i polumjer zakrivljenosti parabole $y^2 = 8x$ u vrhu i u gornjoj krajnjoj točki parametra $2p = 8$, t. j. u točkama $0(0,0)$ i $T_1(2, 4)$ (vidi sl. 15).

Računamo prema (26):



Sl. 15.

$$y^2 = 8x$$

$$y = \sqrt{8x}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{8x}} \cdot 8 = \frac{8}{4\sqrt{2x}} = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}} \Big/ \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$y' = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

$$y'' = -\frac{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}$$

Uvrštenje vrijednosti dobivenih za y' i y'' u (26) daje:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^3}} = -\frac{\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}\sqrt{\left(\frac{x+2}{x}\right)^3}} = -\frac{\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}\,\frac{\sqrt{(x+2)^3}}{x\sqrt{x}}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{(x+2)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{2(x+2)^3}}$$

Dakle:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{\sqrt{2(x+2)^3}}$$

To je zakrivljenost zadane parabole u bilo kojoj točki T apscise x.

U vrhu 0, t. j. za $x_0 = 0$ dobijemo:

$$\underline{\frac{1}{\rho_0} = -\frac{1}{\sqrt{2\cdot 8}} = -\frac{1}{4}}\ ; \qquad \underline{\rho_0 = 4 = p = \text{poluparametar parabole,}}$$

a u točki T_1 apscise $x_1 = 2$, zakrivljenost ima vrijednost:

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{1}{\sqrt{2(2+2)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{2\cdot 64}} = -\frac{1}{8\sqrt{2}} = -\frac{1}{11{,}31} = \underline{-0{,}0884}$$

Dobili smo za zakrivljenost $\frac{1}{\rho_1}$ negativnu vrijednost, jer je zadana parabola u točki T_1 konveksna. Da smo tražili zakrivljenost u donjoj točki T_2 (2, —4) parabole, morali bismo ispred drugog korijena uzeti predznak minus, da dobijemo za $\frac{1}{\rho_2}$ pozitivnu vrijednost, jer je parabola u točki T_2 konkavna (vidi sl. 15).

Polumjer zakrivljenosti ρ_1 u točki T_1:

$$\underline{\rho_1 = 8\sqrt{2} = 11{,}31} \quad \text{(vidi dalje sl. 18).}$$

b) Jednadžba krivulje je zadana u parametarskom obliku

$$\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \quad \Bigg| \quad t_1 \leqq t \leqq t_2$$

Prema (26)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''(x)}{[1 + y'^2(x)]^{3/2}}$$

računamo:

Kako je prema (17)

$$f'(x) = y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

imamo:

$$1 + y'^2(x) = 1 + \frac{y'^2(t)}{x'^2(t)} = \frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'^2(t)}$$

Odatle

$$[1 + y'^2(x)]^{3/2} = \frac{[x'^2(t) + y'^2(t)]^{3/2}}{x'^3(t)}$$

ili ako uvedemo Newtonovu oznaku:

$$x'(t) = \dot{x}; \quad y'(t) = \dot{y}$$

dobijemo:

$$[1 + y'^2(x)]^{3/2} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}^3} \qquad \text{(a)}$$

Sada računamo brojnik formule (26) za $\frac{1}{\rho}$:

$$y''(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2} = \text{prema (11a)} = \frac{d}{dx}[y'(x)] = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{1}{dx} d\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) =$$

$$= \text{prema (9)} = \frac{1}{dx} \cdot \frac{x'(t) \cdot d[y'(t)] - y'(t) \cdot d[x'(t)]}{x'^2(t)} =$$

$$= \text{uzevši u obzir, da je } dx = x'(t) \cdot dt = \frac{x'(t) \cdot y''(t)dt - y'(t) \cdot x''(t)dt}{x'^2(t)dt}$$

ili konačno, ako skratimo s dt:

$$y''(x) = \frac{x'(t) \cdot y''(t) - y'(t) \cdot x''(t)}{x'^3(t)} \tag{29}$$

a uz Newtonovu oznaku: $x''(t) = \ddot{x}$ i $y''(t) = \ddot{y}$ i t. d.

$$y''(x) = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \dot{y} \cdot \ddot{x}}{\dot{x}^3} \tag{29a}$$

Uvrštenje (29a) i (a) u (26) daje:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \dot{y} \cdot \ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \tag{30}$$

To je zakrivljenost krivulje, kojoj je jednadžba zadana u parametarskom obliku $\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}$ u nekoj točki parametra t.

Recipročna vrijednost formule (30) daje pripadni polumjer zakrivljenosti:

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \tag{31}$$

Primjeri

1. Odredi zakrivljenost i polumjer zakrivljenosti krivulje $\left.\begin{matrix} x = t \\ y = t^3 \end{matrix}\right|$ u nekoj točki T parametra t.

Računamo prem (30):

$$\dot{x} = 1, \qquad \ddot{x} = 0$$
$$\dot{y} = 3t^2 \qquad \ddot{y} = 6t$$

Uvrštenje u (30) daje:

$$\underline{\frac{1}{\rho} = \frac{6t}{(1 + 9t^4)^{3/2}}}.$$

a odatle je:

$$\underline{\rho = \frac{(1 + 9t^4)^{3/2}}{6t}}$$

Na pr. u točki T_1 parametra $t_1 = 3$, t. j. u točki T_1 $(x_1 = 3, y_1 = 3^3 = 27)$ zakrivljenost

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{6 \cdot 3}{(1 + 9 \cdot 3^4)^{3/2}} = \frac{18}{730^{3/2}} = \frac{18}{19700} = \underline{0{,}000914}$$

a polumjer zakrivljenosti:

$$\rho_1 = \frac{19700}{18} = \underline{1094}$$

Računaj pomoću logaritamskog računala!

Nariši zadanu krivulju iz $\left.\begin{matrix} x = t \\ y = t^3 \end{matrix}\right|$ dajući t vrijednosti po volji. Dobit ćeš kubnu parabolu, jer uvrštenje $t = x$ u $y = t^3$ daje $y = x^3$ (vidi Dio I. sl. 31).

2. Odredi polumjere zakrivljenosti elipse $\begin{matrix} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{matrix} \Big| \; 0 \leqq t < 2\pi$ u njenim vrhovima, t. j. u točkama $A\ (t = 0)$, $B\ (t = \pi)$, $C\left(t = \frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(t = \frac{3\pi}{2}\right)$ (vidi sl. 16 i Dio I § 5, 2). Računamo prema (31):

$$x = a\cos t;\ \dot{x} = -a\sin t;\ \ddot{x} = -a\cos t$$

$$y = b\sin t;\ \dot{y} = b\cos t;\ \ddot{y} = -b\sin t$$

Uvrštenje u (31) daje:

$$\rho = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{+\,a\sin t \cdot b\sin t + b\cos t \cdot a\cos t} =$$

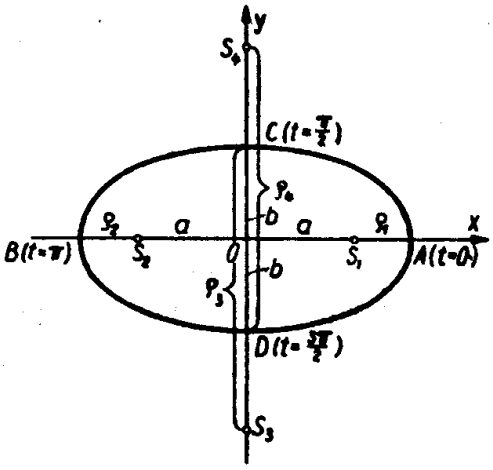
$$= \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t} = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab(\sin^2 t + \cos^2 t)}$$

ili

$$\rho = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}$$

ρ u vrhu $A\ (t = 0)$: $\sin^2 0 = 0$, $\cos^2 0 = 1$

$$\underline{\rho_1 = \frac{b^3}{ab} = \frac{b^2}{a}}$$



Sl. 16.

ρ u vrhu $B(t = \pi)$: $\sin^2\pi = 0$, $\cos^2\pi = (-1)^2 = 1$

$$\underline{\rho_2 = \frac{b^3}{ab} = \frac{b^2}{a}}$$

ρ u vrhu $C\left(t = \frac{\pi}{2}\right)$; $\sin^2\frac{\pi}{2} = 1$; $\cos^2\frac{\pi}{2} = 0$

$$\underline{\rho_3 = \frac{a^3}{ab} = \frac{a^2}{b}}$$

ρ u vrhu $D\left(t = \frac{3\pi}{2}\right)$; $\sin^2\frac{3\pi}{2} = (-1)^2 = 1$; $\cos^2\frac{3\pi}{2} = 0$

$$\underline{\rho_0 = \frac{a^3}{ab} = \frac{a^2}{b}}$$

(vidi sl. 16).

Dobili smo poznate nam formule za polumjere zakrivljenosti u vrhovima elipse (vidi Repetitorij elementarne matematike, IV, § 9).

3. Zakrivljenost krivulje zadane u polarnim koordinatama $r = r(\varphi)$

Da odredimo formule za zakrivljenost $\frac{1}{\rho}$ i polumjer zakrivljenosti ρ krivulje, kojoj je jednadžba zadana u polarnim koordinatama $r = r(\varphi)$, uvrstimo u formulu (30) $t = \varphi$, jer je t kao i φ nezavisna promjenljiva, o kojoj ovise x i y, pri čemu prikažemo derivaciju u obliku diferencijalnog kvocijenta, t. j. mjesto $x'(t)$ pišemo $x'(\varphi) = \frac{dx}{d\varphi}$, mjesto $y''(t)$ pišemo $y''(\varphi) = \frac{d^2y}{d\varphi^2}$ = i t. d.

U tom slučaju formula (30) prima oblik:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{dx}{d\varphi} \cdot \frac{d^2y}{d\varphi^2} - \frac{dy}{d\varphi} \cdot \frac{d^2x}{d\varphi^2}}{\left[\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{32}$$

Sada računamo sve derivacije u (32) prema poznatim formulama prijelaza od polarnih koordinata na pravokutne:

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi$$

pri čemu pamtimo, da r nije konstanta, već je funkcija od φ, t. j. $r = r(\varphi)$, pa derivacije računamo po pravilu produkta:

$$x = r \cos \varphi$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = -r \sin \varphi + \cos \varphi \cdot \frac{dr}{d\varphi} \tag{a}$$

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = -r \cos \varphi - \sin \varphi \cdot \frac{dr}{d\varphi} + \cos \varphi \cdot \frac{d^2r}{d\varphi^2} - \frac{dr}{d\varphi} \cdot \sin \varphi$$

ili

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = -r \cos \varphi - 2 \sin \varphi \cdot \frac{dr}{d\varphi} + \cos \varphi \cdot \frac{d^2r}{d\varphi^2} \tag{b}$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = r \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \frac{dr}{d\varphi} \tag{c}$$

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} = -r \sin \varphi + \cos \varphi \cdot \frac{dr}{d\varphi} + \sin \varphi \cdot \frac{d^2r}{d\varphi^2} + \frac{dr}{d\varphi} \cdot \cos \varphi$$

ili

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} = -r \sin \varphi + 2\cos \varphi \cdot \frac{dr}{d\varphi} + \sin \varphi \cdot \frac{d^2r}{d\varphi^2} \tag{d}$$

Uvrstivši (a), (b), (c) i (d) u (32) i uredivši dobijemo:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r^2(\varphi) + 2r'^2(\varphi) - r(\varphi) \cdot r''(\varphi)}{[r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)]^{3/2}} \tag{33}$$

zakrivljenost krivulje $r = r(\varphi)$ u nekoj točki amplitude φ.

Odatle je:

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - r \cdot r''} \tag{33a}$$

pripadni polumjer zakrivljenosti.

Primjeri

Odredi zakrivljenost i polumjer zakrivljenosti u nekoj točki amplitude φ:

1. Arhimedove spirale $r = a\,\varphi$ (vidi sl. 9).

Računamo prema (33):

$$r = a\,\varphi; \quad r' = a; \quad r'' = 0$$

Uvrštenje u (33) daje:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{a^2\varphi^2 + 2a^2}{(a^2\varphi^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{a^2(\varphi^2 + 2)}{(\sqrt{a^2(\varphi^2 + 1)})^3} = \frac{a^2(\varphi^2 + 2)}{a^3(\varphi^2 + 1)^{3/2}}$$

ili

$$\underline{\frac{1}{\rho} = \frac{\varphi^2 + 2}{a(\varphi^2 + 1)^{3/2}}}$$

Odatle:

$$\underline{\rho = \frac{a(\varphi^2 + 1)^{3/2}}{\varphi^2 + 2}}$$

Na pr. za $\varphi = 0$ $\underline{\rho = \frac{a}{2}}$.

2. Logaritamske spirale $r = e^{a\varphi}$ (vidi sl. 11).
Na isti način:

$$r = e^{a\varphi}; \quad r' = e^{a\varphi} \cdot a = ar, \quad \text{jer je} \quad e^{a\varphi} = r$$

$$r'' = a \cdot r' = a \cdot ar = a^2 r$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r^2 + 2a^2r^2 - r \cdot a^2 r}{(r^2 + a^2r^2)^{3/2}} = \frac{r^2(1 + a^2)}{r^3(1 + a^2)^{3/2}}$$

ili

$$\underline{\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r\sqrt{1 + a^2}}}$$

Odatle

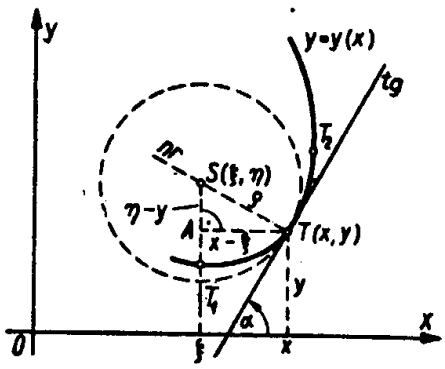
$$\underline{\rho = r\sqrt{1 + a^2}}$$

Na pr. za $\varphi = 0$ $r = e^{a \cdot 0} = e^0 = 1$

$$\underline{\rho = \sqrt{1 + a^2}}$$

4. Središte i kružnica zakrivljenosti

Povučemo li u točki $T(x, y)$ zadane krivulje $y = y(x)$ normalu na tu krivulju u smjeru njene konkave (vidi sl. 17) pa nanesemo li na tu normalu polumjer zakrivljenosti ρ, izračunat za tu točku prema formuli (27), dobit ćemo na toj normali točku S, koja se zove **središte zakrivljenosti krivulje u točki** T. Središte zakrivljenosti S za točku T krivulje definira se kao granični položaj sjecišta normale na krivulju u točki T s normalom u jednoj susjednoj točki T_1 krivulje, kad točka T_1 idući po krivulji teži točki T kao limesu.



Sl. 17.

Ako oko točke S kao središta opišemo kružnicu polumjera ρ, dobit ćemo **kružnicu zakrivljenosti** za točku $T(x, y)$ zadane krivulje. Ta kružnica zakrivljenosti identična je s **kružnicom oskulacije**. Kružnicom oskulacije u točki T krivulje zovemo granični položaj kružnice, koja prolazi točkom T i još dvjema susjednim točkama T_1 i T_2 krivulje, kad točke T_1 i T_2 teže točki T kao limesu (vidi sl. 17).

Kako kružnica oskulacije, a dakle i kružnica zakrivljenosti ima u točki T sa zadanom krivuljom, kako se kaže, tri beskonačno bliske zajedničke točke (dvije krivulje imaju u zajedničkom dirališta samo dvije takve točke), kružnica zakrivljenosti priljubljuje se uz zadanu krivulju pa je redovito dira i siječe, te je vrlo dobro aproksimira u okolišu točke T.

Prema slici 17 lako možemo izračunati za točku T krivulje $y = y(x)$ obje koordinate ξ i η središta S kružnice zakrivljenosti, odnosno oskulacije.

Iz pravokutnog ΔSAT slijedi ($\sphericalangle AST = \alpha$ kao kutovi s okomičnim kracima):

$$x - \xi = \rho \cdot \sin\alpha$$
$$\eta - y = \rho \cdot \cos\alpha$$

a odatle je:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - \rho \sin\alpha \\ \eta &= y + \rho \cos\alpha \end{aligned}\right| \qquad \text{(a)}$$

Izrazimo sada $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ pomoću $\operatorname{tg}\alpha = y'(x)$. Prema poznatim goniometrijskim formulama (vidi Repetitorij elementarne matematike) imamo:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{y'^2 + 1}{y'^2}$$

i

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + y'^2$$

a odatle:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} \\ \cos\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{(1 + y'^2)^{1/2}} \end{aligned}\right| \qquad \text{(b)}$$

Uvrštenje (b) u (a) daje:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - \rho \frac{y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} \\ \eta &= y + \rho \frac{1}{(1 + y'^2)^{1/2}} \end{aligned}\right| \qquad (34)$$

ili, ako još uzmemo u obzir, da je prema (27) $\rho = \dfrac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$ dobijemo:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} \\ \eta &= y(x) + \frac{1 + y'^2}{y''} \end{aligned}\right| \qquad (34a)$$

To su koordinate središta S kružnice zakrivljenosti za točku T apscise x krivulje $y = y(x)$.

Primjeri

1. Izračunaj koordinate središta zakrivljenosti S_0 i S_1 za vrh $O(0,0)$ i točku $T_1(2,4)$ parabole $y^2 = 8x$ i nariši obje kružnice zakrivljenosti (vidi sl. 15).

U primjeru 2. točke 2, a) ovog paragrafa već smo izračunali za tu parabolu prvu i drugu derivaciju te smo dobili:

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

$$y'' = -\frac{\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}$$

Uvrštenje u formule (34a) daje:

$$\xi = x + \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}} = x + 2x\left(1 + \frac{2}{x}\right) = 3x + 4$$

$$\eta = y - \frac{1 + \frac{2}{x}}{\frac{\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}} = y - \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right)2x\sqrt{x}}{\sqrt{2}} = y - \frac{(x+2)\,2x\sqrt{x}}{x\sqrt{2}} = y - (x+2)\sqrt{2x}$$

a kako iz $y^2 = 8x$ slijedi, da je $y = \sqrt{8x} = 2\sqrt{2x}$, imamo:

$$\eta = 2\sqrt{2x} - (x+2)\sqrt{2x} = \sqrt{2x}\,(2 - x - 2) = -x\sqrt{2x} = -\sqrt{2x^3}$$

Imamo dakle:

$$\xi = 3x + 4$$

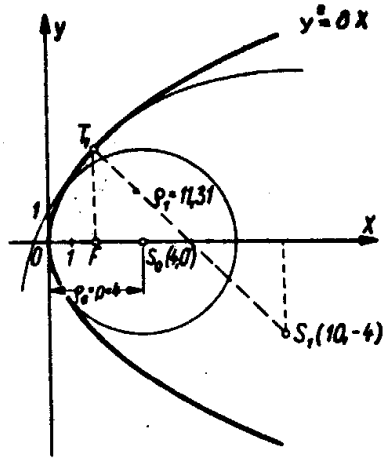
$$\eta = -\sqrt{2x^3}$$

Za vrh O $(x = 0)$ dobijemo:

$$\xi_0 = 4 = p \quad \Big| \quad \underline{S_0(4,0)}$$
$$\eta_0 = 0$$

a za točku $T_1\,(x_1 = 2)$:

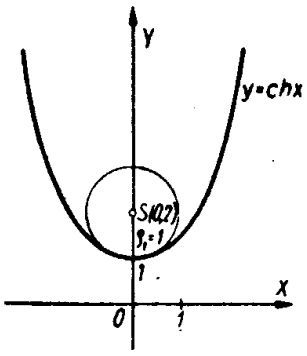
$$\xi_1 = 6 + 4 = 10 \quad \Big| \quad \underline{S_1(10, -4)}$$
$$\eta_1 = -\sqrt{2 \cdot 8} = -4$$



Sl. 18.

Na sl. 18 prikazane su obje kružnice zakrivljenosti. Vidimo, da u vrhu krivulje kružnica zakrivljenosti samo dira krivulju.

2. Isto za lančanicu $y = \operatorname{ch} x$ u točki $T_1(x_1 = 0)$.



Sl. 19.

Prema (34) računamo:

$$y = \operatorname{ch} x; \quad y' = \operatorname{sh} x; \quad y'' = \operatorname{ch} x,$$

a za $x_1 = 0$: $y_1 = 1$; $y_1' = 0$; $y_1'' = 1$

Uvrštenje u (27) i (34) daje:

$$\rho_1 = \frac{(1+0)^{3/2}}{1} = 1$$

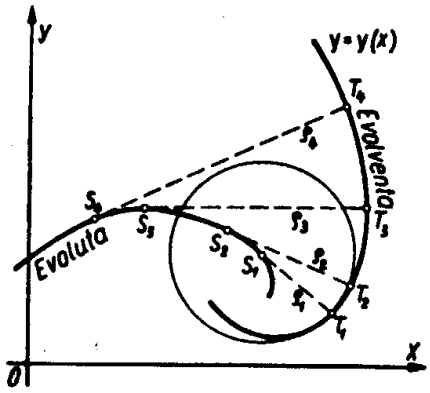
i

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= 0 - 1\frac{0}{(1+0)^{1/2}} = 0 \\ \eta_1 &= 1 + 1 \cdot \frac{1}{1} = 2 \end{aligned}\right| \quad \underline{S(0, 2)}$$

Vidi sl. 19.

5. Evoluta i evolventa

Ako se točka T skliže po krivulji $y = y(x)$ zauzimajući redom položaje T_1, T_2, T_3 i t. d. (vidi sl. 20), tada možemo zamisliti, da se zajedno s njome kotrlja po krivulji i pripadna kružnica zakrivljenosti, pri čemu se uvijek mijenja polumjer zakrivljenosti ρ primajući redom vrijednosti ρ_1, ρ_2, ρ_3, i t. d., a također i položaj središta zakrivljenosti S — S_1, S_2, S_3 i t. d. Središta zakrivljenosti S opisuju na taj način krivulju, koja se zove evoluta, a zadana krivulja $y = y(x)$ obzirom na evolutu zove se evolventa.



Sl. 20.

Prema tome može se ukratko kazati: evoluta je geometrijsko mjesto središta zakrivljenosti zadane krivulje (evolvente).

Kako evolutu tvore središta zakrivljenosti niza uzastopnih kružnica zakrivljenosti zadane krivulje $y = y(x)$, formule (34a) za koordinate središta zakrivljenosti daju istodobno parametarsku jednadžbu evolute za krivulju $y = y(x)$, pri čemu je x parametar:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - \frac{y'(x)[1 + y'^2(x)]}{y''(x)} \\ \eta &= y(x) + \frac{1 + y'^2(x)}{y''(x)} \end{aligned}\right| \qquad (35)$$

Ako nam uspije ukloniti iz tih jednadžbi parametar x, dobit ćemo jednadžbu evolute u eksplicitnom $\eta = f(\xi)$ ili implicitnom $F(\xi, \eta) = 0$ obliku.

Postanak evolvente možemo predočiti tako, da zamislimo nit namotanu na evoluti. Ako tu nategnutu nit odmotavamo ili dalje namotavamo, opisivat će krajnja točka niti, gdje je držimo, krivulju, koja je evolventa za zadanu krivulju — evolutu. Odatle potječe naziv »evolventa«, t. j. krivulja, koja se odmotava (vidi sl. 20 i 21).

Kako nit, koju odmotavamo, odnosno namotavamo, može biti po volji duga, zadanoj evoluti odgovara bezbroj evolvenata, dok iz formule (35) vidimo, da zadanoj evolventi odgovara samo jedna evoluta.

Iz navedenog jasno slijede dva svojstva evolute:

1. Tangenta na evolutu je normala na evolventu,

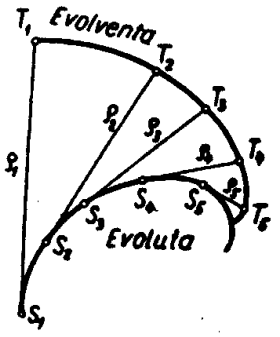
2. duljina luka evolute jednaka je razlici polumjera zakrivljenosti, koji diraju evolutu u krajnjim točkama toga luka.

Na pr. prema slici 21:

$$\widehat{T_1T_2} = \rho_1 - \rho_2; \quad \widehat{T_2T_3} = \rho_2 - \rho_3 \quad \text{i t. d.}$$

ili

$$\widehat{T_1T_5} = \rho_1 - \rho_5.$$



Sl. 21.

Kako je u točki infleksije $y'' = 0$, bit će prema (35): $\left.\begin{matrix}\xi = \infty \\ \eta = \infty\end{matrix}\right|$ t. j. točki infleksije evolvente odgovara grana evolute, koja ide u beskonačnost. Primijetimo još, da vrhu evolvente odgovara šiljak na evoluti (vidi dalje sl. 22 i 23).

Ako je jednadžba krivulje (evolvente) zadana u parametarskom obliku:

$$\left.\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}\right| \quad t_1 \leqq t \leqq t_2$$

parametarsku jednadžbu evolute dobijemo iz formule (35), ako u tu formulu uvrstimo izraze (17) i (29a), u kojim su y' i y'' izraženi pomoću parametra t:

$$\xi = x(t) - \frac{\dot{y}\left(1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right) \cdot \dot{x}^3}{\dot{x}(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})} = x(t) - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

$$\eta = y(t) + \frac{\left(1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right) \cdot \dot{x}^3}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} = y(t) + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

Prema tome je:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x(t) - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \\ \eta &= y(t) + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \end{aligned}\right| \qquad (36)$$

parametarska jednadžba evolute za krivulju $\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}$, pri čemu je t parametar, a sve su derivacije uzete po t.

Zada li se jednadžba krivulje (evolvente) u polarnim koordinatama $r = r(\varphi)$, dobijemo parametarsku jednadžbu na način naveden u točki 3. ovog paragrafa:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= r\cos\varphi - \frac{(r^2 + r'^2)(r'\sin\varphi + r\cos\varphi)}{r^2 + 2r'^2 - rr''} \\ \eta &= r\sin\varphi + \frac{(r^2 + r'^2)(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)}{r^2 + 2r'^2 - rr''} \end{aligned}\right| \qquad (37)$$

Parametarska jednadžba evolute za krivulju $r = r(\varphi)$; φ je parametar, pa su sve derivacije uzete po φ.

Uklonimo li iz jednadžbi (36) i (37) parametar t, odnosno φ, dobijemo jednadžbu evolute u običnom obliku, t. j. u obliku $\eta = f(\xi)$, odnosno $F(\xi, \eta) = 0$.

Primjedba: Nije moguće dati postupak, koji bi vrijedio za sve slučajeve, da se jednadžba evolute dobije u obliku $\eta = f(\xi)$, jer taj postupak ovisi o obliku zadane jednadžbe evolvente. Ipak u mnogim slučajevima dolazimo do cilja na slijedeći način.

Korak 1. Računamo ξ i η.

Korak 2. Obje jednadžbe rješavamo po x i y, odnosno po φ i r, izražavajući ih pomoću ξ i η.

Korak 3. Izraze za x i y, odnosno φ i r, dobivene na taj način, uvrštavamo u jednadžbu zadane krivulje — evolvente.

Primjeri

1. Odredi jednadžbu evolute za parabolu:

$$y^2 = 2px$$

Korak 1. Prema (35) računamo:

$$y = \sqrt{2px} \quad ; \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{2px}} \cdot 2p = \frac{p}{\sqrt{2px}}$$

$$y'' = -\frac{p\dfrac{1}{2\sqrt{2px}} \cdot 2p}{2px} = -\frac{p^2}{2px\sqrt{2px}}$$

Uvrštenje u (35) daje:

$$\xi = x + \frac{p\left(1 + \dfrac{p^2}{2px}\right)}{\sqrt{2px} \cdot \dfrac{p^2}{2px\sqrt{2px}}} = x + \frac{p(2px + p^2)\,2px}{2px \cdot p^2}$$

ili

$$\underline{\xi = 3x + p} \tag{a}$$

$$\eta = y - \frac{1 + \frac{p^2}{2px}}{\frac{p^2}{2px\sqrt{2px}}} = y - \frac{(2px + p^2)\,2px\sqrt{2px}}{2px \cdot p^2}$$

a kako je $2px = y^2$, a $\sqrt{2px} = y$, imamo

$$\eta = y - \frac{(y^2 + p^2) \cdot y}{p^2} = \frac{p^2 y - y^3 - p^2 y}{p^2}$$

$$\underline{\eta = -\frac{y^3}{p^2}} \tag{b}$$

ili

$$\underline{\eta = -\frac{\sqrt{(2px)^3}}{p^2}} \tag{c}$$

Jednadžbe (a) i (c) daju jednadžbu evolute zadane parabole u parametarskom obliku, x je parametar.

Korak 2. Iz (a) i (b) računamo:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-p + \xi}{3} \\ y &= -(p^2 \cdot \eta)^{1/3} \end{aligned}\right| \tag{d}$$

Korak 3. Jednadžbe (d) uvrštavamo u $y^2 = 2px$:

$$(p^2 \eta)^{2/3} = \frac{2p(\xi - p)}{3}$$

Kubiramo:

$$p^4 \eta^2 = \frac{8p^3(\xi - p)^3}{27}$$

odatle

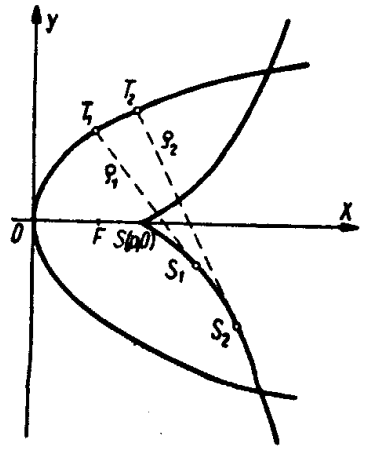
$$\eta^2 = \frac{8}{27p}(\xi - p)^3$$

ili ako mjesto ξ pišemo x, a mjesto η pišemo y:

$$\underline{y^2 = \frac{8}{27p}(x - p)^3}$$

To je tražena jednadžba evolute za parabolu $y^2 = 2px$.

Ta krivulja nosi ime polukubne (semikubne) ili Neilove parabole.



Sl. 22.

Njen šiljak je u točki S $(p, 0)$. Vidi sl. 22.

2. Odredi evolutu za elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Korak 1. Napisavši jednadžbu elipse u eksplicitnom obliku:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{(a)}$$

računamo prema (35):

$$y' = -\frac{b}{a}\frac{2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad \text{(b)}$$

Iz (a) imamo:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{ay}{b}$$

Uvrštenje u (b) daje:

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y} \qquad \text{(c)}$$

Odatle:

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{y - x\cdot y'}{y^2}$$

Uvrštenje (c) daje:

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2y^2}\left(y + \frac{b^2x^2}{a^2y}\right) = -\frac{b^2}{a^2y^2}\cdot\frac{a^2y^2 + b^2x^2}{a^2y}$$

a kako je

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{(jednadžba elipse)}$$

dobijemo:

$$y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3} \qquad \text{(d)}$$

Uvrštenje (c) i (d) u (35) daje:

$$\xi = x - \frac{b^2x\left(1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)}{a^2y\cdot\frac{b^4}{a^2y^3}}$$

$$\eta = y - \frac{1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}}{\frac{b^4}{a^2y^3}}$$

Odatle:

$$\xi = x - \frac{x(a^4y^2 + b^4x^2)}{a^4b^2}$$

$$\eta = y - \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,y}{a^2b^4}$$

Uvrstimo li u prvu jednadžbu $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ a u drugu $x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$, dobijemo:

$$\xi = x - \frac{x\left[a^4 \cdot \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + b^4 x^2\right]}{a^4 b^2}$$

$$\eta = y - \frac{\left[a^4 y^2 + b^4 \cdot \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)\right] y}{a^2 b^4}$$

ili

$$\xi = x - \frac{x(a^4 b^2 - a^2 b^2 x^2 + b^4 x^2)}{a^4 b^2}$$

$$\eta = y - \frac{(a^4 y^2 + a^2 b^4 - a^2 b^2 y^2) y}{a^2 b^4}$$

ili

$$\xi = \frac{a^4 b^2 x - a^4 b^2 x + a^2 b^2 x^3 - b^4 x^3}{a^4 b^2}$$

$$\eta = \frac{a^2 b^4 y - a^4 y^3 - a^2 b^4 y + a^2 b^2 y^3}{a^2 b^4}$$

ili

$$\xi = \frac{(a^2 - b^2) x^3}{a^4}$$

$$\eta = -\frac{(a^2 - b^2) y^3}{b^4} \qquad \text{(a)}$$

Korak 2. Odatle:

$$x = \left(\frac{a^4 \xi}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$y = -\left(\frac{b^4 \eta}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ili ako uvrstimo $a^2 - b^2 = e^2$, gdje je e linearni ekscentricitet elipse, dobijemo:

$$x = \left(\frac{a^4 \xi}{e^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$y = -\left(\frac{b^4 \eta}{e^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Korak 3. Uvrštenje u jednadžbu elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

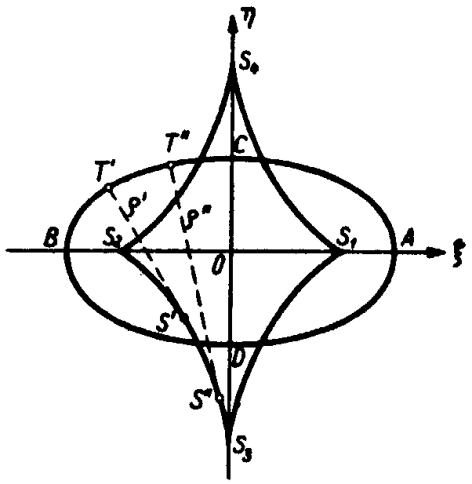
daje:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{a^4 \xi}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{b^4 \eta}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

ili konačno:

$$\underline{\left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\xi}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1}$$

To je tražena jednadžba elipsine evolute.



Sl. 23.

Kako se vidi iz slike 23, ona ima četiri šiljka S_1, S_2, S_3 i S_4, koji odgovaraju vrhovima A, B, C i D elipse, pri čemu je $AS_1 = BS_2 = \frac{b^2}{a}$, a $CS_3 = DS_4 = \frac{a^2}{b}$, kako smo to pokazali u primjeru 2 točke 2, b) ovog paragrafa.

Pomoću jednadžbi (a) možemo izraziti jednadžbu elipsine evolute u parametru t, t. j. u parametru, u kojem jednadžba elipse glasi:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right| \quad 0 \leqq t < 2\pi$$

(vidi Dio I. § 5).

Uvrstimo li te jednadžbe u (a) i uzmemo li u obzir, da je $a^2 - b^2 = e^2$, gdje je e linearni ekscentricitet elipse, dobijemo zamijenivši ξ s x, a η s y parametarsku jednadžbu elipsine evolute u obliku:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{e^2}{a}\cos^3 t \\ y &= \frac{e^2}{b}\sin^3 t \end{aligned}\right| \quad 0 \leqq t < 2\pi$$

(y je uzet s predznakom, +, jer t računamo od + osi X idući protiv kazaljke na satu).

3. Odredi jednadžbu evolute za cikloidu:

$$x = r(t - \sin t)$$

(vidi § 2, primjer 2). $\qquad y = r(1 - \cos t)$

Obzirom na (36) računamo:

$$x = r(1 - \cos t) \qquad \ddot{x} = r\sin t$$

$$y = r\sin t \qquad \ddot{y} = r\cos t$$

Uvrštenje u (36) daje:

$$\xi = r(t - \sin t) - \frac{r\sin t\,[r^2(1-\cos t)^2 + r^2\sin^2 t]}{r^2(1-\cos t)\cos t - r^2\sin^2 t}$$

$$\eta = r(1 - \cos t) + \frac{r(1-\cos t)\,[r^2(1-\cos t)^2 + r^2\sin^2 t]}{r^2(1-\cos t)\cos t - r^2\sin^2 t}$$

Odatle

$$\xi = r(t - \sin t) - r\sin t\,\frac{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}{\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t}$$

$$\eta = r(1 - \cos t) + r\frac{(1-\cos t)(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)}{\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t}$$

a kako je $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ dobijemo uz zajedničke nazivnike:

$$\xi = r\frac{t\cos t - \sin t\cos t - t + \sin t - 2\sin t + 2\sin t\cos t}{\cos t - 1}$$

$$\eta = r\frac{-(1-\cos t)^2 + (1-\cos t)(2 - 2\cos t)}{-(1-\cos t)}$$

ili

$$\xi = r\frac{t(\cos t - 1) + \sin t(\cos t - 1)}{\cos t - 1}$$

$$\eta = -r(-1 + \cos t + 2 - 2\cos t)$$

i konačno

$$\left.\begin{aligned} \xi &= r\,(t + \sin t) \\ \eta &= -r\,(1 - \cos t) \end{aligned}\right| \qquad \text{(a)}$$

To je tražena parametarska jednadžba evolute za običnu cikloidu.

Izvršimo prijelaz od našeg koordinatnog sustava $\xi O' \eta$ na novi koordinatni sustav XOY, kojemu su osi usporedne sa prijašnjima, a ishodište je pomaknuto u točku $O\,(-\pi r, -2r)$ Prema slici 24 imamo:

$$\xi = x - \pi r \quad ; \quad \eta = y - 2r \qquad \text{(b)}$$

Uvedimo i nov parametar: $t' = t + \pi$, a odatle je:

$$t = t' - \pi \qquad \text{(c)}$$

Uvrštenje (b) i (c) u (a) daje:

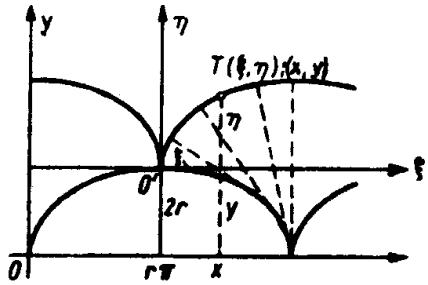
$$x - \pi r = r\,[t' - \pi + \sin\,(t' - \pi)]$$
$$y - 2r = -r\,[1 - \cos\,(t' - \pi)]$$

a odatle imamo:

$$x - \pi r = rt' - \pi r - r \sin t'$$
$$y - 2r = -r - r \cos t'$$

ili

$$x = r\,(t' - \sin t')$$
$$y = r\,(1 - \cos t')$$



Sl. 24.

Usporedimo li jednadžbu evolute u tom obliku s jednadžbom zadane cikloide (evolvente), vidimo, da je evoluta cikloide opet cikloida, pri čemu je kružnica, koja je izvodi, identična s izvodnom kružnicom zadane cikloide (vidi sl. 24).

4. Odredi jednadžbu evolute za logaritamsku spiralu $r = e^{\varphi}$ (sl. 11).

Korak 1. Prema (37) računamo:

$$r = e^{\varphi} \quad ; \quad r' = e^{\varphi} = r \quad , \quad r'' = e^{\varphi} = r$$

Uvrštenje u (37) daje:

$$\xi = r \cos \varphi - \frac{2r^2\,(r \sin \varphi + r \cos \varphi)}{2r^2}$$

$$\eta = r \sin \varphi + \frac{2r^2\,(r \cos \varphi - r \sin \varphi)}{2r^2}$$

Odatle:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -r \sin \varphi \\ \eta &= r \cos \varphi \end{aligned}\right| \qquad \text{(a)}$$

To je evoluta logaritamske spirale $r = e^{\varphi}$ u parametarskom obliku, φ je parametar.

Korak 2. Iz druge jednadžbe imamo:

$$r = \frac{\eta}{\cos \varphi}$$

Uvrstimo u prvu:

$$\xi = -\eta \operatorname{tg} \varphi$$

Odatle je:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\xi}{\eta}$$

pa je

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\xi}{\eta}\right) \qquad \text{(b)}$$

Kvadriramo li i zbrojimo obje jednadžbe (a), dobijemo:

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$

ili

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \qquad \text{(c)}$$

Korak 3. Uvrštenje (b) i (c) u $r = e^{\varphi}$ daje:

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = e^{\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\xi}{\eta}\right)}$$

ako tu jednakost logaritmiramo po bazi e, dobijemo:

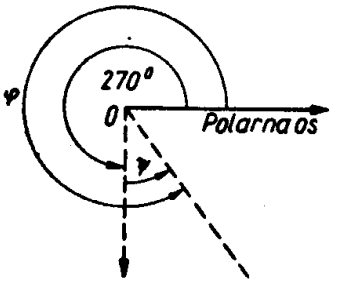
$$\underline{\ln\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\xi}{\eta}\right)} \qquad \text{(d)}$$

To je tražena jednadžba evolute za logaritamsku spiralu $r = e^{\varphi}$ u pravokutnim koordinatama.

Izvršimo prijelaz na novi polarni koordinatni sustav, koji dobijemo tako, da polarnu os zaokrenemo oko pola O za 270° (vidi sl. 25).

U tu svrhu uvrstimo $\varphi = 270 + \psi$ u poznate formule:

$$x = \xi = r\cos\varphi$$
$$y = \eta = r\sin\varphi$$



Sl. 25.

Dobijemo:

$$\xi = r\cos(270^\circ + \psi) = r\sin\psi$$
$$\eta = r\sin(270^\circ + \psi) = -r\cos\psi$$

To uvrstimo u (d) uzevši u obzir, da je

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{r\sin\psi}{-r\cos\psi} = -\operatorname{tg}\psi$$

$$\ln\sqrt{r^2\sin^2\psi + r^2\cos^2\psi} = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\psi),$$

a kako je $\sqrt{r^2\sin^2\psi + r^2\cos^2\psi} = r$, a $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\psi) = \psi$ (vidi Dio I. § 6) dobijemo:

$$\ln r = \psi$$

Odatle po definiciji logaritma imamo:

$$\underline{r = e^{\psi}}, \quad \text{gdje je} \quad \psi = \varphi - 270^\circ$$

To je opet logaritamska spirala, koja je sukladna sa zadanom (evolventom). Evoluta logaritamske spirale je dakle ista logaritamska spirala zaokrenuta prema evolventi za 270°.

§ 5. Neodređeni integrali

1. Pojam neodređenog integrala i primitivne funkcije

Dosada smo zadavali funkciju, na pr. $\sin x$, pa smo tražili njenu derivaciju: $D_x \sin x = \cos x$ ili njen diferencijal: $d\sin x = \cos x \cdot dx$. Sada ćemo problem okrenuti: zadavat ćemo diferencijal funkcije, na pr. $d\sin x = \cos x\, dx$, a tražit ćemo funkciju samu. Drugim riječima, vršit ćemo inverznu (obratnu) operaciju od diferenciranja. Ta se operacija zove integriranje, a označuje se znakom

integrala $\int$. Integriranje je dakle inverzna operacija od diferenciranja, kako je na pr. oduzimanje inverzna operacija od zbrajanja, dijeljenje - od množenja, vađenje drugog korijena - od kvadriranja i t. d.

Znamo, da jedna veličina ne mijenja svoje vrijednosti, ako nad njome izvršimo redom dvije operacije: direktnu i inverznu, ako je na pr. pomnožimo, a zatim podijelimo istim brojem. Slično tome će i funkcija ostati bez promjene, ako je diferenciramo, a zatim integriramo. Prema tome je na pr.

$$\int \mathrm{d} \sin x = \sin x$$

jer smo nad $\sin x$ izvršili redom dvije operacije: direktnu - diferenciranja (d) i inverznu - integriranja ($\int$). S istog je razloga:

$$\int \mathrm{d}x = x \tag{38}$$

ili općenito

$$\int \mathrm{d}f(x) = f(x).$$

S istog je razloga

$$\mathrm{d} \int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{D}_x \int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)$$

Rezultat svake inverzne operacije kontrolira se uvijek pomoću pripadne direktne operacije. Na pr. $\sqrt{9} = \pm 3$, jer je $(\pm 3)^2 = 9$. Isto tako se rezultat integriranja kontrolira na taj način, da se taj rezultat diferencira ili derivira: Na pr.

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x,$$

jer je $\qquad \mathrm{d} \sin x = \cos x \cdot \mathrm{d}x \quad$ ili $\quad D_x \sin x = \cos x$

Vidimo, da smo pravilno izračunali taj integral, jer smo nakon diferenciranja dobili zadani diferencijal $\cos x \cdot \mathrm{d}x$, a nakon deriviranja zadanu podintegralnu funkciju ili integrand $\cos x$.

Iz navedenog slijedi: izračunati integral za zadani diferencijal $f(x)\mathrm{d}x$ ili za zadanu funkciju $f(x)$ znači odrediti takvu funkciju $\varphi(x)$, čija je derivacija jednaka zadanoj funkciji $f(x)$, t. j.

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \varphi(x), \quad \text{ako je} \quad D_x\varphi(x) = f(x)$$

Pokazali smo, da je $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x$, jer je $D_x \sin x = \cos x$, ali je također:

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C,$$

gdje je C bilo koja konstanta, jer je:

$$D_x(\sin x + C) = \cos x + 0 = \cos x$$

Iz toga vidimo, da svaki neodređeni integral sadrži konstantu po volji C-konstantu integracije, jer se ona gubi pri deriviranju.

Općenito imamo dakle:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \varphi(x) + C$$

Konstanti integracije C možemo dati bilo koju konstantnu vrijednost, ona je nepoznata, neodređena, a stoga se i integral zove »neodređeni«.

Primitivnom funkcijom za zadanu funkciju $f(x)$ zove se ona funkcija $\varphi(x)$, čija je derivacija $\varphi'(x)$ jednaka zadanoj funkciji $f(x)$, t. j. $\varphi(x)$ je primi-

tivna funkcija za funkciju $f(x)$, ako je $\varphi'(x) = f(x)$. Na pr. za funkciju $\cos x$ primitivna funkcija je $\sin x + C$, jer je $D_x(\sin x + C) = \cos x$. Isti rezultat smo dobili za $\int \cos x \, dx$.

Iz toga primjera, a također iz definicije neodređenog integrala i primitivne funkcije jasno vidimo, da se pojmovi neodređenog integrala i primitivne funkcije posve podudaraju, pa možemo kazati: izračunati neodređeni integral za zadanu podintegralnu funkciju $f(x)$ ne znači ništa drugo, nego odrediti primitivnu funkciju za tu funkciju $f(x)$.*)

2. Osnovni integrali

To su integrali, koji se ne računaju, već pišu po smislu, t. j. po definiciji integracije kao operacije inverzne od diferenciranja, odnosno deriviranja. Jedan od tih osnovnih integrala već znamo, to je:

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \tag{39}$$

$\int d f(x) = f(x) + C$

Na isti način dobijemo sve osnovne integrale.

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \tag{40}$$

jer je $D_x(-\cos x + C) = \sin x$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C \tag{41}$$

jer je

$$D_x(\operatorname{tg} x + C) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C \tag{42}$$

jer je

$$D_x(-\operatorname{ctg} x + C) = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Također:

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C \tag{43}$$

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C \tag{44}$$

(Pazi na predznak rezultata!)

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{th} x + C \tag{45}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C \tag{46}$$

Prelazimo na jedan od najvažnijih neodređenih integrala:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \tag{47}$$

*) Zapravo se neodređeni integral definira nešto drukčije. O tome će biti riječ kod određenih integrala.

jer je

$$D_x\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\right)=\frac{1}{n+1}\cdot(n+1)\cdot x^{n+1-1}=\underline{x^n}$$

Ta formula vrijedi za sve n cijele i razlomljene, pozitivne i negativne, ali ne vrijedi za $n=-1$.

$$\int x^{-1}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$$

jer je

$$D_x(\ln|x|+C)=\frac{1}{x}.$$

U rezultatu uzimamo $|x|$, t. j. apsolutnu vrijednost od x, jer, dok je integrand $\frac{1}{x}$ definiran za pozitivne i negativne vrijednosti x, funkcija $\ln x$ definirana je samo za pozitivne x.

Dakle:

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C \tag{48}$$

Primjeri

$$\int x\,dx=\frac{x^{1+1}}{1+1}=\underline{\frac{x^2}{2}+C}$$

$$\int x^2\,dx=\frac{x^{2+1}}{2+1}=\underline{\frac{x^3}{3}+C}$$

$$\int x^5\,dx=\underline{\frac{x^6}{6}+C}$$

Eksponent od x jednostavno prepisujemo u nazivnik rezultata!

$$\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\underline{\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C}$$

$$\int\sqrt[3]{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{x^{\frac{1}{3}+\frac{3}{3}}}{\frac{1}{3}+\frac{3}{3}}=\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}=\underline{\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+C}$$

$$\int\sqrt[5]{x^4}\,dx=\int x^{\frac{4}{5}}\,dx=\frac{x^{\frac{4}{5}+\frac{5}{5}}}{\frac{4}{5}+\frac{5}{5}}=\frac{x^{\frac{9}{5}}}{\frac{9}{5}}=\underline{\frac{5}{9}\sqrt[5]{x^9}+C}$$

$$\int\sqrt[4]{x^3}\,dx=\int x^{\frac{3}{4}}\,dx=\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}=\underline{\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7}+C}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\underline{\ln|x|+C}$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = \underline{-\frac{1}{x} + C}$$

$$\int \frac{dx}{x^7} = x^{-7}\,dx = \frac{x^{-6}}{-6} = \underline{-\frac{1}{6x^6} + C}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}}{-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \underline{2\sqrt{x} + C}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[7]{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{7}}\,dx = \frac{x^{-\frac{2}{7}+\frac{7}{7}}}{-\frac{2}{7}+\frac{7}{7}} = \frac{x^{\frac{5}{7}}}{\frac{5}{7}} = \underline{\frac{7}{5}\sqrt[7]{x^5} + C}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}} = \int x^{-\frac{5}{3}}\,dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} = \underline{-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + C}$$

Napišimo sada ostale osnovne integrale: $(e^x)' = e^x$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \tag{49}$$

Primitivna funkcija za e^x opet je e^x, jer je derivacija funkcije e^x jednaka samoj funkciji.

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \tag{50}$$

jer je $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$D_x\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right) = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \cdot \ln a = a^x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \text{ jer je } D_x(\arcsin x + C) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ali također:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C, \text{ jer je } D_x(-\arccos x + C) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

a osim toga znamo, da je $\arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$ [Dio I. formula (70)].

Vidimo, da je isti integral izražen na dva načina; praktički se najčešće uzima prvi rezultat:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad (= -\arccos x + C) \tag{51}$$

Na isti način dobijemo:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C \quad (= -\operatorname{arc\,ctg} x + C) \tag{52}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = (\operatorname{Ar\,sh} x + C) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C \tag{53}$$

jer je $$D_x(\text{Ar sh}\, x + C) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Praktički se obično uzima drugi rezultat s ln (vidi Dio I. § 6, 2).

$$\int \frac{dx}{\pm\sqrt{x^2-1}} = (\text{Ar ch}\, x + C) = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) + C \tag{54}$$

Kako derivacije funkcija Ar th x i Ar cth x imaju isti izraz $\frac{1}{1-x^2}$, $\int \frac{dx}{1-x^2}$ ima dva rezultata već prema tome, da li je $|x| < 1$ ili $|x| > 1$.

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = (\text{Ar th}\, x + C) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C \tag{55}$$

i to za $|x| < 1$, jer je funkcija Ar th x definirana samo za $|x| < 1$ (vidi Dio I. § 6, 2).

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = (\text{Ar cth}\, x + C) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + C \tag{56}$$

i to za $|x| > 1$, jer je funkcija Ar cth x definirana samo za $|x| > 1$.

To su svi osnovni integrali. Njih možemo lako naučiti napamet ukoliko ih vežemo s pripadnim formulama derivacija. Na kraju knjige nalazi se uz ostale formule i popis tih integrala i pripadnih derivacija. Taj je popis popunjen nizom drugih integrala, koje ćemo kasnije izvesti. Ti integrali nisu doduše osnovni, jer su iz njih izvedeni, ali njihovo znanje je također bezuvjetno potrebno, da se ubrza integriranje.

Pazi! Znamo računati samo te osnovne integrale, pa se čitav postupak integriranja sastoji obično u tome, da se zadana podintegralna funkcija tako transformira, da se raspadne na niz elementarnih funkcija, koje zatim integriramo prema formulama za osnovne integrale.

3. Pravila integriranja

Prvo pravilo. Konstanta, koja množi podintegralnu funkciju, stavi se uvijek ispred znaka integrala:

$$\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx \tag{57}$$

Primjeri

$$\int 4x^7\, dx = 4\int x^7\, dx = 4 \cdot \frac{x^8}{8} = \underline{\frac{1}{2}x^8 + C}$$

$$\int \frac{\sin x}{5}\, dx = \frac{1}{5}\int \sin x\, dx = \underline{-\frac{1}{5}\cos x + C}$$

$$\int 5dx = 5\int dx = \underline{5x + C}$$

Drugo pravilo. Integral algebarskog zbroja funkcija jednak je algebarskom zbroju integrala tih funkcija:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\, dx = \int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x)\, dx \tag{58}$$

Primjer

$$\int\left(5x^4-3x+\frac{\sqrt[3]{x}}{5}-\frac{8}{\sqrt{x^7}}-\frac{1}{x^3}+\frac{2}{3x}+\sqrt{3}\right)dx=5\int x^4\,dx-3\int x\,dx+\frac{1}{5}\int x^{\frac{1}{3}}dx-$$

$$-8\int x^{-\frac{7}{2}}dx-\int x^{-3}dx+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x}+\sqrt{3}\int dx=5\cdot\frac{x^5}{5}-3\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-8\cdot\frac{x^{-\frac{5}{2}}}{-\frac{5}{2}}-\frac{x^{-2}}{-2}+$$

$$+\frac{2}{3}\ln|x|+\sqrt{3}\cdot x=\underline{x^5-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{20}\sqrt[3]{x^4}+\frac{16}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^5}}+\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{3}\ln|x|+x\sqrt{3}+C}$$

Kako nema formula za integriranje produkta, kvocijenta i potencije funkcija, treba sve te operacije, ukoliko je to moguće, svesti na zbroj, odnosno razliku funkcija.

Primjer

$$\int\frac{(2\sqrt{x}-5x\sqrt[3]{x})^3}{\sqrt[5]{x^7}}dx=\int\frac{8\sqrt{x^3}-3\cdot4x\cdot5x\sqrt[3]{x}+3\cdot2\sqrt{x}\cdot25x^2\sqrt[3]{x^2}-125x^3\cdot x}{\sqrt[5]{x^7}}dx=$$

$$=\int\frac{8\sqrt{x^3}-60x^2\cdot x^{\frac{1}{3}}+150x^2\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2}-125x^4}{\sqrt[5]{x^7}}dx=$$

$$=\int\frac{8x^{\frac{3}{2}}-60x^2\cdot x^{\frac{1}{3}}+150x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{2}{3}}-125x^4}{x^{\frac{7}{5}}}dx=$$

$$=\int\frac{8x^{\frac{3}{2}}-60x^{2+\frac{1}{3}}+150x^{2+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}-125x^4}{x^{\frac{7}{5}}}dx=$$

= svaki član brojnika dijelimo s nazivnikom i integriramo član po član =

$$=8\int x^{\frac{3}{2}-\frac{7}{5}}dx-60\int x^{\frac{7}{3}-\frac{7}{5}}dx+150\int x^{\frac{13}{6}-\frac{7}{5}}dx-125\int x^{4-\frac{7}{5}}dx=$$

$$=8\int x^{\frac{1}{10}}dx-60\int x^{\frac{14}{15}}dx+150\int x^{\frac{53}{30}}dx-125\int x^{\frac{13}{5}}dx=$$

$$=8\cdot\frac{x^{\frac{11}{10}}}{\frac{11}{10}}-60\cdot\frac{x^{\frac{29}{15}}}{\frac{29}{15}}+150\frac{x^{\frac{83}{30}}}{\frac{83}{30}}-125\frac{x^{\frac{18}{5}}}{\frac{18}{5}}=$$

$$=\frac{10}{11}\sqrt[10]{x^{11}}-\frac{900}{29}\sqrt[15]{x^{29}}+\frac{4500}{83}\sqrt[30]{x^{83}}-\frac{625}{18}\sqrt[5]{x^{18}}=$$

$$=\underline{\frac{10}{11}x\sqrt[10]{x}-\frac{900}{29}x\sqrt[15]{x^{14}}+\frac{4500}{83}x^2\sqrt[30]{x^{23}}-\frac{625}{18}x^3\sqrt[5]{x^3}+C}$$

Treće pravilo. Pravilo supstitucije.

Pokažimo to pravilo na nizu važnih primjera.

$$1.\quad\int\sin 2x\,dx=?$$

Najbliži osnovni integral je (40):

$$\int\sin x\,dx=-\cos x$$

Da zadani integral svedemo na taj osnovni, uvedimo supstituciju:

$$2x = t \qquad \text{(a)}$$

Čim smo uveli supstituciju t, treba s t izraziti sve x, koji ulaze u integral, a također dx. Ako to ne uspije, supstitucija ne vrijedi.

Iz $2x = t$ imamo: $x = \frac{t}{2}$. Diferenciramo:

$$dx = \frac{1}{2} 1 \cdot dt \qquad \text{(b)}$$

Uvrštenje (a) i (b) u zadani integral daje:

$$\int \sin 2x \, dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{2} \, dt = \frac{1}{2} \int \sin t \, dt = \text{prema (40)} = -\frac{1}{2} \cos t \qquad \text{(c)}$$

Nakon izvršenog integriranja, mora t iščeznuti. U tu svrhu treba u dobivenom rezultatu t izraziti s x.

Uvrštenje (a) u (c) daje:

$$\int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} \cos 2x = \underline{-\frac{\cos 2x}{2} + C}$$

Izračunaj na isti način $\int \sin 3x \, dx$.

Moraš dobiti:

$$\int \sin 3x \, dx = -\frac{\cos 3x}{3} + C$$

Općenito:

$$\int \sin (nx) \, dx = -\frac{\cos (nx)}{n} + C \qquad (59)$$

U daljnjem ćemo sve slične integrale računati neposredno po formuli (59): Na pr.

$$\int \sin 8x \, dx = -\frac{\cos 8x}{8} + C$$

Postupajući na isti način dobijemo:

$$\int \cos 2x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + C$$

$$\int \cos 3x \, dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$$

Izračunaj te integrale!

Općenito:

$$\int \cos (nx) \, dx = \frac{\sin (nx)}{n} + C \qquad (60)$$

Na pr.

$$\int \cos 7x \, dx = \frac{\sin 7x}{7} + C$$

Slično se računaju integrali oblika:

$$\int \sin(ax + b) dx = ?$$

Supstitucija:

$$ax + b = t \qquad \text{(a)}$$

Diferenciramo:

$$a \cdot dx = dt,$$

odatle:

$$dx = \frac{dt}{a} \qquad \text{(b)}$$

Uvrštenje (a) i (b) u integral daje:

$$\int \sin(ax + b) dx = \int \sin t \cdot \frac{dt}{a} = \frac{1}{a} \int \sin t \cdot dt = -\frac{1}{a} \cos t =$$

$$= \text{uvrstimo (a)} = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) = \underline{-\frac{\cos(ax + b)}{a} + C}$$

Na pr.

$$\int \sin\left(\frac{x}{2} - 3\right) dx = -\frac{\cos\left(\frac{x}{2} - 3\right)}{\frac{1}{2}} = \underline{-2 \cos\left(\frac{x}{2} - 3\right) + C}$$

Izračunaj taj integral pomoću supstitucije!

Dokaži na slični način, da je:

$$\int \cos(ax + b) \, dx = \frac{\sin(ax + b)}{a} + C$$

Znajući izračunati integrale oblika (59) i (60), možemo lako izračunati dva integrala od velike praktičke važnosti, samo ako se sjetimo poznatih trigonometrijskih formula:

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$$

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

To su:

1 $$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\int dx - \int \cos 2x \, dx\right] =$$

$$\underline{= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C} \qquad \text{(59a)}$$

2. $$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\int dx + \int \cos 2x\,dx\right] =$$

$$= \underline{\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C} \qquad (60a)$$

2. $\int e^{ax}\,dx = ?$

Svodimo na najbliži osnovni integral (49):

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

Supstitucija:

$$ax = t$$

Diferenciramo:

$$a \cdot dx = dt$$

Odatle:

$$dx = \frac{dt}{a}$$

Uvrštenje u integral daje:

$$\int e^{ax}\,dx = \int e^t \cdot \frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\int e^t\,dt = \text{prema (49)} = \frac{1}{a}e^t = \frac{1}{a}e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C \qquad (61)$$

Praktički sve integrale toga oblika računamo neposredno po formuli (61). Na pr.

1. $$\int e^{3x}\,dx = \underline{\frac{e^{3x}}{3} + C}$$

Izračunaj taj integral pomoću supstitucije!

2. $$\int \frac{dx}{e^{5x}} = \int e^{-5x}\,dx = \text{prema (61)} = \frac{e^{-5x}}{-5} = -\frac{1}{5}e^{-5x} =$$

$$= \underline{-\frac{1}{5e^{5x}} + C}$$

Dokaži, da je:

$$\int e^{\frac{3}{2}x+8}\,dx = \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x+8} + C$$

3. $\int (3x-5)^7\,dx = ?$

Supstitucija:

$$3x - 5 = t$$

Diferenciramo:

$$3dx = dt$$

Odatle:

$$dx = \frac{dt}{3}$$

To uvrstimo u integral, pri čemu konstantu stavimo odmah ispred znaka integrala:

$$\int (3x-5)^7\,dx = \frac{1}{3}\int t^7 \cdot dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^8}{8} = \underline{\frac{1}{24}(3x-5)^8 + C}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{\left(7-\frac{x}{3}\right)^2}} = ?$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{\left(7-\frac{x}{3}\right)^2}} = \int \left(7-\frac{x}{3}\right)^{-\frac{2}{5}} dx =$$

Supstitucija:

$$7-\frac{x}{3} = t$$

Diferenciramo:

$$-\frac{1}{3}dx = dt.$$

Odatle:

$$dx = -3dt$$

Uvrštenje u integral daje:

$$= -3\int t^{-\frac{2}{5}}\,dt = -3\cdot\frac{t^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} = -5\left(7-\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{5}} = \underline{-5\sqrt[5]{\left(7-\frac{x}{3}\right)^3} + C}$$

Izračunaj integrale:

$$\int \left(3-\frac{5}{2}x\right)^9 dx \qquad \left[= -\frac{1}{25}\left(3-\frac{5}{2}x\right)^{10} + C\right)$$

$$\int \sqrt{(8x-7)^7}\,dx \qquad \left[= \frac{1}{36}\sqrt{(8x-7)^9} + C\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)^5}} \qquad \left[= \frac{3}{5}\,\frac{1}{\sqrt[3]{(5-x)^5}} + C\right]$$

4. $$\int \frac{dx}{x \pm a} = ?$$

Supstitucija: $x \pm a = t$

Diferenciramo: $dx = dt$

$$\int \frac{dx}{x \pm a} = \int \frac{dt}{t} = \text{prema (48)} = \ln|t| = \ln|x \pm a| + C$$

$$\int \frac{dx}{x \pm a} = \ln|x \pm a| + C \qquad (62)$$

Primjeri

1. $$\int \frac{dx}{x-5} = \text{prema (62)} = \underline{\ln|x-5| + C}$$

2. $$\int \frac{dx}{3-x} = ?$$

Pazi kod primjene formule (62): x mora imati koeficijent $+1$. Ako to nije, treba taj koeficijent izlučiti.
Naš primjer:

$$\int \frac{dx}{3-x} = -\int \frac{dx}{x-3} = \text{prema (62)} = -\ln|x-3| = +\underline{\ln\frac{1}{|x-3|} + C}$$

3. $$\int \frac{dx}{2-7x} = -\frac{1}{7}\int \frac{dx}{x-\frac{2}{7}} = \text{prema (62)} = \underline{-\frac{1}{7}\ln\left|x-\frac{2}{7}\right| + C}$$

Taj rezultat možemo prikazati u drugom obliku:

$$-\frac{1}{7}\ln\left|x-\frac{2}{7}\right| + C = -\frac{1}{7}\ln\left|\frac{7x-2}{7}\right| + C = -\frac{1}{7}[\ln|7x-2| -$$

$$-\ln 7] + C = -\frac{1}{7}\ln|7x-2| + \frac{1}{7}\ln 7 + C =$$

= pribrojimo li konstanti po volji C broj $\frac{1}{7}\ln 7$, dobit ćemo opet konstantu po volji $C_1 = \underline{-\frac{1}{7}\ln|7x-2| + C_1}$

Izračunaj:

$$\int \frac{dx}{5x+4} \qquad \left[= \frac{1}{5}\ln\left|x+\frac{4}{5}\right| + C = \frac{1}{5}\ln|5x+4| + C_1\right]$$

$$\int \frac{dx}{3-11x} \qquad \left[= -\frac{1}{11}\ln\left|x-\frac{3}{11}\right| + C = -\frac{1}{11}\ln|11x-3| + C_1\right]$$

5. $$\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}} = ?$$

Svodimo taj integral na najbliži osnovni (51):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

U tu svrhu izlučimo $\frac{1}{\sqrt{5}}$, da koeficijent kod x^2 bude -1:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{5} - x^2}} =$$

Stavimo:

$$\frac{3}{5} = k^2, \quad k = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}}$$

Vidimo, da sve integrale oblika zadanog integrala možemo svesti na $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}}$. Riješimo jedan put za uvijek taj integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \frac{1}{k} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{k}\right)^2}}$$

Supstitucija:

$$\frac{x}{k} = t$$

Diferenciramo:

$$\frac{1}{k} dx = dt$$

Odatle:

$$dx = k \cdot dt$$

Uvrštenje daje:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \frac{k}{k} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \text{prema (51)} = \arcsin t =$$

$$= \arcsin \frac{x}{k}, \text{ jer je } t = \frac{x}{k}$$

Dakle:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{k} + C \tag{51a}$$

Sada dovršimo računanje zadanog integrala:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{5} - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \text{prema (51a)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{x}{k} = \text{ a kako je } k = \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{x}{\sqrt{\frac{3}{5}}} =$$

$$\underline{= \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \left(x\sqrt{\frac{5}{3}}\right) + C}$$

Sve integrale oblika $\int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}}$ računat ćemo odsada neposredno po formuli (51a).

Na pr.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \text{prema (51a)} =$$

$$k^2 = \frac{1}{4}; \quad k = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{k} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{\frac{1}{2}} = \underline{\frac{1}{2} \arcsin (2x) + C}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7 - x^2}} = \text{prema (51a)} = \int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{k} = \underline{\arcsin \frac{x}{\sqrt{7}} + C}$$

$$k^2 = 7; \quad k = \sqrt{7}$$

Izvedimo slične proširene formule za osnovne integrale (52) — (56):

$$\int \frac{dx}{k^2 + x^2} = \frac{1}{k^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{k}\right)^2} =$$

Supstitucija je ista:

$$\frac{x}{k} = t, \text{ odatle } x = kt, \text{ a } dx = k\,dt$$

$$= \frac{k}{k^2} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \text{prema (52)} = \frac{1}{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{k} + C$$

$$\int \frac{dx}{k^2 + x^2} = \frac{1}{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{k} + C \tag{52a}$$

Na pr.

$$\int \frac{dx}{7 + 5x^2} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\frac{7}{5} + x^2} = \text{ prema (52a)} = \frac{1}{5} \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{5}}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{\frac{7}{5}}} =$$

$$k^2 = \frac{7}{5}; \quad k = \sqrt{\frac{7}{5}}$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5}{7}}\,\text{arc tg}\left(x\sqrt{\frac{5}{7}}\right) = \underline{\frac{1}{\sqrt{35}}\,\text{arc tg}\left(x\sqrt{\frac{5}{7}}\right) + C}$$

$$\int \frac{dx}{11 + x^2} = \text{prema (52a)} = \underline{\frac{1}{\sqrt{11}}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{\sqrt{11}} + C}$$

$$k^2 = 11; \quad k = \sqrt{11}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 + x^2}} = \frac{1}{k}\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{k}\right)^2}} =$$

$$\frac{x}{k} = t \quad ; \quad x = kt \quad ; \quad dx = k\,dt$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \text{prema (53)} = \ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right) + C =$$

$$= \ln\left(\frac{x}{k} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}}\right) + C = \ln\frac{x + \sqrt{k^2 + x^2}}{k} + C = \ln\left(x + \sqrt{k^2 + x^2}\right) -$$

$$- \ln k + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + k^2}\right) + C_1$$

jer je $(-\ln k + C)$ opet neka konstanta po volji C_1.

Dakle

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 + x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{k^2 + x^2}\right) + C_1 \qquad \textbf{(53a)}$$

Ne ubacimo li konstantu $-\ln k$ u konstantu C_1, formula glasi:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 + x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{k^2 + x^2}\right) - \ln k = \ln\frac{x + \sqrt{k^2 + x^2}}{k} + C \qquad \textbf{(53a)}'$$

Na pr.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 + 4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4} + x^2}} = \text{prema (53a)} =$$

$$\frac{9}{4} = k^2$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{\frac{9}{4} + x^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(x + \frac{\sqrt{9 + 4x^2}}{2}\right) = \underline{\frac{1}{2}\ln\frac{2x + \sqrt{9 + 4x^2}}{2} + C}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 7x^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{7} + x^2}} = \text{prema (53a)} = \underline{\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left(x + \sqrt{\frac{1}{7} + x^2}\right) + C}$$

$$\frac{1}{7} = k^2$$

Postupajući na slični način, dobijemo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k^2}} = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - k^2}) + C_1 \qquad (54a)$$

gdje je $C_1 = -\ln k + C$

ili

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k^2}} = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - k^2}) - \ln k = \ln \frac{x \pm \sqrt{x^2 - k^2}}{k} + C \qquad (54a)$$

Na pr.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}} = \text{prema (54a)} = \underline{\ln(x + \sqrt{x^2 - 5}) + C}$$

Obično se ispred drugog korijena uzima predznak +

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \frac{1}{5}}} = \text{prema (54a)} = \underline{\frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left(x + \sqrt{x^2 - \frac{1}{5}}\right) + C}$$

$$k^2 = \frac{1}{5}$$

$$\int \frac{dx}{k^2 - x^2} = \frac{1}{k^2} \int \frac{dx}{1 - \left(\frac{x}{k}\right)^2} =$$

$$\frac{x}{k} = t; \quad \frac{1}{k} dx = dt; \quad dx = k\,dt$$

$$= \frac{k}{k^2} \int \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{k} \int \frac{dt}{1 - t^2} =$$

1. za $|t| < 1$, t. j. za $\left|\frac{x}{k}\right| < 1$, odnosno za $|x| < |k|$ imamo prema (55):

$$= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{1 + t}{1 - t} = \frac{1}{2k} \ln \frac{1 + \frac{x}{k}}{1 - \frac{x}{k}} = \frac{1}{2k} \ln \frac{k + x}{k - x} + C$$

2. za $|t| > 1$, t. j. za $\left|\frac{x}{k}\right| > 1$, odnosno za $|x| > |k|$ imamo prema (56):

$$= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{t + 1}{t - 1} = \frac{1}{2k} \ln \frac{\frac{x}{k} + 1}{\frac{x}{k} - 1} = \frac{1}{2k} \ln \frac{x + k}{x - k} + C$$

Dakle:

$$\int \frac{dx}{k^2 - x^2} = \frac{1}{2k} \ln \frac{k + x}{k - x} + C \qquad \text{za } |x| < |k| \tag{55a}$$

$$\int \frac{dx}{k^2 - x^2} = \frac{1}{2k} \ln \frac{x + k}{x - k} + C \qquad \text{za } |x| > |k| \tag{56a}$$

Izvedimo još dva integrala sličnih (55a), odnosno (56a):

$$\int \frac{dx}{x^2 - k^2} = -\int \frac{dx}{k^2 - x^2} = \text{prema (55a)} = -\frac{1}{2k} \ln \frac{k + x}{k - x} + C =$$

$$= \frac{1}{2k} \ln \frac{k - x}{k + x} + C \qquad \text{za } |x| < |k|$$

ili

$$\int \frac{dx}{x^2 - k^2} = -\int \frac{dx}{k^2 - x^2} = \text{prema (56a)} = -\frac{1}{2k} \ln \frac{x + k}{x - k} + C =$$

$$= \frac{1}{2k} \ln \frac{x - k}{x + k} + C \qquad \text{za } |x| > |k|$$

Dakle:

$$\int \frac{dx}{x^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \ln \frac{k - x}{k + x} + C \qquad \text{za } |x| < |k| \tag{55b}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \ln \frac{x - k}{x + k} + C \qquad \text{za } |x| > |k| \tag{56b}$$

Na pr.

$$\int \frac{dx}{5 - 4x^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\frac{5}{4} - x^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{k^2 - x^2} = \text{za } |x| < \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ prema (55a)} =$$

$$k^2 = \frac{5}{4}; \quad k = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \ln \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} + x}{\frac{\sqrt{5}}{2} - x} = \underline{\frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \frac{\sqrt{5} + 2x}{\sqrt{5} - 2x} + C}$$

$$\int \frac{dx}{5 - 4x^2} = \text{za } |x| > \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ prema (56a)} = \underline{\frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \frac{2x + \sqrt{5}}{2x - \sqrt{5}} + C}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 7} = \text{prema (55b)} = \underline{\frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \frac{\sqrt{7} - x}{\sqrt{7} + x} + C} \quad \text{za } |x| < \sqrt{7}$$

$$k^2 = 7; \quad k = \sqrt{7}$$

$$= \text{prema (56b)} = \underline{\frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \frac{x - \sqrt{7}}{x + \sqrt{7}} + C} \qquad \text{za } |x| > \sqrt{7}$$

Izračunaj prema formulama (51a) do (56b):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-11x^2}};\quad \int \frac{dx}{7-11x^2};\quad \int \frac{dx}{11x^2+7};\quad \int \frac{dx}{\sqrt{11x^2+7}};\quad \int \frac{dx}{\sqrt{11x^2-7}};\quad \int \frac{dx}{11x^2-7}$$

6. $$\int \frac{15x^4-8x^3+14x-1}{3x^5-2x^4+7x^2-x+1}\,dx =$$

opažamo, da je u brojniku derivacija nazivnika, pa stavimo nazivnik

$$3x^5-2x^4+7x^2-x+1=t$$

Diferenciramo:

$$dt=(15x^4-8x^3+14x-1)dx=dt,$$

a to je brojnik izraza pod integralom.
Uvrštavamo:

$$=\int \frac{dt}{t} = \text{prema (48)} = \ln|t| = \underline{\ln|3x^5-2x^4+7x^2-x+1|+C}$$

Dakle, ako se u brojniku integranda nalazi derivacija njegova nazivnika, supstitucijom »nazivnik = t« svodimo zadani integral na osnovni integral (48):

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C$$

Na pr.

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx =$$

$$\cos x = t;\quad -\sin x\,dx = dt;\quad \sin x\,dx = -dt$$

$$= -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| = \underline{-\ln|\cos x| = \ln\frac{1}{|\cos x|}+C}$$

Pokaži na isti način, da je:

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x|+C$$

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt[3]{\sin^8 x}}\,dx = ?$$

Kako je $d\sin x = \cos x\,dx$, stavimo $\sin x = t$, a da možemo izraziti s t sve x u integrandu, pišemo $\cos^5 x$ u obliku:

$$\cos^5 x = \cos^4 x\cdot\cos x = (1-\sin^2 x)^2\cdot\cos x, \text{ jer je } \cos^2 x = 1-\sin^2 x.$$

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt[3]{\sin^8 x}}\,dx = \int \frac{\cos^4 x\cdot\cos x\cdot dx}{\sqrt[3]{\sin^8 x}} = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2\cdot\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^8 x}} =$$

uvrštenje $\sin x = t$ i $\cos x \cdot dx = dt$ daje:

$$= \int \frac{(1-t^2)^2\,dt}{\sqrt[3]{t^8}} = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^{\frac{8}{3}}} = \int t^{-\frac{8}{3}}\,dt - 2\int t^{-\frac{2}{3}}\,dt + \int t^{\frac{4}{3}}\,dt =$$

$$= \frac{t^{-\frac{5}{3}}}{-\frac{5}{3}} - 2\,\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + \frac{t^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} = -\frac{3}{5}\,\frac{1}{\sqrt[3]{t^5}} - 6\sqrt[3]{t} + \frac{3}{7}\sqrt[3]{t^7} =$$

$$= \underline{-\frac{3}{5}\,\frac{1}{\sqrt[3]{\sin^5 x}} - 6\sqrt[3]{\sin x} + \frac{3}{7}\sqrt[3]{\sin^7 x} + C}$$

Izračunaj na isti način

$$\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx \qquad \left[= -2\sqrt{\cos x}\left(1 - \frac{2}{5}\cos^2 x + \frac{1}{9}\cos^4 x\right) + C\right]$$

$$\int \frac{\sin^7 x}{\cos^3 x\sqrt[5]{\cos x}}\,dx$$ (Rezultat kontroliraj deriviranjem).

7. $\int (e^{2x} + \sqrt{e^x})\,dx =$

$e^x = t$; $dt = e^x \cdot dx$, odatle $dx = \frac{dt}{e^x}$, a kako je $e^x = t$, $dx = \frac{dt}{t}$

$$= \int (t^2 + \sqrt{t}) \cdot \frac{dt}{t} = \int t\,dt + \int \frac{\sqrt{t}}{t}\,dt = \frac{t^2}{2} + \int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{t^2}{2} + \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} =$$

$$\underline{= \frac{e^{2x}}{2} + 2\sqrt{e^x} + C}$$

Izračunaj na isti način:

$$\int \left(\sqrt[3]{e^{2x}} - 5e^{3x} + \frac{2}{\sqrt[5]{e^{4x}}}\right) dx \qquad \left[= \frac{3}{2}\sqrt[3]{e^{2x}} - \frac{5}{3}e^{3x} - \frac{5}{2}\,\frac{1}{\sqrt[5]{e^{4x}}} + C\right]$$

8. Da se pogodi supstitucija, bezuvjetno je potrebno znanje napamet formula deriviranja!

Na pr.

$$\int \frac{(\arcsin x)^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = ?$$

Kako je $D_x \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, supstitucija pada u oči:

$$\arcsin x = t, \text{ odatle } dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Uvrštenje daje:

$$\int \frac{(\arcsin x)^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int t^5\,dt = \frac{t^6}{6} = \underline{\frac{(\arcsin x)^6}{6} + C}$$

$$\int \frac{dx}{(\operatorname{Ar\,th} x)^2(1-x^2)} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}\,dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = \underline{-\frac{1}{\operatorname{Ar\,th} x} + C}$$

$$\operatorname{Ar\,th} x = t\,; \quad dt = \frac{dx}{1-x^2}$$

Izračunaj na isti način:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot \arccos x} \qquad [= -\ln|\arccos x| + C]$$

9. Rješavajući složene integrale, često dolazimo do integrala slijedećih oblika:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$1-x^2 = t; \quad -2x\,dx = dt; \quad x\,dx = -\frac{1}{2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{t} = \underline{-\sqrt{1-x^2} + C}$$

ili

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} =$$

$$1+x^2 = t; \quad 2x\,dx = dt, \quad x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| = \underline{\ln\sqrt{1-x^2} + C}$$

ili na pr.

$$\int x\sqrt{3x^2-7}\,dx =$$

$$3x^2-7 = t; \quad 6x\,dx = dt; \quad x\,dx = \frac{1}{6}\,dt$$

$$= \frac{1}{6}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{6}\,\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \underline{\frac{1}{9}\sqrt{(3x^2-7)^3} + C}$$

ili

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{5-7x^2}} =$$

$$5-7x^2 = t; \quad -14x\,dx = dt; \quad x\,dx = -\frac{1}{14}dt$$

$$= -\frac{1}{14}\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = -\frac{1}{14}\int t^{-\frac{1}{3}}\,dt = -\frac{1}{14}\,\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{28}\sqrt[3]{t^2} =$$

$$= \underline{-\frac{3}{28}\sqrt[3]{(5-7x^2)^2} + C}$$

Obratimo pažnju na to, da se uvijek supstituira radikand, a nikad sam korijen.

Četvrto pravilo. Pravilo parcijalne (djelomične) integracije. Znamo, da je prema (8)

$$d(u\cdot v) = u\cdot dv + v\cdot du$$

Integriramo li obje strane te jednakosti, dobit ćemo:

$$\int d(u\cdot v) = u\cdot v = \int u\cdot dv + \int v\cdot du$$

a odatle:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{63}$$

To je formula parcijalne (djelomične) integracije.

Ta formula daje mogućnost izraziti $\int u\,dv$, koji ne znamo izračunati, pomoću $\int v\,du$, koji izračunati znamo. Iz toga jasno slijedi, da taj drugi integral $\int v\,du$ mora biti lakši od zadanog integrala $\int u\,dv$.

Načinom parcijalne integracije računaju se obično integrali, koji sadržavaju produkt funkcija ili logaritamsku funkciju ili arkus-funkcije, odnosno Area-funkcije.

Primjeri

1 $\int x \sin x\,dx$

Stavimo:

$$u = x; \quad \text{odatle} \quad du = dx$$

$$dv = \sin x\,dx; \quad v = \int \sin x\,dx = -\cos x$$

Jasno je, da ono, što označujemo s dv, mora sadržavati dx!

Uvrštenje u formulu (63) daje:

$$\int \underset{u}{x}\cdot \underset{dv}{\sin x\,dx} = \underset{u}{x}\cdot \underset{v}{(-\cos x)} - \int \underset{v}{(-\cos x)}\cdot \underset{du}{dx} =$$

$$= \underline{-x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C}$$

Vidimo, da smo pomoću formule parcijalne integracije sveli $\int x \sin x\,dx$, koji nismo znali izračunati, na osnovni integral $\int \cos x\,dx = \sin x$.

2. Kadšto treba nekoliko puta redom parcijalno integrirati.
Na pr.

$$\int x^3 \cos x \, dx =$$

$$u = x^3, \quad du = 3x^2 dx; \quad dv = \cos x \, dx; \quad v = \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$= \text{prema (63)} = x^3 \sin x - \int \sin x \cdot 3x^2 dx = x^3 \sin x - 3 \int x^2 \sin x \, dx =$$

Zadani integral smo sveli na lakši, jer smo snizili eksponent od x (imali smo x^3, a sada imamo x^2).

Ponovo parcijalno integriramo:

$$u = x^2; \quad du = 2x \, dx; \quad dv = \sin x \, dx; \quad v = \int \sin x \cdot dx = -\cos x$$

$$= x^3 \sin x - 3(-x^2 \cos x + 2 \int \cos x \cdot x \, dx) =$$

$$= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6 \int x \cos x \, dx =$$

treći put parcijalno integriramo:

$$u = x; \quad du = dx; \quad dv = \cos x \, dx; \quad v = \int \cos x \cdot dx = \sin x$$

$$= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6(x \sin x - \int \sin x \, dx) =$$

$$= x^3 \sin x + 3x^2 \cdot \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x =$$

$$\underline{= (x^3 - 6x) \sin x + (3x^2 - 6) \cos x + C}$$

Izračunaj na isti način

$$\int x^4 \sin x \, dx$$

$$[= -x^4 \cos x + 4x^3 \sin x + 12x^2 \cos x - 24x \sin x - 24 \cos x + C]$$

3. $\int x \cdot \ln x \, dx =$

Postupamo kao prije prema (63):

$$u = x; \quad du = dx$$

$$dv = \ln x \, dx; \quad v = \int \ln x \, dx$$

Došli smo do težeg integrala $v = \int \ln x \, dx$, jer smo radili formalno ne vodeći računa o tome, što je podesnije označiti s u a što s dv. Prema tome držat ćemo se pri parcijalnom integriranju pravila:

Uvijek treba s dv označivati ono, što se da lako integrirati, pri čemu treba paziti da $\int v \, du$ bude lakši od $\int u \, dv$.

Ponovo računamo naš zadani integral:

$$\int x \ln x \, dx = \int \underset{u}{\ln x} \cdot \underset{dv}{x \, dx} =$$

$$u = \ln x; \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x \, dx; \quad v = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}$$

$$= \text{prema (63)} = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \underline{\frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C}$$

$\int \ln x \, dx$ možemo izračunati, ali naravno izvan okvira parcijalne integracije:

$$\int \underset{u}{\ln x} \, \underset{dv}{dx} =$$

$$u = \ln x; \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx; \quad v = x$$

$$= \text{prema (63)} = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = \underline{x \ln x - x + C}$$

Izračunaj na slični način:

$$\int \frac{\ln x \, dx}{x^2} \qquad \left[= -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C \right]$$

Navedimo još dva primjera za taj slučaj:

1. $$\int x^2 \operatorname{arc\,tg} x \, dx = \int \underset{u}{\operatorname{arc\,tg} x} \cdot \underset{dv}{x^2 dx} =$$

$$u = \operatorname{arc\,tg} x; \quad du = \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$dv = x^2 dx; \quad v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

$$= \text{prema (63)} = \operatorname{arc\,tg} x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \int x^3 \cdot \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx =$$

da izračunamo taj integral, podijelimo brojnik s nazivnikom:

$$\begin{array}{l} x^3 : (x^2 + 1) = x - \dfrac{x}{x^2 + 1} \\ \underline{\pm x^3 \pm x} \\ \quad -x \end{array}$$

dakle:

$$\frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{3} \int x \, dx + \frac{1}{3} \int \frac{x \, dx}{x^2 + 1} =$$

$$x^2 + 1 = t; \quad 2x \, dx = dt; \quad x \, dx = \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} =$$

$$\underline{= \frac{x^3}{3} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln |x^2 + 1| + C}$$

Izračunaj na isti način:

$$\int x \operatorname{Ar\,th} x \, dx \qquad \left[= \frac{x^2-1}{2} \operatorname{Ar\,th} x + \frac{x}{2} + C\right]$$

2. $$\int e^x x^2 dx =$$

$$u = e^x; \quad du = e^x dx$$

$$dv = x^2 dx; \quad v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

$$= e^x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \int x^3 \cdot e^x dx$$

Dobili smo integral teži od zadanoga, jer se eksponent od x povećao za jedinicu.

Rješavamo nanovo promijenivši redoslijed funkcija i oznaku:

$$\int e^x x^2 dx = \int x^2 e^x dx =$$

$$u = x^2; \quad du = 2x dx$$

$$dv = e^x dx; \quad v = \int e^x dx = e^x$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \int e^x \cdot x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx =$$

dobili smo lakši integral, jer se eksponent od x sada 'snizio za jedinicu. Ponovo parcijalno integriramo:

$$u = x; \quad du = dx$$

$$dv = e^x dx; \quad v = \int e^x dx = e^x$$

$$= x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x = \underline{e^x(x^2 - 2x + 2) + C}$$

Izračunaj na isti način:

$$\int e^x x^3 dx \qquad [= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C]$$

$$\int x^2 e^{-x} dx \qquad [= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C]$$

$$\int a^x \cdot x dx \qquad \left[= a^x \left(\frac{x}{\ln a} - \frac{1}{\ln^2 a}\right) + C\right]$$

4. $$\int \arcsin x \, dx =$$

Kako ispred dx stoji samo jedna funkcija, možemo uzeti samo ovako:

$$u = \arcsin x; \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$dv = dx; \quad v = x$$

$$= \text{prema (63)} = \arcsin x \cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C}$$

(vidi Treće pravilo, točku 9).

Izračunaj na isti način:

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx \qquad [= x \operatorname{arc\,tg} x - \ln \sqrt{1+x^2} + C]$$

5. Na kraju navedimo još dva integrala, koja se često susreću u tehničkim računima, na pr. u elektrotehnici.

To su integrali:

$$I_1 = \int e^{ax} \cdot \sin(bx)\, dx \quad \text{i} \quad I_2 = \int e^{ax} \cdot \cos(bx)\, dx$$

Možemo ih izračunati zajedno, kako slijedi:

$$I_1 = \int e^{ax} \cdot \sin(bx)\, dx =$$

$$u = \sin(bx); \quad du = b \cos(bx)\, dx$$

$$dv = e^{ax} dx; \quad v = \int e^{ax} dx = \text{prema (61)} = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$= \sin(bx) \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cdot \cos(bx) \cdot dx, \text{ a to je } I_2.$$

Dakle:

$$I_1 = \frac{e^{ax}}{a} \sin(bx) - \frac{b}{a} \cdot I_2 \qquad \text{(a)}$$

Sada računamo na isti način I_2:

$$I_2 = \int e^{ax} \cdot \cos(bx)\, dx =$$

$$u = \cos(bx); \quad du = -b \sin(bx)\, dx$$

$$dv = e^{ax} dx; \quad v = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$= \cos(bx) \cdot \frac{e^{ax}}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \cdot \sin(bx)\, dx, \text{ a to je } I_1.$$

Dakle:

$$I_2 = \frac{e^{ax}}{a} \cos(bx) + \frac{b}{a} I_1 \qquad \text{(b)}$$

Dobili smo dvije jednadžbe (a) i (b) s dvije nepoznanice I_1 i I_2. Riješimo te jednadžbe načinom determinanata (vidi Repetitorij elementarne matematike, I, § 11) prethodno napisavši ih u obliku:

$$I_1 + \frac{b}{a} I_2 = \frac{e^{ax}}{a} \sin(bx)$$

$$\frac{b}{a} I_1 - I_2 = -\frac{e^{ax}}{a} \cos(bx)$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{e^{ax}}{a}\sin(bx) & \frac{b}{a} \\ -\frac{e^{ax}}{a}\cos(bx) & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ \frac{b}{a} & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{e^{ax}}{a}\sin(bx) + \frac{b}{a}\frac{e^{ax}}{a}\cos(bx)}{-1-\frac{b^2}{a^2}} =$$

$$= \frac{-\frac{e^{ax}}{a^2}[a\sin(bx) - b\cos(bx)]}{-\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \underline{\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin(bx) - b\cos(bx)] + C}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{e^{ax}}{a}\sin(bx) \\ \frac{b}{a} & -\frac{e^{ax}}{a}\cos(bx) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ \frac{b}{a} & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{e^{ax}}{a}\cos(bx) - \frac{b}{a}\frac{e^{ax}}{a}\sin(bx)}{-1-\frac{b^2}{a^2}} =$$

$$= \frac{-\frac{e^{ax}}{a^2}[a\cos(bx) + b\sin(bx)]}{-\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \underline{\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos(bx) + b\sin(bx)] + C}$$

Dobili smo dakle:

$$\int e^{ax}\cdot\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin(bx) - b\cos(bx)] + C \tag{64}$$

$$\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos(bx) + b\sin(bx)] + C \tag{65}$$

Izračunaj na isti način integrale:

$$\int e^{2x}\cdot\sin(5x)\,dx;\quad \int e^{-x}\cos(4x)\,dx;\quad \int\frac{\cos 2x\,dx}{e^{3x}};$$

$$\int e^{3x}(\sin 2x - \cos 2x)\,dx$$

kontrolirajući rezultate prema formulama (64) i (65).

4. O konstanti integracije C

Sada kada već znamo nešto integrirati, kažimo nekoliko riječi o konstanti integracije C, kojoj, kako znamo, možemo dati bilo koju vrijednost, dakle beskonačno mnogo vrijednosti.

Međutim, u svakom konkretnom slučaju možemo odrediti vrijednost konstante integracije C, ako nam je poznata vrijednost neodređenog integrala za neku vrijednost promjenljive.

Pokažimo to na primjeru.

Odredi funkciju y, koja ima za $x = 2$ vrijednost 6 i kojoj je prva derivacija $y' = 3x^2 - 2x + 3$.

Kako je integriranje inverzna operacija od deriviranja, tražena funkcija bit će:

$$y = \int (3x^2 - 2x + 3)\,dx = 3\frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + C$$

ili

$$y = x^3 - x^2 + 3x + C$$

a kako je $y = 6$ za $x = 2$, imamo:

$$6 = 8 - 4 + 6 + C$$

Odatle:

$$\underline{C = -4}$$

pa tražena funkcija glasi

$$\underline{y = x^3 - x^2 + 3x - 4}$$

Neodređeni integral $y = x^3 - x^2 + 3x + C$, koji smo dobili u tom primjeru, predočuje familiju kubnih parola, koje se dobiju paralelnim pomicanjem (translacijom) jedne od njih uzduž osi Y.

Sada je jasno i geometrijsko značenje neodređenog integrala.

Kako svaki neodređeni integral ima oblik:

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$$

to on predočuje geometrijski familiju krivulja, koja ovisi o jednoj konstanti po volji C ili, kako se kaže, o jednom parametru C. Svakom točkom ravnine (X, Y) prolazi jedna krivulja familije, pa zadamo li koordinate jedne točke, možemo odrediti jednadžbu one krivulje familije, koja prolazi tom točkom.

Konstanta integracije se pojavljuje i kod kompliciranijih problema, koji su u vezi s integriranjem, naime kod rješavanja diferencijalnih jednadžbi.

Možemo već ovdje navesti dva takva jednostavna primjera.

1. Traži se jednadžba krivulje, kojoj je gradijent tangente u svakoj točki krivulje jednak omjeru apscise i ordinate te točke s predznakom minus.

Znamo, da je gradijent tangente na krivulje $y = y(x)$

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = \frac{dy}{dx}$$

Prema zadatku:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Iz toga slijedi:

$$y\,dy = -x\,dx$$

Integriramo lijevu i desnu stranu jednadžbe:

$$\int y\,dy = -\int x\,dx + C$$

Nema smisla dodavati konstantu integracije C_1 i lijevoj strani jednadžbe, jer bismo uvijek mogli tu konstantu C_1 prebaciti na desnu stranu jednadžbe, pa bismo dobili $C - C_1$, a to je jedna konstanta po volji, jer razlika ili zbroj dviju konstanata po volji jest jedna konstanta po volji.

Integriranje daje:

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \,/\cdot 2$$

$$x^2 + y^2 = 2C \qquad \text{(a)}$$

Dobili smo bezbroj koncentričnih kružnica polumjera po volji $\sqrt{2C}$ sa središtem u ishodištu, ili, kako se kaže, familiju koncentričnih kružnica sa središtima u ishodištu, jer svakoj po volji uzetoj pozitivnoj vrijednosti konstante C odgovara jedna kružnica.

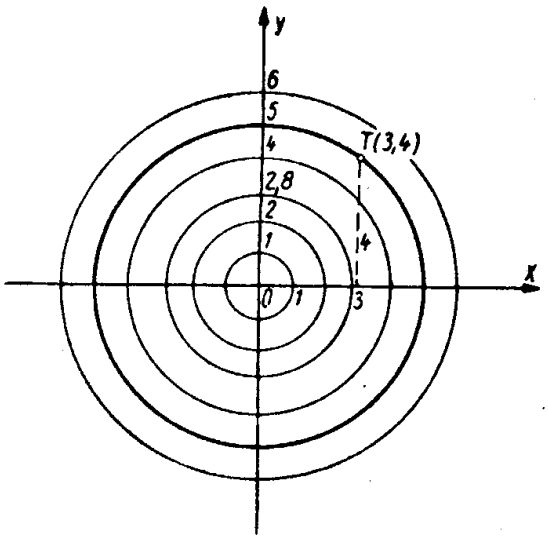
Na pr.

za $C = \frac{1}{2}$	imamo	$x^2 + y^2 = 1;$	$r = 1$
za $C = 2$	„	$x^2 + y^2 = 4;$	$r = 2$
za $C = 4$	„	$x^2 + y^2 = 8;$	$r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2{,}82$
za $C = 8$	„	$x^2 + y^2 = 16;$	$r = 4$
za $C = 18$	„	$x^2 + y^2 = 36;$	$r = 6$

(Vidi sl. 26). i t. d.

Vidi se, da smo i ovdje dobili familiju krivulja, koja ovisi o konstanti C, ali se te krivulje više ne dobiju paralelnim pomicanjem jedne od njih u smjeru osi Y. No i ovdje prolazi svakom točkom ravnine jedna takva krivulja.

Pretpostavimo, na pr., da naša tražena krivulja ima proći točkom $T(3, 4)$. Uvrštenje $x = 3$ i $y = 4$ u (a) daje:



Sl. 26.

$$9 + 16 = 2C$$

ili

$$2C = 25$$

To uvrstimo opet u (a):

$$\underline{x^2 + y^2 = 25}$$

Dobili smo kružnicu polumjera 5 (vidi sl. 26).

Primijetimo: ako jednadžba, koju integriramo, ima oblik $\frac{dy}{dx} = f(x)$, t. j. na desnoj strani nema y, dobijemo familiju usporednih krivulja, koje izlaze jedna iz druge translacijom uzduž osi Y.

Kao primjer odredi jednadžbu krivulje, kojoj je gradijent tangente u svakoj točki jednak dvostrukoj apscisi i nariši nekoliko krivulja te familije.

$$\left[\frac{dy}{dx} = 2x; \quad y = x^2 + C\right]$$

U drugom primjeru pokažimo fizičko značenje konstante integracije C.

2. Odredi zakon, po kojem se giblje tijelo, koje slobodno pada iz stanja mirovanja u zrakopraznom prostoru (vakuumu).

Uzevši u obzir, da je ubrzanje (akceleracija) derivacija brzine v po vremenu t (vidi Dio I. § 16) imamo:

$$\frac{dv}{dt} = g, \quad \text{gdje } g = 9{,}81 \frac{m}{sec^2} = \text{ubrzanje sile teže.}$$

Odatle

$$dv = g \cdot dt$$

Integriramo:

$$v = gt + C_1 \qquad \text{(a)}$$

Tijelo je počelo padati iz stanja mirovanja, t. j. u početni moment $t = 0$ početna brzina bila je $v = 0$.

Uvrštenje u (a) daje:

$$0 = 0 + C_1$$

$$C_1 = 0$$

To uvrstimo opet u (a):

$$\underline{v = gt} \qquad \text{(b)}$$

To je zakon, po kojemu se mijenja brzina slobodno padajućeg tijela. Vidimo, da je brzina v linearna funkcija vremena t.

Znamo, da je brzina v derivacija puta s po vremenu t, t. j.

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Uvrštenje u (b) daje

$$\frac{ds}{dt} = gt \;/ \cdot dt$$

$$ds = gt\, dt$$

Integriramo:

$$s = g \cdot \frac{t^2}{2} + C_2 \qquad \text{(c)}$$

Tijelo je počelo padati iz stanja mirovanja, t. j. u početni moment $t = 0$ početni je put bio $s = 0$.

Uvrštenje u (c) daje:

$$0 = C_2$$

$$C_2 = 0$$

To uvrstimo u (c):

$$\underline{s = \frac{1}{2} gt^2} \qquad \text{(d)}$$

Dobili smo poznati zakon slobodnog pada.

Iz (b) slijedi

$$t = \frac{v}{g}$$

Uvrštenje u (d) daje:

$$s = \frac{1}{2} g \cdot \frac{v^2}{g^2} = \frac{v^2}{2g}$$

Odatle:

$$\underline{v = \sqrt{2gs}} \qquad \text{(e)}$$

Brzinu v slobodnog pada prikazali smo kao funkciju prevaljenog puta s.

5. Upute i primjedbe obzirom na integriranje

Svakome je poznato, da je inverzna operacija uvijek teža od direktne: lakše je zbrajati nego oduzimati, množiti nego dijeliti, potencirati nego vaditi korijen ili logaritmirati. Kako smo vidjeli, postoje samo četiri gore navedena pravila za računanje neodređenih integrala. Iz toga već naslućujemo velike teškoće, na koje nailazimo pri integriranju. Kako da svladamo te teškoće?

Preporučujemo:

1. Čvrsto znanje napamet formula deriviranja i potpunu sigurnost u diferenciranju;
2. čvrsto znanje napamet osnovnih integrala i nekih integrala njima bliskih, da se pri računanju složenih integrala ne izgubi u sitnicama (ti integrali su navedeni u posebnom popisu formula, koji se nalazi na kraju ove knjige);
3. proraditi što više primjera za integriranje metodom supstitucije i parcijalne integracije, jer su to osnovne metode, pomoću kojih se rješavaju i najteži integrali.

Tek kad su te metode posve usvojene, može se prijeći na teže integrale, koje smo dalje podijelili u tipove, jer samo vježbanjem, mnogokratnim vježbanjem možemo postići brzinu i sigurnost u računanju integrala.

Iz navedenog nikako ne slijedi, da ćemo uz najbolje poznavanje svih metoda integriranja moći izračunati svaki integral. Znamo, da vršeći nad racionalnim brojevima racionalne operacije, t. j. operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja, uvijek ostajemo u području racionalnih brojeva i da nas tek vađenje korijena i logaritmiranje vodi izvan tog područja, pa se područje realnih brojeva proširuje iracionalnim brojevima.

Slični slučaj imamo kod integracije. Derivirajući poznate nam elementarne funkcije dobijemo uvijek kao rezultat opet elementarne funkcije u svim mogućim kombinacijama. Međutim, integriranje elementarnih funkcija vodi često izvan okvira tih funkcija pa traži uvođenje novih funkcija, da se integriranje može izvesti. Kako računanje tih novih funkcija čini mnogo teškoća, u tehničkim se disciplinama zadovoljavamo obično približnim računanjem tih integrala, da ostanemo u području jednostavnih elementarnih funkcija.

Na pr. $\int \frac{\sin x}{x} dx$ ne možemo izraziti konačnim brojem elementarnih funkcija, jer nema nikakve elementarne funkcije, kojoj je derivacija jednaka $\frac{\sin x}{x}$, pa *taj integral računamo približno i to tako, da podintegralnu funkciju* $\frac{\sin x}{x}$ *razvijemo u beskonačni red potencija i taj red integriramo član po član.* Potanko o tome bit će govora kasnije (pokušaj izračunati $\int \frac{\sin x}{x} dx$ parcijalnom integracijom uzevši na pr. $u = \sin x$ i $dv = \frac{1}{x} dx$. Nakon drugog parcijalnog integriranja dobit ćeš $0 = 0$).

6. Predtipovi neodređenih integrala

Prije nego prijeđemo na tipove integrala, navest ćemo posebno pod imenom »predtipovi« tri vrste integrala. Ti integrali spadaju zapravo u tipove integrala, o kojima će biti govora kasnije. Ipak ćemo ih izdvojiti i to s razloga, što su od osobite praktične važnosti i što se daju jednostavnije računati, nego na načine, navedene kasnije pod »Tipovi neodređenih integrala«.

Predtip A

Ovamo spadaju integrali oblika:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \int \frac{dx}{\text{kvadratna funkcija}}$$

t. j. integrali, koji imaju u brojniku samo dx, a u nazivniku samo kvadratnu funkciju. Integrali toga oblika svodimo na jedan od poznatih nam integrala:

$$\int \frac{dx}{k^2 + x^2} = \frac{1}{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{k} + C \qquad (52a)$$

ili

$$\int \frac{dx}{x^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \ln \frac{k - x}{k + x} + C \qquad (55b)\ [\text{ili } (56b)]$$

Postupak pokažimo na konkretnim primjerima.

1. $$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 5} =$$

Prvi korak: Izlučimo koeficijent od x^2:

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}} =$$

Drugi korak: prva dva člana kvadratne funkcije nadopunimo na potpuni kvadrat prema poznatoj formuli:

$$x^2 \pm px \pm q = \left(x \pm \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \pm q \quad \text{(vidi Dio I. formula (34))}$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + \frac{5}{3}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{9}} =$$

Treći korak: Supstitucija:

$$x - \frac{1}{3} = t;\ dx = dt, \quad k^2 = \frac{14}{9},\ k = \sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + k^2} =$$

Četvrti korak: Integriramo prema (52a):

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot 3}{\sqrt{14}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{14}} \operatorname{arc\,tg} \frac{3x - 1}{\sqrt{14}} + C}$$

2. $$\int \frac{dx}{3x - 5x^2} =$$

Prvi korak:

$$= -\frac{1}{5} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{3}{5}x} =$$

Drugi korak:

$$= -\frac{1}{5} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{9}{100}} =$$

Treći korak: Supstitucija:

$$x - \frac{3}{10} = t, \; dx = dt, \; k^2 = \frac{9}{100}, \; k = \frac{3}{10}$$

Pazi! S k^2 ne smiješ označivati negativnu veličinu, jer bi k bio imaginaran, pa integral ne bi imao realnog značenja.

$$= -\frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^2 - k^2} =$$

Četvrti korak:

$$= \text{prema (55b)} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2k} \cdot \ln \frac{k - t}{k + t} = -\frac{1}{10} \cdot \frac{10}{3} \ln \frac{\frac{3}{10} - x + \frac{3}{10}}{\frac{3}{10} + x - \frac{3}{10}} =$$

$$= -\frac{1}{3} \ln \frac{3 - 10x + 3}{3 + 10x - 3} = -\frac{1}{3} \ln \frac{6 - 10x}{10x} =$$

$$= + \frac{1}{3} \ln \frac{10x}{6 - 10x} = \underline{\ln \sqrt[3]{\frac{10x}{6 - 10x}} + C}$$

Izračunaj:

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} \qquad \left[= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\right]$$

$$\int \frac{dx}{2 + 8x - 7x^2} \text{ prema (56b)} \qquad \left[= \frac{1}{2\sqrt{30}} \ln \frac{7x - 4 + \sqrt{30}}{7x - 4 - \sqrt{30}} + C\right]$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 12} \text{ prema (56b)} \qquad \left[= \ln \frac{x-4}{x-3} + C\right]$$

Predtip B

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\text{kvadratna funkcija}}}$$

Integrali predtipa B razlikuju se od integrala predtipa A samo u tome, što se kvadratna funkcija nalazi pod drugim korijenom.
Svodimo na jedan od integrala:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{k} + C \tag{51a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 + x^2}} = \ln(x + \sqrt{k^2 + x^2}) + C \tag{53a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - k^2}) + C \tag{54a}$$

Postupak je isti kao kod predtipa A, imamo dakle napraviti ista četiri koraka.

Primjeri

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x - 3x^2}} =$$

Prvi korak:

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right]}} =$$

Pazi! Ne smijemo izlučiti $\frac{1}{\sqrt{-3}}$, jer integral ne bi imao realnog značenja!

Drugi korak:

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[\left(x+\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} - \frac{1}{3}\right]}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{13}{36} - \left(x+\frac{1}{6}\right)^2}} =$$

Treći korak:

$$\frac{13}{36} = k^2, \quad k = \frac{\sqrt{13}}{6}, \quad t = x + \frac{1}{6}, \quad dt = dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} =$$

Četvrti korak:

$$= \text{prema (51a)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{t}{k} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\left(x+\frac{1}{6}\right)\cdot 6}{\sqrt{13}} =$$

$$\underline{= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{6x+1}{\sqrt{13}} + C}$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x+2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}}} =$$

$$x - \frac{3}{4} = t, \quad dx = dt, \quad k^2 = \frac{1}{16} \qquad \text{Pazi: } k^2 > 0!$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - k^2}} = \text{prema (54a)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(t + \sqrt{t^2 - k^2}\right) =$$

idući u našim računima natrag vidimo, da je

$$t^2 - k^2 = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

pa imamo

$$\underline{= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(x - \frac{3}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}\right) + C}$$

Izračunaj:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} \qquad \left[= \ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x+5x^2}} \qquad \left[= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(x+\frac{2}{5}+\sqrt{x^2+\frac{4}{5}x}\right)+C\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-5x^2}} \qquad \left[= \frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{5x-2}{2}+C\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x-5}} \qquad \left[= \frac{1}{2}\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-\frac{5}{4}}\right)+C\right]$$

Predtip C

Ovamo spadaju integrali:

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\cdot dx = \int \sqrt{\text{kvadratna funkcija}}\cdot dx$$

Na početku računamo na isti način, kao kod predtipova A i B, t. j. izlučujemo koeficijent od x^2, nadopunjavamo prva dva člana kvadratne funkcije i provodimo istu supstituciju, t. j. svodimo zadani integral na jedan od oblika:

$$\int \sqrt{t^2-k^2}\cdot dt; \quad \int \sqrt{k^2-t^2}\cdot dt \text{ ili } \int \sqrt{t^2+k^2}\cdot dt.$$

Kao daljnje rješavanje tih integrala traži još mnogo posla, označimo odmah zadani integral s I.

Primjeri

1. $$I = \int \sqrt{3x^2-4x-5}\cdot dx$$

Prvi korak: kao kod predtipova A i B:

$$I = \sqrt{3}\int \sqrt{x^2-\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}}\,dx = \sqrt{3}\int \sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}-\frac{5}{3}}\cdot dx =$$

$$= \sqrt{3}\int \sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{19}{9}}\cdot dx$$

Supstitucija:

$$x-\frac{2}{3} = t; \quad dx = dt$$

$$k^2 = \frac{19}{9}; \quad k = \frac{\sqrt{19}}{3} \qquad \text{(a)}$$

$$I = \sqrt{3}\int \sqrt{t^2-k^2}\cdot dt$$

Da množitelj $\sqrt{3}$ ne smeta pri daljnjem računanju, stavimo:

$$\int \sqrt{t^2 - k^2} \cdot dt = I_1,$$

pa je

$$I = \sqrt{3} \cdot I_1 \qquad \text{(b)}$$

Drugi korak:

$$I_1 = \int \sqrt{t^2 - k^2} \cdot dt$$

Kako osnovni integrali imaju korijen iz kvadratne funkcije u nazivniku, množimo i dijelimo integrand s $\sqrt{t^2 - k^2}$, da taj korijen dođe u nazivnik, pa dijeleći svaki član brojnika s nazivnikom dobijemo:

$$I_1 = \int \frac{t^2 - k^2}{\sqrt{t^2 - k^2}} dt = \underbrace{\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2 - k^2}}}_{I_2} - k^2 \underbrace{\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - k^2}}}_{I_3}$$

ili

$$I_1 = I_2 - k^2 I_3 \qquad \text{(c)}$$

gdje je:

$$I_2 = \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2 - k^2}}, \quad \text{a} \quad I_3 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - k^2}} \qquad \text{(d)}$$

Treći korak: Računamo teži integral I_2 načinom parcijalne integracije. U tu svrhu pišemo I_2 u obliku:

$$I_2 = \int t \cdot \frac{t\, dt}{\sqrt{t^2 - k^2}}$$

$$u = t; \quad du = dt$$

$$dv = \frac{t\, dt}{\sqrt{t^2 - k^2}}; \quad v = \int \frac{t\, dt}{\sqrt{t^2 - k^2}} =$$

$$t^2 - k^2 = z; \quad 2t\, dt = dz; \quad t\, dt = \frac{1}{2} dz$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2} \int z^{-\frac{1}{2}} \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{z} = \sqrt{t^2 - k^2}$$

Dakle:

$$v = \sqrt{t^2 - k^2}$$

Prema (63)

$$u\, dv = uv - \int v\, du$$

imamo:

$$I_2 = t \cdot \sqrt{t^2 - k^2} - \int \sqrt{t^2 - k^2}\, dt$$

ali

$$\int \sqrt{t^2 - k^2} \cdot dt = I_1$$

dakle

$$I_2 = t\sqrt{t^2 - k^2} - I_1$$

To uvrstimo u (c):

$$I_1 = t\sqrt{t^2 - k^2} - I_1 - k^2 \cdot I_2$$

Odatle

$$2I_1 = t\sqrt{t^2 - k^2} - k^2 \cdot I_2 \quad /:2$$

$$I_1 = \frac{t}{2}\sqrt{t^2 - k^2} - \frac{k^2}{2} \cdot I_2$$

To uvrstimo u (b):

$$I = \sqrt{3}\left[\frac{t}{2}\sqrt{t^2 - k^2} - \frac{k^2}{2} I_2\right] \qquad \text{(e)}$$

Četvrti korak:

Prema (54a)

$$I_2 = \text{vidi (d)} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - k^2}} = \ln(t + \sqrt{t^2 - k^2}) + C_1$$

Uvrštenje u (e) daje:

$$I = \sqrt{3}\left[\frac{t}{2}\sqrt{t^2 - k^2} - \frac{k^2}{2}\ln(t + \sqrt{t^2 - k^2})\right] + C_1$$

$$\left(C_1 = +\sqrt{3}\frac{k^2}{2}\ln k + C\right)$$

Peti korak:

Uvrstimo (a) u I:

$$I = \sqrt{3}\left[\frac{x - \frac{2}{3}}{2}\sqrt{x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}} - \frac{19}{18}\ln\left(x - \frac{2}{3} + \sqrt{x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}}\right)\right] + C_1$$

2. $$I = \int \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$$

Prvi korak: otpada

Drugi korak:

$$I = \int \frac{r^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx = r^2 \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}}_{I_2}$$

$$I = r^2 I_1 - I_2 \qquad \text{(a)}$$

Treći korak:

$$I_2 = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \int x \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$u = x; \quad du = dx$$

$$dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}; \quad v = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} =$$

$$r^2 - x^2 = t; \quad -2x\,dx = dt; \quad x\,dx = -\frac{1}{2}dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{t} = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$v = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$I_2 = -x\sqrt{r^2 - x^2} + \int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

$$I_2 = -x\sqrt{r^2 - x^2} + I$$

To uvrstimo u (a):

$$I = r^2 I_1 + x\sqrt{r^2 - x^2} - I$$

Pazi: I se nikad ne ukida! Ako bi se u tvom računanju ukidao, traži pogrešku u predznaku pri oduzimanju I_2!

Odatle

$$2I = r^2 I_1 + x\sqrt{r^2 - x^2} \quad /:2$$

$$I = \frac{r^2}{2} I_1 + \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{(b)}$$

Četvrti korak:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \text{prema (51a)} = \arcsin\frac{x}{r}$$

Peti korak:

Uvrštenje u (b) daje:

$$I = \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r} + \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + C$$

ili

$$\underline{I = \frac{1}{2}\left(r^2 \cdot \arcsin\frac{x}{r} + x\sqrt{r^2 - x^2}\right) + C}$$

$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$ možemo riješiti jednostavnije uz supstituciju

$$x = r \sin t$$

odnosno $\sin t = \frac{x}{r}$

odakle $t = \arc\sin \frac{x}{r}$

i $dx = r \cos t\, dt$

Uvrštenje u integral daje:

$$I = \int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = r \int \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cos t\, dt = r^2 \int \cos^2 t\, dt =$$

$$= \text{prema (60 a)} = r^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) =$$

$$= \frac{r^2}{2} \left[\arc\sin \frac{x}{r} + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arc\sin \frac{x}{r}\right)\right]$$

Prema $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ imamo:

$$\sin\left(2 \arc\sin \frac{x}{r}\right) = 2 \sin\left(\arc\sin \frac{x}{r}\right) \cos\left(\arc\sin \frac{x}{r}\right) =$$

= prema formuli (73 a) iz I. dijela Repetitorija =

$$= 2 \frac{x}{r} \cos\left(\arc\sin \frac{x}{r}\right) = 2 \frac{x}{r} \cos t = 2 \frac{x}{r} \sqrt{1 - \sin^2 t} =$$

$$= 2 \frac{x}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} = 2 \frac{x}{r^2} \sqrt{r^2 - x^2}$$

Uvrštenje u I daje:

$$I = \frac{r^2}{2} \left(\arc\sin \frac{x}{r} + \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{x}{r^2} \sqrt{r^2 - x^2}\right)$$

ili

$$\underline{I = \frac{r^2}{2} \arc\sin \frac{x}{r} + \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + C}$$

Na isti način možemo riješiti integrale:

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = a \int \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}\, dx \quad \text{uz supstituciju}$$

$$\frac{x}{a} = \operatorname{sh} t, \text{ jer je } \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = \operatorname{ch} t$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = a \int \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\, dx \quad \text{uz supstituciju}$$

$$\frac{x}{a} = \operatorname{ch} t, \text{ jer je } \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = \operatorname{sh} t$$

Integracija je vrlo jednostavna, mnogo više vremena traži transformiranje izraza dobivenog integriranjem, kako smo to vidjeli iz gornjeg primjera.

Riješi na taj drugi način navedena dva integrala.

3. $$I = \int \sqrt{x^2 + x + 1}\, dx = \int \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1}\, dx =$$

$$= \int \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\, dx =$$

$$x + \frac{1}{2} = t; \quad dx = dt; \quad \frac{3}{4} = k^2, \quad k = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(a)}$$

$$I = \int \sqrt{t^2 + k^2} \cdot dt = \int \frac{t^2 + k^2}{\sqrt{t^2 + k^2}}\, dt = \underbrace{\int \frac{t^2\, dt}{\sqrt{t^2 + k^2}}}_{I_1} + k^2 \underbrace{\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + k^2}}}_{I_2}$$

$$I = I_1 + k^2 I_2 \qquad \text{(b)}$$

$$I_1 = \int t \cdot \frac{t\, dt}{\sqrt{t^2 + k^2}}$$

$$u = t; \quad du = dt; \quad v = \int \frac{t\, dt}{\sqrt{t^2 + k^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{z} = \sqrt{t^2 + k^2}$$

$$t^2 + k^2 = z; \quad 2t\, dt = dz; \quad t\, dt = \frac{1}{2} dz$$

$$I_1 = t \cdot \sqrt{t^2 + k^2} - \underbrace{\int \sqrt{t^2 + k^2} \cdot dt}_{I}$$

Uvrstimo u (b):

$$I = t\sqrt{t^2 + k^2} - I + k^2 I_2$$

$$I = \frac{t}{2}\sqrt{t^2 + k^2} + \frac{k^2}{2} I_2 \qquad \text{(c)}$$

$$I_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + k^2}} = \text{prema (53a)} = \ln\left(t + \sqrt{t^2 + k^2}\right)$$

Uvrstimo u (c):

$$I = \frac{t}{2}\sqrt{t^2 + k^2} + \frac{k^2}{2} \ln\left(t + \sqrt{t^2 + k^2}\right) + C$$

Uvrštenje (a) daje:

$$\underline{I = \frac{1}{2}\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{3}{4} \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right)\right] + C}$$

Izračunaj integrale:

$$\int \sqrt{7x^2 - 5x} \cdot dx$$

$$\left\{= \frac{\sqrt{7}}{2}\left[\left(x - \frac{5}{14}\right)\sqrt{x^2 - \frac{5}{7}x} - \frac{25}{196}\ln\left(x - \frac{5}{14} + \sqrt{x^2 - \frac{5}{7}x}\right)\right] + C\right\}$$

$$\int \sqrt{2x - x^2}\, dx \qquad \left[= \frac{1}{2}\arcsin(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x - x^2} + C\right]$$

$$\int \sqrt{3x^2 + 10x + 9}\, dx$$

$$\left\{= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(x + \frac{5}{3}\right)\sqrt{x^2 + \frac{10}{3}x + 3} + \frac{2}{9}\ln\left(x + \frac{5}{3} + \sqrt{x^2 + \frac{10}{3}x + 3}\right)\right] + C\right\}$$

Integrale predtipa C možemo računati i na drugi način. Vidi dalje „Posebni oblici integrala tipa III", slučaj a).

Preporučuje se početniku, da na posebnom arku papira ispiše što spada u svaki predtip, odnosno tip integrala, i ukratko naznači pojedine korake računanja.

7. Tipovi neodređenih integrala

U tom poglavlju navest ćemo deset vrsti integrala i pokazat ćemo, kako se ti integrali računaju. Prema tome treba dobro pamtiti, koji integrali spadaju u svaki pojedini tip i kako se svaki pojedini tip integrala računa. Iz toga nikako ne slijedi, da treba svaki integral, koji spada u jedan od tih tipova, baš tako računati, kako je za dotični tip naznačeno. Ne, najprije kušaj riješiti svaki integral što jednostavnije bez obzira na tip, u koji spada, na pr. pomoću zgodne supstitucije, i tek kad to ne ide, potraži tip u koji spada, pa ga rješavaj kako je tamo naznačeno.

Tip I.

$$\int R(x)\, dx = \int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\, dx = \int (\text{razlomljene racionalne funkcije od } x) \cdot dx.$$

To je najvažniji tip integrala, jer se na nj svode gotovo svi ostali tipovi.

Karakteristika tipa I:

x nigdje nije pod korijenom!

U tip I. spada zapravo naš predtip A. Izdvojili smo ga, jer se mnogo jednostavnije računa, kako je tamo pokazano, a u slučaju, kad su nultočke kvadratne funkcije, koja je u nazivniku, konjugirano kompleksne, i ne da se drukčije riješiti.

Pri računanju integrala tipa I treba se strogo držati pojedinih koraka računanja, koje ćemo odmah ilustrirati primjerima.

Prvi korak: Izluči se koeficijent najviše potencije od x u nazivniku.

Primjer 1.

$$I = \int \frac{2x-3}{5x-4}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{2x-3}{x-\frac{4}{5}}$$

Drugi korak: Integrira se samo prava razlomljena racionalna funkcija, t. j. funkcija, u kojoj je stepen polinoma u brojniku niži od stepena polinoma u nazivniku. Ako je funkcija neprava, t. j. ako je stepen brojnika jednak ili veći od stepena nazivnika, treba brojnik podijeliti s nazivnikom, prethodno poredavši članove polinomâ po padajućim ili rastućim potencijama promjenljive x.

U našem su primjeru brojnik i nazivnik polinomi istog (prvog) stepena, dakle dijelimo brojnik nazivnikom, pri čemu ostatak dijeljenja podijeljen divizorom pribrojimo rezultatu (vidi Repetitorij elementarne matematike I, § 2, 3).

$$\begin{array}{l} (2x-3) : \left(x-\frac{4}{5}\right) = 2 + \dfrac{-\frac{7}{5}}{x-\frac{4}{5}} = 2 - \dfrac{7}{5}\,\dfrac{1}{x-\frac{4}{5}} \\ \underline{\pm 2x \mp \frac{8}{5}} \\ \quad -\frac{7}{5} \end{array}$$

U nasem jednostavnom slučaju možemo već integrirati:

$$I = \frac{1}{5}\int\left(2 - \frac{7}{5}\,\frac{1}{x-\frac{4}{5}}\right)dx = \frac{1}{5}\left[2\int dx - \frac{7}{5}\int\frac{dx}{x-\frac{4}{5}}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[2x - \frac{7}{5}\ln\left|x-\frac{4}{5}\right|\right] + C$$

Primjer 2.

$$I = \int \frac{2x^3+7x^2+4x+2}{2x+3}\,dx$$

Prvi korak:

$$I = \frac{1}{2}\int\frac{2x^3+7x^2+4x+2}{x+\frac{3}{2}}\,dx$$

Drugi korak:

$$(2x^3+7x^2+4x+1) : \left(x+\frac{3}{2}\right) = 2x^2+4x-2+\frac{5}{x+\frac{3}{2}}$$

$$I = \frac{1}{2}\int\left(2x^2+4x-2+\frac{5}{x+\frac{3}{2}}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\int x^2\,dx + 4\int x\,dx - 2\int dx + 5\int \frac{dx}{x+\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{x^3}{3} + 4\cdot\frac{x^2}{2} - 2x + 5\ln\left|x+\frac{3}{2}\right|\right) =$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 - x + \frac{5}{2}\ln\left|x+\frac{3}{2}\right| + C$$

Primjer 3.

$$I = \int \frac{5x-7}{x(2x^2-4x-6)}\,dx$$

Prvi korak:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{5x-7}{x(x^2-2x-3)}\,dx$$

Drugi korak: Ispunjen je, jer je u brojniku polinom prvog stepena, a u nazivniku — trećeg.

Kako zadani integral ne možemo na dosada poznate nam načine izračunati, dolazi:

Treći korak: Rastavljanje u parcijalne (djelomične) razlomke.

U tu svrhu treba najprije nazivnik rastaviti u linearne faktore, t. j. u faktore oblika $(x \pm a)$, a to se vrši u većini slučajeva tako, da se odrede nultočke nazivnika.

U našem je primjeru prvi faktor x već linearni faktor, a kako je drugi faktor $(x^2 - 2x - 3)$ kvadratna funkcija, treba je rastaviti u linearne faktore (vidi Repetitorij elementarne matematike I, § 11, 3).

Stavimo, dakle, $x^2 - 2x - 3 = 0$ i rješavamo tu jednadžbu:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -1$$

Slijedi:

$$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \qquad \text{(a)}$$

Prepišemo sada podintegralnu funkciju uzevši u obzir jednakost (a)

$$\frac{5x-7}{x(x-3)(x+1)}$$

i prijeđimo na rastavljanja u parcijalne razlomke.

Svaka realna nultočka nazivnika, t. j. svaki linearni faktor nazivnika, daje jedan parcijalni razlomak oblika $\frac{\text{konstanta}}{\text{linearni faktor}} = \frac{A}{x \pm a}$.

Drugim riječima: ako su nultočke nazivnika realne, broj parcijalnih razlomaka, a dakle i broj konstanata $A, B, C, D\ldots$, koje treba odrediti, jednak je stepenu polinoma u nazivniku.

U našem slučaju dobijemo tri parcijalna razlomka, jer je u nazivniku polinom trećeg stepena:

$$\frac{5x-7}{x(x-3)(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1} \qquad \text{(b)}$$

To je identitet, t. j. jednakost, koja vrijedi za sve vrijednosti x.

Da odredimo konstante $A, B, C\ldots$, uvijek množimo taj identitet s nazivnikom lijeve strane, da se riješimo svih nazivnika.

U našem slučaju množimo dakle s

$$x(x-3)(x+1)$$

Dobijemo:

$$5x-7 \equiv A(x-3)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-3) \qquad \text{(c)}$$

Ima više načina za određivanje konstanata $A, B, C,\ldots$

Navedimo dva načina, koja se najviše upotrebljavaju.

I. način: Metoda neodređenih koeficijenata

a) Izmnožimo sve zagrade u (c) uzevši u obzir jednakost (a) pa skupimo zajedno članove istih potencija x, poredavši te skupine po padajućim potencijama x, a lijevu stranu identiteta uvijek prepisujemo.

$$5x-7 \equiv Ax^2 - 2Ax - 3A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - 3Cx$$
$$5x-7 \equiv (A+B+C)x^2 + (-2A+B-3C)x + (-3A)$$

Ako su dva polinoma identički jednaka, tada su jednaki koeficijenti istih potencija x.

Izjednačimo te koeficijente:

1) $$A + B + C = 0,$$

jer u lijevoj strani identiteta nema člana s x^2, pa je njegov koeficijent 0.

2) $$-2A + B - 3C = 5,$$

jer je koeficijent od x na lijevoj strani 5.

3) $$-3A = -7,$$

jer je član bez x na lijevoj strani -7.

Dobili smo tri linearne jednadžbe, iz kojih odredimo tražene vrijednosti konstanata A, B i C.

Iz 3) slijedi:

$$\underline{A = \frac{7}{3}}$$

Uvrštenje $A = \frac{7}{3}$ u 1) i 2) daje:

$$\begin{array}{r|l} B + C = -\frac{7}{3} & \\ B - 3C = \frac{29}{3} & - \\ \hline 4C = -12 & \underline{C = -3} \end{array}$$

Konačno iz 1) imamo:

$$B = -A - C = -\frac{7}{3} + 3 = \frac{2}{3}$$

$$\underline{B = \frac{2}{3}}$$

II. način

Kako identitet (c)

$$5x - 7 \equiv A(x-3)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-3)$$

vrijedi za sve vrijednosti x, uvrstimo redom sve nultočke nazivnika:

$$x = 0; \quad x = 3 \quad \text{i} \quad x = -1$$

Dobijemo:

$$\text{za} \quad x = 0, \quad -7 = -3A, \quad \text{odatle:} \quad \underline{A = \frac{7}{3}}$$

$$\text{za} \quad x = 3: \quad 15 - 7 = 3B(3+1), \quad \text{odatle} \quad B = \frac{8}{12} = \underline{\frac{2}{3}}$$

$$\text{za} \quad x = -1: \quad -5 - 7 = -C(-1-3), \quad \text{odatle} \quad C = -\frac{12}{4} = \underline{-3}$$

Kako vidimo, II. način je jednostavniji i brže vodi cilju nego I. način. To vrijedi svakako za one slučajeve, kad su nultočke nazivnika realne i različite.

Međutim, ako nultočke nisu sve realne i različite, često je zgodnije primijeniti I. način. To će se vidjeti iz daljnjih primjera.

Uvrštenje u (b) vrijednosti dobivenih za A, B i C daje:

$$\frac{5x-7}{x(x^2-2x-3)} = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{3} \frac{1}{x-3} - \frac{3}{x+1}$$

Četvrti korak: Integriramo:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{5x-7}{x(x^2-2x-3)} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{7}{3} \int \frac{dx}{x} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-3} - 3 \int \frac{dx}{x+1} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{7}{3} \ln|x| + \frac{2}{3} \ln|x-3| - 3 \ln|x+1| \right] + C$$

ili

$$\underline{I = \frac{7}{6}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x-3| - \frac{3}{2}\ln|x+1| + C}$$

Taj rezultat možemo pisati u obliku:

$$\underline{I = \ln\sqrt[6]{x^7} + \ln\sqrt[3]{x-3} - \ln\sqrt{(x+1)^3} + C}$$

ili

$$\underline{I = \ln\sqrt[6]{\frac{x^7(x-3)^2}{(x+1)^3}} + C}$$

Primjer 4.

$$I = \int \frac{x^2\,dx}{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}\,dx$$

Prvi korak: ispunjen.

Drugi korak: isto.

Treći korak:

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = x^2(x-2) - 9(x-2) = (x-2)(x^2-9) =$$

$$= (x-2)(x+3)(x-3)$$

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+3)(x-3)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-3} \Big/ \cdot (x-2)(x+3)(x-3) \quad \text{(a)}$$

$$x^2 \equiv A(x+3)(x-3) + B(x-2)(x-3) + C(x-2)(x+3) \quad \text{(b)}$$

Primijenimo II. način za određivanje konstanata A, B i C.

Odredimo nultočke nazivnika:

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = (x-2)(x+3)(x-3) = 0$$

Odatle:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -3; \quad x_3 = 3$$

Uvrštenje u (b) daje:

$$\text{Za } x = 2: \quad 4 = -5A \quad \underline{A = -\frac{4}{5}}$$

$$\text{za } x = -3: \quad 9 = 30B \quad \underline{B = \frac{3}{10}}$$

$$\text{za } x = 3: \quad 9 = 6C \quad \underline{C = \frac{3}{2}}$$

Identitet (a) glasi sada:

$$\frac{x^2}{x^3-2x^2-9x+18} \equiv -\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{x+3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-3}$$

Četvrti korak: integriramo:

$$\underline{I = -\frac{4}{5}\ln|x-2| + \frac{3}{10}\ln|x+3| + \frac{3}{2}\ln|x-3| + C}$$

Izračunaj integrale:

$$\int\frac{x^5\,dx}{3x+3} \qquad \left[=\frac{x^5}{15}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\ln|x+1|+C\right]$$

$$\int\frac{x^2+1}{x^4-5x^2+4}\,dx$$

$$\left[=-\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{5}{12}\ln|x-2|-\frac{5}{12}\ln|x+2|+C\right]$$

(u nazivniku je bikvadratni izraz, treba dakle riješiti bikvadratnu jednadžbu, vidi Repetitorij elementarne matematike I, § 11, 4).

U svim predašnjim primjerima nazivnik je imao samo realne i različite nultočke. Uzmimo sada:

II. slučaj: Neka su nultočke nazivnika opet realne, ali neka nisu sve različite, t. j. nazivnik ima također višestruke realne nultočke.

U tom slučaju ima linearni faktor, koji potječe od n-struke realne nultočke a nazivnika, oblik $(x-a)^n$ i daje n parcijalnih razlomaka, u kojima su brojnici konstante $A, B, C\ldots$, a nazivnici $(x-a)^n$, $(x-a)^{n-1}, \ldots, (x-a)$.

Primjeri

1. $$I = \int\frac{dx}{x^3(x^2-1)}$$

Prvi korak: ispunjen.

Drugi korak: isto.

Treći korak:

$$\frac{1}{x^3(x+1)(x-1)} \equiv \frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x+1}+\frac{E}{x-1} \qquad \text{(a)}$$

Da smo prva tri parcijalna razlomka napisali u obliku $\frac{A}{x}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x}$, izgubili bismo dva parcijalna razlomka, jer je:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x} = \frac{A+B+C}{x} =$$

= jedan parcijalni razlomak, pa broj parcijalnih razlomaka ne bi bio jednak stepenu polinoma u nazivniku (5).

Dalje se postupa kao prije. Množimo, dakle, obje strane identiteta (a) s nazivnikom lijeve strane.

$$1 \equiv A(x^4 - 1) + Bx(x^3 - 1) + Cx^2(x^2 - 1) + Dx^3(x - 1) + Ex^3(x + 1) \qquad \text{(b)}$$

Konstante $A, B, C\ldots$ odredimo na I. način, t. j. načinom izjednačivanja koeficijenata kod istih potencija x. Uvrštenjem nultočaka nazivnika u (b) ne bismo mogli odrediti sve konstante, jer nazivnik ima i višestruke nultočke (ispitaj to!). Jasno je, da bismo mogli uvrštavati za x u (b) bilo koje vrijednosti; na pr. 2, 3..., ali time bi II. način izgubio svaku prednost pred I. načinom (napravi to!). Moguće je najzgodnije primjenjivati u sličnim slučajevima II. način kao kontrolu vrijednosti koeficijenata izračunatih po I. načinu.

$$1 \equiv Ax^4 - A + Bx^3 - Bx + Cx^4 - Cx^2 + Dx^4 - Dx^3 + Ex^4 + Ex^3$$

$$1 \equiv (C + D + E)x^4 + (B - D + E)x^3 + (A - C)x^2 + (-B)x + (-A)$$

$$\begin{aligned} C + D + E &= 0 \\ B - D + E &= 0 \\ A - C \quad &= 0 \\ -B \quad &= 0 \\ -A \quad &= 1 \end{aligned}$$

Slijedi: $\underline{A = -1}$, $\underline{B = 0}$, $\underline{C = -1}$

$$\left.\begin{aligned} D + E &= 1 \\ -D + E &= 0 \end{aligned}\right| \pm \qquad \begin{aligned} 2E &= 1 \qquad E = \frac{1}{2} \\ 2D &= 1 \qquad D = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Prema (a):

$$\frac{1}{x^3(x^2 - 1)} = -\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x - 1}$$

Četvrti korak: Integriramo:

$$I = \int \frac{dx}{x^3(x^2 - 1)} = -\int \frac{dx}{x^3} - \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x - 1}$$

Odatle

$$\underline{I = \frac{1}{2x^2} - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x + 1| + \frac{1}{2} \ln|x - 1| + C}$$

ili

$$\underline{I = \frac{1}{2x^2} + \ln \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C}$$

2. $$I = \int \frac{x\,dx}{(3x^2 + 15x + 18)^2}$$

Prvi korak:

$$I = \frac{1}{9} \int \frac{x\,dx}{(x^2 + 5x + 6)^2}$$

Drugi korak: ispunjen.

Treći korak:

$$x^2 + 5x + 6 = 0, \quad \text{odatle} \quad x_1 = -2; \quad x_2 = -3$$

$$(x^2 + 5x + 6)^2 = (x + 2)^2 \cdot (x + 3)^2$$

$$\frac{x}{(x + 2)^2 (x + 3)^2} \equiv \frac{A}{(x + 2)^2} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{(x + 3)^2} + \frac{D}{x + 3} \qquad \text{(a)}$$

$$x \equiv A(x + 3)^2 + B(x + 2)(x + 3)^2 + C(x + 2)^2 + D(x + 2)^2 (x + 3) \qquad \text{(b)}$$

Konstante A, B, C i D odredimo ovog puta na II. način primijenivši ga u nešto proširenom obliku.

Uvrštenje nultočaka nazivnika daje:

$$x_1 = -2; \quad -2 = A; \quad \underline{A = -2}$$
$$x_2 = -3; \quad -3 = C; \quad \underline{C = -3}$$

Kako je jednakost (b) identitet, pa važi za sve vrijednosti x, uvrštavamo u (b) bilo koje vrijednosti x, na pr. $x = 0$, $x = 1$, $x = -4$, i t. d., da odredimo B i D.

Uz $A = -2$ i $C = -3$ dobijemo:

za $x = 0$:

$$0 = -2 \cdot 9 + B \cdot 2 \cdot 9 - 3 \cdot 4 + D \cdot 4 \cdot 3$$

Odatle

$$18B + 12D = 30 \;/\; : 6$$
$$3B + 2D = 5 \qquad \text{(c)}$$

za $x = -4$:

$$-4 = -2 \cdot 1 + B \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 4 + D \cdot 4 \cdot (-1)$$

Odatle

$$2B + 4D = -10 \;/\; : 2$$
$$B + 2D = -5 \qquad \text{(d)}$$

Riješivši zajedno jednadžbe (c) i (d) dobijemo:

$$\underline{B = 5; \quad D = -5}$$

Uvrštenje u (a) daje

$$\frac{x}{(x^2 + 5x + 6)^2} = -\frac{2}{(x + 2)^2} + \frac{5}{x + 2} - \frac{3}{(x + 3)^2} - \frac{5}{x + 3}$$

Četvrti korak: Integriramo:

$$I = \frac{1}{9}\left[-2\int \frac{dx}{(x+2)^2} + 5 \cdot \ln|x+2| - 3\int \frac{dx}{(x+3)^2} - 5\ln|x+3|\right]$$

Pomoću supstitucija $x + 2 = t$; $dx = dt$ i $x + 3 = z$; $dx = dz$ dobijemo konačno:

$$I = \frac{1}{9}\left[\frac{2}{x+2} + 5\ln|x+2| + \frac{3}{x+3} - 5\ln|x+3|\right] + C$$

Izračunaj integrale:

$$\int \frac{dx}{x^3 - x^2} \qquad \left[= \frac{1}{x} + \ln\frac{x-1}{x} + C\right]$$

$$\int \frac{x^2 - 1}{(x+2)^3} \qquad \left[= -\frac{3}{2(x+2)^2} + \frac{4}{x+2} + \ln|x+2| + C\right]$$

Prelazimo na općenitiji

III. slučaj: Nazivnik integranda ima također kompleksne nultočke, koje, kako znamo, dolaze uvijek u parovima kao konjugirano kompleksne (vidi Dio I. § 4, 1).

Svaki par konjugirano kompleksnih nultočaka nazivnika daje jedan parcijalni razlomak oblika

$$\frac{Ax + B}{\text{kvadratna funkcija, kojoj su nultočke konjugirano kompleksne}},$$

gdje su A i B konstante, koje se određuju na prijašnji način I. ili II.

Budući da par konjugirano kompleksnih nultočaka nazivnika daje samo jedan parcijalni razlomak, slijedi, da u slučaju, kad nazivnik ima kompleksne nultočke, broj parcijalnih razlomaka je manji od broja nultočaka, odnosno stepena polinoma u nazivniku, ali broj konstanata $A, B, C \ldots$, koje treba odrediti, uvijek je jednak stepenu tog polinoma.

Pazi! Kvadratna funkcija dolazi u nazivnik parcijalnog razlomka samo u tom slučaju, kad su njeni korijeni kompleksni, pa je ne možemo rastaviti u realne linearne faktore!

Primjeri

1. $$I = \int \frac{dx}{x(x^2 + 2x + 5)}$$

Prvi korak: ispunjen.

Drugi korak: ispunjen.

Treći korak:

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

$$\frac{1}{x(x^2+2x+5)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5} \;/\cdot x(x^2+2x+5)$$

$$1 \equiv A(x^2+2x+5) + (Bx+C)x$$

Koeficijente A, B i C odredimo po I. načinu:

$$1 \equiv Ax^2 + 2Ax + 5A + Bx^2 + Cx$$

ili

$$1 \equiv (A+B)x^2 + (2A+C)x + 5A$$

odatle

$$A + B = 0 \qquad \underline{A = \frac{1}{5}}$$

$$2A + C = 0 \qquad \underline{B = -\frac{1}{5}} \qquad \underline{C = -\frac{2}{5}}$$

$$5A = 1$$

$$\frac{1}{x(x^2+2x+5)} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x} + \frac{-\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}}{x^2+2x+5} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x} - \frac{x+2}{x^2+2x+5}\right)$$

Četvrti korak: Integriramo:

$$I = \frac{1}{5}\left[\ln|x| - \underbrace{\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}\,dx}_{I_1}\right]$$

$$I = \frac{1}{5}[\ln|x| - I_1] \qquad \text{(a)}$$

$$I_1 = \int \frac{x+2}{x^2+2x+5}\,dx = \underbrace{\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+5}}_{I_2} + 2\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+2x+5}}_{I_3}$$

$$I_1 = I_2 + 2I_3 \qquad \text{(b)}$$

I_3 lako riješimo kasnije, jer spada u predtip A.

Obratimo osobitu pažnju na način rješavanja I_2.

$$I_2 = \int \frac{x\,dx}{x^2+2x+5}$$

Stavimo nazivnik $\quad x^2 + 2x + 5 = t$

Odatle $\quad (2x+2)dx = dt \qquad \text{(c)}$

Da dobijemo u brojniku integranda I_2 derivaciju njegova nazivnika, t. j. $(2x + 2)$, brojnik x izjednačimo s $2x + 2$ tako, da $(2x + 2)$ podijelimo s 2, a zatim oduzmemo $\frac{2}{2} = 1$:

$$x = \frac{2x + 2}{2} - 1,$$

$$\frac{2x+2-2}{2} = \frac{1}{2}(2x+2-2$$

pa to uvrstimo u I_2:

$$I_2 = \int \frac{\frac{2x+2}{2} - 1}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x + 2)\, dx}{x^2 + 2x + 5} - \underbrace{\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}}_{I_3}$$

Uvrštenje (c) daje:

$$I_2 = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} - I_3 = \frac{1}{2} \ln |t| - I_3$$

ili

$$I_2 = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 5| - I_3$$

To uvrstimo u (b):

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 5| - I_3 + 2I_3$$

Odatle:

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 5| + I_3 \qquad \text{(d)}$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \text{prema predtipu } A = \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 4}$$

$$x + 1 = t; \quad dx = dt; \quad 4 = k^2; \quad k = 2$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{t^2 + k^2} = \frac{1}{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{k} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + 1}{2}$$

Uvrštenje u (d) daje:

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 5| + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + 1}{2}$$

pa je konačno prema (a)

$$\underline{I = \frac{1}{5} \left[\ln |x| - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 5| - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + 1}{2} \right] + C}$$

ili

$$\underline{I = \frac{1}{5} \left[\ln \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + 1}{2} \right] + C}$$

2. $$I = \int \frac{dx}{x^4 - 1}$$

Prvi korak: Ispunjen.

Drugi korak: Ispunjen.

Treći korak:

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

$$x^2 + 1 = 0 \qquad x_{3,4} = \pm i$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \Bigg| \cdot (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

$$1 \equiv A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1)$$

A, B, C, i D odredimo na II. način:

za $x_1 = 1$: $\qquad 1 = A \cdot 2 \cdot 2$, odatle $\underline{A = \frac{1}{4}}$

za $x_2 = -1$: $\qquad 1 = B \cdot (-2) \cdot 2$, odatle $\underline{B = -\frac{1}{4}}$

za $x = 0$: $\qquad 1 = \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot (-1) + D \cdot (-1)$ ili $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - D$

Odatle $\underline{D = -\frac{1}{2}}$

za $x = 2$: $\qquad 1 = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 5 - \frac{1}{4} \cdot 5 + \left(C \cdot 2 - \frac{1}{2}\right) \cdot 3$

ili $1 = \frac{15}{4} - \frac{5}{4} + 6C - \frac{3}{2}$, odatle $\underline{C = 0}$

Slijedi

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}$$

Četvrti korak: Integriramo:

$$\underline{I = \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x + C}$$

ili

$$\underline{I = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x + C}$$

3. $$I = \int \frac{x\,dx}{x^3 + 1}$$

Prvi korak: Ispunjen.

Drugi korak: Ispunjen.

Treći korak:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x_1 = -1$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{x}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} \equiv \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1} \Big| \cdot (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x \equiv A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$

Za $x_1 = -1$:

$$-1 = A \cdot 3; \quad \underline{A = -\frac{1}{3}}$$

za $x = 0$:

$$0 = -\frac{1}{3} + C; \quad \underline{C = \frac{1}{3}}$$

za $x = 1$:

$$1 = -\frac{1}{3} + \left(B + \frac{1}{3}\right) \cdot 2, \quad \text{odatle} \quad \underline{B = \frac{1}{3}}$$

Slijedi:

$$\frac{x}{x^3 + 1} = -\frac{1}{3}\frac{1}{x + 1} + \frac{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2 - x + 1}$$

Četvrti korak: Integriramo:

$$I = -\frac{1}{3}\ln|x + 1| + \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{x\,dx}{x^2 - x + 1}}_{I_1} + \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}}_{I_2}$$

$$I = -\frac{1}{3}\ln|x + 1| + \frac{1}{3}I_1 + \frac{1}{3}I_2 \qquad \text{(a)}$$

$$I_1 = \int \frac{x\,dx}{x^2 - x + 1} \qquad \text{(b)}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 - x + 1 &= t \\ (2x - 1)dx &= dt \end{aligned}\right| \qquad \text{(c)}$$

$$x = \frac{2x-1}{2} + \frac{1}{2}$$

Uvrštenje u (b) daje:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

I_2

Prema (c) imamo:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} I_2 = \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{2} I_2$$

ili

$$I_1 = \frac{1}{2}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{2} I_2$$

Uvrstimo to u (a):

$$I = -\frac{1}{3}\ln|(x+1| + \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{6} I_2 + \frac{1}{3} I_2$$

ili

$$I = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{2} I_2 \qquad \text{(d)}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \text{prema predtipu } A = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

Uvrštenje u (d) daje konačno:

$$\underline{I = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C}$$

Izračunaj integrale:

$$\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + x}dx \left[= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\right]$$

$$\int \frac{x\,dx}{1 - x^4} \qquad \left[= \frac{1}{4}\ln\frac{1+x^2}{|1-x^2|} + C\right]$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-1}dx \left[= \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\right]$$

$$\int \frac{(2x^2 - 3x - 3)dx}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)}$$

$$\left[= -\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln(x^2 - 2x + 5) + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2} + C\right]$$

Uzmimo konačno najopćenitiji

IV. slučaj. Nazivnik integranda ima realne i kompleksne nultočke, pri čemu su svi ili neki parovi konjugirano kompleksnih nultočaka višestruki.

Postupamo na slični način kao u slučaju višestrukih realnih nultočaka, pamteći, da je broj konstanata $A, B, C, \ldots$, koje treba odrediti, uvijek jednak stepenu polinoma u nazivniku.

Primjeri

1. $$I = \int \frac{x^6 + x^4 - 4x^2 - 2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx$$

Prvi korak: Ispunjen.

Drugi korak: Ispunjen, jer je u brojniku polinom šestog, a u nazivniku

$$3 + 2\cdot 2 = 7. \text{ stepena.}$$

Treći korak: Stavimo li $(x^2+1)^2 = 0$, odnosno $(x^2+1)(x^2+1) = 0$ dobijemo $x = \pm i$ — dvostruki par konjugirano kompleksnih nultočaka nazivnika:

$$\frac{x^6 + x^4 - 4x^2 - 2}{x^3(x^2+1)^2} \equiv \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} + \frac{Fx+G}{x^2+1} \Bigg| \cdot x^3(x^2+1)^2$$

$$x^6 + x^4 - 4x^2 - 2 \equiv A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1)^2 + Cx^2(x^2+1)^2 +$$
$$+ (Dx+E)x^3 + (Fx+G)x^3(x^2+1)$$

Za određivanje konstanata primijenimo I. način, t. j. način izjednačivanja koeficijenata.

Nakon uređenja desne strane identiteta dobijemo:

$$x^6 + x^4 - 4x^2 - 2 \equiv (C+F)x^6 + (B+G)x^5 + (A+2C+D+F)x^4 +$$
$$+ (2B+E+G)x^3 + (2A+C)x^2 + Bx + A$$

Odatle

$$\begin{aligned} C+F &= 1 \\ B+G &= 0 \\ A+2C+D+F &= 1 \\ 2B+E+G &= 0 \\ 2A+C &= -4 \\ B &= 0 \\ A &= -2 \end{aligned}$$

Slijedi:

$\underline{B = 0;}$ $\underline{A = -2;}$ $\underline{C = 0}$

$\underline{F = 1;}$ $\underline{G = 0;}$ $\underline{E = 0}$

$\underline{D = 2}$

$$I = -2\int \frac{dx}{x^3} + \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

Pomoću supstitucije $x^2 + 1 = t$; $2x\,dx = dt$ i $x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$ dobijemo konačno:

$$\underline{I = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C}$$

ili

$$\underline{I = \frac{1}{x^2(x^2+1)} + \ln\sqrt{x^2+1} + C}$$

2. $$I = \int \frac{dx}{x(x^2+x+1)^2}$$

Jednadžba $(x^2 + x + 1)^2 = 0$ daje dvostruki par konjugirano kompleksnih nultočaka nazivnika.

Kako su 1. i 2. koraci ispunjeni, prelazimo na treći korak:

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} \Big/ \cdot x(x^2+x+1)^2$$

$$1 \equiv A(x^2+x+1)^2 + (Bx+C)x + (Dx+E)x(x^2+x+1)$$

Nakon uređenja dobijemo:

$$1 \equiv (A+D)x^4 + (2A+E+D)x^3 + (A+2A+B+E+D)x^2 + \\ + (2A+C+E)x + A$$

$$\left.\begin{aligned} A + D &= 0 \\ 2A + E + D &= 0 \\ 3A + B + E + D &= 0 \\ 2A + C + E &= 0 \\ A &= 1 \end{aligned}\right|$$

Odatle:

$\underline{A = 1;}$ $\underline{D = -1;}$ $\underline{E = -1}$

$\underline{C = -1;}$ $\underline{B = -1;}$

$$I = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}dx - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx \qquad \text{(a)}$$

Supstitucija:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= t \\ (2x+1)\,dx &= dt \end{aligned}\right| \qquad \text{(b)}$$

Da dobijemo $(2x + 1)$ u brojnicima drugog i trećeg integrala, izjednačimo $(x + 1)$ s $(2x + 1)$ tako, da $(2x + 1)$ podijelimo s 2 i pribrojimo $\frac{1}{2}$:

$$x + 1 = \frac{2x+1}{2} + \frac{1}{2}$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$I = \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+x+1)^2} - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}}_{I_2} - \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x+1} -$$

$$-\frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{x+x+2}}_{I_1}$$

Odatle obzirom na (b) dobijemo:

$$I = \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}I_2 - \frac{1}{2}I_1$$

ili

$$I = \ln|x| + \frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}I_2 - \frac{1}{2}I_1 \qquad \text{(c)}$$

Naš je zadatak sada, da

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

svedemo na $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+x+1}$, t. j. izvršimo t. zv. rekurziju, dok I_1 lako riješimo, jer spada u predtip A.

U tu svrhu postupamo kako slijedi:

$$I_2 = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1\right]^2} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2}$$

Supstitucija:

$$x + \frac{1}{2} = t; \quad dx = dt; \quad \frac{3}{4} = k^2; \quad k = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(d)}$$

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+k^2)^2}$$

Sada množimo i dijelimo integrand s k^2, zatim brojniku dodamo i oduzmemo t^2 i konačno, podijelivši brojnik s nazivnikom, rastavimo I_2 u dva integrala:

$$I_2 = \frac{1}{k^2}\int \frac{k^2\,dt}{(t^2+k^2)^2} = \frac{1}{k^2}\int \frac{(k^2+t^2)-t^2}{(t^2+k^2)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{k^2}\int \frac{dt}{t^2+k^2} - \frac{1}{k^2}\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+k^2)^2}$$

Kako je uz supstituciju (d) $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \int \frac{dt}{t^2 + k^2}$, rekurziju smo izvršili, jer smo I_2 sveli na I_1:

$$I_2 = \frac{1}{k^2} I_1 - \frac{1}{k^2} \underbrace{\int \frac{t^2\, dt}{(t^2 + k^2)^2}}_{I_3} = \frac{1}{k^2} I_1 - \frac{1}{k^2} I_3 \qquad \text{(e)}$$

I_3 riješimo načinom parcijalne integracije:

$$I_3 = \int \frac{t^2\, dt}{(t^2 + k^2)^2} = \int t \frac{t\, dt}{(t^2 + k^2)^2}$$

$$u = t; \quad du = dt; \quad dv = \frac{t\, dt}{(t^2 + k^2)^2}; \quad v = \int \frac{t\, dt}{(t^2 + k^2)^2} =$$

$$\left[t^2 + k^2 = z; \quad 2t\, dt = dz; \quad t\, dt = \frac{1}{2} dz\right]$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2 + k^2}$$

$$I_3 = -\frac{t}{2(t^2 + k^2)} + \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{dt}{t^2 + k^2}}_{I_1} = \text{prema (d)} = -\frac{x + \frac{1}{2}}{2(x^2 + x + 1)} + \frac{1}{2} I_1$$

ili

$$I_3 = -\frac{2x + 1}{4(x^2 + x + 1)} + \frac{1}{2} I_1$$

Uvrštenje u (e) daje uz $k^2 = \frac{3}{4}$:

$$I_2 = \frac{4}{3} I_1 + \frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{3} I_1 = \frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{2}{3} I_1$$

To uvrstimo u (c)

$$I = \ln|x| + \frac{1}{2(x^2 + x + 1)} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) -$$

$$- \frac{2x + 1}{6(x^2 + x + 1)} - \frac{1}{3} I_1 - \frac{1}{2} I_1$$

Uredimo:

$$I = \ln|x| + \frac{1}{2(x^2+x+1)} -$$

$$-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)} - \frac{5}{6} I_1$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \text{prema (d)} = \int \frac{dt}{t^2+k^2} =$$

$$= \frac{1}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{k} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Imamo konačno:

$$\underline{I = \ln|x| + \frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)} -}$$

$$\underline{-\frac{5}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C}$$

Izračunaj integrale:

$$\int \frac{x^4+x^3+5x^2+3x+4}{x^5+4x^3+4x}\,dx$$

$$\left[= \ln|x| - \frac{1}{2(x^2+2)} + \frac{x}{2(x^2+2)} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} + C\right]$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^4-1)^2} \qquad \left[= \frac{1}{4}\left(\frac{2x^6-3x^2}{x^4-1} + \frac{3}{2}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) + C\right]$$

$$\int \frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}\,dx \qquad \left[= \frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)} + \frac{53}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{2} + C\right]$$

Iz gornjeg tumačenja i iz primjera vidimo, da u slučaju, kad nazivnik integranda ima višestruke (n-terostruke) parove konjugirano kompleksnih nultočaka, parcijalni razlomci imaju općenito oblik:

$$\frac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}$$

pa imamo izračunati:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}\,dx = A\int \frac{x\,dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} + B\int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}$$

Prvi integral i to:

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 + \alpha x + \beta)^n}$$

svodi se na način, prikazan u primjeru 2., na drugi integral:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + \alpha x + \beta)^n}$$

Iz toga slijedi:

1. Ako podintegralna funkcija ima u brojniku linearnu funkciju ili konstantu (na pr. 1), a u nazivniku kvadratnu funkciju, kojoj su nultočke konjugirano kompleksne, pri čemu ta funkcija može biti dignuta na neku cijelu potenciju, tada otpada rastavljanje podintegralne funkcije u parcijalne razlomke, jer je ona već parcijalni razlomak.

2. Integral $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + \alpha x + \beta)^n}$, koji imamo riješiti u tom slučaju, svodimo načinom rekurzije prikazanom u gore navedenom primjeru 2. na:

$$I_{n-1} = \int \frac{dx}{(x^2 + \alpha x + \beta)^{n-1}}$$

pa taj postupak nastavimo, dok ne dođemo do $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + \alpha x + \beta}$, koji lako riješimo prema predtipu A.

Primijetimo, da $\int \frac{dx}{(x^2 + \alpha x + \beta)^n}$ možemo riješiti načinom rekurzije i u tom slučaju, kad su nultočke kvadratne funkcije $y = x^2 + \alpha x + \beta$ realne, premda u tom slučaju postoji mogućnost riješiti taj integral rastavljajući podintegralnu funkciju u parcijalne razlomke.

Riješi za vježbu $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$ načinom rekurzije, a zatim rastavljanjem u parcijalne razlomke.

U oba slučaja dobit ćeš isti rezultat:

$$I_2 = -\frac{x}{2(x^2 - 1)} - \frac{1}{4} \ln \frac{x - 1}{x + 1} + C$$

pa ćeš vidjeti, da se načinom rekurzije mnogo brže dolazi do traženog rezultata.

Primjeri

1. $$I = \int \frac{x\,dx}{(2x^2 + 6x + 5)^3}$$

Prvi korak:

$$I = \frac{1}{8} \int \frac{x\,dx}{\left(x^2 + 3x + \frac{5}{2}\right)^3} = \frac{1}{8} I_0 \qquad \text{(a)}$$

Drugi korak: Ispunjen.

Treći korak: Kako je u brojniku linearna funkcija od x, a u nazivniku kvadratna funkcija, kojoj su nultočke konjugirano kompleksne, otpada rastavljanje u parcijalne razlomke, pa odmah prelazimo na računanje integrala:

$$I_0 = \int \frac{x\,dx}{\left(x^2 + 3x + \frac{5}{2}\right)^3}$$

Stavimo:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + 3x + \frac{5}{2} &= t \\ (2x + 3)\,dx &= dt \end{aligned}\right| \qquad \text{(b)}$$

$$x = \frac{2x + 3}{2} - \frac{3}{2}$$

To uvrstimo u I_0:

$$I_0 = \frac{1}{2} \int \frac{(2x + 3)\,dx}{\left(x^2 + 3x + \frac{5}{2}\right)^3} - \frac{3}{2} \underbrace{\int \frac{dx}{\left(x^2 + 3x + \frac{5}{2}\right)^3}}_{I_{III}} = \text{prema (b)} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^3} - \frac{3}{2} I_{III} = \frac{1}{2} \frac{t^{-2}}{-2} - \frac{3}{2} I_{III} = -\frac{1}{4} \frac{1}{t^2} - \frac{3}{2} I_{III}$$

pa opet prema (b):

$$I_0 = -\frac{1}{4} \frac{1}{\left(x^2 + 3x + \frac{5}{2}\right)^2} - \frac{3}{2} I_{III} \qquad \text{(c)}$$

$$I_{III} = \int \frac{dx}{\left(x^2 + 3x + \frac{5}{2}\right)^3} = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]^3}$$

Supstitucija:

$$x + \frac{3}{2} = t; \quad dx = dt; \quad \frac{1}{4} = k^2; \quad k = \frac{1}{2} \tag{d}$$

$$I_{III} = \int \frac{dt}{(t^2 + k^2)^3} = \frac{1}{k^2} \int \frac{(k^2 + t^2) - t^2}{(t^2 + k^2)^3} dt =$$

$$= \frac{1}{k^2} \left[\underbrace{\int \frac{dt}{(t^2 + k^2)^2}}_{I_{II}} - \underbrace{\int \frac{t^2 dt}{(t^2 + k^2)^3}}_{I_3} \right]$$

$$I_{III} = \frac{1}{k^2} (I_{II} - I_3) \tag{e}$$

$$I_{II} = \int \frac{dt}{(t^2 + k^2)^2} = \frac{1}{k^2} \int \frac{(k^2 + t^2) - t^2}{(t^2 + k^2)^2} dt =$$

$$= \frac{1}{k^2} \left[\underbrace{\int \frac{dt}{t^2 + k^2}}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{t^2 dt}{(t^2 + k^2)^2}}_{I_2} \right]$$

$$I_{II} = \frac{1}{k^2} (I_I - I_2) \tag{f}$$

To uvrstimo u (e):

$$I_{III} = \frac{1}{k^2} \left[\frac{1}{k^2} (I_I - I_2) - I_3 \right]$$

a uzevši u obzir, da je prema (d) $\frac{1}{k^2} = 4$, dobijemo:

$$I_{III} = 16 I_I - 16 I_2 - 4 I_3 \tag{g}$$

$$I_3 = \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + k^2)^3} = \int t \cdot \frac{t \cdot dt}{(t^2 + k^2)^3}$$

$$u = t; \quad du = dt; \quad v = \int \frac{t\, dt}{(t^2 + k^2)^3} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^3} = -\frac{1}{4} \frac{1}{(t^2 + k^2)^2}$$

$$t^2 + k^2 = z; \quad 2t\, dt = dz; \quad t\, dt = \frac{dz}{2}$$

$$I_3 = -\frac{t}{4(t^2 + k^2)^2} + \frac{1}{4} \underbrace{\int \frac{dt}{(t^2 + k^2)^2}}_{I_{II}}$$

$$I_3 = -\frac{t}{4(t^2 + k^2)^2} + \frac{1}{4} I_{II}$$

Uvrštenje u (g) daje:

$$I_{III} = 16\,I_1 - 16\,I_2 + \frac{t}{(t^2 + k^2)^2} - I_{II}$$

Ovamo uvrstimo (f), uzevši u obzir da je $k^2 = 4$.

$$I_{III} = 16\,I_1 - 16\,I_2 + \frac{t}{(t^2 + k^2)^2} - 4\,I_1 + 4\,I_2$$

ili

$$I_{III} = \frac{t}{(t^2 + k^2)^2} + 12\,I_1 - 12\,I_2 \qquad \text{(h)}$$

$$I_2 = \int \frac{t^2\,dt}{(t^2 + k^2)^2} = \text{slično } I_3 = -\frac{t}{2(t^2 + k^2)} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dt}{t^2 + k^2}}_{I_1}$$

$$I_2 = -\frac{t}{2(t^2 + k^2)} + \frac{1}{2}\,I_1$$

To uvrstimo u (h):

$$I_{III} = \frac{t}{(t^2 + k^2)^2} + \frac{6t}{t^2 + k^2} + 6I_1$$

Uvrštenje (d) i $I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + k^2} = \frac{1}{k}\,\text{arc tg}\,\frac{t}{k}$ = prema (d) = $2\,\text{arc tg}(2x + 3)$ daje:

$$I_{III} = \frac{2x + 3}{2\left(x^2 + 3x + \frac{5}{2}\right)^2} + \frac{3(2x + 3)}{x^2 + 3x + \frac{5}{2}} + 12\,\text{arc tg}(2x + 3)$$

Uvrštenje u (c) daje:

$$I_0 = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{\left(x^2 + 3x + \frac{5}{2}\right)^2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{2x + 3}{\left(x^2 + 3x + \frac{5}{2}\right)^2} -$$

$$-\frac{9}{2}\,\frac{2x + 3}{x^2 + 3x + \frac{5}{2}} - 18\,\text{arc tg}(2x + 3)$$

Uredimo li I_0 i uvrstimo ga u (a), dobit ćemo konačno:

$$\underline{I = -\frac{1}{8(2x^2 + 6x + 5)^2} - \frac{3}{8}\cdot\frac{2x + 3}{(2x^2 + 6x + 5)^2} -}$$

$$\underline{-\frac{9}{8}\cdot\frac{2x + 3}{2x^2 + 6x + 5} - \frac{9}{4}\,\text{arc tg}(2x + 3) + C}$$

2. $$I = \int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$$

Prva su dva koraka ispunjena.

Treći korak: rastavljanje u parcijalne razlomke nije moguće, jer je podintegralna funkcija već parcijalni razlomak (u brojniku je konstanta 1).

Prelazimo ravno na računanje $I \equiv I_{III}$:

$$I_{III} = \frac{1}{9}\int \frac{(9+x^2)-x^2}{(x^2+9)^3}\,dx = \frac{1}{9}\left[\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}}_{I_{II}} - \underbrace{\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+9)^3}}_{I_3}\right]$$

$$I_{III} = \frac{1}{9}(I_{II} - I_3) \qquad \text{(a)}$$

$$I_{II} = \int \frac{dx}{(x^2+9)^2} = \frac{1}{9}\int \frac{(9+x^2)-x^2}{(x^2+9)^2}\,dx = \frac{1}{9}\left[\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+9}}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+9)^2}}_{I_2}\right]$$

$$I_{II} = \frac{1}{9}(I_1 - I_2) \qquad \text{(b)}$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$I_{III} = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{9}(I_1 - I_2) - I_3\right]$$

ili

$$I_{III} = \frac{1}{81}I_1 - \frac{1}{81}I_2 - \frac{1}{9}I_3 \qquad \text{(c)}$$

$$I_3 = \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+9)^3} = \int x \cdot \frac{x\,dx}{(x^2+9)^3}$$

$$u = x; \quad du = dx; \quad v = \int \frac{x\,dx}{(x^2+9)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^3} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x^2+9)^2}$$

$$x^2 + 9 = z; \quad 2x\,dx = dz; \quad x\,dx = \frac{1}{2}dz$$

$$I_3 = -\frac{x}{4(x^2+9)^2} + \frac{1}{4}\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}}_{I_{II}}$$

$$I_3 = -\frac{x}{4(x^2+9)^2} + \frac{1}{4}I_{II}$$

Ovamo uvrstimo (b):

$$I_3 = -\frac{x}{4(x^2+9)^2} + \frac{1}{36}I_1 - \frac{1}{36}I_2$$

To uvrstimo u (c):

$$I_{III} = \frac{1}{81} I_1 - \frac{1}{81} I_2 + \frac{x}{36(x^2+9)^2} - \frac{1}{324} I_1 + \frac{1}{324} I_2$$

ili

$$I_{III} = \frac{x}{36(x^2+9)^2} - \frac{1}{108} I_2 + \frac{1}{108} I_1 \qquad \text{(d)}$$

$$I_2 = \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+9)^2} = \text{slično } I_3 = -\frac{x}{2(x^2+9)} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+9}}_{I_1}$$

$$I_2 = -\frac{x}{2(x^2+9)} + \frac{1}{2} I_1 \qquad \text{(e)}$$

Uvrštenje u (d) daje:

$$I_{III} = \frac{x}{36(x^2+9)^2} + \frac{x}{216(x^2+9)} - \frac{1}{216} I_1 + \frac{1}{108} I_1$$

ili uz

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3}$$

$$\underline{I_{III} = I = \frac{x}{36(x^2+9)^2} + \frac{x}{216(x^2+9)} + \frac{1}{648} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3} + C}$$

Izračunaj integrale:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^4} \qquad \left[= \frac{15x^5+40x^3+33x}{48(x^2+1)^3} + \frac{15}{48} \operatorname{arc\,tg} x + C\right]$$

$$\int \frac{3x+2}{(x^2-3x+3)^2}\,dx \qquad \left[= \frac{13x-24}{3(x^2-3x+3)} + \frac{26}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x-3}{\sqrt{3}} + C\right]$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^3}$$

$$\left[= \frac{1}{648}\left\{\frac{18(x+1)}{(x^2+2x+10)^2} + \frac{3(x+1)}{x^2+2x+10} + \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{3}\right\} + C\right]$$

$$\int \frac{x+1}{(x^2+4x+6)^3}\,dx$$

$$\left[-\frac{1}{64}\left\{\frac{8(x+4)}{(x^2+4x+6)^2} + \frac{6(x+2)}{x^2+4x+6} + 3\sqrt{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+2}{\sqrt{2}}\right\} + C\right]$$

Primjedba. Iz gornjih primjera vidimo, koliko vremena i truda stoji rješavanje integrala razlomljene racionalne funkcije bilo načinom rastavljanja u parcijalne razlomke, bilo načinom rekurzije. Već sam na početku tumačenja o tipovima neodređenih integrala spomenuo, da se svaki zadani integral najprije kuša riješiti na neki jednostavniji način i da se tek tada, kada toga načina nema, prijeđe na tipove integrala. Ta uputa vrijedi naravno i za računanje integrala razlomljenih funkcija. Navedimo nekoliko primjera.

Primjeri

1. $$I = \int \frac{x^2\,dx}{(3x^3+5)^3}$$

Kako je $D_x x^3 = 3x^2$, a u brojniku je x^2, stavimo:

$3x^3 + 5 = t;\quad 9x^2\,dx = dt,$ a odatle $x^2 dx = \frac{dt}{9}$

Uvrštenje daje:

$$I = \frac{1}{9}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{9}\cdot\frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{t^2} = \underline{-\frac{1}{18(3x^3+5)^2} + C}$$

2. $$I = \int \frac{x^7\,dx}{4x^4-7}$$

Kako je $D_x x^4 = 4x^3$, a $x^7 = x^4 \cdot x^3$, stavimo $x^4 = t;\ 4x^3dx = dt,\ x^3dx = \frac{dt}{4}$, pa dobijemo:

$$I = \int \frac{x^4\cdot x^3\,dx}{4x^4-7} = \frac{1}{4}\int \frac{t\cdot dt}{4t-7} = \frac{1}{16}\int \frac{t}{t-\frac{7}{4}}\,dt =$$

$$t : \left(t - \frac{7}{4}\right) = 1 + \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{t-\frac{7}{4}}$$

$$= \frac{1}{16}\left[\int dt + \frac{7}{4}\int \frac{dt}{t-\frac{7}{4}}\right] = \frac{1}{16}\left(t + \frac{7}{4}\ln\left|t - \frac{7}{4}\right|\right) =$$

$$\underline{= \frac{1}{16}\left(x^4 + \frac{7}{4}\ln\left|x^4 - \frac{7}{4}\right|\right) + C}$$

3. $$I = \int \frac{dx}{x^6(x^5+1)}$$

Kako je razlika eksponenata od x: $6 - 5 = 1$, stavimo:

$x^5 = t;\quad 5x^4dx = dt,$ a odatle $dx = \frac{dt}{5x^4}$, pa dobijemo:

$$I = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{x^4\cdot x^6(t+1)} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{(x^5)^2(t+1)} = \int \frac{dt}{t^2(t+1)}$$

Nakon rastavljanja u parcijalne razlomke dobijemo konačno:

$$\underline{I = -\frac{1}{x^5} - 5\ln|x| + \ln|x^5+1| + C}$$

Izračunaj na taj način integrale:

$$\int \frac{x^2\,dx}{x^3-1} \qquad \left[= \ln \sqrt[3]{x^3-1} + C\right]$$

$$\int \frac{x^{11}\,dx}{x^6+1} \qquad \left[= \frac{x^6}{6} - \ln \sqrt[6]{x^6+1} + C\right]$$

$$\int \frac{dx}{x^4(x^2-1)} \qquad \left[= \frac{1}{x^3} - \ln x^2 + \ln(x^2-1) + C\right]$$

Prelazimo sada na računanje integrala algebarskih (iracionalnih) funkcija. Svi ti integrali, ukoliko se daju elementarno riješiti, svode se pomoću podesnih supstitucija na integrale racionalnih funkcija, t. j. na tip I. Drugim riječima, vrši se racionalizacija integranda.

Tip II.

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}\,dx; \qquad \int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

Kako znamo, slovo R je oznaka razlomljene racionalne funkcije.

Prema tome u taj tip spadaju integrali, čiji se integrandi sastavljeni od x, $\sqrt[n]{ax+b}$, odnosno $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+b}}$ i konstanata konačnim brojem racionalnih operacija, t. j. zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem i dijeljenjem. U x i $\sqrt[n]{ax+b}$, odnosno $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ integrand je racionalan, ali u x samom nije, jer je x pod korijenom.

Karakteristika toga tipa: pod korijenom je linearna funkcija, odnosno kvocijent linearnih funkcija.

Postupak pri računanju integrala tog tipa:

Prvi korak: Supstitucija:

$$\sqrt[n]{ax+b} = t, \quad \text{odnosno} \quad \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$$

Drugi korak: Iz tih jednakosti računamo x izrazivši ga s t.

Treći korak: Računamo dx.

Četvrti korak: Ostale x izrazujemo s t.

Peti korak: Sve to uvrštavamo u integrand pa dobijemo integral racionalne funkcije od t, t. j. $\int R(t)\mathrm{d}t$, a to je tip I.

Time je provedena racionalizacija integranda, pa integral rješavamo na već nam poznati način.

Šesti korak:

$$\text{Uvrštavamo } t = \sqrt[n]{ax+b}, \quad \text{odnosno} \quad t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

Primjeri

1. $$I = \int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

1) $$\sqrt{2x+1} = t \,|^2$$

2) $$2x + 1 = t^2; \quad x = \frac{t^2-1}{2}$$

3) $$\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$$

4) $$x^2 = \frac{(t^2-1)^2}{4}$$

5) $$I = \int \frac{t}{\frac{(t^2-1)^2}{4}} \cdot t\,\mathrm{d}t = 4\underbrace{\int \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t}_{I_1}$$

$$I = 4I_1 \qquad \text{(a)}$$

$$I_1 = \int \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{t^2}{(t+1)^2\cdot(t-1)^2} \equiv \frac{A}{(t+1)^2} + \frac{B}{t+1} +$$

$$+ \frac{C}{(t-1)^2} + \frac{D}{t-1}\Big| \cdot (t^2-1)^2$$

$$t^2 \equiv A(t-1)^2 + B(t-1)^2(t+1) + C(t+1)^2 + D(t+1)^2(t-1)$$

za $t = -1$: $\quad +1 = 4A \quad \underline{A = +\frac{1}{4}}$

za $t = 1$: $\quad 1 = 4C \quad \underline{C = +\frac{1}{4}}$

za $t = 0$: $\qquad 0 = +\frac{1}{4} + B + \frac{1}{4} - D; \quad B - D = -\frac{1}{2}$

za $t = 2$: $\qquad 4 = +\frac{1}{4} + 3B + \frac{9}{4} + 9D; \quad B + 3D = \frac{1}{2}$

$$\underline{B = -\frac{1}{4}; \quad D = \frac{1}{4}}$$

$$I_1 = +\frac{1}{4}\int \frac{dt}{(t+1)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(t-1)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t-1} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{t+1} - \ln|t+1| - \frac{1}{t-1} + \ln|t-1|\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{t-1+t+1}{t^2-1} + \ln\frac{t-1}{t+1}\right] = \frac{1}{4}\left[-\frac{2t}{t^2+1} + \ln\frac{t-1}{t+1}\right]$$

6) Prema (a):

$$I = 4I_1 = -\frac{2\sqrt{2x+1}}{2x+1-1} + \ln\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}$$

ili

$$\underline{I = -\frac{\sqrt{2x+1}}{x} + \ln\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1} + C}$$

2. $$I = \int \frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{1-\sqrt[3]{x-1}}$$

1) $\sqrt[3]{x-1} = t \,|^3$

2) $x - 1 = t^3; \quad x = t^3 + 1$

3) $dx = 3t^2\,dt$

4) otpada

5) $$I = 3\int \frac{1+t}{1-t}t^2\,dt = -3\int \frac{t^2+t^3}{t-1}\,dt =$$

$$(t^3 + t^2):(t-1) = t^2 + 2t + 2 + \frac{2}{t-1}$$

$$= -3\left[\frac{t^3}{3} + t^2 + 2t + 2\ln|t-1|\right]$$

6) $$\underline{I = -3\left[\frac{x-1}{3} + \sqrt[3]{(x-1)^2} + 2\sqrt[3]{x-1} + \ln\left(\sqrt[3]{x-1}-1\right)^2\right] + C}$$

3. $$I = \int 7x\sqrt[3]{x-4}\,dx$$

1) $\sqrt[3]{x-4} = t \,|^3$

2) $x - 4 = t^3; \quad x = t^3 + 4$

3) $dx = 3t^2 dt$

4) otpada

5) $I = 7 \cdot 3 \int (t^3 + 4) \cdot t \cdot t^2 dt = 3t^7 + 84\frac{t^4}{4} = 3(t^7 + 7t^4) = 3t^4(t^3 + 7)$

6) $I = 3\sqrt[3]{(x-4)^4} \cdot (x - 4 + 7) = 3\sqrt[3]{x-4}(x-4)(x+3)$

$$\underline{I = 3(x^2 - x - 12)\sqrt[3]{x-4} + C}$$

4. $$I = \int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx$$

1) $\sqrt{\frac{x+1}{x}} = t \,\Big|^2$

2) $\frac{x+1}{x} = t^2; \quad x + 1 = t^2x; \quad t^2x - x = 1; \quad x = \frac{1}{t^2-1}$

3) $dx = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,dt$

4) $x^2 = \frac{1}{(t^2-1)^2}$

5) $I = -2\int (t^2-1)^2 \cdot t \cdot \frac{t}{(t^2-1)^2}\,dt = -2\int t^2 dt = -2\frac{t^3}{3}$

6) $\underline{I = -\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)^3} + C}$

Posebni slučaj integrala tipa II pokažimo na primjerima:

1. $$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}\,dx$$

$\sqrt[4]{x} = x^{1/4}$
$\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$

Supstitucija: $x = t^n$,

gdje je n najmanji zajednički nazivnik razlomljenih eksponenata.

Za naš slučaj: $x = t^{12}$

Dalje se postupa kao prije.

$$dx = 12\,t^{11}\,dt$$

$$I = 12\int \frac{t^3}{t^4 + t^6}\,t^{11}\,dt = 12\int \frac{t^{14}}{t^4(1+t^2)}\,dt = 12\int \frac{t^{10}}{t^2+1}\,dt$$

$$t^{10} : (t^2 + 1) = t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{t^2+1}$$

$$I = 12\left(\frac{t^9}{9} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t - \operatorname{arc\,tg} t\right)$$

Iz supstitucije $x = t^{12}$ slijedi, da je $t = \sqrt[12]{x}$

$$\underline{I = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{12}{7}\sqrt[12]{x^7} + \frac{12}{5}\sqrt[12]{x^5} - 4\sqrt[4]{x} + 12\sqrt[12]{x} - 12 \operatorname{arc\,tg}\sqrt[12]{x} + C}$$

2. $$I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}$$

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{1/3} & x + 1 = t^6; \quad x = t^6 - 1; \quad dx = 6t^5\,dt \\ \sqrt{x+1} = (x+1)^{1/2} & \end{array}$$

$$I = 6\int \frac{t^6 - 1}{t^2 - t^3}\,t^5 dt = 6\int \frac{t^6 - 1}{t^2(1-t)} \cdot t^5 dt =$$

$$I = -6\int \frac{t^3(t-1)(t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)}{t - 1} =$$

$$= -6\left[\frac{t^9}{9} + \frac{t^8}{8} + \frac{t^7}{7} + \frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4}\right]$$

Kako je $t = \sqrt[6]{x+1}$, dobijemo konačno:

$$\underline{I = -\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7} - (x+1) -}$$

$$\underline{-\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} + C}$$

Očito je, da gore navedena supstitucija

$$\sqrt[n]{ax + b} = t$$

vrijedi samo u tom slučaju, ako se pod n-tim korijenima, ukoliko ih ulaze više u integral, nalazi uvijek jedna te ista linearna funkcija. Nalaze li se pod korijenima različite linearne funkcije, moramo dotični integral riješiti na neki drugi način.

Navedimo primjer.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

Brojnik i nazivnik pomnožimo s

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$I = \int \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})\,dx}{x+1-x} = \int \sqrt{x+1}\,dx - \int \sqrt{x}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x^3}\right) + C$$

Izračunaj integrale:

$$\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{1+x}} \qquad \left[= (1+x)\left(\frac{2}{3}\sqrt{1+x} - 1\right) + C\right.$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x}} \qquad \left[= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{2}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{2}}\right| + C\right]$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{2x+1}}\,dx \qquad \left[-\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x+1)^2}\left\{\frac{1}{8}(2x+1)^2 - \frac{2}{5}(2x+1)\right\} + C\right]$$

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx \qquad \left[= \ln\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} \qquad \left[= 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(1 + \sqrt[4]{x}) + C\right]$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x} - x\sqrt[3]{x}}\,dx \qquad \left[= 6\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[6]{x}}\right| + C\right]$$

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}\,dx \qquad \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|\right]$$

U p u t a: brojnik i nazivnik integranda pomnoži sa brojnikom:

Tip III.

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$$

Integrand je racionalna funkcija od x i drugog korijena iz k v a d r a t n e funkcije, t. j. integrand je sastavljen od x, drugog korijena iz kvadratne funkcije i konstanata konačnim brojem r a c i o n a l n i h operacija. U x samom integrand nije racionalan, jer je x pod korijenom.

Karakteristika tipa III: U integrandu je drugi korijen iz kvadratne funkcije.

Ovamo zapravo spadaju naši predtipovi B i C. Izdvojili smo ih, jer su posebni slučajevi tipa III, pa se mnogo jednostavnije rješavaju kako je to pod B i C navedeno.

I. Osnovni postupak za rješavanje integrala tipa III.

Taj postupak sastoji se u racionalizaciji integranda pomoću Eulerovih supstitucija. Integrand, koji nije racionalan u x, svodi se na racionalnu funkciju od nove promjenljive t, pa se dobije $\int R(t)dt$, a to je tip I.

Pri toj racionalizaciji razlikujemo dva slučaja:

1. slučaj. Koeficijent od x^2 kvadratne funkcije, koja je pod korijenom, t. j. a u $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ je pozitivan.

U tom slučaju postupamo kako slijedi:

Prvi korak: Supstitucija:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \cdot x + t$$

gdje je t nova promjenljiva, u kojoj treba izraziti sve x, koji ulaze u integrand, a također dx. Prema tome:

Drugi korak: Iz supstitucije računamo x, izrazivši ga s t.

Treći korak: Računamo dx, izrazivži ga s t.

Četvrti korak: Pomoću supstitucije izrazujemo kvadratnu funkciju s t.

Peti korak: Sve to uvrštavamo u integrand, vršimo sva moguća kraćenja pa dobijemo $\int R(t)dt$, t. j. tip I, koji računamo na već poznate nam načine.

Šesti korak:

U izračunati $\int R(t)dt$ uvrštavamo $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a} \cdot x$ dobiven iz supstitucije.

Primjeri

1. $$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$$

$a = 1 > 0$, dakle slučaj 1.

1) Supstitucija:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 3} = \sqrt{1} \cdot x + t \,|^2 \qquad \text{(a)}$$

2) $$x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2tx + t^2$$

x^2 se ukida, pa možemo x prikazati kao racionalnu funkciju od t:

$$2x - 2tx = t^2 - 3$$
$$2x(1 - t) = t^2 - 3$$

$$\underline{x = \frac{t^2 - 3}{2(1 - t)}} \qquad \text{(b)}$$

3) $$dx = \frac{1}{2}\frac{(1-t)\cdot 2t + (t^2-3)}{(1-t)^2}dt = \frac{1}{2}\frac{2t - 2t^2 + t^2 - 3}{(t-t)^2}dt$$

$$\underline{dx = \frac{1}{2}\frac{-t^2 + 2t - 3}{(1-t)^2}}$$

4) (b) uvrstimo u (a):

$$\sqrt{x^2 + 2x + 3} = \frac{t^2 - 3}{2(1-t)} + t = \frac{t^2 - 3 + 2t - 2t^2}{2(1-t)}$$

$$\underline{\sqrt{x^2 + 2x + 2} = \frac{-t^2 + 2t - 3}{2(1-t)}}$$

5) Sve podvučeno uvrstimo u zadani integral:

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = \frac{1}{2}\int \frac{(-t^2 + 2t - 3)\cdot 2(1-t)\cdot 2(1-t)}{(1-t)^2(t^2-3)(-t^2+2t-3)}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int R(t)\,dt.$$

Nakon kraćenja dobijemo:

$$I = 2\int \frac{dt}{t^2 - 3} = \text{prema (56 b)} = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}$$

6) Iz (a) imamo:

$t = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x$, pa uvrštenje u I daje konačni rezultat:

$$\underline{I = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x - \sqrt{3}}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x + \sqrt{3}} + C}$$

2. $$I = \int \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+1} + 1}dx$$

$a = 1 > 0$, dakle slučaj 1.

1) $$\sqrt{x^2 + 1} = x + t \,|^2 \qquad \text{(a)}$$

2) $$x^2 + 1 = x^2 + 2tx + t^2$$

$$x = -\frac{t^2 - 1}{2t} \qquad \text{(b)}$$

3) $$dx = -\frac{1}{2}\frac{t\cdot 2t - (t^2-1)}{t^2}dt$$

$$\underline{dx = -\frac{t^2+1}{2t^2}dt}$$

4) Uvrstimo (b) u (a):

$$\sqrt{x^2+1} = -\frac{t^2-1}{2t} + t = \frac{-t^2 + 1 + 2t^2}{2t}$$

$$\underline{\sqrt{x^2+1} = \frac{t^2+1}{2t}}$$

5) Uvrštenje podvučenog u I daje:

$$I = -\int \frac{\left(\frac{t^2+1}{2t} - 1\right)(t^2+1)}{\left(\frac{t^2+1}{2t} + 1\right)2t^2}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(t^2 - 2t + 1)(t^2+1)}{(t^2+2t+1)t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int R(t)\,dt$$

Podijelivši brojnik s nazivnikom i uzevši u obzir, da je $t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$, dobijemo:

$$I = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\int \frac{4t^3 - t^2 + 2t - 1}{t^2(t+1)^2}\,dt$$

Nakon rastavljanja u parcijalne razlomke imamo:

$$I = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\int\left(-\frac{1}{t^2} + \frac{4}{t} - \frac{8}{(t+1)^2}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2t} + 2\ln|t| + \frac{4}{t+1} = 2\ln|t| - \frac{t^3 + t^2 - 9t - 1}{2t(t+1)}$$

6) prema (a):

$$t = \sqrt{x^2+1} - x$$

Nakon uvrštenja i uređivanja dobijemo konačno:

$$\underline{I = 2\ln(\sqrt{x^2+1} - x) + \frac{x^2 + 2x - 2 + 2\sqrt{x^2+1}}{x} + C}$$

Izračunaj integrale:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} \qquad \left[= \ln\frac{\sqrt{x^2+x+1} - x - 1}{\sqrt{x^2+x+1} - x + 1} + C\right]$$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+1}} \qquad \left[= -\frac{1}{4}(\sqrt{x^2+1} - x)^2 - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x^2+1} - x) + C\right]$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-4}} \qquad \left[= \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\frac{x^2+1 - x\sqrt{x^2-4} + \sqrt{5}}{x^2+1 - x\sqrt{x^2-4} - \sqrt{5}} + C\right]$$

2. slučaj

Koeficijent od x^2, t. j. a u $\sqrt{ax^2+bx+c}$ je negativan. U tom slučaju racionalizaciju integranda ne možemo provesti pomoću supstitucije slučaja 1., jer je $\sqrt{a}$ za $a < 0$ imaginaran, a uvijek se traži realna vrijednost integrala. Prema tome je supstitucija u tom drugom slučaju drukčija.

Prvi korak. Odredivši nultočke x_1 i x_2 kvadratne funkcije, koja je pod korijenom, rastavljamo tu funkciju u faktore po poznatom pravilu $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ pa pišemo supstituciju:

(uzeto da je $a = -a'$)

$\sqrt{-a'(x-x_1)(x-x_2)} = \sqrt{a'(x_1 - x)(x - x_2)} = t(x_1 - x)$ ili $t(x - x_2)$, gdje je t nova promjenljiva.

Daljnji postupak je isti kao u slučaju 1., pa vidi tamo korake drugi, treći i t. d.

Primjeri

1.
$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+3x-2}}$$

$$a = -1 < 0 \text{ — slučaj 2.}$$

1)
$$-x^2+3x-2=0; \quad x^2-3x+2=0: \quad x_{1,2} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}-2}$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 1; \quad -x^2+3x-2 = -(x-2)(x-1) = (2-x)(x-1)$$

2) Supstitucija:

$$\sqrt{(2-x)(x-1)} = t(2-x)\,|^2 \qquad \text{(a)}$$

$$(2-x)(x-1) = t^2(2-x)^2$$

Vidimo, da su obje strane jednadžbe djeljive s $(2-x)$. Da se vidi to pojednostavljenje jednadžbe. rastavili smo kvadratnu fukciju u faktore.

$$x-1 = t^2(2-x)$$

$$x-1 = 2t^2 - t^2x$$

$$\underline{x = \frac{2t^2+1}{t^2+1}} \qquad \text{(b)}$$

3)
$$dx = \frac{(t^2+1)4t-(2t^2+1)2t}{(t^2+1)^2}\,dt = 2t\cdot\frac{2t^2+2-2t^2-1}{(t^2+1)^2}\,dt$$

$$\underline{dx = \frac{2t}{(t^2+1)^2}\,dt}$$

4) Uvrštenje (b) u (a) daje:

$$\sqrt{-x^2+3x-2} = t\left(2-\frac{2t^2+1}{t^2+1}\right) = t\,\frac{2t^2+2-2t^2-1}{t^2+1}$$

$$\underline{\sqrt{-x^2+3x-2} = \frac{t}{t^2+1}}$$

5) Uvrštenje podvučenoga u I daje:

$$I = \int \frac{2t\cdot(t^2+1)(t^2+1)}{(t^2+1)^2(2t^2+1)\cdot t}\,dt = 2\int\frac{dt}{2t^2+1} = \int\frac{dt}{t^2+\frac{1}{2}} =$$

$$= \text{prema (52a)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\,\text{arc tg}\,\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}\,\text{arc tg}\,(t\sqrt{2}) \qquad \text{(c)}$$

6) Iz (a) imamo:

$$t = \frac{\sqrt{(x-1)(2-x)}}{2-x} = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$$

Uvrštenje u (c) daje.

$$\underline{I = \sqrt{2}\,\text{arc tg}\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\right) + C}$$

2. $$I = \int \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$a = -1 < 0 \text{ — slučaj 2.}$$

1) $$1 - x^2 = -(x^2 - 1) = -(x + 1)(x - 1) = (1 - x)(x + 1)$$

2) $$\sqrt{(1 - x)(x + 1)} = t(x + 1) \,|^2 \qquad \text{(a)}$$

$$(1 - x)(x + 1) = t^2(x + 1)^2$$

$$1 - x = t^2 x + t^2$$

$$x = -\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \qquad \text{(b)}$$

3) $$dx = -\frac{(t^2 + 1)2t - (t^2 - 1)2t}{(t^2 + 1)^2} dt$$

$$dx = -\frac{4t}{(t^2 + 1)^2} dt \qquad \text{(c)}$$

4) Uvrštenje (b) u (a) daje:

$$\sqrt{1 - x^2} = t\left(-\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} + 1\right)$$

ili $$\sqrt{1 - x^2} = \frac{2t}{t^2 + 1} \qquad \text{(d)}$$

5) (d) i (c) uvrstimo u I:

$$I = -\int \frac{\left(1 - \frac{2t}{t^2 + 1}\right) 4t}{\left(1 + \frac{2t}{t^2 + 1}\right)(t^2 + 1)^2} dt =$$

$$= -4\int \frac{(t^2 - 2t + 1) \cdot t}{(t^2 + 2t + 1)(t^2 + 1)^2} dt = -4\int \frac{(t - 1)^2 \cdot t}{(t + 1)^2 \cdot (t^2 + 1)^2} dt$$

Integrand rastavljamo u parcijalne razlomke pa nakon integriranja dobijemo konačno:

$$\underline{I = 4\left[-\frac{1}{t + 1} - \frac{1}{2(t^2 + 1)} - \operatorname{arc\,tg} t\right] + C}$$

gdje je prema (a):

$$\underline{t = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x + 1}}$$

Izračunaj integrale:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x - 2x^2}} \qquad \left[= \ln \frac{\sqrt{1 - x - 2x^2} + 2x - 1}{\sqrt{1 - x - 2x^2} - 2x + 1} + C\right]$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x - x^2}} \qquad \left[= -\frac{\sqrt{4x - x^2}}{2x} + C\right]$$

$$\int \frac{dx}{3x + \sqrt{5 + 8x - 4x^2}} \qquad \left[= \frac{1}{39} \{ -9 \ln(t^3 + 1) - 12 \operatorname{arc\,tg} t + 13 \ln(t + 1) + \right.$$

$$\left. + 5 \ln(t - 5) \} + C, \text{ gdje je } t = \frac{\sqrt{5 + 8x - 4x^2}}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)} \right]$$

II. Posebni oblici integrala tipa III.

Pomoću gore opisanog osnovnog postupka možemo racionalizirati svaki integral tipa III, t. j. možemo ga svesti na $\int R(t)dt$ (tip I), a time dokazati, da se taj integral može elementarno izračunati, ukoliko se nazivnik racionalne funkcije dade rastaviti u realne faktore prvog i drugog stepena.

Međutim, taj način vodi u većini slučajeva do toliko složenih integrala racionalne funkcije $R(t)$, da ih je praktički teško izračunati, jer je rastavljanje funkcija u parcijalne razlomke previše komplicirano. S toga razloga navedimo još druge načine za rješavanje nekih posebnih oblika integrala tipa III. Ti načini brže vode cilju, pa se uvijek primijenjuju za te oblike.

a) Podintegralna funkcija ima oblik razlomka, pri čemu se u brojniku cijela racionalna funkcija, a u nazivniku drugi korijen iz kvadratne funkcije.

Integral ima dakle oblik:

$$I = \int \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

Stavimo:

$$I \equiv (A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \ldots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0) \sqrt{ax^2 + bx + c} +$$

$$+ A_n \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

gdje su $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ nepoznate konstante.

Da ih odredimo, deriviramo obje strane gornjeg identiteta po x pamteći, da je $D_x \int f(x)\, dx = f(x)$, a zatim množimo s $\sqrt{ax^2 + bx + c}$. Na taj način dobijemo dva identična polinoma, pa uspoređivajući koeficijente istih potencija od x tih polinoma dolazimo do $(n + 1)$ linearnih jednadžbi, iz kojih određujemo nepoznanice $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$, postupamo dakle kao pri rastavljanju razlomljene racionalne funkcije u parcijalne razlomke (vidi tip I).

Primjeri

1. $$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - 2x - x^2}} dx$$

Kako je u brojniku polinom drugog stepena, stavimo:

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - 2x - x^2}} dx \equiv (A_1 x + A_0) \sqrt{1 - 2x - x^2} + A_2 \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}} \quad \text{(a)}$$

Deriviramo po x:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} \equiv (A_1 x + A_0)\frac{-2-2x}{2\sqrt{1-2x-x^2}} + \sqrt{1-2x-x^2}\cdot A_1 +$$

$$+ \frac{A_2}{\sqrt{1-2x-x^2}} \Bigg| \cdot \sqrt{1-2x-x^2}$$

$$x^2 \equiv (A_1 x + A_0)(-1-x) + (1-2x-x^2)\cdot A_1 + A_2$$

$$x^2 \equiv -A_1 x - A_0 - A_1 x^2 - A_0 x + A_1 - 2A_1 x - A_1 x^2 + A_2$$

$$x^2 \equiv -2A_1 x^2 + (-3A_1 - A_0)x + (A_2 + A_1 - A_0)$$

Slijedi:

$$-2A_1 = 1; \quad \underline{A_1 = -\frac{1}{2}}$$

$$-3A_1 - A_0 = 0; \quad \frac{3}{2} - A_0 = 0; \quad \underline{A_0 = \frac{3}{2}}$$

$$A_2 + A_1 - A_0 = 0; \quad \underline{A_2 = 2}$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$I = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}}_{I_1}$$

ili

$$I = \frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + 2I_1 \qquad \text{(b)}$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \text{predtip B} = \int \frac{dx}{\sqrt{-[(x+1)^2-1-1]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}} =$$

$$x+1 = t; \quad dx = dt; \quad 2 = k^2; \quad k = \sqrt{2}$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{k} = \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$$

Uvrštenje u (b) daje konačno:

$$\underline{I = \frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C}$$

2. $$I = \int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx$$

Kako je u brojniku polinom prvog stepena, stavimo:

$$I = \int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx \equiv A_0\sqrt{9x^2+6x+2} + A_1\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}} \qquad \text{(a)}$$

Deriviramo:

$$\frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}} \equiv A_0\frac{18x+6}{2\sqrt{9x^2+6x+2}} + \frac{A_1}{\sqrt{9x^2+6x+2}} \Bigg| \cdot \sqrt{9x^2+6x+2}$$

$$2x+5 \equiv 9A_0 x + (3A_0 + A_1)$$

$$9A_0 = 2; \quad \underline{A_0 = \frac{2}{9}}$$

$$3A_0 + A_1 = 5; \quad \frac{2}{3} + A_1 = 5; \quad \underline{A_1 = \frac{13}{3}}$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$I = \frac{2}{9}\sqrt{9x^2 + 6x + 2} + \frac{13}{3}\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 6x + 2}}}_{I_1} \qquad \text{(b)}$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 6x + 2}} = \text{predtip B} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}}} = \left[x + \frac{1}{3} = t; \quad dx = dt; \quad k^2 = \frac{1}{9}\right] = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + k^2}} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \ln(t + \sqrt{t^2 + k^2}) = \frac{1}{3}\ln\left(x + \frac{1}{3} + \sqrt{x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\ln(3x + 1 + \sqrt{9x^2 + 6x + 2}) \underbrace{- \ln 3 + C}_{C_1}$$

Uvrštenje u (b) daje:

$$\underline{I = \frac{2}{9}\sqrt{9x^2 + 6x + 2} + \frac{13}{9}\ln(3x + 1 + \sqrt{9x^2 + 6x + 2}) + C_1}$$

Na taj način možemo izračunati i integrale predtipa *C*. Da ih svedemo na oblik a), množimo i dijelimo podintegralnu funkciju s drugim korijenom iz zadane kvadratne funkcije.

Izračunaj na taj način sve integrale navedene kod predtipa *C*.

Izračunaj integrale:

$$\int \frac{x + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx \qquad \left[= \sqrt{x^2 + 1} + 5\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C\right]$$

Izračunaj taj integral i na drugi način i to tako, da ga rastaviš u dva integrala, podijelivši svaki član brojnika s nazivnikom.

$$\int \frac{x^3 + 2x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}\,dx \qquad \left[= \frac{1}{3}(x^2 - 5x + 46)\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 34\ln(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x - 5}) + C\right]$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad \left[= \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{8}x\right)\sqrt{x^2 + 1} + \frac{3}{8}\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C\right]$$

b) Ima li integral oblik:

$$\int (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)\sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx,$$

tada množeći i dijeleći integrand s $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ svodimo ga na predašnji oblik a).

Primjer

$$I = \int x\sqrt{8 + x - x^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{x(8 + x - x^2)}{\sqrt{8 + x - x^2}}\,dx = \int \frac{-x^3 + x^2 + 8x}{\sqrt{8 + x - x^2}}\,dx$$

Stavimo:

$$I = \int \frac{-x^3 + x^2 + 8x}{\sqrt{8 + x - x^2}}\,dx \equiv (A_2 x^2 + A_1 x + A_0)\sqrt{8 + x - x^2} + A_3 \int \frac{dx}{\sqrt{8 + x - x^2}} \quad \text{(a)}$$

Deriviramo:

$$\frac{-x^3 + x^2 + 8x}{\sqrt{8 + x - x^2}} \equiv (A_2 x^2 + A_1 x + A_0)\frac{1 - 2x}{2\sqrt{8 + x - x^2}} + \sqrt{8 + x - x^2}(2A_2 x + A_1) +$$

$$+ \frac{A_3}{\sqrt{8 + x - x^2}} \quad \Big| \cdot 2\sqrt{8 + x - x^2}$$

$$-2x^3 + 2x^2 + 16x \equiv (A_2 x^2 + A_1 x + A_0)(1 - 2x) + 2(8 + x - x^2)(2A_2 x + A_1) + 2A_3$$

Nakon izjednačenja koeficijenata i rješavanja jednadžbi dobijemo:

$$\underline{A_2 = \frac{1}{3}}; \quad \underline{A_1 = -\frac{1}{12}}; \quad \underline{A_0 = -\frac{67}{24}}; \quad \underline{A_3 = \frac{33}{16}}$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$I = \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{12} - \frac{67}{24}\right)\sqrt{8 + x - x^2} + \frac{33}{16}\int \frac{dx}{\sqrt{8 + x - x^2}}$$

Rješivši taj posljednji integral po predtipu B dobijemo konačno:

$$\underline{I = \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{12} - \frac{67}{24}\right)\sqrt{8 + x - x^2} + \frac{33}{16}\arcsin\frac{2x - 1}{\sqrt{33}} + C}$$

Izračunaj:

$\int (2x - 5)\sqrt{2 + 3x - x^2}\,dx$

$$\left[= \left(\frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{1}{6}\right)\sqrt{2 + 3x - x^2} + \frac{17}{4}\arcsin\frac{3 - 2x}{\sqrt{17}} + C\right]$$

c) Ima li integral oblik:

$$\int \frac{dx}{(x - k)^n\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

gdje je n prirodan broj, a k bilo koji realan broj (često nula), možemo ga pomoću supstitucije:

$$x - k = \frac{1}{t}$$

svesti na oblik a) ili na osnovni integral.

Primjeri

1.
$$I = \int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{3-2x^2}}$$

$$x-1 = \frac{1}{t};\quad x = \frac{1}{t}+1;\quad dx = -\frac{dt}{t^2};\quad t = \frac{1}{x-1} \qquad \text{(a)}$$

$$I = -\int \frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t^3}\sqrt{3-2\left(\frac{1}{t}+1\right)^2}} = -\int \frac{dt}{\frac{1}{t}\sqrt{3-\frac{2}{t^2}-\frac{4}{t}-2}} =$$

$$= -\underbrace{\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{t^2-4t-2}}}_{I_1}$$

a to je predašnji oblik a).

Stavimo:
$$I = -I_1 \qquad \text{(b)}$$

$$I_1 = \int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{t^2-4t-2}} \equiv (A_1 t + A_0)\sqrt{t^2-4t-2} + A_2 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-4t-2}} \qquad \text{(c)}$$

Deriviramo po t:

$$\frac{t^2}{\sqrt{t^2-4t-2}} \equiv (A_1 t + A_0)\frac{2t-4}{2\sqrt{t^2-4t-2}} + \sqrt{t^2-4t-2}\cdot A_1 +$$

$$+ \frac{A_2}{\sqrt{t^2-4t-2}} \quad \Big|\ \sqrt{t^2-4t-2}$$

$$t^2 \equiv (A_1 t + A_0)(t-2) + A_1(t^2-4t-2) + A_2$$

$$t^2 \equiv A_1 t^2 + A_0 t - 2A_1 t - 2A_0 + A_1 t^2 - 4A_1 t - 2A_1 + A_2$$

$$t^2 \equiv 2A_1 t^2 + (-6A_1 + A_0)t + (A_2 - 2A_1 - 2A_0)$$

$$2A_1 = 1;\quad \underline{A_1 = \frac{1}{2}}$$

$$-6A_1 + A_0 = 0;\quad \underline{A_0 = 3}$$

$$A_2 - 2A_1 - 2A_0 = 0;\quad \underline{A_2 = 7}$$

Uvrštenje u (c) daje:

$$I_1 = \left(\frac{1}{2}t + 3\right)\sqrt{t^2-4t-2} + 7\underbrace{\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-4t-2}}}_{I_2}$$

$$I_1 = \left(\frac{t}{2} + 3\right)\sqrt{t^2-4t-2} + 7I_2 \qquad \text{(d)}$$

$$I_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-4t-2}} = \text{predtip B} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t-2)^2-6}} =$$

$$t-2 = z;\quad dt = dz;\quad 6 = k^2$$

$$= \int \frac{dz}{\sqrt{z^2-6}} = \ln(z + \sqrt{z^2-6}) = \ln(t-2+\sqrt{t^2-4t-2})$$

Uvrštenje u (d), a zatim u (b) daje:

$$I = -\left(\frac{t}{2} + 3\right)\sqrt{t^2-4t-2} - 7\ln(t-2+\sqrt{t^2-4t-2})$$

Konačno uvrstimo $t = \frac{1}{x-1}$ prema (a):

$$I = -\left(\frac{1}{2(x-1)} + 3\right)\sqrt{\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{x-1} - 2} - 7\ln\left(\frac{1}{x-1} - 2 + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{x-1} - 2}\right)$$

$$\underline{I = -\left(\frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{3}{x-1}\right)\sqrt{3-2x^2} - 7\ln\left(\frac{3-2x+\sqrt{3-2x^2}}{x-1}\right) + C}$$

2. $$I = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$$

$$x + 1 = \frac{1}{t}; \quad x = \frac{1}{t} - 1; \; dx = -\frac{dt}{t^2}; \quad t = \frac{1}{x+1} \qquad \text{(a)}$$

Uvrštenje u I daje:

$$I = -\int \frac{dt}{t^2 \cdot \frac{1}{t}\sqrt{1-\left(\frac{1}{t}-1\right)^2}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{1-\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}-1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2t-1}} =$$

$$2t - 1 = z; \quad t = \frac{z+1}{2}; \quad dt = \frac{dz}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}\,dz = -\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{z} = -\sqrt{2t-1} = \text{prema (a)} =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{x+1} - 1} = -\sqrt{\frac{2-x-1}{x+1}}$$

$$\underline{I = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C}$$

3. Riješimo integral naveden na str. 132.

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{4x-x^2}}$$

$$x = \frac{1}{t}; \quad dx = -\frac{1}{t^2}\,dt; \quad t = \frac{1}{x} \qquad \text{(a)}$$

$$I = -\int \frac{dt}{t^2 \cdot \frac{1}{t}\sqrt{\frac{4}{t} - \frac{1}{t^2}}}\,2 = -\int \frac{dt}{\sqrt{4t-1}} =$$

$$4t - 1 = z; \quad t = \frac{z+1}{4}; \quad dt = \frac{dz}{4}$$

$$= -\frac{1}{4}\int\frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2}\sqrt{z} = -\frac{1}{2}\sqrt{4t-1} = \text{prema (a)} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{x}-1}$$

$$\underline{I = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4-x}{x}} = -\frac{\sqrt{4x-x^2}}{2x} + C}$$

Onaj, koji je taj integral riješio pomoću Eulerove supstitucije, opazit će velike prednosti računanja tog integrala kao posebnog oblika c).

4. $$I = \int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$x = \frac{1}{t};\quad dx = -\frac{1}{t^2}dt;\quad t = \frac{1}{x} \qquad \text{(a)}$$

$$I = -\int\frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = -\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t$$

Prema (a):

$$\underline{I = -\arcsin\frac{1}{x} + C}$$

Izračunaj integrale:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \qquad \left[= \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} + C\right]$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{5-2x^2}} \qquad \left[= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{x}{\sqrt{5}+\sqrt{5-2x^2}} + C\right]$$

$$\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-6x+1}} \qquad \left[= \frac{1}{\sqrt{7}}\arcsin\frac{x+5}{\sqrt{8}\cdot(x-2)} + C\right]$$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4x+1}} \qquad \left[= -\frac{\sqrt{x^2-4x+1}}{x} + 2\ln\left(\frac{1-2x+\sqrt{x^2-4x+1}}{x}\right) + C\right]$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+3}}$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{-x^2+3x-2}}$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x-2x^2}}$$

Rezultate vidi na str. 128, 130, 131 i 132.

Poseban slučaj oblika c).

Ako faktor $(x - k)$, koji se nalazi u nazivniku ispred $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, nije linearan, treba najprije provesti rastavljanje u parcijalne razlomke, a zatim integral rastaviti u više integrala. Često vodi taj način brže cilju nego primjena Eulerovih supstitucija.

Primjer

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2}}$$

$\frac{1}{x^2 - 1}$ rastavimo u parcijalne razlomke (vidi tip I):

$$\frac{1}{x^2 - 1} \equiv \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} \Big| \cdot (x + 1)(x - 1)$$

$$1 \equiv A(x - 1) + B(x + 1)$$

$$\text{za } x = 1;\ 1 = 2B;\ \underline{B = \frac{1}{2}}$$

$$\text{za } x = -1;\ 1 = -2A;\ \underline{A = -\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2(x + 1)} + \frac{1}{2(x - 1)}$$

To uvrstimo u I pa ga rastavimo u dva integrala:

$$I = -\frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{1 - x^2}}}_{I_1} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{1 - x^2}}}_{I_2} = \frac{1}{2}(-I_1 + I_2) \qquad \text{(a)}$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{1 - x^2}} = -\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \quad \text{(vidi primjer 2. na strani 138)}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{1 - x^2}}$$

$$x - 1 = \frac{1}{t},\quad x = \frac{1}{t} + 1,\quad dx = -\frac{dt}{t^2};\quad t = \frac{1}{x - 1}$$

$$I_2 = -\int \frac{dt}{t^2 \cdot \frac{1}{t}\sqrt{1 - \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} - 1}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{1 - \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} - 1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{-2t - 1}} =$$

$$-2t - 1 = -z;\ dt = \frac{dz}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{-z}} = -\sqrt{-z} = -\sqrt{-2t - 1} = -\sqrt{-\frac{2}{x - 1} - 1} =$$

$$= -\sqrt{\frac{-x - 1}{x - 1}} = -\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$I = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1-x-1-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\underline{I = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C}$$

Izračunaj:

$$\int \frac{dx}{(x^2-9)\sqrt{5+6x-7x^2}} \qquad \left[= \frac{1}{6\sqrt{40}} \arcsin \frac{7-9x}{(x-3)\sqrt{11}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{6\sqrt{76}} \arcsin \frac{12x-2}{(x+3)\sqrt{11}}\right]$$

Na isti način može se izračunati integral, ako je podintegralna funkcija

$$\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

pomnožena s nekom razlomljenom racionalnom funkcijom

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

U tom slučaju također rastavljamo $R(x)$ u parcijalne razlomke, a sam integral u niz integrala oblika c).

Riješi na taj način:

$$\int \frac{3x-5}{(x-1)^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

rastavivši u tu svrhu $\frac{3x-5}{(x-1)^2}$ u parcijalne razlomke.

$$\left[= \frac{2}{5}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}}{x-1} + \frac{17}{5\sqrt{5}} \ln \frac{x+4-\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2+4}}{x-1} + C\right]$$

a također:

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$\left[= \frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x} \right| + C\right]$$

Ako je $R(x)$ već parcijalni razlomak, moramo primijeniti Eulerove supstitucije.

Tip IV. Binomni integrali

To su integrali oblika

$$\int x^p(ax^q+b)^r\,dx$$

gdje su a i b realni, a p, q i r racionalni brojevi.

Ako je r razlomak, a to pretpostavljamo, tada binomni integral možemo elementarno izračunati, t. j. izraziti ga konačnim brojem poznatih nam elementarnih funkcija, samo u tom slučaju, ako je:

1) $$\frac{p+1}{q} \text{ cio broj ili nula}$$

ili

2) $$\frac{p+1}{q} + r \text{ cio broj ili nula.}$$

Ako ti t. zv. uvjeti integrabilnosti nisu ispunjeni, integrand ne možemo racionalizirati, a dakle ni integral riješiti.

Supstitucija:

u slučaju 1) $$ax^q + b = t^s$$

u slučaju 2) $$ax^q + b = t^s x^q$$

Tu je t nova promjenljiva, s eksponent korijena, odnosno nazivnik u r, koji se u oba slučaja uzima s predznakom $+$.

Primjeri

1. $$I = \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{x^3+1}} = \int x^5 (x^3+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$p = 5;\quad q = 3,\quad r = -\frac{1}{2};\quad s = 2$$

$\frac{p+1}{q} = \frac{5+1}{3} = 2$ cio broj — ispunjen je prvi uvjet integrabilnosti, imamo slučaj 1).

Supstitucija prema $ax^q + b = t^s$: $$x^3 + 1 = t^2 \qquad \text{(a)}$$

$$3x^2\,dx = 2t\,dt$$

$$x^2\,dx = \frac{2}{3}t\,dt$$

Kako nam treba $x^5\,dx$, množimo posljednju jednakost s x^3:

$$x^5\,dx = \frac{2}{3}t \cdot x^3\,dt \qquad \text{(b)}$$

Iz (a):

$$x^3 = t^2 - 1$$

Uvrštenje u (b) daje:

$$x^5\,dx = \frac{2}{3}t(t^2-1)\,dt \qquad \text{(c)}$$

Uvrštenje (a) i (c) u I daje:

$$I = \frac{2}{3}\int \frac{t(t^2-1)}{t}\,dt = \frac{2}{3}\left(\frac{t^3}{3} - t\right) = \frac{2}{9}t(t^2-3)$$

Iz (a) imamo

$$t = \sqrt{x^3 + 1}$$

Uvrštenje u I daje:

$$\underline{I = \frac{2}{9}(x^3 - 2)\sqrt{x^3 + 1} + C}$$

2. $$I = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^3 + 1}} = \int x^{-4}(x^3 + 1)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$p = -4; \quad q = 3; \quad r = -\frac{1}{2}; \quad s = 2$$

$$\frac{p + 1}{q} = \frac{-4 + 1}{3} = -1 = \text{cio broj — slučaj 1).}$$

Supstitucija:

$$x^3 + 1 = t^2; \quad t = \sqrt{x^3 + 1} \tag{a}$$

$$3x^2 dx = 2t\,dt$$

$$x^2 dx = \frac{2}{3} t\,dt. \tag{b}$$

$$I = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^3 + 1}} = \text{brojnik i nazivnik množimo sa } x^2 =$$

$$= \int \frac{x^2\,dx}{x^6\sqrt{x^3 + 1}} \tag{c}$$

Prema (a):

$$x^3 = t^2 - 1 \,|^2$$

$$x^6 = (t^2 - 1)^2 \tag{d}$$

Uvrštenje (a), (b) i (d) u (c) daje:

$$I = \frac{2}{3}\int \frac{t\,dt}{(t^2 - 1)^2 \cdot t} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{(t^2 - 1)^2}$$

Nakon rastavljanja u parcijalne razlomke dobijemo:

$$I = \frac{2}{3}\int \left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{t+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{t-1}\right]dt$$

Integriramo:

$$I = \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t+1} + \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{4}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{4}\ln|t-1|\right]$$

ili

$$I = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1}\right) + \frac{1}{6}\ln\frac{t+1}{t-1}$$

ili

$$I = -\frac{1}{3}\frac{t}{t^2 - 1} + \frac{1}{6}\ln\frac{t+1}{t-1}$$

Uvrštenje (a) daje konačno:

$$\underline{I = -\frac{1}{3}\frac{\sqrt{x^3+1}}{x^3} + \frac{1}{6}\ln\frac{\sqrt{x^3+1}+1}{\sqrt{x^3+1}-1} + C}$$

Izračunaj:

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left[= -\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C\right]$$

3. $$I = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^8+1}} = \int x^3(x^8+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$p = 3;\quad q = 8;\quad r = -\frac{1}{2};\quad s = 2$$

$\frac{p+1}{q} = \frac{3+1}{8} = \frac{1}{2} \neq$ cio broj — prvi uvjet integrabilnosti nije ispunjen.

$\frac{p+1}{q} + r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ — ispunjen je drugi uvjet integrabilnosti, imamo slučaj 2).

Supstitucija prema $ax^q + b = t^s x^q$:

$$x^8 + 1 = t^2 x^8 \mid : x^8$$

$$1 + x^{-8} = t^2 \qquad \text{(a)}$$

$$I = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^8+1}} = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^8\left(1+\frac{1}{x^8}\right)}} = \int \frac{x^3\,dx}{x^4\sqrt{1+x^{-8}}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^{-8}}} \qquad \text{(b)}$$

Prema (a): $$-8x^{-9}\,dx = 2t\,dt$$

odatle: $$x^{-8}\cdot x^{-1}\,dx = -\frac{1}{4}t\,dt$$

Iz (a):

$$x^{-8} = t^2 - 1$$

Uvrštenje daje:

$$(t^2-1)\cdot\frac{dx}{x} = -\frac{1}{4}t\cdot dt$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{1}{4}\frac{t}{t^2-1}\cdot dt \qquad \text{(c)}$$

Uvrštenje (a) i (c) u (b) daje:

$$I = -\frac{1}{4}\int\frac{t\,dt}{(t^2-1)\cdot t} = -\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2-1} = -\frac{1}{8}\ln\frac{t-1}{t+1} = \text{prema (a)} =$$

$$= -\frac{1}{8}\ln\frac{\sqrt{1+x^{-8}}-1}{\sqrt{1+x^{-8}}+1} = \underline{-\frac{1}{8}\ln\frac{\sqrt{x^8+1}-x^4}{\sqrt{x^8+1}+x^4} + C}$$

4. $$I = \int \frac{x^4 \cdot dx}{\sqrt{1 + x^3}} = \int x^4 \cdot (1 + x^3)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$p = 4; \quad q = 3; \quad r = -\frac{1}{2}; \quad s = 2$$

$\frac{p+1}{q} = \frac{4+1}{3} = \frac{5}{3} \neq$ cio broj $\frac{p+1}{q} + r = \frac{5}{3} - \frac{1}{2} = \frac{7}{6} \neq$ cio broj	Oba uvjeta integrabilnosti nisu ispunjena — integral ne možemo elementarno riješiti

5. $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^3}} = \int (1 + x^3)^{-\frac{1}{2}} dx = \int x^0 \cdot (1 + x^3)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$p = 0; \quad q = 3; \quad r = -\frac{1}{2}; \quad s = 2$$

$\frac{p+1}{q} = \frac{0+1}{3} = \frac{1}{3} \neq$ cio broj $\frac{p+1}{q} + r = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \neq$ cio broj	Isto! Kasnije ćemo taj integral približno izračunati rastavivši integrand u binomni red. (Vidi dalje točku 8. ovog §).

Izračunaj:

$$\int x^5 \sqrt[7]{2 - 3x^6}\, dx \qquad \left[= -\frac{7}{144}(2 - 3x^6)\sqrt[7]{2 - 3x^6} + C\right]$$

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1 + x^2}} \qquad \left[= \frac{1}{3} \cdot \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1 + x^2}}{x^3} + C\right]$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^2}} \qquad \left[= -\frac{1}{2} x \sqrt{4 - x^2} - 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} + C\right]$$

Primijetimo, da se kadšto binomni integrali dadu izračunati jednostavnije bez primjene gore navedenih formula. Pokažimo to na primjeru.

Primjer $$I = \int x^5 \sqrt[3]{(1 + x^3)^2}\, dx$$

$$I = \int x^3 \sqrt[3]{(1 + x^3)^2}\, x^2 dx =$$

$$1 + x^3 = t \quad ; \quad x^3 = t - 1$$

$$3x^2 dx = dt \quad ; \quad x^2 dx = \frac{1}{3} dt$$

$$= \frac{1}{3} \int (t - 1)\sqrt[3]{t^2}\, dt = \frac{1}{3} \int \left(t^{5/3} - t^{2/3}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{8} t^{8/3} - \frac{3}{5} t^{5/3}\right) = \underline{\frac{1}{8} \sqrt[3]{(1 + x^3)^8} - \frac{1}{5} \sqrt[3]{(1 + x^3)^5} + C}$$

Isto tako možemo gore navedene binomne integrale $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ i $\int x^5 \sqrt[7]{2 - 3x^6}\, dx$ mnogo jednostavnije riješiti uz supstitucije, uzevši neposredno za prvi integral $1 - x^2 = t$, a za drugi $2 - 3x^6 = t$.

Dovršavajući time našu diskusiju o integralima iracionalnih funkcija, koje možemo elementarno izračunati, moramo naglasiti, da sa time nisu iscrpljeni svi slučajevi tih integrala. Često se može integral iracionalne funkcije, koji ne spada ni u jedan od navedenih tipova, izračunati transformirajući podintegralnu funkciju i pogodivši podesnu supstituciju. Očito je, da taj postupak traži od računača mnogo snalažljivosti, a u prvom redu vježbanje.

Primjer

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{(x-1)^3(x+2)^6}{(x+2)^3}}} = \int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt[4]{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^3}}$$

$$I = \int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt[4]{\left[\frac{(x+2)-3}{x+2}\right]^3}} = \int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt[4]{\left(1-\frac{3}{x+2}\right)^3}} =$$

$$x+2 = t; \quad dx = dt$$

$$= \int \frac{dt}{t^2\sqrt[4]{\left(1-\frac{3}{t}\right)^3}} =$$

$$1-\frac{3}{t} = u, \text{ odatle } t = \frac{3}{1-u}, \text{ a } dt = \frac{3du}{(1-u)^2}$$

$$= 3\int \frac{du}{(1-u)^2 \cdot \frac{9}{(1-u)^2}\sqrt[4]{u^3}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^{3/4}} = \frac{4}{3}u^{1/4} =$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt[4]{1-\frac{3}{x+2}} = \underline{\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}} + C$$

Izračunaj integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$$

Uputa. Racionaliziraj nazivnik integranda!

$$\left[= \frac{x}{4}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right) + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right| + C\right]$$

Tip V. Eliptički integrali

U tip III svrstali smo integrale, koji su sastavljeni od x, konstanata i drugog korijena iz kvadratne funkcije, t. j. polinoma drugog stepena, konačnim brojem racionalnih operacija. Ako je pod drugim korijenom polinom trećeg ili četvrtog stepena s realnim i različitim nultočkama, imamo tako zvani eliptički integral, koji ima dakle općenito oblik:

$$I = \int R\left(x, \sqrt{a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}\right) dx$$

[za $a_4 = 0$ imamo $P_3(x)$].

Integrand eliptičkog integrala ne možemo racionalizirati, a prema tome ne možemo taj integral elementarno riješiti, t. j. izraziti ga u obliku konačne sume poznatih nam elementarnih funkcija.

Praktički dosta često dolazimo do eliptičkih integrala, na pr. pri izračunavanju duljine luka elipse (odatle i potječe naziv tih integrala), pri određivanju vremena njihaja matematičkog njihala i t. d. U tim slučajevima razvijemo integrand u beskonačni konvergentni red pa ga integriramo član po član. Rezultat integriranja je dakle opet beskonačni red, čiju sumu aproksimiramo parcijalnom sumom od toliko članova reda, koliko je to potrebno s obzirom na traženu točnost. O rješavanju integrala pomoću razvoja u red i o integriranju beskonačnih redova bit će govora kasnije.

Može se pokazati, da se svaki eliptički integral dade predočiti kao kombinacija triju osnovnih eliptičkih integrala, koji se zovu Legendre-ovi integrali (čitaj Ležandr) prve, druge i treće vrste. Normalni ili kanonski oblik integrala prve vrste označuje se s $F(\varphi, k)$, druge vrste s $E(\varphi, k)$, a treće vrste s $\Pi(\varphi, m, k)$ i u goniometrijskom obliku glase:

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}; \quad E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi$$

$$\Pi(\varphi, m, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + m \sin^2 \varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \tag{65}$$

gdje je k realna pozitivna konstanta manja od 1, a zove se modul eliptičkog integrala, dok je m neka realna konstanta.

Ako je gornja granica prve i druge vrste integrala $\varphi = \frac{\pi}{2}$, integrali se zovu potpuni i označuju se s K i E.

Ima tablica za eliptičke integrale, iz kojih se vrijednosti tih integrala vade po argumentima φ i α, gdje je $\sin \alpha = k$, a za potpune — po argumentu α (vidi na pr. Hütte, svezak I).

Označimo eliptički integral prve vrste s $u = u(\varphi)$ i prijeđemo na inverznu funkciju $\varphi = \varphi(u)$. Tu inverznu funkciju Jacobi je nazvao »amplituda u« i označio s am u, ili am(u, k) gdje je k modul eliptičkog integrala:

$$\varphi(u) = \text{am}\, u = \text{am}(u, k)$$

Uzmemo li od $\varphi = \text{am}\, u$ sinus i kosinus, dobit ćemo dvije Jacobijeve osnovne eliptičke funkcije:

$$\sin \varphi = \sin \text{am}\, u = \text{sn}\, u \text{ (sinus amplitude } u)$$

$$\cos \varphi = \cos \text{am}\, u = \text{cn}\, u \text{ (kosinus amplitude } u)$$

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \Delta\text{am}\, u = \text{dn}\, u \text{ (delta amplitude } u)$$

To su nove neelementarne funkcije, koje se pomoću elementarnih funkcija mogu izraziti samo beskonačnim brojem racionalnih operacija, na pr. u obliku beskonačnih redova.

I za vrijednosti Jacobijevih eliptičkih funkcija postoje tablice.

Prelazimo na integrale trascendentnih funkcija.

Tip VI.

$$I = \int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

U taj tip spadaju integrali, u koje ulaze $\sin x$, $\cos x$ i konstante, pri čemu su integrandi racionalni u $\sin x$ i $\cos x$; x sam ne ulazi. (Ako ulazi x, kušaj riješiti taj integral načinom parcijalne integracije, kao na pr. u slučaju $\int x \cdot \sin dx$ i sl.).

Postupak. Pomoću supstitucije, koja slijedi, svodimo zadani integral na $\int R(t)\, dt$, t. j. na tip *I*.

Supstitucija:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \qquad \text{(a)}$$

Odatle prema poznatim trigonometrijskim formulama dobijemo:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} =$$

$$= \text{prema (a)} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} =$$

$$= \text{prema (a)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Prema (a)

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arc\,tg} t \quad \text{ili} \quad x = 2 \operatorname{arc\,tg} t$$

Diferenciramo:

$$dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

Dobili smo dakle:

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= \frac{2t}{1 + t^2} \\ \cos x &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ dx &= \frac{2dt}{1 + t^2} \end{aligned}\right| \qquad \text{(b)}$$

Na pr.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \text{prema (b)} = \int \frac{2dt(1+t^2)}{(1+t^2)2t} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| =$$

$$= \text{prema (a)} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C \tag{67}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \text{prema (b)} = \int \frac{2dt(1+t^2)}{(1+t^2)(1-t^2)} = 2\int \frac{dt}{1-t^2} = 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| =$$

$$= \text{prema (a)} = \ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}\right| =$$

$$= \left(\text{jer je } \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1\right) = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\left[\text{prema } \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\right]$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C \tag{68}$$

Primjeri

1. $$I = \int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$$

Prema (b):

$$1+\sin x = 1+\frac{2t}{1+t^2} = \frac{t^2+2t+1}{1+t^2}$$

$$1+\cos x = 1+\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2};\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Uvrštenje u I daje:

$$I = \int \frac{(t^2+2t+1)\,2\cdot(1+t^2)(1+t^2)}{(1+t^2)(1+t^2)\cdot 2t\cdot 2}dt = \frac{1}{2}\int\frac{t^2+2t+1}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}+2t+\ln|t|\right)$$

Konačno prema (a):

$$\underline{I = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C}$$

2. $$I = \int \frac{\cos x \, dx}{1 + \cos x}$$

Prema (b):

$$1 + \cos x = 1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{2}{1 + t^2}$$

$$I = \int \frac{(1 - t^2) \cdot 2(1 + t^2)}{(1 + t^2)(1 + t^2) \cdot 2} dt = \int \frac{1 - t^2}{1 + t^2} dt = -\int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} dt =$$

$$(t^2 - 1):(t^2 + 1) = 1 - \frac{2}{t^2 + 1}$$

$$= -\int \left(1 - \frac{2}{t^2 + 1}\right) dt = -t + 2 \operatorname{arc\,tg} t = \text{prema (a)} =$$

$$= -\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \underline{x - \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C}$$

$$\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}, \text{ vidi Dio I. formula (73a)}\right]$$

Izračunaj:

$$\int \frac{dx}{5 - 3\cos x} \qquad \left[= \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}\left(2 \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C\right]$$

$$\int \frac{dx}{3 + 5\cos x} \qquad \left[= \frac{1}{4} \ln \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2} + C\right]$$

$$\int \frac{\sin x \cdot dx}{1 + \sin x} \qquad \left[= \frac{2}{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}} + x + C\right]$$

$$\int \frac{1 + 2\cos x}{\sin x (3 - \cos x)} dx \qquad \left[= \frac{3}{2} \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{7}{8} \ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right| + C\right]$$

Primjedba

Pomoću supstitucija (a) i (b) možemo racionalizirati i one integrale, čiji su integrandi racionalni u $\sin^n x$ i $\cos^n x$, ali praktički vodi ta racionalizacija do veoma složenih integrala racionalne funkcije od t, pa je uputno, da se ti integrali izračunaju pomoću neke druge podesnije supstitucije.

Primjer

$$I = \int \frac{dx}{3 - 5\sin^2 x + 8\cos^2 x}$$

Podijelivši brojnik i nazivnik s $\cos^2 x$, dobijemo:

$$I = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 x} - 5\,\mathrm{tg}^2 x + 8} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{3(1 + \mathrm{tg}^2 x) - 5\,\mathrm{tg}^2 x + 8} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{11 - 2\,\mathrm{tg}^2 x}$$

$$\left(\text{uzeto je u obzir, da je } \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x\right)$$

Supstitucija:

$$\mathrm{tg}\, x = t; \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt$$

Uvrštenje u I daje:

$$I = \int \frac{dt}{11 - 2t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\frac{11}{2} - t^2} = \text{prema (55a)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{11}} \ln \frac{\sqrt{\frac{11}{2}} + t}{\sqrt{\frac{11}{2}} - t} = \underline{\frac{1}{\sqrt{88}} \ln \frac{\sqrt{11} + \sqrt{2} \cdot \mathrm{tg}\, x}{\sqrt{11} - \sqrt{2} \cdot \mathrm{tg}\, x} + C}$$

Izračunaj:

$$\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 3\sin^2 x} \qquad \left[= \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\,\mathrm{tg}\, x\right) + C\right]$$

$$\int \frac{dx}{4\cos^2 x - 9\sin^2 x} \qquad \left[= \frac{1}{24} \ln \left|\frac{2 + 3\,\mathrm{tg}\, x}{2 - 3\,\mathrm{tg}\, x}\right| + C\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 11\cos^2 x - 7} \qquad \left[= -\frac{1}{6\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{tg}\, x\right) + C\right]$$

Na slični način mogu se računati integrali oblika

$$I = \int R(\mathrm{sh}\, x, \mathrm{ch}\, x)\, dx$$

jer se daju racionalizirati pomoću slične supstitucije:

$$\mathrm{th}\frac{x}{2} = t \qquad \text{(a)}$$

Obzirom na formule za hiperbolne funkcije [vidi Dio I. formule (63) i (65)] imamo:

$$\mathrm{sh}\, x = 2\,\mathrm{sh}\frac{x}{2} \cdot \mathrm{ch}\frac{x}{2} = 2\,\mathrm{th}\frac{x}{2} \cdot \mathrm{ch}^2\frac{x}{2} = 2\,\mathrm{th}\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1 - \mathrm{th}^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \text{prema (a)} = \underline{\frac{2t}{1 - t^2}}$$

$$\operatorname{ch} x = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} = \left(1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}\right) \cdot \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}} =$$

$$= \text{prema (a)} = \underline{\frac{1 + t^2}{1 - t^2}}$$

Iz $\operatorname{th} \frac{x}{2} = t$ slijedi

$$\frac{x}{2} = \operatorname{Ar\,th} t$$

$$x = 2 \operatorname{Ar\,th} t$$

$$\underline{dx = \frac{2dt}{1 - t^2}}$$

Na pr.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \int \frac{2\,dt(1 - t^2)}{(1 - t^2)2t} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \text{prema (a)} = \underline{\ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + C}$$

U mnogim slučajevima vodi supstitucija $e^x = t$ brže cilju i daje jednostavnije rezultate.

Na pr.

$$I = \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$e^x = t: \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{t}$$

$$e^x \cdot dx = dt; \quad dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

$$I = 2 \int \frac{dt}{t\left(t + \frac{1}{t}\right)} = 2 \int \frac{dt}{1 + t^2} = 2 \operatorname{arc\,tg} t = \underline{2 \operatorname{arc\,tg} e^x + C}$$

Izračunaj na dva načina, t. j. pomoću supstitucije $\operatorname{th} \frac{x}{2} = t$, a zatim pomoću $e^x = t$

$$\int \frac{dx}{2 + 5 \operatorname{sh} x}$$

Tip VII.

$$I = \int \sin(mx) \cdot \cos(nx)\, dx$$

$$I = \int \cos(mx) \cdot \cos(nx)\, dx$$

$$I = \int \sin(mx) \cdot \sin(nx)\, dx$$

Produkt trigonometrijskih funkcija svodimo na njihov zbroj, odnosno razliku pomoću poznatih formula:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \qquad \text{(a)}$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \qquad \text{(b)}$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \qquad \text{(c)}$$

Primjeri

1. $$\int \cos 8x \cdot \sin 3x\, dx = \int \sin 3x \cdot \cos 8x\, dx = \text{prema (a)} = \frac{1}{2}\int [\sin 11x + \sin(-5x)]\, dx =$$

$$= \text{prema (59)} = \underline{\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 11x}{11} + \frac{\cos 5x}{5}\right) + C}$$

2. $$\int \sin(2x - 3) \cdot \sin(x + 4)\, dx = \text{prema (c)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int [\cos(x - 7) - \cos(3x + 1)]\, dx = \underline{\frac{\sin(x - 7)}{2} - \frac{\sin(3x + 1)}{6} + C}$$

3. $$\int \cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \text{prema (b)} = \frac{1}{2}\int \left[\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x\right] = \frac{1}{4}\left(\sin 2x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos 2x \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}x =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sin 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \cdot x\right) = \underline{\frac{\sqrt{2}}{8}(\sin 2x + \cos 2x + 2x) + C}$$

Izračunaj:

$$\int \cos 5x \cdot \cos 6x\, dx \qquad \left[= \frac{\sin 11x}{22} + \frac{\sin x}{2} + C\right]$$

$$\int \cos 9x \cdot \sin 5x\, dx \qquad \left[= -\frac{\cos 14x}{28} + \frac{\cos 4x}{8} + C\right]$$

$$\int \sin 3x \cdot \sin(5x - 1)\, dx \qquad \left[= \frac{1}{4}\sin(2x - 1) - \frac{1}{16}\sin(8x - 1) + C\right]$$

Tip VIII.

$$I_n = \int \sin^n x \, dx; \quad I_n = \int \cos^n x \, dx$$

n je cio pozitivan broj.

Postupak: Integrand rastavljamo u faktore tako, da je drugi faktor $\sin x \, dx$, odnosno $\cos x \, dx$, iza toga parcijalno integriramo, pri čemu računajući prvi integral uzimamo $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, a za drugi integral $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Pri računanju tih integrala zgodno je dati I indeks, koji je jednak eksponentu od $\sin x$, odnosno $\cos x$.

Na pr.

$$I_2 = \int \sin^2 x \, dx = \int \underset{u}{\sin x} \cdot \underset{dv}{\sin x \, dx}$$

$$u = \sin x; \quad du = \cos x \, dx$$

$$dv = \sin x \, dx; \quad v = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$I_2 = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \cdot dx$$

$$I_2 = -\sin x \cdot \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$I_2 = -\sin x \cdot \cos x + \int dx - \int \underset{I_2}{\sin^2 x \, dx}$$

$$I_2 = -\sin x \cdot \cos x + x - I_2$$

$$2I_2 = -\sin x \cos x + x$$

$$I_2 = \frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cdot 2} = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

$$\underline{\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C} \tag{59a}$$

Postupajući na isti način dobijemo:

$$\underline{\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C} \tag{60a}$$

Izvedi to!

Do istih rezultata došli smo već prije na drugi način.

[Vidi (59a) i (60a) na str. 62 i 63].

Primjeri

1.
$$I_4 = \int \cos^4 dx = \int \cos^3 x \cdot \cos x \, dx$$

$$u = \cos^3 x; \quad du = -3 \cos^2 x \cdot \sin x \, dx$$

$$dv = \cos x \, dx; \quad v = \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$I_4 = \cos^3 x \cdot \sin x + 3 \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$I_4 = \sin x \cdot \cos^3 x + 3 \int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$I_4 = \sin x \cdot \cos^3 x + 3 \int \cos^2 x \, dx - 3 \int \cos^4 x \, dx$$

$$I_4 = \sin x \cdot \cos^3 x + 3 I_2 - 3 I_4$$

$$4 I_4 = \sin x \cdot \cos^3 x + 3 I_2$$

$$I_4 = \frac{1}{4} \sin x \cdot \cos^3 x + \frac{3}{4} I_2 \qquad \text{(a)}$$

I_4 sveli smo na I_2, t. j. snizili smo za 2 eksponent od cos x. Kaže se, da smo izvršili **rekurziju**.

Prema (60a):
$$I_2 = \int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$$

Uvrštenje u (a) daje:
$$\underline{I_4 = \frac{1}{4} \sin x \cdot \cos^3 x + \frac{3}{8} x + \frac{3}{16} \sin 2x + C}$$

2.
$$I_3 = \int \sin^3 x \, dx$$

$$I_3 = \int \sin^2 x \cdot \sin x \, dx$$

$$u = \sin^2 x; \quad du = 2 \sin x \cdot \cos x \, dx$$

$$dv = \sin x \, dx; \quad v = -\cos x$$

$$I_3 = -\sin^2 x \cdot \cos x + 2 \int \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$I_3 = -\sin^2 x \cdot \cos x + 2 \int \sin x (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$I_3 = -\sin^2 x \cdot \cos x + 2 \int \sin x \, dx - 2 \int \sin^3 x \, dx$$

$$I_3 = -\sin^2 x \cos x + 2 I_1 - 2 I_3$$

$$3 I_3 = -\sin^2 x \cdot \cos x + 2 I_1$$

$$\underline{I_3 = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x + \frac{2}{3} I_1}$$

Opet smo izvršili rekurziju, jer smo snizili za 2 eksponent od sin x, pa smo sveli I_3 na

$$I_1 = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\underline{I_3 = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x + C}$$

Računajući na navedeni način $\int \sin^n x \, dx$ i $\int \cos^n x \, dx$ dobijemo t. zv. formule rekurzije:

$$\left.\begin{aligned} I_n &= \int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cdot \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx \\ I_n &= \int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \cdot \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx \end{aligned}\right| \qquad (69)$$

Primijenjujući više puta te formule možemo ne integrirajući izračunati $\int \sin^n x\,dx$ i $\int \cos^n x\,dx$ za bilo koji prirodni eksponent n.

Izračunaj ne upotrebljavajući formule rekurzije, da stekneš veću sigurnost u integriranju:

$$\int \sin^4 x\,dx \qquad \left[= -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{8}x - \frac{3\sin 2x}{16} + C\right]$$

$$\int \cos^3 x\,dx \qquad \left[= \frac{1}{3}\sin x \cdot \cos^2 x + \frac{2}{3}\sin x + C\right]$$

$$\int \sin^5 x\,dx \qquad \left[= -\frac{1}{5}\left(\sin^4 x + \frac{4}{3}\sin^2 x + \frac{8}{3}\right)\cos x + C\right]$$

$$\int \cos^5 x\,dx \qquad \left[= \frac{1}{5}\left(\cos^4 x + \frac{4}{3}\cos^2 x + \frac{8}{3}\right)\sin x + C\right]$$

Primjedba. Ako je eksponent podintegralne funkcije $\sin x$, odnosno $\cos x$ n e p a r a n, integral toga tipa možemo riješiti mnogo jednostavnije uz supstituciju $\cos x = t$, odnosno $\sin x = t$.

Na pr.

$$I_3 = \int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\,dx = \int (1 - \cos^2 x)\sin x\,dx =$$

$$= -\int (1 - t^2)\,dt = -t + \frac{t^3}{3} = \underline{\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C.}$$

Tip IX

$$I_{\mathrm{I}} = \int \mathrm{tg}^n x\,dx; \quad I_{\mathrm{II}} = \int \mathrm{ctg}^n x\,dx$$

n je cio pozitivan broj.

Supstitucija:

za I_{I}: $\quad \mathrm{tg}\, x = t$, odatle $x = \mathrm{arc\,tg}\, t$ i $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ (a)

za I_{II}: $\quad \mathrm{ctg}\, x = t$, odatle $x = \mathrm{arc\,ctg}\, t$ i $dx = -\dfrac{dt}{1+t^2}$ (b)

Primjeri

1. $$I = \int \mathrm{tg}^3 x\,dx = \text{prema (a)} = \int \frac{t^3\,dt}{1+t^2} =$$

$$t^3 : (t^2 + 1) = t - \frac{t}{t^2+1}$$

$$= \int t\,dt - \int \frac{t\,dt}{t^2+1} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|z| =$$

$$t^2 + 1 = z, \quad t\,dt = \frac{1}{2}\,dz$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) = \text{prema (a)} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln\frac{1}{\cos x} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - (\ln 1 - \ln\cos x) = \underline{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln\cos x + C}$$

$\left(\text{uzeto je u obzir, da je } 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ i da je } \ln 1 = 0\right)$

2. $$\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx = \text{prema (b)} = -\int \frac{t^6\,dt}{1+t^2} =$$

$$t^6 : (t^2+1) = t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{t^2+1}$$

$$= -\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t - \operatorname{arc\,ctg} t = \text{prema (b)} =$$

$$\underline{= -\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x - x + C}$$

[arc ctg (ctg x) = x, vidi Dio I. formula (73a)]

Izračunaj:

$\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$ $\left[= \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln\cos x + C\right]$

$\int \operatorname{tg}^8 x\,dx$ $\left[= \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x - \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C\right]$

$\int \operatorname{ctg}^7 x\,dx$ $\left[= -\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^6 x + \frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x - \ln\sin x + C\right]$

Tip X.

$$I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}; \qquad I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}.$$

n je cio pozitivan broj.

Postupak: Integrand rastavljamo u dva faktora tako, da je drugi faktor $\frac{dx}{\sin^2 x}$, odnosno $\frac{dx}{\cos^2 x}$. Iza toga parcijalno integriramo, pri čemu računajući prvi integral uzimamo $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ i $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, a za drugi integral

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{i} \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Primjeri

1.

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$u = \frac{1}{\sin x}; \quad du = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$dv = \frac{dx}{\sin^2 x}; \quad v = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

$$I_3 = -\frac{1}{\sin x} \cdot \operatorname{ctg} x - \int \operatorname{ctg} x \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$I_3 = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx$$

$$I_3 = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^3 x} dx$$

$$I_3 = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \underbrace{\int \frac{dx}{\sin^3 x}}_{I_3} + \underbrace{\int \frac{dx}{\sin x}}_{I_1}$$

$$2I_3 = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + I_1$$

$$I_3 = -\frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} I_1$$

Izvršili smo rekurziju, jer smo I_3 sveli na I_1.

Prema (67):

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$$

Uvrštenje u I_3 daje

$$\underline{I_3 = -\frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C}$$

2.

$$I_5 = \int \frac{dx}{\cos^5 x} = \int \frac{1}{\cos^3 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$u = \frac{1}{\cos^3 x}; \quad du = \frac{+3 \cos^2 x \cdot \sin x}{\cos^6 x} dx = 3 \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$$

$$dv = \frac{dx}{\cos^2 x}; \quad v = \operatorname{tg} x$$

$$I_5 = \frac{1}{\cos^3 x}\operatorname{tg} x - 3\int \operatorname{tg} x \cdot \frac{\sin x}{\cos^4 x}\,dx$$

$$I_5 = \frac{\sin x}{\cos^4 x} - 3\int \frac{\sin^2 x}{\cos^5 x}\,dx$$

$$I_5 = \frac{\sin x}{\cos^4 x} - 3\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^5 x}\,dx$$

$$I_5 = \frac{\sin x}{\cos^4 x} - 3\underbrace{\int \frac{dx}{\cos^5 x}}_{I_5} + 3\underbrace{\int \frac{dx}{\cos^3 x}}_{I_3}$$

$$4I_5 = \frac{\sin x}{\cos^4 x} + 3I_3$$

$$I_5 = \frac{1}{4}\,\frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{3}{4}\,I_3$$

Izvršili smo rekurziju I_5 na I_3.

$$I_3 = \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{u} \cdot \underbrace{\frac{dx}{\cos^2 x}}_{dv}$$

Nakon parcijalnog integriranja i uredivanja dobijemo:

$$I_3 = \frac{1}{2}\,\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\,I_1$$

Opet je provedena rekurzija I_3 na I_1.

Prema (68):

$$I_1 = \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

Uvrštenje u I_3 daje:

$$I_3 = \frac{1}{2}\,\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

a u I_5:

$$\underline{I_5 = \frac{1}{4}\,\frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{3}{8}\,\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C}$$

Računajući na navedeni način $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ i $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ dobijemo rekurzivne formule:

$$\left.\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} \\ I_n &= \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} \end{aligned}\right| \qquad (70)$$

Izračunaj ne upotrebljavajući formule rekurzije:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} \qquad \left[= -\frac{1}{3}\frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{2}{3}\operatorname{ctg} x + C\right]$$

$$\int \frac{dx}{\cos^7 x} \qquad \left[= \frac{1}{6}\frac{\sin x}{\cos^6 x} + \frac{5}{24}\frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{15}{48}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{15}{48}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} \qquad \left[= -\frac{1}{4}\frac{\cos x}{\sin^4 x} - \frac{3}{8}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C\right]$$

Tip XI.

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$$

m i n su cijeli eksponenti, pozitivni ili negativni.

Postupak integriranja pokažimo na primjerima za pojedine slučajeve.

1) Oba eksponenta m i n su pozitivna, pri čemu je jedan paran, a drugi neparan.

1. $$I = \int \sin^2 x \cdot \cos^5 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \cdot \cos x \, dx =$$

$$= \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x \, dx$$

$$\sin x = t, \quad \cos x \, dx = dt$$

$$I = \int t^2 (1 - t^2)^2 \, dt = \int (t^2 - 2t^4 + t^6) \, dt = \frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} =$$

$$\underline{= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C}$$

2. $$I = \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x \, dx =$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \cdot \sin x \, dx =$$

$$\cos x = t; \quad \sin x \, dx = -dt$$

$$= -\int (1 - t^2) t^2 \, dt = -\int (t^2 - t^4) \, dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} =$$

$$\underline{= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C}$$

2) Jedan eksponent *(m* ili *n)* je pozitivan i neparan, a drugi je negativan.

1. $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x\,dx}{\cos^4 x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)\cdot \sin x\,dx}{\cos^4 x} =$$

$$\cos x = t; \quad \sin x\,dx = -dt$$

$$= -\int \frac{(1-t^2)\,dt}{t^4} = -\int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} =$$

$$\underline{= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C}$$

2. $$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx = \int \frac{\cos^4 x \cdot \cos x}{\sin^3 x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2 \cdot \cos x\,dx}{\sin^3 x} =$$

$$\sin x = t; \quad \cos x\,dx = dt$$

$$= \int \frac{(1-t^2)^2 \cdot dt}{t^3} = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^3}\,dt = \int \frac{dt}{t^3} - 2\int \frac{dt}{t} + \int t\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} - 2\ln|t| + \frac{t^2}{2} = \underline{-\frac{1}{2\sin^2 x} - 2\ln|\sin x| + \frac{1}{2}\sin^2 x + C}$$

3) Jedan eksponent *(m* ili *n)* je pozitivan i paran, a drugi negativan.

1. $$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^3 x}\,dx = \int \frac{dx}{\sin^3 x} - 2\int \frac{dx}{\sin x} +$$

$$+ \int \sin x\,dx = \text{prema tipu X i (67)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \cos x =$$

$$\underline{= -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \cos x + C}$$

4) Oba eksponenta m i n su jednaka, pozitivna i neparna.

1. $$\int \sin x \cdot \cos x\,dx =$$

$$\sin x = t; \quad \cos x\,dx = dt$$

$$= \int t \cdot dt = \frac{t^2}{2} = \underline{\frac{1}{2}\sin^2 x + C}$$

2. $$\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x \, dx = \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x \, dx =$$

$$= \int \sin^3 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx =$$

$$\sin x = t; \quad \cos x \, dx = dt$$

$$= \int t^3 (1 - t^2) \, dt = \int t^3 \, dt - \int t^5 \, dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} =$$

$$= \underline{\frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x + C}$$

5) Oba eksponenta m i n su jednaka, pozitivna i parna.

$$I = \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \, dx$$

Prema $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ imamo:

$$16 \sin^4 x \cos^4 x = \sin^4 2x$$

$$\sin^4 x \cos^4 x = \frac{\sin^4 2x}{16}$$

Uvrštenje u I daje:

$$I = \frac{1}{16} \int \sin^4 2x \, dx =$$

$$2x = t; \qquad dx = \frac{1}{2} dt \qquad \text{(a)}$$

$$= \frac{1}{32} \int \sin^4 t \, dt = \text{prema tipu VIII uz uvrštenje (a)} =$$

$$= \underline{\frac{1}{32} \left[-\frac{1}{4} \sin^3 2x \cos 2x + \frac{3}{4} x - \frac{3}{16} \sin 4x \right] + C}$$

6) Oba eksponenta m i n su jednaka, negativna, parna ili neparna.

$$I = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x} = 8 \int \frac{dx}{8 \sin^3 x \cos^3 x} = 8 \int \frac{dx}{(\sin 2x)^3} =$$

$$2x = t; \quad dx = \frac{1}{2} dt \qquad \text{(a)}$$

$$= 4 \int \frac{dt}{\sin^3 t} = \text{prema tipu X uz uvrštenje (a)} =$$

$$= \underline{4 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} + \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x| \right) + C}$$

7) Oba eksponenta m i n su različita, pozitivna i parna

1. $$I = \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \, dx = \int (\sin x \cdot \cos x)^2 \cdot \sin^2 x \, dx$$

Prema trigonometrijskim formulama

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x,$$

a odatle

$$(\sin x \cos x)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2x$$

i

$$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x,$$

odatle

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

imamo:

$$I = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cdot (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx$$

Supstitucija:

$$2x = t; \quad dx = \frac{1}{2} dt \quad \text{i} \quad \sin 2x = z; \quad \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} dz$$

$$I = \frac{1}{16} \int \sin^2 t \, dt - \frac{1}{16} \int z^2 dz = \text{prema (59a)}$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right) - \frac{1}{16} \cdot \frac{z^3}{3} = \underline{\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C}$$

2. $$I = \int \sin^2 x \cdot \cos^6 x \, dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cdot \cos^4 x \, dx$$

$$(\sin x \cdot \cos x)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2x$$

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x, \quad \text{odatle} \quad \cos^4 x = \frac{(1 + \cos 2x)^2}{4}$$

$$I = \frac{1}{16} \int \sin^2 2x (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{16}\left[\int \sin^2 2x \, dx + 2\int \sin^2 2x \cos 2x \, dx + \int \sin^2 2x \cos^2 2x \, dx\right] =$$

$$= \frac{1}{16}\left[\int \sin^2 2x \, dx + 2 \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \sin^2 4x \, dx\right] =$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + \frac{\sin^3 2x}{3} + \frac{1}{16}\left(2x - \frac{\sin 8x}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{128}\left(5x + \frac{8}{3}\sin^3 2x - \sin 4x - \frac{\sin 8x}{8}\right) + C$$

Primijetimo, da se integrali oblika 7) mogu izračunati i na drugi način.

Primjer

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx =$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^4 x \, dx$$

$$= \int \cos^4 x \, dx - \int \cos^6 x \, dx =$$

$$= \text{prema tipu VIII} = I_4 - I_6 = \text{prema (69)} =$$

$$= I_4 - \frac{1}{6}\cos^5 x \cdot \sin x - \frac{5}{6} I_4 =$$

$$= \frac{1}{6} I_4 - \frac{1}{6}\cos^5 x \cdot \sin x = \text{vidi primjer 1. na str. 149} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\sin x \cdot \cos^3 x + \frac{3}{8}x + \frac{3}{16}\sin 2x - \cos^5 x \cdot \sin x\right) + C$$

8) Oba eksponenta m i n su različita, negativna i parna.

1. $$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{1}{\sin^4 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Prema

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$$

imamo:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$$

i

$$\frac{1}{\sin^4 x} = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2}{\operatorname{tg}^4 x} \qquad \text{(a)}$$

Uvrštenje daje:

$$I = \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2}{\operatorname{tg}^4 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Supstitucija:

$$\operatorname{tg} x = t; \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt$$

$$I = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}\,dt = \int \frac{dt}{t^4} + 2\int \frac{dt}{t^4} + \int dt =$$

$$= -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t = -\frac{1}{3\,tg^3 x} - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x =$$

$$\underline{= \operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C}$$

2. $$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^6 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\sin^4 x \cos^4 x} = \int \frac{1}{\sin^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^4 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Prema (a) i $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ imamo:

$$I = \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^2}{\operatorname{tg}^4 x} \cdot (1+\operatorname{tg}^2 x)^2 \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Supstitucija:

$$\operatorname{tg} x = t; \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt$$

$I = \int \frac{(1+t^2)^4}{t^4} \cdot dt =$ prema binomnom poučku (Repetitorij elementarne matematike I, § 10) =

$$= \int \frac{1 + 4t^2 + 6t^4 + 4t^6 + t^8}{t^4}\,dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t^4} + 4\int \frac{dt}{t^2} + 6\int dt + 4\int t^2 dt + \int t^4 dt =$$

$$= -\frac{1}{3t^3} - \frac{4}{t} + 6t + 4\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} =$$

$$\underline{= -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - 4\operatorname{ctg} x + 6\operatorname{tg} x + \frac{4}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C}$$

9) Oba eksponenta m i n su različita, negativna i neparna.

$$I = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$$

Brojnik i nazivnik integranda množimo s $\cos x$:

$$I = \int \frac{\cos x \, dx}{\sin^3 x \cos^2 x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\sin^3 x (1 - \sin^2 x)} =$$

$$\sin x = t; \quad \cos x \, dx = dt$$

$$= \int \frac{dt}{t^3(1 - t^2)} = -\int \frac{dt}{t^3(t^2 - 1)} =$$

Nakon rastavljanja u parcijalne razlomke (vidi tip I) dobijemo:

$$\int \frac{dt}{t^3} + \int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} = -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| -$$

$$- \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{2}\ln|t-1| = -\frac{1}{2\sin^2 x} + \ln|\sin x| -$$

$$- \frac{1}{2}\ln|\sin x + 1| - \frac{1}{2}\ln|\sin x - 1| =$$

$$\underline{= -\frac{1}{2\sin^2 x} + \ln\left|\frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x - 1}}\right| + C}$$

10) Oba eksponenta su negativna, pri čemu je jedan *(m* ili *n)* paran a drugi neparan.

Isti postupak kao pod 9).

$$I = \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin x \, dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin x \, dx}{(1 - \cos^2 x)\cos^2 x}$$

$$\cos x = t; \quad \sin x \, dx = -dt$$

$$= -\int \frac{dt}{t^2(1 - t^2)} = \int \frac{dt}{t^2(t^2 - 1)} = \text{nakon rastavljanja u parcijalne razlomke} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} =$$

$$= \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{2}\ln|t-1| =$$

$$= \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{2}\ln|\cos x + 1| + \frac{1}{2}\ln|\cos x - 1| =$$

$$\underline{= \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C}$$

Izračunaj:

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x \, dx \qquad \left[= -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C\right]$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx \qquad \left[= -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C\right]$$

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x} dx \qquad \left[= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \sin x + C\right]$$

$$\int \sin^5 x \cdot \cos^5 x \, dx \qquad \left[= \frac{1}{6}\sin^6 x - \frac{1}{4}\sin^8 x + \frac{1}{10}\sin^{10} x + C\right]$$

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx \qquad \left[= \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + C\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \qquad [= -2\operatorname{ctg} 2x + C]$$

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx \qquad \left[= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x} \qquad \left[= \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x} \qquad \left[= \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln\left|\frac{\sqrt{\cos^2 x - 1}}{\cos x}\right| + C\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} \qquad \left[= \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| + C\right]$$

8. Integriranje beskonačnih redova

Ako zadani red, kojemu su članovi neprekinute funkcije od x u zatvorenom intervalu $[a, b]$, konvergira uniformno u tom intervalu $[a, b]$, tada smijemo taj red integrirati član po član, i suma tako dobivenog reda integrala jednaka je integralu sume zadanog reda.

Sjetimo se, da se za deriviranje beskonačnih redova traži uniformna konvergencija i dobivenog reda derivacija (vidi Dio I., § 20, 7).

Kako red potencija konvergira uniformno u svakom zatvorenom intervalu, koji leži u nutrini intervala konvergencije $[-R, +R]$ (vidi Dio I., § 20, 11), redove potencija smijemo integrirati član po član, pa će tako dobiveni redovi konvergirati za sve x, koji leže u nutrini intervala konvergencije.

Iz toga slijedi: ako funkcija, čiji integral ne možemo izraziti konačnim brojem elementarnih funkcija, prikažemo u obliku konvergentnog reda potencija, tada integrirajući taj red član po član dobijemo konvergentni red potencija, pomoću kojega možemo integral zadane funkcije aproksimirati po volji točno.

Prije smo spomenuli (vidi str. 84), da $\int \frac{\sin x}{x} dx$ ne možemo elementarno izračunati. Sada na temelju navedenog teorema o integriranju beskonačnih redova možemo ga prikazati u obliku beskonačnog konvergentnog reda potencija pa taj red integrirati član po član.

Znamo Mac Laurinov red za $\sin x$ [vidi Dio I, formula (150)]:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots,$$

koji konvergira za $-\infty < x < +\infty$.

Podijelivši taj red s $x \neq 0$, dobijemo red

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + - \dots,$$

koji također konvergira za $-\infty < x < +\infty$.

Kako taj red, kao red potencija, konvergira uniformno za sve x, koji leže u nutrini intervala konvergencije, smijemo ga integrirati član po član:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = C + \int dx - \frac{1}{3!} \int x^2 dx + \frac{1}{5!} \int x^4 dx - \frac{1}{7!} \int x^6 dx + - \dots$$

ili

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = C + x - \frac{1}{3!} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{7!} \frac{x^7}{7} + - \dots$$

Uvrštenje $x = 0$ daje $C = 0$ uz pretpostavku, da je $\int \frac{\sin x}{x} dx = 0$ za $x = 0$, pa konačno dobijemo:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{1}{3!} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!} \frac{x^5}{5} - \frac{1}{7!} \frac{x^7}{7} + \dots$$

Taj red konvergira također za sve x od $-\infty$ do $+\infty$, ima dakle radij konvergencije $R = \infty$, te predočuje cijelu transcendentnu funkciju (vidi Dio I., § 20, 11). To je nova funkcija, koju ne možemo prikazati konačnim brojem poznatih nam elementarnih funkcija. Ona se zove integral sinus i označuje se sa $\mathrm{Si}(x)$:

$$\mathrm{Si}(x) = x - \frac{1}{3!} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!} \frac{x^5}{5} - \frac{1}{7!} \frac{x^7}{7} + \dots$$

Na isti način dolazimo do druge nove transcendentne funkcije, koja se zove integral kosinus, a označuje se sa $\mathrm{Ci}(x)$.

Podijelivši s x Mac Laurinov red za $\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

koji konvergira za $-\infty < x < +\infty$, [vidi Dio I., formula (152)], za $x \neq 0$ dobijemo:

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^5}{6!} + - \dots$$

a odatle

$$\mathrm{Ci}(x) = \int \frac{\cos x}{x} dx = C + \ln x - \frac{1}{2!}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4!}\frac{x^4}{4} - \frac{1}{6!}\frac{x^6}{6} + \dots$$

Konstanta integracija $C = 0{,}5772\dots$ je iracionalan broj, a zove se Eulerova konstanta. Ta konstanta integracije je odabrana tako, da funkcija $\mathrm{Ci}(x)$ teži prema nuli, kad x teži prema neizmjerno (što ovdje ne možemo potanje obrazložiti).

Konačno na slični način dolazimo do **Gaussova integrala pogrešaka**:

$$I = \int e^{-x^2} \cdot dx$$

Uvrstivši $-x^2$ mjesto x u Mac Laurinov red za e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \text{ [vidi Dio I., formula (147)]}$$

dobijemo red za integrand e^{-x^2}:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + - \dots$$

koji konvergira za $-\infty < x < +\infty$

Integriranje član po član daje red:

$$I = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!}\frac{x^7}{7} + - \dots$$

koji također konvergira za sve konačne x.

Postoje tablice za funkcije $\mathrm{Si}(x)$, $\mathrm{Ci}(x)$ i Gaussov integral I (vidi na pr. Janke-Emde, Funktionentafeln).

Govoreći o eliptičkim integralima, naglasili smo, da te integrale možemo izraziti pomoću elementarnih funkcija u obliku beskonačnih redova.

Navedimo primjer rješavanja eliptičkog integrala razvojem u red njegova integranda.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \int (1 + x^3)^{-1/2} dx$$

Uvrštenje $m = -\frac{1}{2}$ i x^3 mjesto x u binomni red

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \quad \text{(a)}$$

koji, kako znamo, konvergira za $|x| < 1$ [vidi Dio I., formula (155)], daje

$$(1 + x^3)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} x^3 + \frac{3}{8} x^6 - \frac{5}{16} x^9 + - \dots$$

Integrirajući taj red član po član dobijemo:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^3}} = C + x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^7}{7} - \frac{5}{16} \cdot \frac{x^{10}}{10} + \dots$$

I taj red konvergira za $|x| < 1$.

U dijelu I. Repetitorija naveli smo Mac Laurinove redove za arkus-funkcije, pri čemu smo spomenuli, da se te funkcije najjednostavnije razviju u red integralnim putem (vidi Dio I., § 20, 9). Stvar je u tome, da razvijanje u red potencija po Mac Laurinovoj formuli često vodi do vrlo složenih derivacija viših redova, pri čemu se teško dođe do općeg oblika koeficijenata reda. Međutim, ako se zadana funkcija, čiji razvoj u red tražimo, može prikazati u obliku integrala, čiji se integrand lako dade razviti u beskonačni konvergentni red potencija, tada integrirajući taj red član po član dobijemo traženi red za zadanu funkciju.

Razvijemo na taj način u red potencija, odnosno Mac Laurinov red funkcije arc sin x i arc tg x.

Znamo da je

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x$$

ili

$$\arcsin x = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int (1 - x^2)^{-1/2} dx \quad \text{(b)}$$

Uvrštenje $m = -\frac{1}{2}$ i $-x^2$ mjesto x u binomni red (a) daje

$$(1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \dots$$

konvergira za $-1 < x < +1$.

Budući da taj red potencija konvergira uniformno u svakom zatvorenom intervalu, koji leži unutar intervala $(-1, +1)$, smijemo ga integrirati član po član, pa dobijemo obzirom na (b):

$$\arcsin x = C + x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$

Uvrštenje $x = 0$, daje $C = 0$, jer je $\arcsin 0 = 0$.
Dobijemo konačno:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$

konvergira za $|x| < 1$.

Pišući koeficijente članova reda na taj način, možemo napisati svaki daljnji član reda, jer smo dobili opći oblik koeficijenata reda, odnosno $(n + 1)$-vi član reda:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\ldots 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Kako je $\arcsin\frac{1}{2} = \arcsin 30° = \frac{\pi}{6}$, uvrštenje $x = \frac{1}{2}$ daje red

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} + \ldots$$

pomoću kojega možemo izračunati broj π po volji točno.
Na isti način dobijemo red za $\operatorname{arc\,tg} x$:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int\frac{dx}{1+x^2} = \int(1+x^2)^{-1}\,dx \qquad \text{(c)}$$

Uvrštenje $m = -1$ i x^2 mjesto x u binomni red (a) daje:

$$(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \ldots$$

taj red konvergira za $-1 < x < +1$.

Integriranje daje obzirom na (c):

$$\operatorname{arc\,tg} x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots$$

pri čemu za $x = 0$ opet dobivamo $C = 0$, jer je $\operatorname{arc\,tg} 0 = 0$.
Imamo konačno:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots$$

konvergira za $|x| < 1$.

Postupajući na isti način dobijemo redove za Ar sh x i Ar th x:

$$\text{Ar sh } x = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + - \ldots \quad \text{za } |x| < 1$$

$$\text{Ar th } x = \int \frac{dx}{1-x^2} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots \quad \text{za } |x| < 1$$

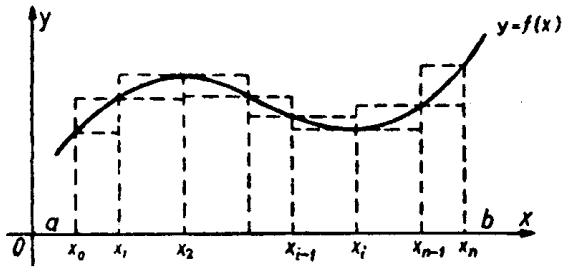
Izvedi to!

§ 6. Određeni integrali

1. Pojam

Utrošili smo mnogo vremena, truda i papira, da naučimo računati neodređene integrale, ali još nigdje nismo primijenili naše znanje. Sada ćemo vidjeti, kakvim će bogatim i raznolikim plodom uroditi naš trud. U tu svrhu izvedimo pojam određenog integrala.

Neka nam je zadana funkcija $f(x)$ neprekinuta, pozitivna i jednoznačna u zatvorenom intervalu $[a, b]$. Slika 27 predočuje tu funkciju.



Sl. 27.

Interval $[a, b]$ podijelimo na bilo koji način u n jednakih ili nejednakih dijelova, u svakom tom dijelu intervala odredimo minimalnu i maksimalnu ordinatu zadane funkcije i uzevši te najmanje i najveće ordinate za visine konstruiramo niz nutarnjih i vanjskih pravokutnika, kako se to vidi na sl. 27.

Jasno je, da je površina S_a^b, koju određuje luk zadane krivulje $f(x)$, odrezak ab osi X i ordinate krivulje u krajnjim točkama $x = a$ i $x = b$ intervala, veća od zbroja S_n površina nutarnjih pravokutnika, ali je manja od zbroja $\overline{S}_n$ površina vanjskih pravokutnika, t. j.

$$S_n < S_a^b < \overline{S}_n$$

Međutim, ako broj dijelova n, u koji smo podijelili interval $[a, b]$, teži u beskonačnost, tada će svaki pravokutnik postajati sve uži i uži, jer će osnovke pravokutnika težiti nuli, dok će njihov broj n rasti u beskonačnost, pa nam zorna predodžba kaže, da ćemo na granici imati:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = S_a^b \qquad \text{(a)}$$

pri čemu će zbroj S_n površina nutarnjih pravokutnika težiti prema površini S_a^b ispod luka krivulje rastući, a zbroj $\overline{S}_n$ površina vanjskih pravokutnika — padajući.

Izračunajmo sada S_n i $\overline{S}_n$. U tu svrhu uzmimo bilo koji dio i intervala $[a, b]$, koji ima općenito oblik prikazan na sl. 28.

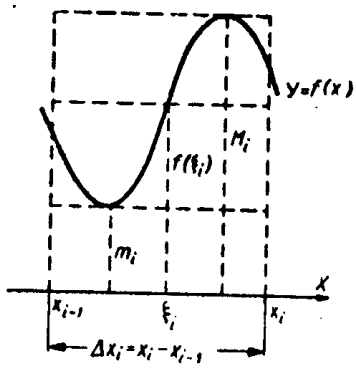
Neka je u tom i-tom intervalu duljine

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

m_i — minimum funkcije $f(x)$

M_i — maksimum funkcije $f(x)$

$f(\xi_i)$ — vrijednost te funkcije u bilo kojoj točki apscise ξ_i tog intervala.



Sl. 28.

Prema tome je

$$m_i < f(\xi_i) < M_i \mid \cdot \Delta x_i$$

$$m_i \cdot \Delta x_i < f(\xi_i) \cdot \Delta x_i < M_i \cdot \Delta x_i$$

Prema slici 28 vidimo, da je

$m_i \cdot \Delta x_i$ površina nutarnjeg i-tog pravokutnika s osnovkom Δx_i

$M_i \cdot \Delta x_i$ površina vanjskog i-tog pravokutnika s osnovkom Δx_i

$f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ površina pravokutnika visine $f(\xi_i)$ i osnovke Δx_i.

Protegnimo sada gornju nejednakost na čitav interval $[a, b]$ zadane funkcije $f(x)$, t. j. izvršimo zbrajanje tih površina mijenjajući i od 1 do n:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i \qquad \text{(b)}$$

Prema gore navedenom je jasno, da je

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i = S_n = \text{zbroj površina nutarnjih pravokutnika}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i = \overline{S}_n = \text{zbroj površina vanjskih pravokutnika.}$$

Ako n teži u beskonačnost, tada na temelju naše pretpostavke, da je funkcija neprekinuta u zatvorenom intervalu, lako dokažemo, da razlika gornje sume $\overline{S}_n$ i donje sume S_n teži prema nuli, pa stoga te sume imaju isti limes, a onda i srednja suma u (b) teži prema tom istom limesu, t. j. prema površini S_a^b ispod luka krivulje $f(x)$ od $x = a$ do $x = b$ (sl. 27).
Imamo dakle:

$$S_a^b = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Ili ako razvijemo tu sumu uzimajući za i redom 1, 2, 3,..., n:

$$S_a^b = \lim_{n \to \infty} [f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n] \qquad \text{(c)}$$

Suma ima n članova, a kako n teži u beskonačnost, suma ima beskonačno mnogo članova. Svaki član te sume sastoji se od dva množitelja, od kojih je jedan vrijednost funkcije $f(x)$, a drugi duljina Δx n-tog dijela intervala $[a, b]$, u kojem leži ta vrijednost funkcije.

Kako svi Δx teže nuli, kad broj intervala n teži u beskonačnost, svaki član sume teži također nuli. Imamo dakle osobiti granični prijelaz, koji se bitno razlikuje na pr. od sume beskonačnog reda, jer tražimo graničnu vrijednost od sume, koja ima sve više članova, pri čemu svaki pojedini član teži nuli.

Sada napustimo zornu predodžbu, kojom smo se dosada služili, i kažemo:

U svakom slučaju, kada postoji granična vrijednost (c), t. j. postoji

$$\lim_{n\to\infty} [f(\xi_1)\Delta x_1 + f_2(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n]$$

i ako je taj limes nezavisan od toga, koje smo funkcijske vrijednosti odabrali u pojedinim intervalima i kako smo vršili razdiobu u intervale (ako samo svi intervali teže prema nuli), ima funkcija $f(x)$ **određeni integral** u granicama od $x = a$ do $x = b$ i vrijednost tog određenog integrala numerički je jednaka vrijednosti navedenog limesa.

Ako luk krivulje $f(x)$ u zatvorenom intervalu $[a, b]$ omeđuje dio ravnine, koja je osim toga omeđena odreskom a, b osi X i ordinatama krivulje $f(x)$ u krajnjim točkama a i b intervala, tada definiramo ploštinu S_a^b toga dijela ravnine i mjerimo je određenim integralom funkcije $f(x)$ u granicama od a do b.

Određeni integral pišemo simbolički u obliku

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

[čitaj: integral od a do b $f(x)\mathrm{d}x$].

a i b su donja, odnosno gornja granica određenog integrala, $[a, b]$ je interval integracije.

Prema tome je

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} [f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n)] = S_a^b \quad (71)$$

Određeni integral je dakle **limes** sume, koja ima sve više članova, pri čemu svaki pojedini član te sume teži nuli.

Geometrijski predočuje određeni integral površinu ispod luka krivulje, ali to je samo geometrijska predodžba određenog integrala. Kako smo određeni integral definirali kao limes sume, slijedi da u svim tim slučajevima, kada dolazimo do računanja granične vrijednosti sume, koja ima beskonačno mnogo članova, koji teže nuli, računanje toga limesa svodimo na računanje određenog integrala.

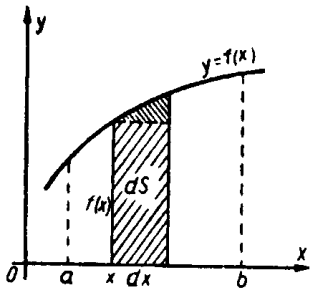
Treba podvući, da određeni integral nije suma, iako se označuje sa znakom razvučenog slova S, **već je limes** sume, pri čemu broj članova te sume mora biti beskonačan, a svaki član mora težiti nuli. Pomoću određenog integrala ne možemo dakle računati sumu od **konačnog** broja članova ma kako velik bio taj broj, a niti sumu od ma kako malih ali **konačnih** članova.

Izraz: površina $S_a^b = \int_a^b f(x)dx$ možemo praktički prikazati ovako: zamislimo dio površine S ispod luka krivulje, kojemu je osnovka dx (vidi sl. 29). Smatrajući dx beskonačno malom veličinom u smislu, kako smo to naveli govoreći o vrijednostima diferencijala dx i dy (vidi § 1, 4), dobijemo beskonačno mali djelić površine S ili, kako se kaže, element te površine, koji možemo smatrati da je pravokutnik, pa je njegova ploština ili diferencijal površine

$$dS = f(x) \cdot dx$$

Jasno je, da tih elemenata ima u površini S beskonačno mnogo, a kako je ploština svakog elementa beskonačno mala, t. j. teži nuli, iz definicije određenog integrala slijedi, da je

$$\text{površina } S_a^b = \int_a^b f(x)\,dx$$

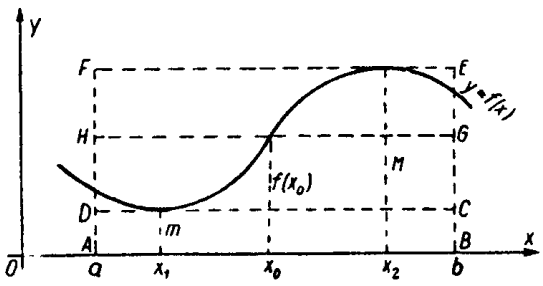


Sl. 29.

Pojam određenog integrala postavili smo bez ikakve veze s neodređenim integralom, koji smo definirali kao funkciju, čija je derivacija jednaka podintegralnoj funkciji. Sada je naš zadatak, da tu vezu uspostavimo, ali prije moramo izvesti teorem srednje vrijednosti integralnog računa, jer ćemo ga primijeniti pri rješavanju postavljenog zadatka.

2. Teorem srednje vrijednosti integralnog računa

Neka je zadana funkcija $f(x)$, koja je neprekinuta i jednoznačna u zatvorenom intervalu $[a, b]$. Iz slike 30. vidimo, da je površina ispod luka krivulje od $x = a$ do $x = b$, t. j. $\int_a^b f(x)\,dx$, veća od površine pravokutnika $ABCD$, kojemu je visina minimum m funkcije $f(x)$, ali je manja od površine pravokutnika $ABEF$, kojemu je visina maksimum M zadane funkcije, t. j.



Sl. 30.

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$$

Kako je funkcija $f(x)$ neprekinuta u zatvorenom intervalu $[a, b]$, ona prima u tom intervalu sve vrijednosti, koje leže između minimuma m i maksimuma M funkcije (vidi Dio I, § 8, 6), a dakle prima za neku vrijednost x_0 apscise x takvu vrijednost $f(x_0)$, da je

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)\cdot(b-a), \tag{72}$$

gdje je $m < f(x_0) < M$, a $a < x_0 < b$.

Pri tom apscisa x_0 i ordinata $f(x_0)$ nisu točnije poznate.

To je teorem srednje vrijednosti integralnog računa; $f(x_0)$ zove se **srednja vrijednost funkcije** $f(x)$ u intervalu $[a, b]$.

Iz slike vidimo, da se taj teorem svodi geometrijski na pretvaranje površine ispod luka krivulje u pravokutnik $ABGH = f(x_0)(b-a)$ jednake površine.

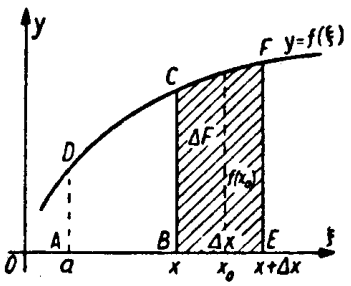
Vidi primjer 4. na strani 180.

3. Veza između određenih i neodređenih integrala

Najprije uočimo bitnu razliku između određenog i neodređenog integrala. Dok je neodređeni integral funkcija od x, na pr. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, određeni integral je konstanta, jer daje mjerni broj površine ispod luka krivulje, na pr. 20 cm^2, pa je derivacija određenog integrala nula, jer je $D_x C = 0$.

Međutim, ako gornju granicu b u određenom integralu neke funkcije $f(\xi)$, t. j. u $\int_a^b f(\xi)\,d\xi$ načinimo promjenljivom x, a donju granicu a ostavimo da je čvrsta, površina ispod luka krivulje ovisit će o toj promjenljivoj x, jer će se s promjenom x mijenjati i vrijednost površine, ona postaje dakle nekom funkcijom $F(x)$, a određeni integral je sada funkcija svoje gornje granice x, t. j.

$$\int_a^x f(\xi)d\xi = F(x)$$



Sl. 31

Da se ne pobrka gornja granica x integrala s argumentom integranda, uzeli smo ga u koordinatnom sustavu ξY, pa mjesto $f(x)dx$ pišemo $f(\xi)d\xi$. Vidi sl. 31. Kako je $\int_a^x f(\xi)d\xi$ nije više konstanta, već funkcija $F(x)$ i to neprekinuta funkcija, potražimo derivaciju tog integrala po njegovoj gornjoj granici x, t. j. odredimo

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(\xi)\,d\xi = F'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

Kako je $F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi$ = površina $ABCD$ (vidi sl. 31), bit će prema istoj slici:

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi - \int_a^x f(\xi)\,d\xi = \text{površina } AEFD -$$

$$- \text{površina } ABCD = \text{površina } BEFC = \int_x^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi$$

Primijenivši teorem srednje vrijednosti (72) za posljednji integral, dobijemo:

$$\Delta F = f(x_0) \cdot \Delta x$$

gdje je $f(x_0)$ — srednja vrijednost funkcije $f(x)$ u intervalu od x do $x + \Delta x$.

Podijelivši gornju jednakost s Δx, dobijemo kvocijent diferencija

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0)$$

a prijelaz na graničnu vrijednost daje traženu derivaciju integrala $\int_a^x (\xi)\,d\xi$ po gornjoj granici:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(\xi)\,d\xi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0)$$

Iz slike 31 vidimo, da kad $\Delta x \to 0$, x_0 teži prema x, pa $f(x_0)$ teži prema $f(x)$, jer smo pretpostavili, da je funkcija f neprekinuta.

Dobijemo zamijenivši u integrandu ξ s x:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\,dx = F'(x) = f(x)$$

Ta jednakost daje traženu vezu između određenog i neodređenog integrala. Neodređeni integral smo definirali kao funkciju, čija je derivacija jednaka podintegralnoj funkciji. A što kazuje gornja jednakost? Ona kazuje: ako određeni integral funkcije $f(x)$, kome je gornja granica promjenljiva x, deriviramo po toj gornjoj granici x, dobijemo podintegralnu funkciju $f(x)$, a to je baš definicija neodređenog integrala. Dakle: **određeni integral funkcije $f(x)$, kojemu je gornja granica promjenljiva x, jest neodređeni integral te funkcije $f(x)$:**

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \text{(a)}$$

Time smo uspostavili vezu između određenih i neodređenih integrala, jer smo neodređeni integral definirali kao određeni integral, kome je gornja granica promjenljiva.

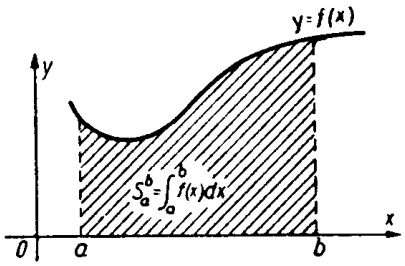
Ta veza daje mogućnost izračunavati vrijednosti određenih integrala pomoću pripadnih neodređenih integrala.*)

4. Računanje određenih integrala

Tražimo vrijednost određenog integrala $\int_a^b f(x)\,dx$.

Pripadni neodredeni integral prema (a) glasi:

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \text{(b)}$$



Sl. 32.

Uvrštenje $x = a$ u (b) daje:

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) + C$$

a kako je prema slici 32

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0,$$

jer površine nema, dobijemo:

$$0 = F(a) + C,$$

a odatle je

$$C = -F(a)$$

Jednakost (b) prima sada oblik

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)$$

Uvrstimo sada ovamo $x = b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

*) Strogo uzevši, neodređeni integral se definira upravo kao određeni integral (dakle kao limes sume) s promjenljivom gornjom granicom. Naprotiv, primitivna funkcija je definirana kao funkcija, kojoj je derivacija zadana funkcija. Ta su dva pojma, dakle, različito definirana. Za funkcije jednostavnih svojstava, kako se javljaju u primjenama, ta su dva pojma stvarno identična, kako smo vidjeli. No ima funkcija s kompliciranim svojstvima, gdje to nije tako. Može da postoji neodredeni integral (definiran kao limes sume), a da njegova derivacija nije svagdje jednaka integrandu, ili da čak ta derivacija ne postoji u svim točkama dotičnog intervala. Može postojati i primitivna funkcija, a da ne postoji limes sume, dakle ne postoji neodređeni integral. No u primjenama u prirodnim naukama jedva da se javlja ta razlika. Mi ćemo stoga pojmove primitivne funkcije i neodređenog integrala smatrati identičnim.

Dobili smo pravilo za računanje određenih integrala. Određeni integral računa se tako, da se izračuna pripadni neodređeni integral, u koji se uvrsti najprije gornja granica, zatim se napiše minus, pa se uvrsti donja granica.

To se piše ovako:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big| F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{73}$$

Primjeri

1. Izračunaj površinu omeđenu lukom sinusoide i osi X od $x = 0$ do $x = \pi$.

Prema (71):

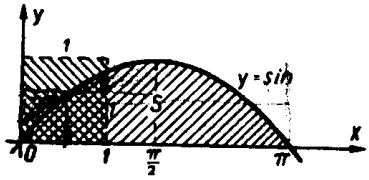
$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx$$

pa obzirom na (73) za $y = \sin x$ imamo:

$$S = \int_0^\pi \sin x\,dx = \Big| -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 1 + 1 =$$

$= \underline{2}$ kvadratne jedinice.

To znači: površina ispod jednog brijega sinusoide sadrži točno dva kvadrata stranice 1 (vidi sl. 33).



Sl. 33.

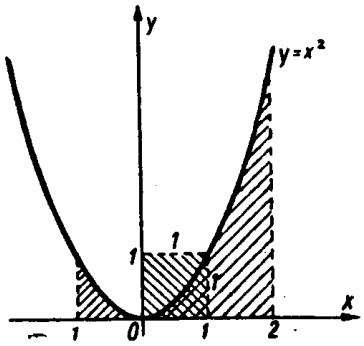
2. Izračunaj površinu omeđenu lukom parabole $y = x^2$ i osi X od $x = -1$ do $x = 2$.

Prema (71)

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \text{ imamo za } y = x^2$$

$$S = \int_{-1}^2 x^2\,dx = \left| \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^2 = \frac{1}{3}[2^3 - (-1)^3] =$$

$= \frac{1}{3}(8 + 1) = \underline{3}$ kvadratne jedinice. (Vidi sl. 34).



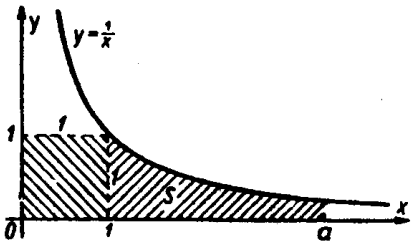
Sl. 34.

3. Zašto se prirodni ili Neperovi logaritmi zovu također hiperbolni logaritmi?

Da na to pitanje odgovorimo, odredimo površinu omeđenu lukom istostrane hiperbole $y = \frac{1}{x}$ i osi X od od $x = 1$ do $x = a$ (vidi sl. 35).

$$S = \int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \Big| \ln x \Big|_1^a = \ln a - \ln 1 = \underline{\ln a}$$

Površina omeđena lukom hiperbole $y = \frac{1}{x}$ od $x = 1$ do nekog $x = a$ numerički je jednaka prirodnom logaritmu toga broja a. Zato se prirodni logaritmi zovu također hiperbolni logaritmi.



Sl. 35

4. Odredi srednju vrijednost funkcije $y = \sin x$ u intervalu od $x = 0$ do $x = \pi$. Prema (72):

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0) \cdot (b - a)$$

imamo uzevši u obzir, da je za naš slučaj $f(x) = \sin x$ i da je $b - a = \pi - 0 = \pi$:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = f(x_0) \cdot \pi, \quad \text{a kako je} \quad \int_0^\pi \sin x\,dx = 2$$

(vidi primjer 1), imamo:

$$2 = f(x_0) \cdot \pi$$

odatle

$$\underline{f(x_0) = \frac{2}{\pi}}$$

5. Pravila za određene integrale

1. Ako u određenom integralu gornju granicu načinimo donjom, a donju gornjom, integral mijenja predznak:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{74}$$

To pravilo slijedi iz definicije (71) određenog integrala. Pri izvodu te definicije išli smo od a do b, pa smo s Δx označili razlike „veća apscisa — manja apscisa" (vidi sl. 27 i 28). Svaki Δx u formuli (71) bio je dakle pozitivan. Integriramo li od desna na lijevo, t. j. od b do a, svaki Δx postaje negativan, jer se sada od manje apscise oduzima veća, pa su svi članovi sume, čiji je limes određeni integral, negativni, te je i sam limes negativan.

Iz iste definicije (71) određenog integrala slijede i slijedeća dva pravila.

2. Određeni integral zbroja, odnosno razlike funkcija jednak je zbroju, odnosno razlici integrala tih funkcija.

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx \tag{74a}$$

3. Konstanta, koja množi integrand, stavi se ispred znaka određenog integrala:

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$$

Na pr.. Izračunaj površinu omeđenu lukom parabole $y = 1 - x - 2x^2$ od $x = -1$ do $x = \frac{1}{2}$ i osi X.

$$S = \int_{-1}^{1/2} (1 - x - 2x^2)\,dx = \int_{-1}^{1/2} dx - \int_{-1}^{1/2} x\,dx - 2\int_{-1}^{1/2} x^2\,dx =$$

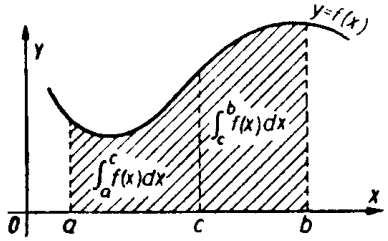
$$= \left| x - \frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} - \left(-1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = 2 - \frac{7}{8} = \underline{1\frac{1}{8}}$$

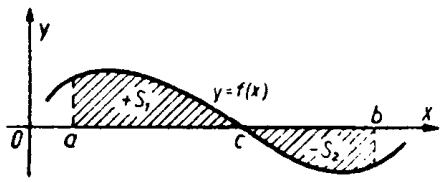
4. Iz slike 36 i obzirom na definiciju (71) određenog integrala slijedi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{74b}$$

To znači, da određeni integral možemo podijeliti u više određenih integrala. I obratno: zbroj od više određenih integrala istog integranda možemo svesti na jedan određeni integral tog integranda.



Sl. 36.



Sl. 37.

5. Dosada smo pretpostavljali, da je funkcija $f(x)$ u intervalu integracije $[a, b]$ neprekinuta i pozitivna. Ako uzmemo, da je funkcija u čitavom tom intervalu ili u nekom njegovom dijelu negativna, t. j. krivulja prolazi potpuno ili djelomično ispod osi X, tada površina, koju određuje taj negativni dio krivulje i os X, ulazi u rezultat integriranja s predznakom minus. To znači, da određeni integral daje algebarski zbroj površina, pa prema slici 37 imamo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_1 - S_2$$

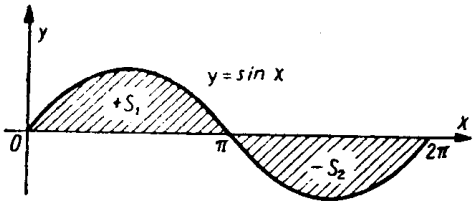
I to pravilo slijedi iz definicije određenog integrala (71), jer su sve ordinate $f(x)$ onog dijela krivulje, koji leži ispod osi X, negativne, pa su članovi sume, čiji je limes određeni integral, također negativni.

Kako se obično traži zbroj apsolutnih vrijednosti površina, postupa se u tom slučaju tako, da se za dijelove površine, koji leže ispod osi X, stavi ispred znaka integrala minus ili se integrira od desna na lijevo. Na taj način izbjegava se kompenziranje pozitivnih površina negativnima. Postupa se, dakle, za slučaj prikazan na sl. 37 ovako:

$$S = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = S_1 + S_2$$

ili

$$S = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^c f(x)\,dx = S_1 + S_2$$



Sl. 38.

Primjeri

1. $S = \int_0^{2\pi} \sin x\,dx = ?$

Ne računajući taj integral, možemo prema slici 38 neposredno napisati:

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = S_1 - S_2 = 0$$

jer su obje površine po apsolutnoj vrijednosti jednake, pa se poništavaju.

Da dobijemo vrijednost površine, t. j. $S_1 + S_2$, postupamo ovako:

$$S_1 + S_2 = 2\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -2\Big|\cos x\Big|_0^{\pi} = -2(\cos\pi - \cos 0) = -2(-1-1) = \underline{4}$$

Iz istog je razloga

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 x\,dx = 0 \text{ (vidi Dio I., sl. 127)}, \quad \int_0^{2\pi} \sin^5 x\,dx = 0$$

ili općenito

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n+1} x\,dx = 0$$

a također i

$$\int_0^{2\pi} \cos x\,dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} x\,dx = 0, \quad \text{ali} \quad \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x\,dx \neq 0 \quad \text{i} \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2n} x\,dx \neq 0$$

jer krivulje $y = \sin^{2n} x$ i $y = \cos^{2n} x$ prolaze iznad osi X dirajući je u nultočkama funkcija $\sin x$, odnosno $\cos x$.

Na pr.

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \text{prema (59a)} = \left|\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2} - \frac{\sin 4\pi}{4} - 0 = \underline{\pi}$$

Posljedica. Kako su neparne (lihe) funkcije simetrične obzirom na ishodište, a parne (take) obzirom na os Y, bit će

za neparnu funkciju

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0$$

a za parnu funkciju

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Na pr.

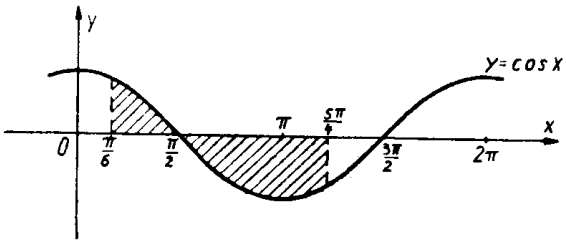
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 0$$

ali

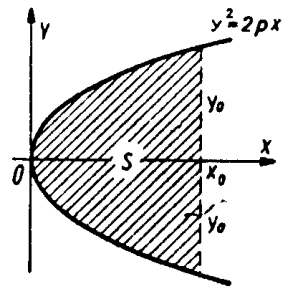
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot dx = 2 \cdot 1 = 2.$$

Izračunaj to!

2. Izračunaj površinu, koja je omeđena lukom kosinusoide od $x = \frac{\pi}{6}$ do $x = \frac{5}{4}\pi$ i osi X (vidi sl. 39).



Sl. 39.



Sl. 40.

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big|\sin x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \Big|\sin x\Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{5\pi}{4} = 2\sin 90° - \sin 30° - \sin 225° =$$

$$= 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} + \sin 45° = 2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\frac{1}{2}(3 + \sqrt{2})}$$

3. Izračunaj površinu omeđenu parabolom $y^2 = 2px$ od $x = 0$ do $y = x_0$.

$$y^2 = 2px$$
$$y = \pm \sqrt{2px}$$

Kako je parabola simetrična obzirom na os X (vidi sl. 40), računat ćemo gornju polovinu površine, t. j. površinu ispod grane $y = +\sqrt{2px}$, dok je

$$\int_0^{x_0} \sqrt{2px}\,dx + \int_0^{x_0} (-\sqrt{2px})\,dx = 0$$

$$\frac{S}{2} = \int_0^{x_0} \sqrt{2px} \cdot dx = \sqrt{2p} \int_0^{x_0} \sqrt{x}\,dx =$$

$$= \sqrt{2p} \left| \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right|_0^{x_0} = \frac{2}{3}\sqrt{2p} \cdot \left| \sqrt{x^3} \right|_0^{x_0} = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\,(\sqrt{x_0^3} - 0) = \frac{2}{3}\sqrt{2p} \cdot x_0 \cdot \sqrt{x_0}$$

$$\frac{S}{2} = \frac{2}{3} x_0 \sqrt{2px_0} \,/ \cdot 2$$

$$S = \frac{2}{3} x_0 \cdot 2\sqrt{2px_0}$$

Kako prema $y = \sqrt{2px}$ jest $\sqrt{2px_0} = y_0$, imamo

$$S = \frac{2}{3} x_0 \cdot 2y_0$$

Time smo dobili važnu formulu za površinu parabole, koju možemo prema slici 40 izraziti ovako: površina parabole jednaka je $\frac{2}{3}$ umnoška visine i osnovke parabole, t. j.

Površina parabole $$S = \frac{2}{3} b \cdot h \tag{75}$$

6. Pravilo parcijalne integracije

$$\int_a^b u\,dv = \left| uv \right|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Na pr.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\,dx = \left| x \cdot \sin x \right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx =$$

$$u = x; \quad du = dx; \quad dv = \cos x\,dx; \quad v = \sin x$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 1 - 0 + \left| \cos x \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1 = 0{,}57079 \ldots$$

7. Pravilo supstitucije

Znamo, da se određeni integral računa tako, da se izračuna pripadni neodređeni integral, u koji se uvrste granice integracije. Ako taj neodređeni integral rješavamo načinom supstitucije, moramo svakako rezultat napisati u prvobitnoj promjenljivoj, jer čim uvodimo supstituciju mijenjaju se i granice integracije, pa bismo za svaku novu supstituciju morali računati granice integracije, a to bi bio suvišan posao.

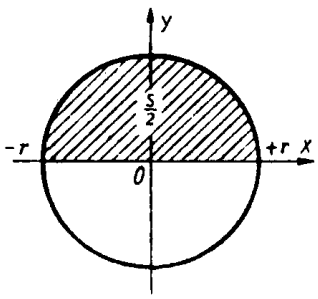
Samo u tim slučajevima, kad je povratak na prvobitnu promjenljivu težak, ostavljamo rezultat u novoj promjenljivoj, ali tada moramo prilagoditi granice integracije toj novoj promjenljivoj.

Primijetimo, da funkcijska veza između prvobitne i nove promjenljive (supstitucije) mora biti jednoznačna.

Navedimo primjer.

Odredimo površinu kruga polumjera r (vidi sl. 41).

$$S = \int_a^b y \, dx$$



Sl. 41.

Jednadžba kružnice:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

odatle:

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\frac{S}{2} = \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx \qquad \text{(a)}$$

Imamo riješiti neodređeni integral $\int \sqrt{r^2 - x^2} \, dx$, koji smo već prije izračunali po predtipu C (vidi primjer 2. na str. 91) načinom parcijalne integracije i supstitucije, pri čemu smo rezultat mogli lako izraziti u prvobitnoj promjenljivoj, t. j. u x:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(r^2 \arcsin \frac{x}{r} + x \sqrt{r^2 - x^2} \right)$$

Uvrštavamo granice:

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} \left| r^2 \arcsin \frac{x}{r} + x \sqrt{r^2 - x^2} \right|_{-r}^{+r} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ r^2 \arcsin 1 + r \sqrt{r^2 - r^2} - \left[r^2 \arcsin (-1) - r \sqrt{r^2 - r^2} \right] \right\}$$

Kako je $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, a $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ (Dio I, § 6, 2), dobijemo množeći obje strane jednakosti s 2:

$$S = r^2 \cdot \frac{\pi}{2} + r^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{S = r^2 \pi}$$

Međutim $\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ možemo riješiti na drugi način i to pomoću supstitucije

$$x = r \cos t$$

Kako je odatle $dx = -r \sin t\, dt$, dobijemo:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = -r \int \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 t} \cdot \sin t\, dt =$$

$$= -r^2 \int \sqrt{1 - \cos^2 t} \cdot \sin t\, dt = -r^2 \int \sin^2 t\, dt =$$

$$= \text{prema (59a)} = -r^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \qquad \text{(b)}$$

Sad je teško izvršiti prijelaz na prvobitnu promjenljivu x. Ostajemo pri t, pa računamo nove granice integracije prema našoj supstituciji

$$x = r \cos t$$

Uvrštenje granica integracije daje:

donje granice $x = -r$:

$$-r = r \cos t$$

$$\cos t = -1$$

$$\underline{t = \pi}$$

a gornje granice $x = r$:

$$r = r \cos t$$

$$\cos t = 1$$

$$\underline{t = 0}$$

Prema (a) i (b) imamo:

$$\frac{S}{2} = \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = -r^2 \left| \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right|_{\pi}^{0} =$$

$$= -r^2 \left(0 - \frac{\pi}{2} \right) = r^2 \frac{\pi}{2},$$

a odatle

$$\underline{S = r^2 \pi}$$

Izračunaj na ta dva načina površinu elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, odnosno

$$y = \pm \frac{b}{} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$[S = ab\pi].$$

§ 7. Primjena integralnog računa

1. Računanje površina

a) U pravokutnim koordinatama

1. Jednadžba krivulje je zadana u eksplicitnom obliku $y = f(x)$

$$\text{Površina } S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx$$

Već smo naveli mnogo primjera za taj slučaj. Navedimo još nekoliko.

1. Odredi površinu S omeđenu kubnom parabolom $y = x^3$ i pravcem $y = 2x$ (sl. 42).

Najprije odredimo apscise sjecišta zadane krivulje i pravca, t. j. rješimo zajedno po x njihove jednadžbe

$$\left.\begin{aligned} y &= x^3 \\ y &= 2x \end{aligned}\right|$$

$$2x = x^3$$

i

$$x(x^2 - 2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

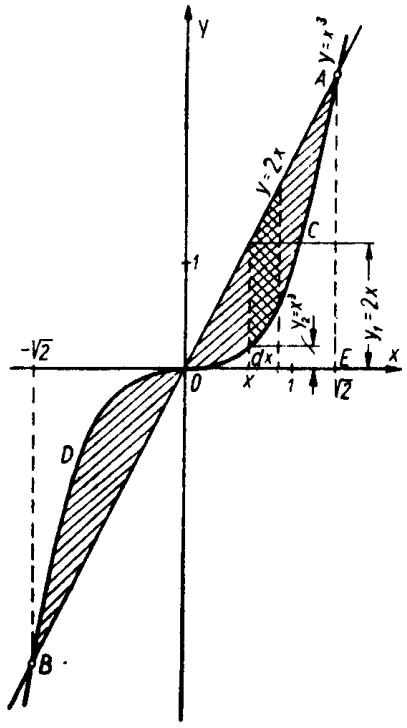
$$x^2 - 2 = 0$$

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{2} \doteq \pm 1{,}41$$

Kako su obje funkcije neparne, imamo: površ. $OCAO$ = površ. $ODBO$, pa je $S = 2$ površ. $OCAO = 2$ (površ. $OEAO$ — površ. $OEACO$) =

$$= 2\left(\int_0^{\sqrt{2}} 2x\,dx - \int_0^{\sqrt{2}} x^3\,dx\right) =$$

$$= 2\left|2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right|_0^{\sqrt{2}} = 2(2 - 1) = \underline{2}$$



Sl. 42.

Isti primjer možemo riješiti i na drugi jednostavniji način. Izračunajmo diferencijal dS tražene površine, t. j. površinu elementa širine dx, koji možemo smatrati da je pravokutnik.

Iz slike 42 vidimo, da je visina elementa

$$y_1 - y_2 = 2x - x^3,$$

pa je

$$dS = (2x - x^3)\,dx$$

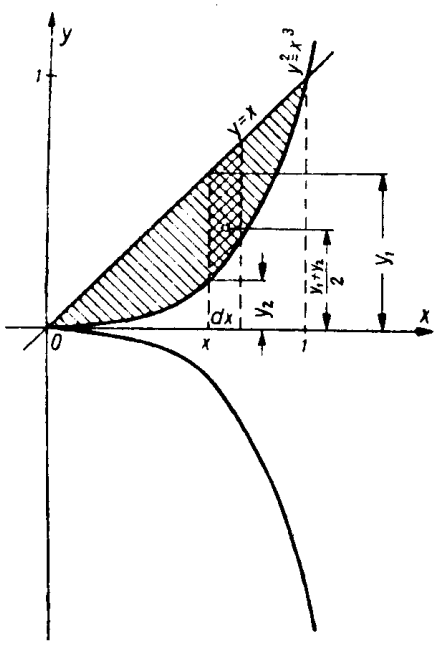
Odatle uzevši u obzir, da računamo dvije jednake površine, dobijemo

$$S = 2\int_0^{\sqrt{2}} (2x - x^3)\,dx = 2\left| x^2 - \frac{x^4}{4} \right|_0^{\sqrt{2}} = 2(2-1) = \underline{2}$$

Površina iznosi dakle 2 cm^2, ako su jedinice na koordinatnim osima bile 1 *cm*.

2. Izračunaj površinu, koja leži iznad osi X, a omeđena je polukubnom parabolom $y^2 = x^3$, odnosno $y = x^{3/2}$ i pravcem $y = x$ (sl. 43).

Odredimo apscise sjecišta, odnosno granice integracije:



Sl. 43.

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= x^3 \\ y &= x \end{aligned}\right|$$

$$x^2 = x^3$$

$$x^2(x-1) = 0$$

$$x^2 = 0; \quad x_{1,2} = 0$$

$$x - 1 = 0; \quad x_3 = 1$$

Primijenimo drugi način za računanje površine:

$$dS = (y_1 - y_2)\,dx = (x - \sqrt{x^3})\,dx$$

$$S = \int_0^1 (x - x^{3/2})\,dx =$$

$$= \left| \frac{x^2}{2} - \frac{2}{5}x^{5/2} \right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \underline{\frac{1}{10}}$$

(*cm*², ako su jedinice 1 *cm*).

Kako znamo, formula $S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx$ daje numeričku vrijednost površine, koja je omeđena krivuljom $y = f(x)$, a leži uzduž osi X.

Traži li se površina, koja leži uzduž osi Y, tada treba prijeći na inverznu funkciju $x = \varphi(y)$, pa vrijednost površine računati prema:

površina uzduž osi Y: $$S = \int_c^d \varphi(y)\,dy = \int_c^d x\,dy \qquad (76)$$

Navedimo primjer.

3. Izračunaj površinu omeđenu parabolom $y = x^2$ od $y = 0$ do $y = 9$. Prelazimo na inverznu funkciju

$$x = \pm \sqrt{y}$$

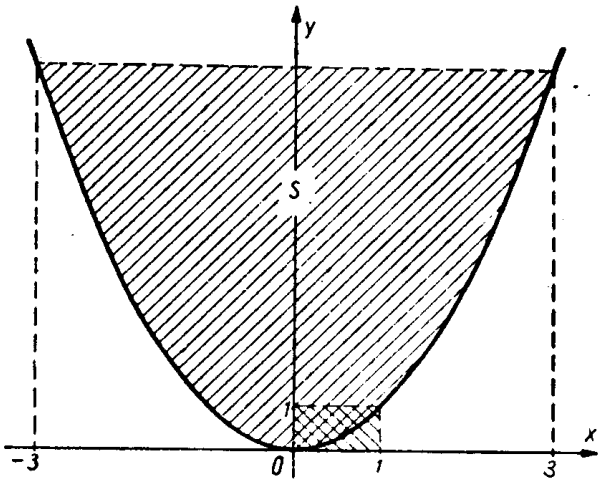
Prema formuli (70) i obzirom na sliku 44. imamo:

$$S = 2 \int_0^9 \sqrt{y}\, dy = 2 \left| \frac{2}{3} y^{3/2} \right|_0^9 = \frac{4}{3} \sqrt{9^3} = \frac{4}{3} \sqrt{3^6} = \frac{4}{3} \cdot 3^3 = \underline{36}$$

Kako su na slici 44. uzete različite jedinice, površina prikazana na toj slici jednaka je površini od 36 pravokutnika osnovke 1 i visine 1. Ako je na pr. jedinica na osi X 1 *cm*, a na osi Y 0,5 *cm*, tada je naša jedinica za mjerenje te površine 1 *cm* · 0,5 *cm* = 0,5 cm^2. pa površina iznosi 36 · 0,5 cm^2 = = 18 cm^2.

Kontrola računa prema (75): Površina parabole

$$S = \frac{2}{3} b \cdot h = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 9 = 36$$



Sl. 44.

2. Jednadžba krivulje je zadana u parametarskom obliku

U tom slučaju jednadžba krivulje glasi:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right| \; t_1 \leqq t \leqq t_2 \qquad \text{(vidi Dio I, § 5).}$$

Računamo

$$dx = x'(t)\, dt$$

pa uvrštenje u

$$S = \int_a^b y\, dx$$

daje površinu

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)\, dt \tag{77}$$

gdje je

$$t = t_1 \quad \text{za} \quad x = a, \quad \text{a} \quad t = t_2 \quad \text{za} \quad x = b.$$

Primjer

Izračunaj površinu jednog luka cikloide.

Jednadžba obične cikloide u parametarskom obliku (19):

$$\left.\begin{aligned} x &= r(t - \sin t) \\ y &= r(1 - \cos t) \end{aligned}\right| \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi$$

Računamo:

$$x'(t) = r(1 - \cos t)$$

pa prema (77) imamo:

$$S = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos t)\, r(1 - \cos t)\, dt =$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = r^2 \left(\int_0^{2\pi} dt - 2 \int_0^{2\pi} \cos t\, dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt \right)$$

Kako je drugi integral jednak nuli (vidi str. 182), imamo prema (60a):

$$S = r^2 \left| t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right|_0^{2\pi} = r^2(2\pi + \pi + 0)$$

$$\underline{S = 3r^2\pi}$$

Površina jednog luka cikloide jednaka je trostrukoj površini kruga, koji izvodi tu cikloidu.

Računanje površina zatvorenih krivulja zadanih u parametarskom obliku vidi dalje: Krivuljni integrali.

b) U polarnim koordinatama

Izvedimo formulu za površinu S sektora krivulje zadane u polarnim koordinatama $r = r(\varphi)$ (vidi sl. 45).

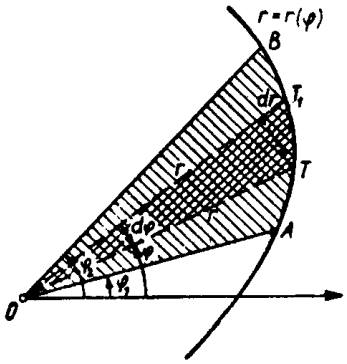
Traži se površina S sektora OAB, koji je omeđen lukom AB zadane krivulje $r = r(\varphi)$ i radijvektorima OA amplitude φ_1 i OB amplitude φ_2.

U tu svrhu izračunajmo površinu dS elementa OTT_1O, koji možemo smatrati da je kružni sektor polumjera r i središnjeg kuta $d\varphi$. Kako je površina kružnog sektora jednaka polovini umnoška kvadrata polumjera i središnjeg kuta u lučnoj mjeri, imamo:

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi \qquad (78)$$

a odatle je

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) \cdot d\varphi \qquad (78a)$$



Sl. 45.

Primjeri

1. Površina lemniskate $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Izračunajmo nekoliko točaka zadane krivulje uzevši na pr. da je $a = 2$: $r = \pm 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ (sl. 46).

Računamo i nanašamo izračunate točke:

φ	$r = \pm 2\sqrt{\cos 2\varphi}$
0	$\pm 2\sqrt{\cos 0} = \pm 2$
$\frac{\pi}{8}$	$\pm 2\sqrt{\cos\frac{\pi}{4}} = \pm 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \pm 2\sqrt{0{,}71} = \pm 1{,}68$
$\frac{\pi}{4}$	$\pm 2\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}} = 0$
$\frac{3\pi}{8}$	$\pm 2\sqrt{\cos\frac{3\pi}{4}} = \pm 2\sqrt{-0{,}71}$ imaginarno
...	.....
...	.....
$\frac{3\pi}{4}$	$\pm 2\sqrt{\cos\frac{3\pi}{2}} = 0$
$\frac{7\pi}{8}$	$\pm 2\sqrt{\cos\frac{7\pi}{4}} = \pm 2\sqrt{0{,}71} = \pm 1{,}68$
π	$\pm 2\sqrt{\cos 2\pi} = \pm 2$

Kako je lemniskata simetrična na polarnu os i na pol O, izračunat ćemo četvrtinu tražene površine.

Uvrštenje $r^2 = a^2 \cdot \cos 2\varphi$ u (78a) daje

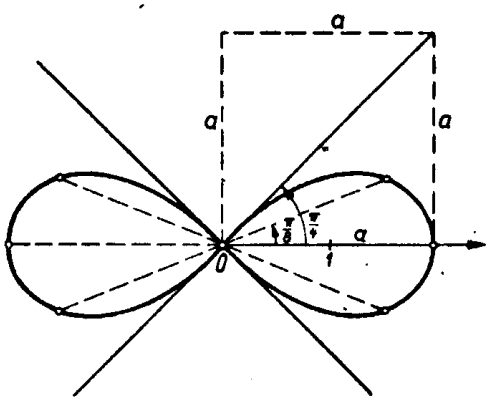
$$\frac{S}{4} = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \cdot d\varphi = \frac{a^2}{2}\left|\frac{\sin 2\varphi}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{a^2}{4}$$

a odatle

$$\underline{S = a^2}$$

(površina kvadrata stranice a, vidi sl. 46).



Sl. 46.

2. Površina jednog zavoja Arhimedove spirale (vidi sl. 9).

$$r = a\varphi$$

Prema (78 a):

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\varphi^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\left|\frac{\varphi^3}{3}\right|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{6}\cdot 8\pi^3$$

$$\underline{S = \frac{4}{3}\pi^3 a^2}$$

Nariši kardioidu $r = a\,(1 - \cos\varphi)$ uzevši na pr. $a = 2$ i izračunaj njenu površinu

$$\left(S = \frac{3}{2}\pi a^2, \text{ vidi dalje sliku 50}\right).$$

c) Površina sektora krivulje zadane u pravokutnim koordinatama

Polazimo od jednadžbe (78a)

$$S = \frac{1}{2} \int^{\varphi_2} r^2 \mathrm{d}\varphi$$

U tu svrhu izvršimo prijelaz od polarnih koordinata na pravokutne. Znamo, da je

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{(a)}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

a odatle

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

Diferenciramo:

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} \qquad \text{(b)}$$

Uvrštenje (a) i (b) u (78a) daje:

$$S = \frac{1}{2} \int x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x \qquad (79)$$

Integrali toga oblika računaju se tako, da se jednadžba krivulje napiše u parametarskom obliku.

Kao primjer odgovorimo na pitanje: zašto se inverzne funkcije od hiperbolnih funkcija zovu Area-funkcije? (area znači površina).

U tu svrhu izračunamo površinu S sektora istostrane hiperbole $x^2 - y^2 = 1$ (sl. 47) ili u parametarskom obliku

$$x = \operatorname{ch} t$$

$$y = \operatorname{sh} t$$

i to od 0 do t (vidi Dio I, § 5).

Računamo prema (79):

$$\mathrm{d}x = \operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}y = \operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$$

pa uvrštenje u (79) daje

$$S = \frac{1}{2} \int_0^t (\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \Big| t \Big|_0 = \frac{t}{2}$$

a odatle je

$$\underline{t = 2S}$$

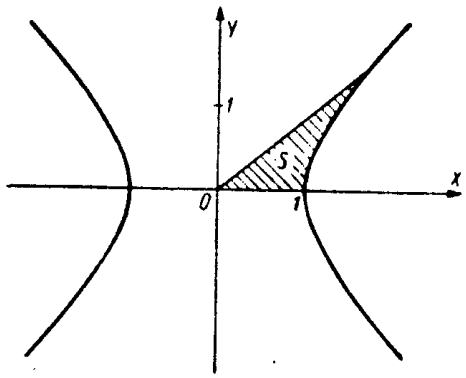
t. j. parametar t hiperbolnih funkcija brojčano je jednak dvostrukoj površini sektora istostrane hiperbole, pa se stoga kod prijelaza na inverzne funkcije smatra, da je area, t. j. površina (vidi sl. 47).

d) Površina zatvorene krivulje. Krivuljni integrali

Traži se površina S, koju određuje zatvorena krivulja $y = y(x)$.

Neka dirališta C i D tangenata povučenih na tu krivulju usporedno s osi Y dijele krivulju u dva dijela: gornji CED jednadžbe $y_1(x)$ i donji CFD jednadžbe $y_2(x)$. (Vidi sl. 48).

Prema toj slici imamo:

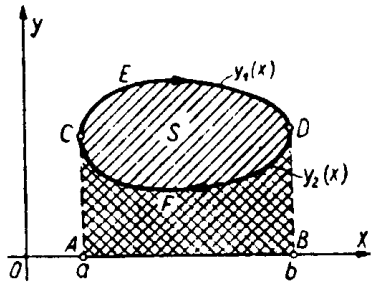


Sl. 47.

S = površina $ACEDB$ — površina

$$ACFDB = \int_a^b y_1\,dx - \int_a^b y_2\,dx =$$

$$= \text{prema (74)} = \int_a^b y_1\,dx + \int_b^a y_2\,dx$$

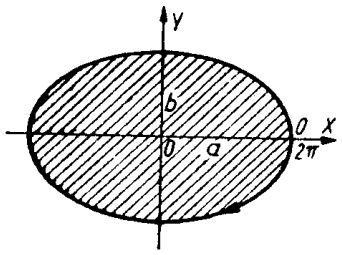


Sl. 48.

Iz slike 48. vidimo, da smo integrirajući izvršili potpuno obilaženje krivulje u negativnom smislu, t. j. u smislu kazaljke na satu (površina pri tom obilaženju bila je uvijek na desno!), pa kažemo, da je površina zatvorene krivulje zadane u pravokutnim koordinatama jednaka krivuljnom integralu uzduž zatvorene krivulje u negativnom smislu i simbolički pišemo:

$$S = \oint y\,dx \tag{80}$$

Krivuljni integrali rješavaju se tako, da se jednadžba zatvorene krivulje napiše u parametarskom obliku.



Sl. 49.

Primjeri

1. Površina elipse.

Jednadžbu elipse u parametarskom obliku znamo:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right| \quad 0 \leqq t < 2\pi$$

Odatle $dx = -a\sin t\,dt$, pa prema (80) imamo obilazeći krivulju u negativnom smislu, t. j. od 2π do 0:

$$S = -\int_{2\pi}^{0} b \sin t \cdot a \sin t \, dt =$$

$$= + ab \int_{0}^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \text{prema (59a)} = ab \left| \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right|_{0}^{2\pi} = \underline{ab\,\pi}$$

Izračunaj pomoću krivuljnog integrala površinu kruga!

2. Površina elipsine evolute.

Jednadžba te evolute glasi

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{e^2}{a} \cos^3 t \\ y &= \frac{e^2}{b} \sin^3 t \end{aligned}\right| \quad 0 \leq t < 2\pi$$

(vidi str. 50 i sl. 23).

Prema (80) računamo:

$$dx = -\frac{3e^2}{a} \cdot \cos^2 t \cdot \sin t \, dt$$

pa imamo

$$S = -\int_{2\pi}^{0} \frac{e^2}{b} \sin^3 t \cdot \frac{3e^2}{a} \cos^2 t \cdot \sin t \, dt = \frac{3e^4}{ab} \int_{0}^{2\pi} \sin^4 t \cdot \cos^2 t \, dt =$$

= [(vidi primjer 1. točke 7) na strani 163] =

$$= \frac{3e^4}{ab} \left| \frac{t}{16} - \frac{\sin 4t}{64} - \frac{\sin^3 2t}{48} \right|_{0}^{2\pi} = \frac{3e^4}{ab} \cdot \frac{2\pi}{16}$$

$$\underline{S = \frac{3\pi e^4}{8ab}}$$

Površina omeđena zatvorenom krivuljom, koja je zadana u polarnim koordinatama, računa se prema (78) po formuli.

$$S = \frac{1}{2} \oint r^2(\varphi) \, d\varphi \tag{81}$$

pri čemu se obilaženje krivulje vrši u pozitivnom smislu, t. j. protiv kazaljke na satu. (Dokaži to!).

Primjer

Površina kardioide (srcaste krivulje) $r = a(1 - \cos\varphi)$ ili $r = 2a \sin^2 \frac{\varphi}{2}$, odnosno

$$r = a(1 + \cos\varphi) \text{ ili } r = 2a \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

(Vidi sl. 50, u kojoj je također prikazana jednostavna konstrukcija te krivulje).

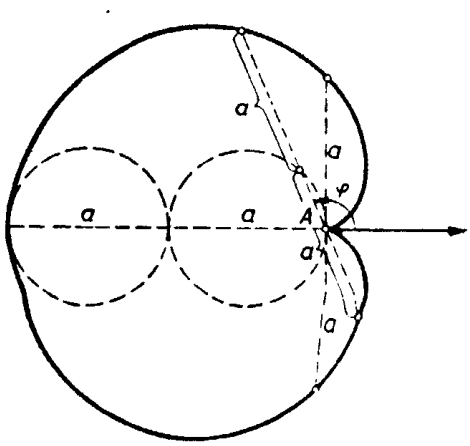
Prema (81)

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left|\varphi - 2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right|_0^{2\pi} =$$

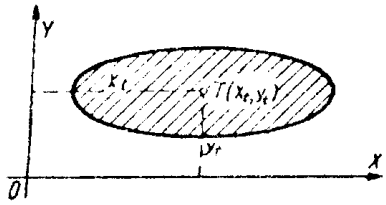
$$= \frac{a^2}{2}\cdot(2\pi+\pi) = \underline{\frac{3}{2}\pi a^2}$$



Sl. 50.

2. Računanje statičkih momenata i koordinata težišta ravnih likova

Pod statičkim momentom nekog ravnog lika obzirom na neku os razumije se umnožak površine tog lika i udaljenosti težišta tog lika od dotične osi.



Sl. 51.

Prema tome, ako s M_x označimo statički moment lika obzirom na os X, sa S površinu lika, a s y_t udaljenost težišta T lika od osi X, t. j. ordinatu težišta T (vidi sl. 51), tada je

$$M_x = S\cdot y_t \qquad \text{(a)}$$

Slično: statički moment tog lika obzirom na os Y:

$$M_y = S\cdot x_t \qquad \text{(b)}$$

gdje je x_t apscisa težišta T.

Primijetimo, da je statički moment lika jednak nuli obzirom na bilo koju os, koja prolazi kroz težište lika, jer je tada udaljenost težišta od osi jednaka nuli, pa je prema (a), odnosno (b) statički moment jednak nuli.

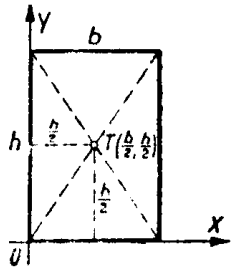
Iz (b) i (a) slijedi

$$x_t = \frac{M_y}{S}; \qquad y_t = \frac{M_x}{S} \qquad \text{(c)}$$

Na pr. statički momenti pravokutnika (sl. 52) obzirom na osi, koje se podudaraju sa stranicama pravokutnika, glase prema (a) i (b):

$$M_x = bh\cdot\frac{h}{2} = \frac{bh^2}{2}\ cm^3$$

$$M_y = bh\cdot\frac{b}{2} = \frac{hb^2}{2}\ cm^3$$



Sl. 52.

Na isti način dobijemo statički moment za trokut osnovke b i visine h obzirom na os X, koja se poklapa s osnovkom b:

$$M_x = S \cdot y_t = \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{3} = \frac{bh^2}{6}\ cm^3$$

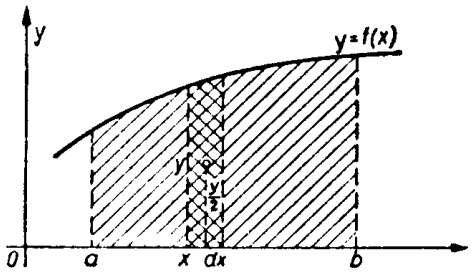
Međutim, ako koordinate težišta lika i njegova površina nisu poznate, računamo M_x i M_y za element površine lika, a zatim integriranjem dobijemo tražene statičke momente za čitav lik.

U tom slučaju statičke momente računamo po formulama:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \int_S y\,dS \\ M_y &= \int_S x\,dS \end{aligned}\right| \qquad (82)$$

gdje su x i y koordinate težišta elementa površine, dS površina elementa, dok je integracija protegnuta preko čitave površine S lika.

Ako je zadani lik omeđen krivuljom, kojoj je jednadžba $y = f(x)$ poznata, tada je prema sl. 53. površina elementa $dS = y\,dx$, a koordinate težišta elementa jesu: x i $\frac{y}{2}$, pa jednadžbe (82) primaju oblik



Sl. 53.

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx \\ M_y &= \int_a^b xy\,dx \end{aligned} \qquad (82a)$$

Podijelimo li jednadžbe (82a) s površinom čitava lika, t. j. sa $S = \int_a^b y\,dx$, dobijemo prema (c) koordinate težišta toga lika:

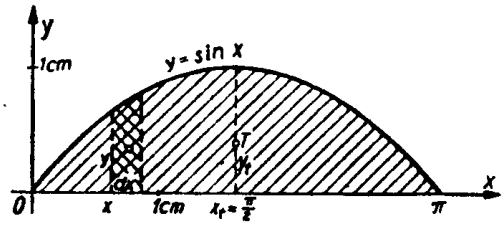
$$x_t = \frac{M_y}{S} = \frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx}; \qquad y_t = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{\int_a^b y\,dx} \qquad (83)$$

Primjeri

1. Odredi statički moment površine omeđene lukom sinusoide i odreskom osi X od $x = 0$ do $x = \pi$ obzirom na os X.

Prema (82a) i slici 54:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \text{prema (59 a)} =$$



Sl. 54.

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \doteq \frac{3{,}14}{4} = \underline{0{,}785\ cm^3}$$

Podijelimo li M_x s površinom $S = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = 2$, dobijemo prema (83) ordinatu težišta zadanog lika:

$$y_t = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8} \doteq \underline{0{,}392\ cm}$$

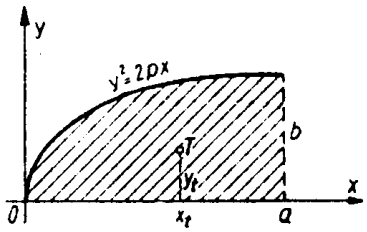
Apscisa je težišta $x_t = \frac{\pi}{2}$, jer je pravac $x = \frac{\pi}{2}$ os simetrije, a težište uvijek leži na osi simetrije lika.

2. Odredi statičke momente M_x i M_y i koordinate težišta površine omeđene parabolom $y^2 = 2px$, koja je prikazana na sl. 55.

Prema (82a) i uzevši u obzir, da je $y = \sqrt{2px}$ imamo:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^a y^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^a 2px\, dx =$$

$$= p\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^a = \underline{\frac{a^2 p}{2}}$$



Sl. 55.

Iz $y^2 = 2px$ slijedi, da je poluparametar parabole $p = \frac{y^2}{2x}$, odnosno $p = \frac{b^2}{2a}$ za $x = a$ i $y = b$, Uvrštenje daje:

$$\underline{M_x = \frac{ab^2}{4}}$$

$$M_y = \int_0^a xy\, dx = \int_0^a x\cdot\sqrt{2px}\, dx = \sqrt{2p}\int_0^a x^{3/2} dx = \sqrt{2p}\left|\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}}\right|_0^a =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{2p}\cdot\sqrt{a^5} = \frac{2}{5}a^2\sqrt{2pa}$$

a kako je za $x = a$ $y = \sqrt{2pa} = b$ (vidi sl. 55), imamo

$$\underline{M_y = \frac{2}{5}a^2 b}$$

Podijelimo li M_x i M_y s površinom S zadanog luka uzevši u obzir, da je prema (75) $S = \frac{2}{3}ab$, dobijemo prema (83) koordinate težišta zadanog lika:

$$x_t = \frac{2a^2 b\cdot 3}{5\cdot 2ab} = \underline{\frac{3}{5}a}$$

$$y_t = \frac{ab^2\cdot 3}{4\cdot 2ab} = \underline{\frac{3}{8}b}$$

3. Odredi statičke momente i koordinate težišta lika omeđenog polukubnom parabolom $y = x^{3/2}$ i pravcem $y = x$ (vidi gore sl. 43).

U primjeru 2. na str. 188 već smo izračunali diferencijal površine toga lika i samu površinu:

$$dS = (x - x^{3/2})\,dx$$

$$S = \frac{1}{10}$$

Uzevši u obzir, da težište elementa leži u sredini, bit će njegova ordinata $y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{x + x^{3/2}}{2}$ (vidi sl. 43), pa imamo prema (82):

$$M_x = \int_0^1 \frac{x + x^{3/2}}{2}(x - x^{3/2})\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \frac{1}{2}\left|\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \underline{\frac{1}{24}}$$

$$M_y = \int_0^1 x(x - x^{3/2})\,dx = \left|\frac{x^3}{3} - \frac{x^{7/2}}{\frac{7}{2}}\right|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{7} = \underline{\frac{1}{21}}$$

Prema (83):

$$x_t = \frac{M_y}{S} = \frac{\frac{1}{21}}{\frac{1}{10}} = \underline{\frac{10}{21}}$$

$$y_t = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{10}} = \underline{\frac{10}{24}}$$

Za mnoge likove određivanje statičkih momenata i koordinata težišta možemo pojednostaviti prijelazom na parametarsku jednadžbu međašne krivulje.

Primjer

Odredi koordinate težišta površine omeđene elipsom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i koordinatnim osima (u prvom kvadrantu).

Prelazimo na parametarski oblik jednadžbe prvog kvadranta elipse (Dio I. § 5)

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right| \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

pa računamo:

$$dx = -a\sin t\,dt$$

Uvrštenje u (83) daje

$$x_t = \frac{-a^2 b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \sin^2 t\,dt}{-ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt}; \quad y_t = \frac{-\frac{ab^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\,dt}{-ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt}$$

Kako je

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \sin^2 t \, dt = \left| \frac{\sin^3 t}{3} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$

(supstitucija $\sin t = z$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \, dt = \left| -\frac{1}{3} \sin^2 t \cos t - \frac{2}{3} \cos t \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \text{ (vidi tip VIII, str. 155)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt = \text{prema (59a)} = \left| \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

dobijemo:

$$x_t = \frac{\frac{a}{3}}{\frac{\pi}{4}} = \underline{\frac{4a}{3\pi}}; \qquad y_t = \frac{\frac{b}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{\pi}{4}} = \underline{\frac{4b}{3\pi}}$$

Uzmemo li, da je $a = b = r$, dobijemo koordinate težišta za prvi kvadrant kruga polumjera r:

$$\underline{x_t = y_t = \frac{4r}{3\pi}}$$

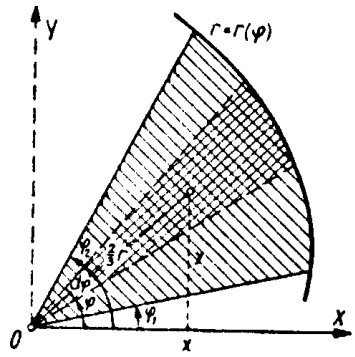
Ako je međašna krivulja lika zadana u polarnim koordinatama $r = r(\varphi)$, tada, kako već znamo, element površine toga lika možemo smatrati trokutom, kojemu je površina prema (78)

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi.$$

Kako je težište trokuta udaljeno od vrha za $\frac{2}{3}$ njegove visine, imamo prema slici 56:

$$x = \frac{2}{3} r \cos \varphi$$

$$y = \frac{2}{3} r \sin \varphi$$



Sl. 56.

Uvrštenje u (82) daje statičke momente M_x i M_y lika, koji je omeđen krivuljom $r = r(\varphi)$ i radijvektorima krajnjih točaka te krivulje, kojima su amplitude φ_1 i φ_2:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \int_S y \, dS = \frac{1}{3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3 \sin \varphi \, d\varphi \\ M_y &= \int_S x \, dS = \frac{1}{3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3 \cos \varphi \, d\varphi \end{aligned}\right| \qquad (84)$$

a odatle prema (83) dobijemo pravokutne koordinate težišta toga lika:

$$\left.\begin{aligned} x_t &= \frac{M_y}{S} = \frac{\frac{1}{3}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3 \cos\varphi \, d\varphi}{\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi} \\ y_t &= \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{1}{3}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3 \sin\varphi \, d\varphi}{\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi} \end{aligned}\right| \qquad (84a)$$

Primjer

Odredi pravokutne koordinate težišta površine omeđene kardioidom $r = a(1 - \cos\varphi)$.

Kako je kardioida simetrična obzirom na os X (vidi sl. 50), težište leži na toj osi, pa je

$$y_t = 0$$

Računamo dakle M_y prema (84):

$$M_y = \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos\varphi)^3 \cos\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{a^3}{3}\int^{2\pi} (\cos\varphi - 3\cos^2\varphi + 3\cos^3\varphi - \cos^4\varphi) \, d\varphi =$$

$$= \frac{a^3}{3}\left[\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi - 3\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi + 3\int\limits_0^{2\pi} \cos^3\varphi \, d\varphi - \int\limits_0^{2\pi} \cos^4\varphi \, d\varphi\right]$$

Prvi i treći integrali jednaki su nuli (vidi str. 182), a za druga dva dobijemo vrijednosti prema (60a) i tipu VIII (str. 155):

$$M_y = \frac{a^3}{3}\left| -3\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\sin\varphi \cdot \cos^2\varphi + \frac{3}{8}\varphi + \frac{3}{16}\sin 2\varphi\right)\right|_0^{2\pi}$$

$$M_y = \frac{a^3}{3}\left(-3\pi - \frac{3}{8}\cdot 2\pi\right) = -\frac{a^3}{3}\cdot\frac{15\pi}{4} = \underline{-\frac{5a^3\pi}{4}}$$

Budući da je $S = \frac{3}{2}\pi a^2$ (vidi primjer na str. 195) imamo:

$$x_t = \frac{M_y}{S} = -\frac{\frac{5a^3\pi}{4}}{\frac{3\pi a^2}{2}} = \underline{-\frac{5}{6}a}$$

Ako je lik, čije se težište traži, dio kruga, zgodno je prijeći na polarne koordinate, jer jednadžba kružnice polumjera R sa središtem u polu ima vrlo jednostavan oblik

$$r = R$$

(φ ne ulazi u jednadžbu, jer je za bilo koji φ radijvektor r jednak polumjeru R).

Primjer

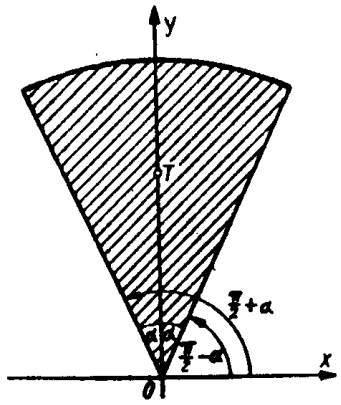
Odredi koordinate težišta T kružnog isječka polumjera R prikazanog na sl. 57.

Kako jednadžba kružnice u polarnim koordinatama glasi $r = R$, a površina kružnog isječka

S = prema (78 a) i slici 57 =

$$= \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} R^2\,d\varphi = \frac{R^2}{2}\Big|\,\varphi\,\Big|_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} =$$

$$= \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = R^2\alpha$$



Sl. 57.

imamo prema slici i (84a):

$x_t = 0$, jer je os Y os simetrije kružnog isječka

$$y_t = \frac{M_x}{S} = \frac{1}{3R^2\alpha}\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} R^3 \sin\varphi\,d\varphi \qquad \text{(a)}$$

$$y_t = -\frac{R^3}{3R^2\alpha}\Big|\cos\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} = -\frac{R}{3\alpha}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right] =$$

$$= -\frac{R}{3\alpha}(-\sin\alpha-\sin\alpha) = \underline{\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

Traže li se koordinate težišta polukruga, promijenimo u (84 a) granice integracije i uzmemo u obzir da je $S = \frac{\pi R^2}{2}$ ili uvrstimo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ u (a).

Dobijemo:

$$x_t = 0$$

$$y_t = \frac{1}{\frac{3\pi R^2}{2}}\int_0^{\pi} R^3 \sin\varphi\,d\varphi = -\frac{2R}{3\pi}\Big|\cos\varphi\Big|_0^{\pi} = -\frac{2R}{3\pi}(-1-1) = \underline{\frac{4R}{3\pi}}$$

Integriramo li od 0 do $\frac{\pi}{2}$ uzevši u obzir, da je $S = \frac{\pi R^2}{4}$, dobit ćemo već poznate nam koordinate težišta prvog kvadranta kruga:

$$x_t = y_t = \frac{4R}{3\pi}$$

dok d_0 daje udaljenost težišta od središta kruga:

$$d_0 = \frac{4R\sqrt{2}}{3\pi}$$

Izračunaj statičke momente M_x i M_y, a također koordinate težišta:

1. površine omeđene parabolama $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$. $[x_t = y_t = 0{,}45]$
2. površine omeđene prvim lukom cikloide $x = r(t - \sin t)$; $y = r(1 - \cos t)$ i osi X.

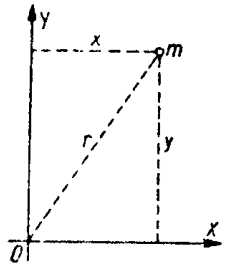
$$\left[r\pi,\ \frac{5}{6}r\right]$$

3. površine omeđene prvim poluzavojem Arhimedove spirale $r = a\varphi$ i osi X.

$$\left[\frac{6a(4-\pi^2)}{\pi^3};\ \frac{2a(\pi^2-6)}{\pi^2}\right]$$

3. Računanje momenata tromosti (inercije) ravnih likova

Pod momentom tromosti ili inercije materijalne točke obzirom na zadanu os rotacije razumije se umnožak mase m te točke i kvadrata njene udaljenosti od osi rotacije.



Sl. 58.

Prema slici 58:

$I_x = m \cdot y^2$ = moment tromosti obzirom na os X

$I_y = m \cdot x^2$ = moment tromosti obzirom na os Y.

To su aksijalni momenti tromosti materijalne točke.

Računa li se moment tromosti obzirom na zadanu točku, dobijemo polarni moment tromosti:

$I_p = m \cdot r^2$ = polarni moment tromosti obzirom na ishodište 0

Moment tromosti obzirom na zadanu ravninu zove se planarni moment tromosti:

$$I_{pl} = m \cdot h^2$$

Traži li se moment tijela, tada se najprije izračuna moment tromosti za element toga tijela mase dm, t. j. izračuna se

$$dI_x = y^2 dm; \quad dI_y = x^2 dm; \quad dI_p = r^2 dm; \quad dI_{pl} = h^2 dm,$$

a zatim integrirajući po volumenu V toga tijela dobijemo traženi moment tromosti za čitavo tijelo:

$$I_x = \int_V y^2 dm; \quad I_y = \int_V x^2 dm; \quad I_p = \int_V r^2 dm; \quad I_{pl} = \int_V h^2 dm$$

Integriranje po volumenu traži primjenu trostrukih integrala, o kojima je riječ u trećem dijelu Repetitorija (vidi Dio III. str. 228 i sl.). Međutim, momente tromosti homogenih rotacionih tjelesa možemo izračunati i pomoću običnih određenih integrala (vidi dalje točku 7. ovog paragrafa).

Računaju li se momenti tromosti ravna lika, t. j. t. zv. geometrijski momenti, tada ulogu mase m igra površina S lika, pa se momenti tromosti elementa lika računaju prema

$$\left.\begin{aligned} dI_x &= y^2 dS \\ dI_y &= x^2 dS \\ dI_p &= r^2 dS \end{aligned}\right| \qquad (85)$$

a integrirajući po čitavoj površini S lika dobijemo tražene momente tromosti:

$$\begin{array}{l|l|} \text{aksijalne} & I_x = \int\limits_S y^2 dS \\ & I_y = \int\limits_S x^2 dS \\ \text{polarni} & I_p = \int\limits_V r^2 dS \end{array} \qquad (85a)$$

Praktički se postupa tako, da se izračuna površina dS elementa zadanog lika, koja se izrazi s y, odnosno s x, pa se izvrši integriranje.

Primjeri

1. Izračunaj momente tromosti pravokutnika osnovke b i visine h obzirom na os X, koja se poklapa s osnovkom lika.

Prema (85) $dI_x = y^2 \cdot dS$ računamo površinu elementa (vidi sl. 59):

$$dS = b \cdot dy$$

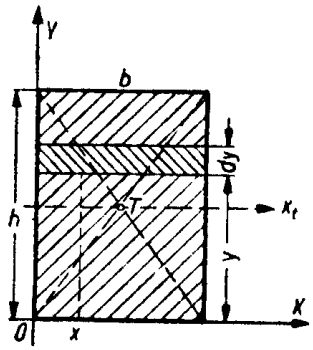
pa prema (85a) imamo:

$$I_x = \int\limits_0^h y^2 \cdot b \cdot dy = b \left| \frac{y^3}{3} \right|_0^h = \underline{\frac{bh^3}{3}\, cm^4},$$

ako su b i h zadani u cm.

Zamijenimo li b s h, a h s b, dobijemo:

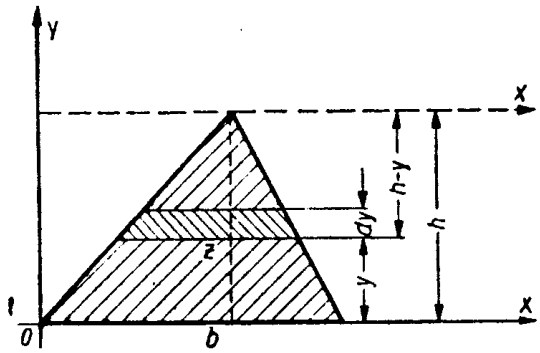
$$\underline{I_y = \frac{hb^3}{3}\, cm^4}$$



Sl. 59.

Integrirajući od $-\frac{h}{2}$ do $+\frac{h}{2}$ dobijemo moment tromosti obzirom na os X_t, koja prolazi težištem lika usporedno s osnovkom:

$$I_{x_t} = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = b \left| \frac{y^3}{3} \right|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b}{3}\left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right) = \underline{\frac{bh^3}{12}\, cm^4}$$



Sl. 60.

2. Izračunaj moment tromosti trokuta osnovke b i visine h obzirom na os, koja prolazi osnovkom lika.

Površina elementa, koji možemo smatrati da je pravokutnik:

$$dS = z \cdot dy \text{ (vidi sl. 60)},$$

pa je prema (85)

$$dI_x = y^2 \cdot z\, dy \qquad \text{(a)}$$

Da možemo integrirati, treba z izraziti s y. Iz sličnosti trokuta slijedi:

$$z : b = (h - y) : h$$

a odatle:

$$z = \frac{b(h-y)}{h} = b - \frac{b}{h} y$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$dI_x = y^2 \left(b - \frac{b}{h} y\right) dy$$

a odatle:

$$I_x = b \int_0^h y^2 \cdot dy - \frac{b}{h} \int_0^h y^3 \cdot dy = \left| b \frac{y^3}{3} - \frac{b}{h} \cdot \frac{y^4}{4} \right|_0^h =$$

$$= \frac{b h^3}{3} - \frac{b h^4}{4h} = \frac{b h^3}{12} cm^4$$

Izračunaj na slični način momente tromosti tog trokuta obzirom na paralelnu os X' kroz vrh trokuta $\left(I_x' = \frac{b h^3}{4}\right)$.

3. Izračunaj polarni moment tromosti kruga polumjera R obzirom na središte kruga.

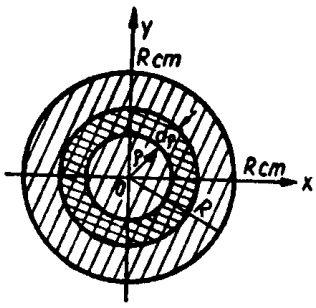
Element površine uzmemo u obliku vijenca polumjera ρ i širine $d\rho$ (vidi sl. 61), pa, ako ga prerežemo i uspravimo, možemo uzeti, da dobijemo pravokutnik osnovke $2\rho\pi$ i visine $d\rho$:

Dakle:

$$dS = 2\rho\pi \cdot d\rho$$

pa prema (85) ima:

$$dI_p = \rho^2 dS = \rho^2 \cdot 2\rho\pi\, d\rho$$



Sl. 61.

a odatle:

$$I_p = 2\pi \int_0^R \rho^3\, d\rho = 2\pi \left| \frac{\rho^4}{4} \right|_0^R = \underline{\frac{\pi R^4}{2} cm^4}$$

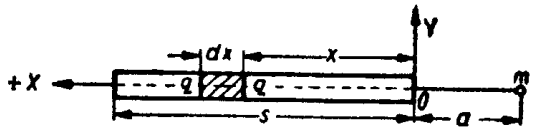
Tražimo li polarni moment tromosti kružnog vijenca nutarnjeg polumjera R_1 i vanjskog R_2 obzirom na središte, tada treba samo promijeniti granice integracije.

Za vijenac:

$$I_p = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho^3\, d\rho = 2\pi \left| \frac{\rho^4}{4} \right|_{R_1}^{R_2} = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4)$$

4. Primjeri iz fizike

1. Izračunaj silu, kojom privlači homogeni uspravni štap gustoće ρ, poprečnog presjeka q i duljine s, materijalnu točku mase m, koja se nalazi u produljenju osi štapa u udaljenosti a od jednog njegova kraja.



Sl. 62.

Polazeći od Newtonova zakona privlačenja između dviju masa:

$$\text{sila privlačenja} = f\,\frac{\text{umnožak masa}}{(\text{udaljenost između njih})^2} = f\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je $f = 66{,}63 \cdot 10^{-9}$ konstanta gravitacije, t. j. sila, kojom se međusobno privlače dvije materijalne točke mase 1 g u udaljenosti 1 cm, izračunajmo silu privlačenja dF između materijalne točke mase m i elementa štapa duljine dx (vidi sl. 62).

Volumen elementa $dV = q \cdot dx$

masa elementa dM = gustoća × volumen $= \rho \cdot dV = \rho \cdot q \cdot dx$

Prema Newtonovu zakonu:

$$dF = f\,\frac{\rho \cdot q\,dx \cdot m}{(x+a)^2}$$

Odatle:

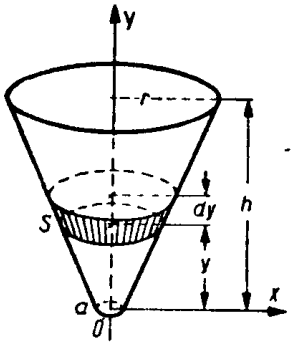
$$F = f \cdot \rho\, q\, m \int_0^s \frac{dx}{(x+a)^2} = -f \cdot \rho\, q\, m \left| \frac{1}{x+a} \right|_0^s =$$

$$= -f \rho\, q\, m \left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{a} \right) = f \rho q m \cdot \frac{s}{a(s+a)} = f \cdot \frac{\rho \cdot q \cdot s \cdot m}{a(a+s)}$$

a kako je $\rho \cdot q \cdot s = M$ = masa štapa, dobijemo:

$$\underline{F = f\,\frac{M \cdot m}{a(a+s)}}$$

2. Posuda, koja ima oblik uspravna kružna stošca visine h i polumjera osnovke r, napunjena je vodom. Nakon koliko će se vremena isprazniti posuda kroz otvor površine a u vrhu stošca.



Sl. 63.

Pretpostavimo, da je za vrijeme dt istekao kroz donji otvor element obujma vode dQ, koji možemo smatrati da je valjak površine osnovke S i visine dy (vidi sl. 63):

$$dQ = S \cdot dy$$

U drugu ruku je poznato: ako se zanemare svi otpori, brzina istjecanja kroz otvor jednaka je brzini tijela, koje slobodno pada s visine jednakoj dubini vode u posudi. Prema tome brzina istjecanja kroz otvor čestica vode, koje se nalaze u dubini y, bit će:

$$v = \sqrt{2gy}, \text{ gdje je } g = 9{,}81\ m/sek^2$$

[vidi *(e)* na str. 83].

Kako je protoka jednaka umnošku površine otvora i brzine istjecanja, isteći će u jedinici vremena kroz otvor površine a obujam vode:

$$a \cdot v = a\sqrt{2gy}$$

a za vrijeme dt:

$$dQ = a\sqrt{2gy} \cdot dt$$

Prije smo pokazali, da za to vrijeme dt istekao je element obujma vode $dQ = S \cdot dy$, pa imamo:

$$S \cdot dy = a\sqrt{2gy} \cdot dt \qquad \text{(a)}$$

Da možemo integrirati, moramo promjenljivu površinu S osnovke elementa dQ izraziti s y. Znamo, da se površine paralelnih presjeka stošca odnose kao kvadrati njihovih udaljenosti od vrha:

$$S : \pi r^2 = y^2 : h^2$$

a odatle:

$$S = \frac{\pi r^2 y^2}{h^2}$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$\frac{\pi r^2 y^2}{h^2} dy = a\sqrt{2gy} \cdot dt$$

Odatle:

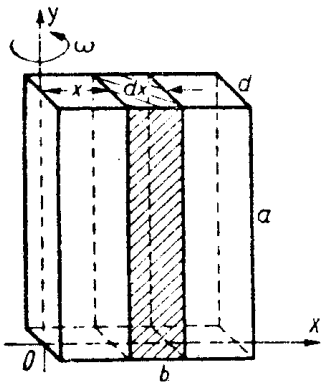
$$dt = \frac{\pi r^2 y^2}{h^2 a\sqrt{2gy}}$$

$$t = \frac{\pi r^2}{a h^2 \sqrt{2g}} \int_0^h y^{3/2}\, dy = \frac{\pi r^2}{a h^2 \sqrt{2g}} \left| \frac{y^{5/2}}{\frac{5}{2}} \right|_0^h =$$

$$= \frac{2\pi r^2}{5 a h^2 \sqrt{2g}} h^{5/2} = \underline{\frac{2\pi r^2 \sqrt{h}}{5a\sqrt{2g}}}$$

3. Brzina tijela dana je formulom $v = \sqrt{1+t}$ m/sec. Odredi put, što ga je tijelo prevalilo u toku 10 sekunada nakon početka gibanja.

Znamo, da je $v = \frac{ds}{dt}$ (Dio, I § 18), pa



Sl. 64.

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1+t} \,/ \cdot dt$$

$$ds = \sqrt{1+t} \cdot dt$$

$$s = \int_0^{10} \sqrt{1+t}\, dt$$

Uz supstituciju $\sqrt{1+t} = z$ (vidi tip II na strani 122) dobijemo:

$$s = \frac{2}{3} \left| \sqrt{(1+t)^3} \right|_0^{10} = \frac{2}{3}(\sqrt{11^3} - 1) = \underline{23{,}6\ m}$$

4. Homogena pravokutna pločica gustoće $\rho = 8\,g/cm^3$, debljine $d = 0{,}3\ cm$ i stranica $a = 50\ cm$ i $b = 40\ cm$ okreće se oko stranice a kutnom brzinom $\omega = 3\pi \frac{1}{sec}$. Odredi kinetičku energiju rotacije pločice.

Kako je kinetička energija E_k materijalne točke mase m jednaka $\frac{mv^2}{2}$, odnosno $\frac{mr^2\omega^2}{2}$, jer je obodna brzina $v = r \cdot \omega$, gdje je r polumjer rotacije, a ω kutna brzina, glasit će kinetička energija za element pločice debljine dx u udaljenosti x od osi rotacije Y (vidi sl. 64):

$$dE_k = \frac{dm \cdot x^2 \omega^2}{2}$$

Masa elementa dm = gustoća puta volumen $= \rho \cdot a \cdot d \cdot dx$, pa je

$$E_k = \frac{\rho \cdot a \cdot d \cdot \omega^2}{2} \int_0^b x^2 dx = \frac{\rho \cdot a \cdot d \cdot \omega^2}{2} \cdot \frac{b^3}{3} = \frac{\rho \cdot a \cdot b^3 d \cdot \omega^2}{6} \qquad \text{(a)}$$

a kako je $\rho\, a\, b\, d = m$ = masa pločice:

$$\underline{E_k = \frac{m\, b^2 \omega^2}{6}}$$

Uvrstimo li u (a) zadane vrijednosti izrazivši ih u kg i m:

$$\rho = 8\, g/cm^3 = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{(10^{-2})^3}\, kg/m^3 = 8000\, kg/m^3;\ d = 0{,}3\, cm = 0{,}003\, m$$

$$a = 50\, cm = 0{,}5\, m;\quad b = 40\, cm = 0{,}4\, m$$

dobijemo

$$E_k = \frac{8000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}003 \cdot 9\pi^2}{6} = \underline{11{,}32\, kgm}$$

Izračunaj za istu pločicu centrifugalnu silu C, koja za materijalnu točku mase m glasi $C = m\, r\, \omega^2$.

$$\left[C = \frac{m\, b\, \omega^2}{4}\right]$$

5. Određivanje duljine luka krivulje (rektifikacija krivulje)

a) Općenito

Pod duljinom luka krivulje razumije se granična vrijednost opsega poligona upisanog tom luku, kad broj stranica tog poligona teži u beskonačnost, a duljina svake pojedine stranice tog poligona teži nuli.

Budući da ta granična vrijednost opsega upisanog poligona predočuje istodobno duljinu nekog odreska pravca, određivanje duljine krivulje zove se također rektifikacija krivulje (rektificirati znači ispraviti). Iz te definicije vidimo jasno, da se duljina luka krivulje definira pomoću određenog integrala, za koji znamo da je limes sume, koja sadrži sve više članova, pri čemu svaki član te sume teži nuli.

b) U pravokutnim koordinatama

1. Jednadžba krivulje zadana je u eksplicitnom obliku: $y = f(x)$

Da odredimo duljinu s luka krivulje $y = f(x)$ [vidi sl. 65.], sjetimo se formule (3) za kvadrat diferencijala luka:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad \text{(a)}$$

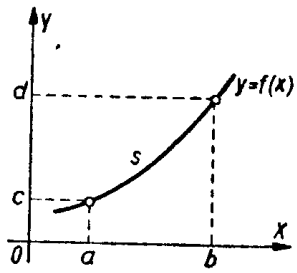
(Vidi sl. 3).

Podijelimo li tu jednakost s dx^2, dobit ćemo:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \text{ a kako je } \frac{dy}{dx} = y'(x),$$

imamo

$$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx \qquad (86)$$



Sl. 65.

To je izraz za diferencijal luka krivulje $y = f(x)$. Integriranjem dobijemo traženu duljinu s luka krivulje:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} \cdot dx \tag{86a}$$

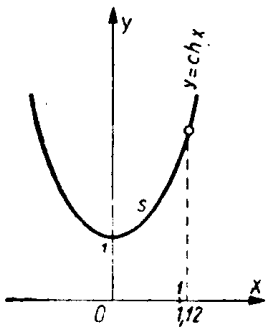
Kadšto je zgodnije uzeti, da je y nezavisna promjenljiva, t. j. prijeći na inverznu funkciju $x = \varphi(y)$. U tom slučaju podijelivši (a) s dy, dobijemo na sličan način:

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + x'^2(y)}\, dy \tag{86b}$$

(Vidi sl. 65).

Primjeri

1. Odredi duljinu luka lančanice $y = \operatorname{ch} x$ od $x = 0$ do $x = 1{,}12$ (sl. 66).



Sl. 66.

Računamo prema (86 a):

$$y = \operatorname{ch} x; \quad y' = \operatorname{sh} x$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{ch} x$$

$$s = \int_0^{1,12} \operatorname{ch} x\, dx = \Big| \operatorname{sh} x \Big|_0^{1,12} = \operatorname{sh} 1{,}12 = 1{,}37$$

(vidi dio I. § 4, 6).

2. Rektificiraj parabolu $y^2 = 2px$ od vrha do $x = \frac{p}{2}$.

Radi lakšeg integriranja prelazimo na inverznu funkciju $x = \frac{y^2}{2p}$ i odredimo nove granice integracije.

Za $x = \frac{p}{2}$ $y = \sqrt{2p \cdot \frac{p}{2}} = p$, a za $x = 0$ i $y = 0$. Po y integriramo dakle od 0 do p. Iz $y^2 = 2px$ slijedi:

$$x = \frac{y^2}{2p}; \qquad x' = \frac{y}{p}$$

$$1 + x'^2 = 1 + \frac{y^2}{p^2} = \frac{p^2 + y^2}{p^2}$$

$$s = \frac{1}{p} \int_0^p \sqrt{p^2 + y^2}\, dy = \text{prema predtipu } C \text{ uz primjenu formule (53a)}' =$$

$$= \frac{1}{p} \left| \frac{y}{2} \sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p^2}{2} \ln \frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p} \right|_0^p =$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{p}{2}\cdot p\sqrt{2} + \frac{p^2}{2}\ln\frac{p+p\sqrt{2}}{p} - \frac{p^2}{2}\cdot\underbrace{\ln 1}_{0}\right) = \underline{\frac{p\sqrt{2}}{2} + \frac{p}{2}\ln(1+\sqrt{2})}$$

Izračunaj duljinu luka jedne grane polukubne parabole $y^2 = x^3$ (sl. 43) od $x = 0$ do $x = 5$.

$$\left[s = \frac{335}{27}\right]$$

2. Jednadžba krivulje zadana je u parametarskom obliku:

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right| \; t_1 \leq t \leq t_2$$

Formulu (86a) za duljinu luka krivulje $s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$ izrazimo pomoću parametra t.

Znamo, da je prema (17):

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

pa dobijemo:

$$1 + y'^2(x) = 1 + \frac{y'^2(t)}{x'^2(t)} = \frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'^2(t)} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}^2}$$

gdje je

$$\dot{x} = x'(t)$$
$$\dot{y} = y'(t)$$

Osim toga je

$$dx = \dot{x}\,dt$$

Uvrštenje u (86a) daje formulu za duljinu luka s krivulje zadane parametarski $\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}$:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\cdot dt \tag{87}$$

uz pretpostavku, da vrijednostima $x = a$ i $x = b$ odgovaraju vrijednosti $t = t_1$ i $t = t_2$.

Primjeri

1. Rektifikacija jednog luka cikloide:

$$x = r(t - \sin t)$$
$$y = r(1 - \cos t)$$ [vidi formulu (19) i sl. 5].

Računamo prema (87):

$$\dot{x} = r(1 - \cos t)$$

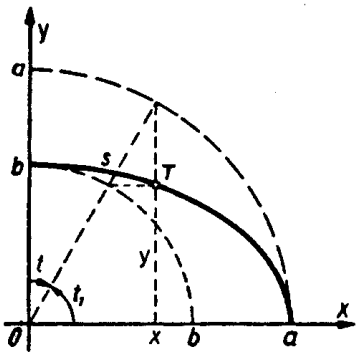
$$\dot{y} = r \sin t$$

$$s = r \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}}\, dt =$$

$$= r\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt = r\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 2r \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt =$$

$$= 2r \left| \frac{-\cos \frac{t}{2}}{\frac{1}{2}} \right|_0^{2\pi} = 4r(-\cos \pi + \cos 0) = \underline{8r}$$

Duljina luka cikloide jednaka je osmerostrukom polumjeru kružnice, koja izvodi tu krivulju.



Sl. 67.

2. Rektifikacija kvadranta elipse

Da dobijemo duljinu luka elipse u obliku, koji slijedi, računat ćemo parametar t od osi $+Y$ u smislu kazaljke na satu (vidi sl. 67), dok smo prije taj kut t računali idući od osi $+X$ u obratnom smislu.

Uvrštenje

$$t_1 = \frac{\pi}{2} - t$$

u

$$x = a \cos t_1 \qquad y = b \sin t_1 \qquad \text{(vidi Dio I, § 5)}$$

daje parametarsku jednadžbu elipse za taj način računanja parametra t:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \sin t \\ y &= b \cos t \end{aligned}\right| \; 0 \leq t < 2\pi$$

Računamo prema (87):

$$\dot{x} = a \cos t$$

$$\dot{y} = -b \sin t$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t = a^2(1 - \sin^2 t) + b^2 \sin^2 t =$$

$$= a^2 \left(1 - \sin^2 t + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 t\right) = a^2 \left[1 - \sin^2 t \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\right] =$$

$$= a^2 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 t\right) = a^2(1 - \varepsilon^2 \sin^2 t)$$

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \text{numerički ekscentricitet, koji je} < 1 \text{ za elipsu.}$$

$$s = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}\, dt$$

Dobili smo eliptički integral u kanonskom obliku druge vrste, u kojem je ε modul tog integrala (vidi tip V, str. 146).

Znamo, da taj integral možemo elementarno riješiti samo približno i to tako, da integrand razvijemo u beskonačni konvergentni red, koji integriramo član po član.

Integrand $\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} = (1 - \varepsilon^2 \sin^2 t)^{1/2}$ razvijemo dakle u binomni red:

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots$$

konvergira za $|x| < 1$ (vidi Dio I, § 20, 9).

Kako je naš $|x| = \varepsilon^2 \sin^2 t < 1$, red će konvergirati.

Uvrštenje $x = -\varepsilon^2 \sin^2 t$ i $m = \frac{1}{2}$ u binomni red daje:

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 t + \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 \cdot 2} \varepsilon^4 \sin^4 t - \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varepsilon^6 \sin^6 t + \cdots$$

ili

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 t - \frac{1}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 \sin^4 t - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varepsilon^6 \sin^6 t - \cdots$$

Kako taj red konvengira uniformno, smijemo ga integrirati član po član (vidi § 5, 8):

$$s = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}\, dt = a \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt - \frac{1}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\, dt - \cdots \right]$$

$$= a \left| t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) - \frac{1}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 \left(-\frac{1}{4} \sin^3 t \cdot \cos t - \frac{3}{8} \sin t \cdot \cos t + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{3}{8} t \right) - \cdots \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = a \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 \cdot \frac{3}{8} \frac{\pi}{2} - \cdots \right]$$

ili

$$\underline{s = \frac{a\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 1\, \varepsilon^2 - \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 3\, \varepsilon^4 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 5\, \varepsilon^6 - \cdots \right]}$$

Uvrstivši u red vrijednost poluosi a zadane elipse i njen numerički ekscentricitet $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, gdje je $a > b$, možemo duljinu kvadranta elipse izračunati po volji točno.

Uvrstimo li u red $a = r$ i $\varepsilon = 0$, dobijemo:

$$s = \frac{r\pi}{2}, \text{ a to je duljina kvadranta kružnice.}$$

Rektificiraj kružnicu uzevši njenu jednadžbu u parametarskom obliku. $[s = 2r\pi]$

c) U polarnim koordinatama

Jednadžba krivulje glasi $r = r(\varphi)$.

Formulu (3) za kvadrat diferencijala luka krivulje

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

izrazimo u polarnim koordinatama.

Znamo formule prijelaza:

$$\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix}, \quad \text{odatle} \quad \begin{matrix} dx = -r\sin\varphi\cdot d\varphi + \cos\varphi\cdot dr \\ dy = r\cos\varphi\cdot d\varphi + \sin\varphi\cdot dr \end{matrix}$$

Uvrštenje u (3) daje:

$$ds^2 = r^2\sin^2\varphi\, d\varphi^2 - 2r\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi\, dr + \cos^2\varphi\, dr^2 +$$
$$+ r^2\cos^2\varphi\, d\varphi^2 + 2r\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi\, dr + \sin^2\varphi\, dr^2 =$$
$$= r^2 d\varphi^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + dr^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

ili

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2$$

ili

$$ds^2 = d\varphi^2\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right] = (r^2 + r'^2)\, d\varphi^2$$

a odatle:

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$$

i

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi \tag{88}$$

Time smo dobili formulu za rektifikaciju krivulje zadane u polarnim koordinatama $r = r(\varphi)$.

Primjeri

1. Rektificiraj kružnicu polumjera R: $r = R$.

Prema (88) imamo:

$$r = R; \quad r' = 0$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2}\, d\varphi = R\Big|\varphi\Big|_0^{2\pi} = \underline{2R\pi}$$

2. Rektificiraj kardioidu $r = a(1 - \cos\varphi)$ (vidi sl. 50).

$$r' = a \sin\varphi$$

Uvrštenje u (88) daje:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos\varphi + \underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{1}}\, d\varphi = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = -2a\left|\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\frac{1}{2}}\right|_0^{2\pi} =$$

$$= -4a(\cos\pi - \cos 0) = -4a(-1-1) = \underline{8a}$$

Izračunaj duljinu luka prvog zavoja Arhimedove spirale $r = a\varphi$.

$$\left[s = \pi a\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})\right]$$

6. Obujam (volumen) tijela

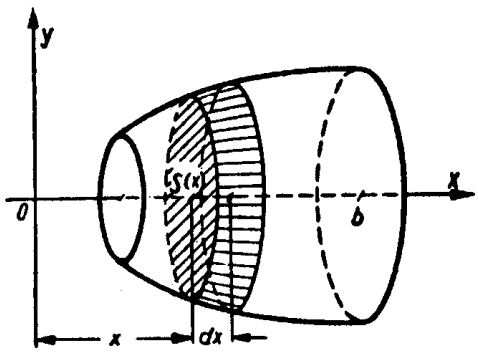
Obujam tijela računa se obično pomoću dvostrukog integrala, o kojem je riječ u trećem dijelu Repetitorija. Međutim, ako možemo površinu poprečnog presjeka tijela prikazati kao funkciju njegova položaja ili ako je tijelo rotaciono, tada obujam možemo izračunati pomoću običnog jednostrukog određenog integrala.

Slika 68 prikazuje tijelo, za koje pretpostavljamo, da nam je poznata površina S svakog njegovog poprečnog presjeka, t. j. površina poprečnog presjeka zadana je kao funkcija od x: $S = S(x)$.

Element tijela visine dx možemo smatrati da je valjak osnovke $S(x)$, pa je njegov volumen:

$$dV = S(x)\,dx$$

a odatle:



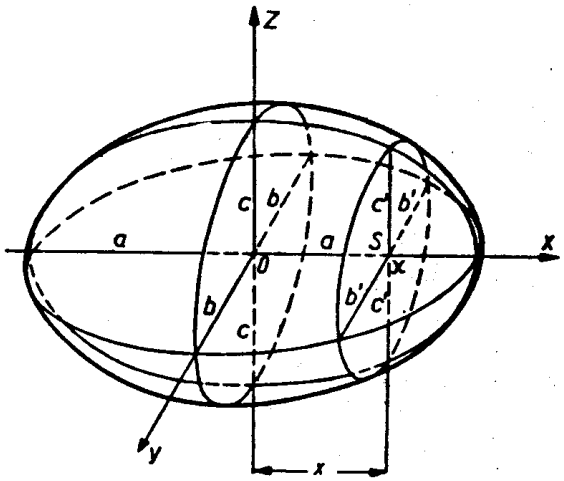
Sl. 68.

$$V = \int_a^b S(x)\,dx \tag{89}$$

gdje je $S(x)$ površina poprečnog presjeka tijela zadana kao funkcija od x.

Primjer

Izračunaj obujam troosnog elipsoida. Troosni elipsoid je tijelo, kojemu je svaki presjek elipsa, slično tome, kako je krug svaki presjek kugle (vidi sl. 69).



Sl. 69.

Rotacijom elipse oko njene velike ili male osi ne nastaje troosni već dvoosni ili rotacioni elipsoid, kojemu su presjeci krugovi okomiti na os rotacije.

Da izračunamo volumen troosnog elipsoida, treba površinu S poprečnog presjeka toga tijela izraziti kao funkciju od x. Pošto je taj presjek elipsa s poluosima b' i c' (vidi sl. 69), a površinu elipse znamo ($S = a\,b\,\pi$), bit će:

$$S = b'\,c'\,\pi$$

Kako se vidi iz slike, b' je ordinata u točki apscise x horizontalne elipse s poluosima a i b, u kojoj ravnina XY siječe elipsoid i kojoj je jednadžba $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ odnosno

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

pa je

$$b' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{(a)}$$

Slično je c' ordinata u točki apscise x vertikalne elipse s poluosima a i c, u kojoj ravnina XZ siječe elipsoid i kojoj je jednadžba

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

odnosno

$$z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

pa je

$$c' = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{(b)}$$

Uvrštenje (a) i (b) u $S = b'\,c'\,\pi$ daje:

$$S(x) = \frac{b\,c\,\pi}{a^2}(a^2 - x^2)$$

pa prema (89) imamo:

$$V = \frac{b\,c\,\pi}{a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2 - x^2)\,dx = \frac{b\,c\,\pi}{a^2}\left| a^2 x - \frac{x^3}{3}\right|_{-a}^{+a} =$$

$$= \frac{b\,c\,\pi}{a^2}\left[a^3 - \frac{a^3}{3} - \left(-a^3 + \frac{a^3}{3}\right)\right] = \frac{b\,c\,\pi}{a^2}\left(2a^3 - \frac{2}{3}a^3\right) = \frac{b\,c\,\pi}{a^2}\cdot\frac{4a^3}{3}$$

$$\underline{V = \frac{4}{3}a\,b\,c\,\pi}$$

Da kontroliramo rezultat, uzmemo da je $a = b = c = r$.

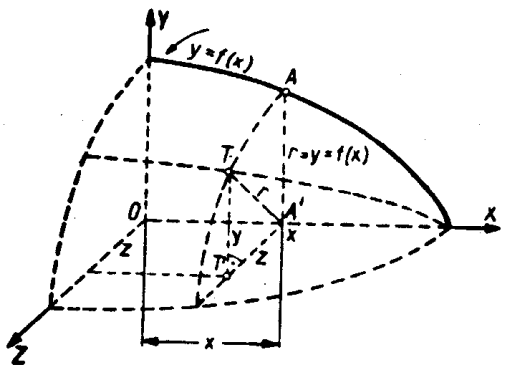
Dobijemo $V = \frac{4}{3}r^3\pi$, a to je volumen kugle, koja pretstavlja samo poseban slučaj elipsoida.

7. Rotacione plohe i tjelesa

a) Jednadžbe rotacionih ploha

Traži se jednadžba plohe, koja je nastala rotacijom krivulje $y = f(x)$ oko osi X (sl. 70).

Svaka točka A krivulje, kojoj je apscisa x i ordinata $y = f(x)$, opisuje pri rotaciji kružnicu polumjera $r = y = f(x)$. Da napišemo jednadžbu tako nastale rotacione plohe, uzmemo na toj plohi točku $T(x,y,z)$ po volji, pa je naš zadatak, da napišemo jednadžbu, koja veže koordinate x, y, z te točke s onim, što je za plohu zadano.



Sl. 70.

Iz pravokutnog trokuta $TT'A'$ slijedi:

$$r^2 = y^2 + z^2$$

a kako je $r = f(x)$, dobijemo traženu jednadžbu rotacione plohe:

$$[f(x)]^2 = y^2 + z^2 \qquad (90)$$

koja je nastala rotacijom krivulje $y = f(x)$ oko osi X.

Na isti način dobijemo jednadžbu rotacione plohe

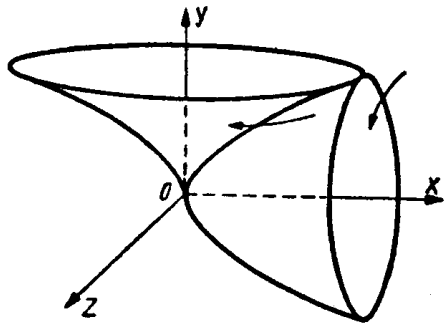
$$[\varphi(y)]^2 = x^2 + z^2 \qquad (90a)$$

rotirajući krivulju $x = \varphi(y)$ oko osi Y.

Primjeri

1. Zadana je parabola $y^2 = 2px$. Napiši jednadžbe rotacionih paraboloida nastalih rotacijom te krivulje.

a) oko osi X; b) oko osi Y (vidi sl. 71).



Sl. 71.

a) Parabolu $y^2 = 2px$ rotiramo oko osi X. Uvrštenje $y^2 = 2px = [f(x)]^2$ u (90) daje:

$$2px = y^2 + z^2$$

ili

$$\underline{y^2 + z^2 = 2px}$$

b) Parabolu $y^2 = 2px$ rotiramo oko osi Y. Iz $y^2 = 2px$ slijedi:

$$x = \frac{y^2}{2p} = f(y)$$

Uvrštenje u (90a) daje:

$$\frac{y^4}{4p^2} = x^2 + z^2$$

ili

$$\underline{y^4 = 4p^2(x^2 + z^2)}$$

2. Napiši jednadžbu rotacionog paraboloida nastalog rotacijom oko osi X parabole zadane prema slici 72.

Najprije odredimo jednadžbu zadane parabole.

Znamo jednadžbu parabole, kojoj je os simetrije paralelna s osi X:

$$(y-b)^2 = 2p(x-a)$$

gdje su (a, b) koordinate vrha parabole. U našem slučaju je $a = 3$; $b = 0$:

$$y^2 = 2p(x-3) \qquad \text{(a)}$$

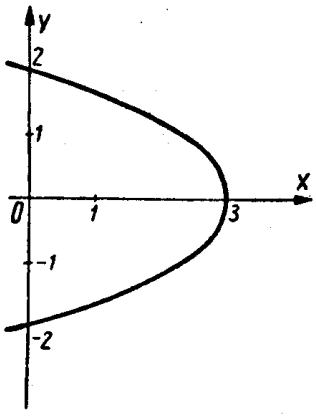
Da odredimo parametar $2p$, uvrstimo u (a) koordinate točke $(0, 2)$ ili točke $(0, -2)$, koje leže na paraboli.

Dobijemo:

$$4 = 2p(-3)$$

Odatle:

$$2p = -\frac{4}{3}$$



Sl. 72.

Uvrštenje u (a) daje traženu jednadžbu parabole:

$$y^2 = -\frac{4}{3}(x-3)$$

ili

$$\underline{y^2 = -\frac{4}{3}x + 4}$$

Sada možemo odrediti jednadžbu rotacione površine. Prema (90) imamo:

$$-\frac{4}{3}x + 4 = y^2 + z^2$$

ili

$$\underline{4x + 3y^2 + 3z^2 - 12 = 0}$$

3. Napiši jednadžbe rotacionih hiperboloida rotirajući hiperbolu $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

a) oko osi X i b) oko osi Y (sl. 73).

a) Hiperbolu $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ rotiramo oko osi X.

Iz te jednadžbe slijedi:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = [f(x)]^2$$

To uvrstimo u (90):

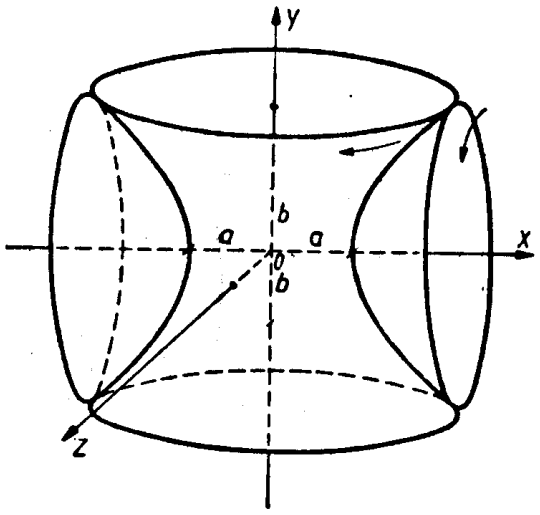
$$\frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = y^2 + z^2 \;/ : b^2$$

$$\underline{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1}$$

To je jednadžba dvoplošnog rotacionog hiperboloida (vidi sl. 73).

b) Istu hiperbolu rotiramo oko osi Y. Iz $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ slijedi:

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2) = [\varphi(y)]^2$$



Sl. 73.

Uvrštenje u (90a) daje:

$$\frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2) = x^2 + z^2 \,/ : a^2$$

$$\underline{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1}$$

Jednadžba jednoplošnog rotacionog hiperboloida (vidi sl. 73).

Napiši jednadžbe elipsoida rotirajući elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

a) oko osi X i b) oko osi Y.

$$\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1\right]$$

Vidimo, da rotacione plohe imaju uvijek dvije osi.

Napiši za vježbu jednadžbe rotacionih ploha rotirajući na pr. $y = x^2$, $y = x^3$ i t. d. oko osi X i oko osi Y. (Vidi Dio I, slike 25 i 31).

b) Obujam rotacionog tijela

Traži se obujam tijela, koje je omeđeno plohom nastalom rotacijom oko osi X krivulje $y = f(x)$ od $x = a$ do $x = b$ (sl. 74.)

Kako svaka točka $A(x, y)$ krivulje $y = f(x)$ opisuje kružnicu polumjera $r = y = f(x)$, svaki poprečni presjek rotacionog tijela okomit na os rotacije (os X) je krug, kojemu je površina:

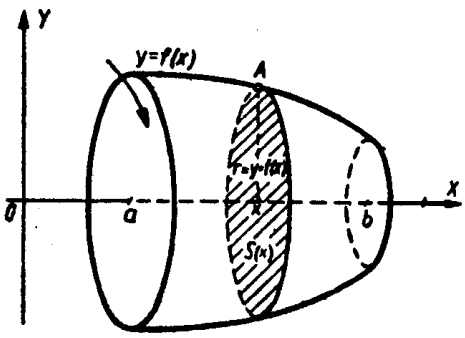
$$S(x) = \pi r^2 = \pi y^2 = \pi \cdot [f(x)]^2$$

Uvrštenje u (89) daje traženi volumen rotacionog tijela

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \qquad (91)$$

Rotiramo li istu krivulju oko osi Y, tada je volumen rotacionog tijela:

$$V = \pi \int_c^d x^2 \, dy = \pi \int_c^d [\varphi(y)]^2 \, dy \qquad (91a)$$



Sl. 74.

gdje je $x = \varphi(y)$ inverzna funkcija od $y = f(x)$.

Ako je krivulja, koja rotira, zadana u parametarskom obliku:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right| \quad t_1 \leq t \leq t_2, \text{ tada formula (91)}$$

za volumen rotacionog tijela prima oblik:

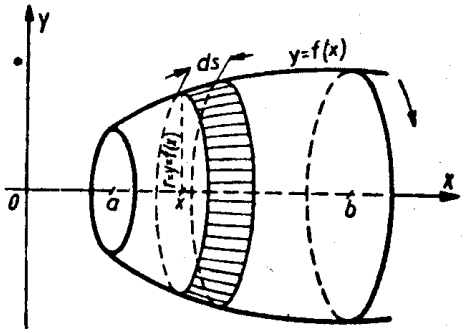
$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \cdot x'(t) \, dt \qquad (92)$$

jer je $\qquad dx = x'(t) \cdot dt = \dot{x} \cdot dt$

c) Površina rotacione plohe

Primijetimo, da se i površine ploha računaju pomoću dvostrukog integrala. Međutim, ako je ploha rotaciona, njenu površinu možemo odrediti pomoću jednostrukog određenog integrala.

Element površine dS tijela, koje je nastalo rotacijom oko osi X krivulje $y=f(x)$ od $x=a$ do $x=b$, možemo smatrati kao da je plašt valjka, kojemu je izvodnica diferencijal luka krivulje ds, a osnovka ima opseg $2\pi r = 2\pi y$ (sl. 75), pa je:



Sl. 75.

$$dS = 2\pi y \cdot ds$$

a kako je prema (86)

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

imamo:

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \tag{93}$$

$$= 2\pi \int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

To je površina tijela nastalog rotacijom krivulje $y=f(x)$ oko osi X.

Pošto je za krivulju $\left|\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right.$ $t_1 \leq t \leq t_2$ prema (87)

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt,$$

bit će

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt \tag{94}$$

površina tijela nastalog rotacijom oko osi X krivulje zadane u parametarskom obliku.

Primjeri

1. Napiši jednadžbu kugline plohe i izračunaj volumen i površinu kugle polumjera r.

Kuglina ploha nastaje rotacijom oko osi X gornje polovine kružnice

$$x^2+y^2=r^2 \qquad \text{(vidi sl. 76).}$$

a) Jednadžba kugline plohe

Uvrštenje:

$$y^2 = r^2 - x^2 = [f(x)]^2$$

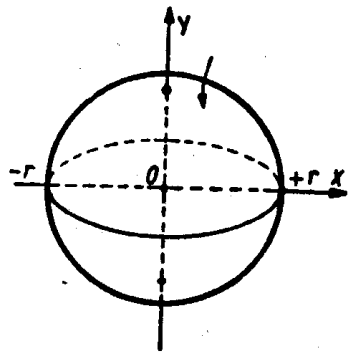
u (90) daje:

$$r^2 - x^2 = y^2 + z^2$$

ili

$$\underline{x^2+y^2+z^2=r^2}$$

jednadžba kugline plohe.



Sl. 76.

b) Obujam kugle

Uvrštenje $y^2 = r^2 - x^2$ u (91) daje:

$$V = \pi \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi \left| r^2 x - \frac{x^3}{3} \right|_{-r}^{+r} =$$

$$= \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right] = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \underline{\frac{4}{3} r^3 \pi}$$

c) Površina kugle

Računamo prema (93):

Kako jednadžba polukružnice, koju rotiramo, glasi

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ili

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

dobivamo derivirajući:

$$y' = -\frac{2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

a

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

i

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Uvrštenje u (93) daje:

$$S = 2\pi \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx = 2\pi r \left| x \right|_{-r}^{+r} =$$

$$= 2\pi r (r + r) = \underline{4r^2 \pi}$$

2. Odredi volumen tijela nastalog rotacijom oko osi X sinusoide $y = \sin x$ od $x = 0$ do $x = \pi$.

Uvrštenje $y^2 = \sin^2 x$ u (91) daje:

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \text{prema (59a)} = \pi \left| \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2} \pi^2 \doteq \frac{1}{2} \cdot 9{,}87 = \underline{4{,}93} \text{ (u kubnim jedinicama).}$$

3. Izračunaj obujam elipsoida, koji je nastao rotacijom elipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ oko osi X.

Uvrštenje: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ u (91) daje:

$$V = \pi \frac{b^2}{a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)\,dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \left| a^2 x - \frac{x^3}{3} \right|_{-a}^{+a} =$$

$$= \frac{\pi b^2}{a^2} \left(a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{\pi b^2}{a^2} \cdot \frac{4}{3} a^3 = \underline{\frac{4}{3} ab^2 \pi}$$

Proba: za $a = b = r$:

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi = \text{obujam kugle.}$$

4. Izračunaj obujam i površinu tijela, koje je nastalo rotacijom luka cikloide

$$\left.\begin{aligned} x &= r(t - \sin t) \\ y &= r(1 - \cos t) \end{aligned}\right| \quad \text{oko osi } X.$$

a) Obujam

Računamo prema (92):

$$\dot{x} = r(1 - \cos t)$$

$$V = \pi \int_0^{2\pi} r^2 (1 - \cos t)^2 \cdot r(1 - \cos t)\, dt = \pi \cdot r^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\, dt =$$

$$= \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\, dt =$$

$$= \pi r^3 \left[\int_0^{2\pi} dt - 3 \int_0^{2\pi} \cos t\, dt + 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt - \int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt \right] = \quad \text{(vidi str. 182)} =$$

$$= \pi r^3 \left[2\pi - 0 + 3 \left| \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right|_0^{2\pi} - 0 \right] = \pi r^3 (2\pi + 3\pi) = \underline{5\pi^2 r^3}$$

b) Površina

Računamo prema (94):

$$\begin{aligned} x &= r(t - \sin t) \\ y &= r(1 - \cos t) \end{aligned}$$

$$\dot{x} = r(1 - \cos t); \quad y = r \sin t$$

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} r(1 - \cos t) \cdot \sqrt{r^2 (1 - \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t}\, dt =$$

$$= 2\pi r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \cdot \sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt = 2\pi r^2 \int_0^{2\pi} 2 \sin^2 \frac{t}{2} \cdot 2 \sin \frac{t}{2}\, dt =$$

$$= 8\pi r^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt \qquad \text{(a)}$$

$$\int \sin^3 \frac{t}{2}\, dt = \left[\frac{t}{2} = z; \quad dt = 2dz \right] = 2 \int \sin^3 z\, dz =$$

$$= \text{prema tipu VIII (primjer 2 na strani 155)} = 2 \left(-\frac{1}{3} \sin^2 z \cos z - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3} \cos z \right) = -\frac{2}{3} \sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} - \frac{4}{3} \cos \frac{t}{2} + C$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$S = 8\pi r^2 \left| -\frac{2}{3}\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} - \frac{4}{3}\cos\frac{t}{2} \right|_0^{2\pi} =$$

$$= 8\pi r^2 \left(+\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right) = \underline{\frac{64}{3}\pi r^2}$$

Odredi integriranjem obujam i površinu

1) stošca nastalog rotacijom oko osi X pravca, koji spaja ishodište s točkom A (3, 4).

$$[V = 16\pi, \quad S = 20\pi]$$

2) tijela nastalog rotacijom luka cikloide oko osi Y.

$$[V = 6\pi^2 r^3; \quad S = 16\pi^2 r^2]$$

d) Guldinovo pravilo za volumen i površinu rotacionog tijela

Tražimo volumen tijela, koje nastaje rotacijom oko osi X ravna lika, kojemu je površina S, a težište u točki $T(x_t, y_t)$ (sl. 77).

Rotiramo li oko osi X element lika površine dS i koordinata (x, y), nastat će kružni prsten poprečnog presjeka dS. Prerežemo li taj prsten pa ga uspravimo, dobit ćemo valjak, kome je osnovka dS, a visina $2\pi y$, pa je volumen elementa:

$$dV = dS \cdot 2\pi y$$

Integriranje po površini S lika daje:

$$V = 2\pi \int_S y\, dS = 2\pi M_x \qquad \text{(a)}$$

jer je prema (82)

$$\int_S y\, dS = M_x = \text{statički moment lika obzirom na os } X.$$

Prema (83) znamo izraz za ordinatu težišta y_t ravna lika:

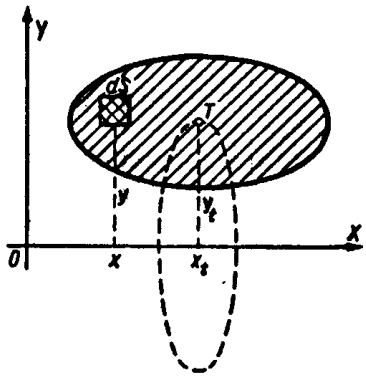
$$y_t = \frac{M_x}{S}$$

odatle:

$$M_x = y_t \cdot S$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$V = S \cdot 2\pi y_t \qquad (95)$$



Sl. 77.

gdje je S površina ravnog lika, koji rotira, y_t udaljenost težišta lika od osi rotacije, a $2\pi y_t$ — duljina kružnice, koju opisuje težište lika kod rotacije, t. j. put težišta.

Prema tome Guldinovo pravilo glasi: **obujam rotacionog tijela jednak je umnošku površine lika, koji rotira, i puta težišta lika kod jednog okretaja.**

Iz (95) slijedi:

ordinata težišta lika $$y_t = \frac{V}{2\pi \cdot S} \tag{95a}$$

To znači: ako znamo volumen V rotacionog tijela i površinu S ravna lika, koji to tijelo izvodi, tada možemo prema formuli (95a) izračunati udaljenost težišta tog ravnog lika od osi rotacije.

Na pr. rotirajući oko promjera (os X) polovinu kruga, kojoj je površina $S = \frac{\pi r^2}{2}$, dobijemo kuglu, kojoj je volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (vidi sl. 76).

Uvrštenje u (95a) daje ordinatu težišta polukruga:

$$y_t = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi \cdot \frac{\pi r^2}{2}} = \underline{\frac{4r}{3\pi}}$$

Do istog rezultata došli smo prije drugim putem (v. pr. na str. 201).

Na slični način dolazimo do drugog Guldinova pravila, koje glasi:

Površina S rotacione plohe jednaka je umnošku duljine s luka, koji rotira, i puta težišta luka kod jednog okretaja.

$$S = s \cdot 2\pi y_t \tag{96}$$

Izvedi to pravilo!

Odatle ordinata težišta luka glasi:

$$y_t = \frac{S}{2\pi s} \tag{96a}$$

Na pr., ako tražimo težište polukružnice (luka!) $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$, tada je:

$$x_t = 0,$$

a y računamo prema (96a), uzevši u obzir, da rotirajući oko osi X polukružnicu, kojoj je duljina luka $s = r\pi$, dobijemo kuglinu plohu, kojoj je površina $S = 4r^2\pi$:

$$y_t = \frac{4r^2\pi}{2\pi \cdot r\pi} = \underline{\frac{2r}{\pi} = \frac{d}{\pi}}$$

$$(d = 2r)$$

Primjeri

1. Odredi obujam i površinu prstena (torusa), koji nastaje rotacijom oko osi X kruga

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Oba rezultata kontroliraj pomoću Guldinovih pravila (sl. 78).

Prelazimo radi jednostavnijeg integriranja na parametarsku jednadžbu zadane kružnice:

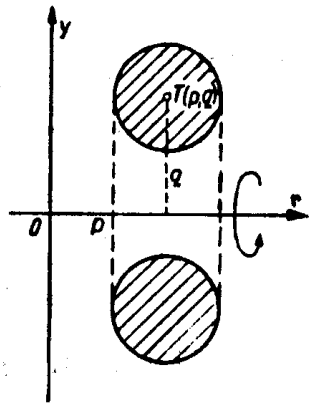
$$\begin{aligned} x &= r\cos t + p \\ y &= r\sin t + q \end{aligned} \quad \Big| \; 0 \leqq t < 2\pi$$

a) Obujam

Računamo prema (92):

$$\dot{x} = -r\sin t$$

i obilazeći kružnicu u negativnom smislu [vidi točku 1. d) ovog paragrafa] dobijemo:



Sl. 78.

$$V = -\pi \int_{2\pi}^{0} (r\sin t + q)^2 r \sin t \, dt =$$

$$= \pi r \int_0^{2\pi} (r^2 \sin^3 t + 2rq \sin^2 t + q^2 \sin t) \, dt =$$

$$= \pi r \left[r^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 t \, dt + 2rq \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt + q^2 \int_0^{2\pi} \sin t \, dt \right] =$$

$$= \text{(vidi str. 182)} = \pi r \left| 0 + 2rq\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right) + 0 \right|_0^{2\pi} = \pi r \cdot 2rq \cdot \pi = \underline{2\pi^2 r^2 q}$$

Kontrola po Guldinu (95):

$$V = S \cdot 2\pi y_t = \pi r^2 \cdot 2\pi q = \underline{2\pi^2 r^2 q}$$

b) Površina

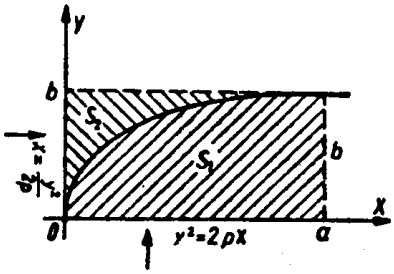
Računamo prema (94):

$$\dot{x} = -r\sin t$$
$$\dot{y} = r\cos t$$

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} (r\sin t + q)\sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} \, dt =$$

$$= 2\pi r \int^{2\pi} (r\sin t + q) \, dt = 2\pi r \left[r \int_0^{2\pi} \sin t \, dt + q \int_0^{2\pi} dt \right] =$$

$$= 2\pi r (0 + q \cdot 2\pi) = \underline{4\pi^2 r q}$$



Sl. 79.

Kontrola po Guldinu (96):

$$S = s \cdot 2\pi y_t = 2r\pi \cdot 2\pi q = 4\pi^2 r q$$

2. Odredi po Guldinu koordinate težišta površine lika, koji je omeđen parabolom $y^2 = 2px$ od $x = 0$ do $x = a$ i osi X (sl. 79).

Računamo prema (95a):

$$y_t = \frac{V}{2\pi S}$$

Prema (91):

$$V_1 = \pi \int_0^a 2px\,dx = 2\pi p \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^a = \pi a^2 p$$

Prema (75)

$$S_1 = \frac{2}{3} ab, \text{ gdje je } b = \sqrt{2ap} = \text{ ordinata parabole za } x = a,$$

pa prema (95a) imamo:

$$y_t = \frac{\pi a^2 p}{2\pi \cdot \frac{2}{3} ab} = \frac{3ap}{4b}$$

Iz $b = \sqrt{2ap}$ slijedi, da je $p = \frac{b^2}{2a}$, pa je

$$\underline{y_t = \frac{3}{8} b}$$

Da odredimo x, rotiramo parabolu oko osi Y. Na taj način dobijemo volumen V_2 tijela nastalog rotacijom lika S_2 (vidi sl. 79), a kako tražimo volumen tijela nastalog rotacijom lika S_1 oko osi Y, odredit ćemo taj volumen V_3 tako, da V_2 oduzmemo od volumena V valjka polumjera a i visine b, t. j. od

$$V = \pi a^2 b$$

Iz $y^2 = 2p\,x$ slijedi $x = \frac{y^2}{2p}$, pa prema (91a) imamo:

$$V_2 = \pi \int_0^b \frac{y^4}{4p^2} dy = \frac{\pi}{4p^2} \left| \frac{y^5}{5} \right|_0^b = \frac{\pi b^5}{20p^2}$$

Uvrštenje $p = \frac{b^2}{2a}$ daje:

$$V_2 = \frac{\pi b^5}{20 \cdot \frac{b^4}{4a^2}} = \frac{\pi a^2 b}{5}$$

$$V_3 = V - V_2 = \pi a^2 b - \frac{\pi a^2 b}{5} = \frac{4}{5} \pi a^2 b$$

Prema (95a):

$$x_t = \frac{V_3}{2\pi \cdot S_1} = \frac{\frac{4}{5} \pi a^2 b}{2\pi \cdot \frac{2}{3} ab} = \frac{3}{5} a$$

$$\underline{x_t = \frac{3}{5} a}$$

Iste rezultate smo dobili prije u primjeru 2. na str. 197.

Odredi pomoću Guldinova pravila volumen rotacionih tjelesa navedenih u primjerima točke c) ovog §, uzevši koordinate ravnih likova iz pređašnjih primjera.

e) Težište i momenti tromosti homogenog rotacionog tijela

Težište i momenti tromosti tjelesa računaju se pomoću trostrukih integrala. Međutim, ako je tijelo rotaciono i homogeno, mnogo jednostavnije dolazimo do tih veličina pomoću običnih određenih integrala.

1. Težište

Znamo iz mehanike: ako imamo sustav od n međusobno nevezanih materijalnih točaka masa $m_1, m_2, \ldots, m_n$, kojim su koordinate (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$, tada koordinate težišta toga sustava glase:

$$x_t = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

slično:

$$y_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad z_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

U brojnicima je, kako vidimo, suma umnožaka mase točke s njenom koordinatom, a u nazivnicima je cjelokupna masa sviju točaka.

Pretpostavimo li, da tih točaka ima beskonačno mnogo i da one čine u svojoj cjelokupnosti neko tijelo, pri čemu je dm masa svake točke, t. j. masa elementa tijela, tada koordinate težišta toga tijela primaju prema gornjim formulama oblik:

$$x_t = \frac{\int_V x\,dm}{\int_V dm}; \quad y_t = \frac{\int_V y\,dm}{\int_V dm}; \quad z_t = \frac{\int_V z\,dm}{\int_V dm.} \qquad \text{(a)}$$

pri čemu je svaki integral uzet po volumenu V tijela.

U drugu ruku znamo, da je:

$$\text{gustoća homogenog tijela } \rho = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{m}{V} = \text{konstanta.}$$

Odatle je:

$$\text{masa tijela } m = \rho \cdot V = \text{gustoća puta volumen,}$$

a masa elementa tijela $\qquad dm = \rho \cdot dV.$

Uvrstimo li $dm = \rho\, dV$ u formule (a) i uzmemo li u obzir, da je $\int dV = V =$ = volumen tijela, dobijemo

$$x_t = \frac{\rho \int_V x\,dV}{\rho \cdot V} = \frac{\int_V x \cdot dV}{V}$$

$$y_t = \frac{\int_V y\,dV}{V}; \qquad z_t = \frac{\int_V z\,dV}{V} \tag{b}$$

Primijenimo formule (b) za rotaciono tijelo, pri čemu uzmemo u obzir:

1) da je težište rotacionog tijela uvijek leži na osi rotacije, dakle na osi X, ako je os X os rotacije, odnosno na osi Y, ako je os Y os rotacije. Prema tome za rotaciono tijelo imamo računati samo jednu koordinatu težišta, t. j. x_t, odnosno y_t, jer su druge koordinate nula.

2) da je prema (91) i (91a) volumen rotacionog tijela:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx \text{ (rotacija oko osi } X\text{), odnosno } V = \pi \int_c^d x^2 dy$$

(rotacija oko osi Y), i da je prema tome:

$$dV = \pi y^2 dx, \quad \text{odnosno} \quad dV = \pi x^2 dy.$$

Uvrštenje u (b) daje:

$$x_t = \frac{\pi \int_a^b xy^2 dx}{\pi \int_a^b y^2 dx} = \frac{\int_a^b xy^2 dx}{\int_a^b y^2 dx} = \frac{\int_a^b x\,[f(x)]^2 dx}{\int_a^b [f(x)]^2 dx} \tag{97}$$

apscisa težišta tijela nastalog rotacijom krivulje $y = f(x)$ oko osi X.

$$y_t = \frac{\int_c^d yx^2 dy}{\int_c^d x^2 dy} = \frac{\int_c^d y\,[\varphi(y)]^2 dy}{\int_c^d [\varphi(y)]^2 dy} \tag{97a}$$

ordinata težišta tijela nastalog rotacijom krivulje $x = \varphi(y)$ oko osi Y.

Primjer

Parabola $y = x^2$ rotira

a) oko osi X od $x = 0$ do $x = 3$
b) oko osi Y u pripadnom intervalu.

Odredi za oba slučaja koordinate težišta paraboloida i nariši sliku dvaju paraboloida.

a) Rotacija oko osi X od $x = 0$ do $x = 3$

$$y = x^2 = f(x)$$

Prema (97):

$$x_t = \frac{\int_0^3 x^5 \, dx}{\int_0^3 x^4 \, dx} = \left| \frac{\frac{x^6}{6}}{\frac{x^5}{5}} \right|_0^3 = \frac{5}{6} \left| x \right|_0^3 = \frac{5}{6} \cdot 3 = \underline{2{,}5} =$$

$= \frac{5}{6}$ visine računajući od vrha paraboloida ili $\frac{1}{6}$ visine od osnovke,

$$y_t = 0$$
$$z_t = 0$$

b) Rotacija oko osi Y od $y = 0$ do $y = 9$, jer je prema $y = x^2$ za $x = 0$ $y = 0$, a za $x = 3$ $y = 9$.

$$x = \sqrt{y} = \varphi(y)$$

Prema (97a):

$$y_t = \frac{\int_0^9 y^2 \, dy}{\int_0^9 y \, dy} = \left| \frac{\frac{y^3}{3}}{\frac{y^2}{2}} \right|_0^9 = \frac{2}{3} \left| y \right|_0^9 = \frac{2}{3} \cdot 9 = \underline{6} = \frac{2}{3}$$ visine računajući od vrha ili $\frac{1}{3}$ visine od osnovke,

$$x_t = 0$$
$$z_t = 0$$

Primjedba. Ako su donje granice integrala, koji su u brojniku i nazivniku, različite od nule, ne smije se kratiti rezultate integriranja tih integrala, već treba granice integracije posebno uvrštavati u rezultat integriranja brojnika i posebno u rezultat integriranja nazivnika.

Izračunaj koordinate težišta paraboloida, koji su nastali rotacijom oko osi simetrije

a) parabole zadane točkama $V(-3, 0)$, $A(0, 2)$ i $B(0, -2)$ od $x = -3$ do $x = 2$;

$$\left[y^2 = \frac{4}{3}(x + 3); \quad T\left(\frac{1}{3}\, 0{,}0\right) \right]$$

b) parabole zadane točkama $V(0, 3)$, $A(2, 6)$ i $B(-2, 6)$ od $y = 3$ do $y = 6$.

$$\left[x^2 = \frac{4}{3}(y - 3); \quad T(0, 5, 0) \right]$$

Izračunaj koordinate težišta stošca, koji je nastao rotacijom oko osi Y pravca $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

$$\left[x_t = 0, \; y_t = \frac{b}{4} = \frac{\text{visina}}{4} \right]$$

2. Momenti tromosti

U točki 3. ovog paragrafa postavili smo izraze za aksijalne momente tromosti I_x i I_y, a također za polarne i planarne momente I_p i I_{pl} nekog tijela:

$$I_x = \int_V y^2 \, dm; \quad I_y = \int_V x^2 \, dm; \quad I_p = \int_V r^2 \, dm; \quad I_{pl} = \int_V h^2 \, dm$$

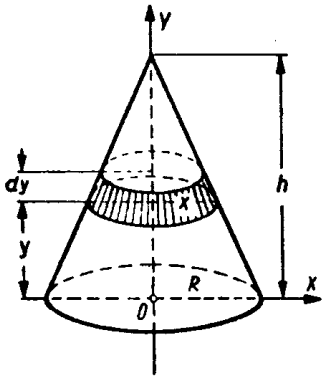
Malo prije smo pokazali, da je masa elementa tijela $dm = \rho \cdot dV$, gdje je ρ gustoća tijela, a dV volumen njegova elementa, pa gornje formule primaju oblik:

$$I_x = \rho \int_V y^2 dV; \quad I_y = \rho \int_V x^2 dV; \quad I_p = \rho \int_V r^2 dV; \quad I_{pl} = \rho \int_V h^2 dV \qquad (98)$$

Ako je tijelo rotaciono i homogeno, možemo u mnogim slučajevima izračunati prema tim formulama momente tromosti pomoću običnih određenih integrala.

Primjeri

1. Izračunaj planarni moment tromosti rotacionog stošca visine h, polumjera osnovke R i gustoće ρ obzirom na njegovu osnovku (sl. 80).



Sl. 80.

Stožac nastaje rotacijom oko osi X pravca

$$\frac{x}{R} + \frac{y}{h} = 1, \quad \text{odnosno} \quad x = R\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

pa prema (91a) volumen elementa stošca glasi:

$$dV = \pi x^2 dy = \pi R^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2 dy$$

Prema (98) imamo, uzevši u obzir, da je za element $h = y$:

$$I_{pl} = \rho \int_0^h y^2 \cdot \pi R^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2 dy =$$

$$= \pi \rho R^2 \int_0^h \left(y^2 - \frac{2}{h} y^3 + \frac{1}{h^2} y^4\right) dy = \pi \rho R^2 \left| \frac{y^3}{3} - \frac{2}{h}\frac{y^4}{4} + \frac{1}{h^2}\frac{y^5}{5} \right|_0^h =$$

$$= \pi \rho R^2 \left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} + \frac{h^3}{5}\right) =$$

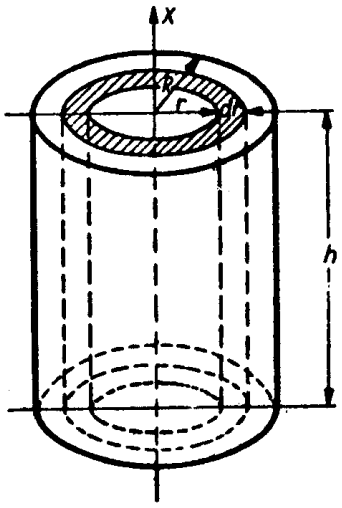
$$= \frac{\pi \rho R^2 h^3}{30} = \rho \frac{\pi R^2 h}{3} \cdot \frac{h^2}{10} = \underline{M \frac{h^2}{10}}$$

gdje je M = masa stošca = gustoća ρ puta volumen $\frac{\pi R^2 h}{3}$.

2. Odredi moment tromosti valjka visine h, polumjera osnovke R i gustoće ρ obzirom na os valjka (sl. 81).

Element valjka uzmemo u obliku cijevi (lupine) debljine dr u udaljenosti r od osi valjka. Prerežemo li tu cijev po jednoj izvodnici pa je razgrnemo, dobit ćemo pravokutni paralelepiped duljine $2\pi r$, debljine dr i visine h, pa je:

$$dV = 2\pi r \cdot dr \cdot h$$



Sl. 81.

Prema (98) imamo:

$$I_x = \rho \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot h = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho h \left| \frac{r^4}{4} \right|_0^R = \frac{1}{2} \pi \rho h R^4 =$$

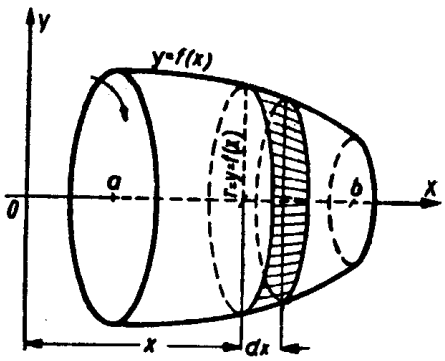
$$= \frac{1}{2} \rho \cdot \pi R^2 h \cdot R^2 = \frac{1}{2} MR^2$$

gdje je M = masa valjka = gustoća ρ puta volumen $\pi R^2 h$.

Znajući izraz za moment tromosti valjka obzirom na os rotacije

$$I_x = \frac{1}{2} MR^2 \qquad (99)$$

gdje je M masa valjka a R polumjer njegove osnovke, možemo postaviti opću formulu za momente tromosti bilo kojeg rotacionog tijela obzirom na os rotacije, jer element rotacionog tijela možemo smatrati valjkom, kojemu je os os rotacije, visina dx, odnosno dy, a polumjer osnovke $y = f(x)$, odnosno $x = \varphi(y)$.



Sl. 82.

a) Tijelo je nastalo rotacijom krivulje $y = f(x)$ oko osi X (sl. 82). Masa elementa tijela

$$dm = \rho \cdot dV = \text{prema (91)} = \rho \cdot \pi y^2 dx = \rho \cdot \pi [f(x)]^2 dx$$

Prema (99) dobijemo moment tromosti za element tijela

$$dI_x = \frac{1}{2} dm \cdot y^2 = \frac{1}{2} \rho \pi y^2 dx \cdot y^2 = \frac{1}{2} \rho \pi y^4 dx$$

a za čitavo tijelo integriramo od a do b:

$$I_x = \frac{1}{2} \rho \pi \int_a^b y^4 dx = \frac{1}{2} \rho \pi \int_a^b [f(x)]^4 \cdot dx \qquad (100)$$

b) Tijelo je nastalo rotacijom oko osi Y krivulje $x = \varphi(y)$.

Na slični način dobijemo:

$$I_y = \frac{1}{2} \rho \pi \int_c^d x^4 dy = \frac{1}{2} \rho \pi \int_c^d [\varphi(y)]^4 dy \qquad (100a)$$

Primjeri

1. Odredi momente tromosti paraboloida gustoće ρ nastalih rotacijom parabole $y^2 = 2px$

a) oko osi X od $x = 0$ do $x = a$,
b) oko osi Y od $y = 0$ do $y = b$

(vidi sl. 71 i 79).

a) Rotacija oko osi X:

$$y^2 = 2px = [f(x)]^2$$

Računamo prema (100):

$$I_x = \frac{1}{2}\rho\pi\int_0^a 4p^2x^2\,dx = 2\rho\pi p^2\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^a = \frac{2}{3}\rho\pi p^2a^3 =$$

$$= \frac{2}{3}\rho\pi pa^2\cdot pa = \underline{\frac{2}{3}Mpa}$$

gdje je M = masa paraboloida = gustoća ρ puta volumen πpa^2 (vidi primjer 2 na str. 224)

b) Rotacija oko osi Y:

$$x = \frac{y^2}{2p} = \varphi(y)$$

Prema (100a):

$$I_y = \frac{1}{2}\rho\pi\int_0^b \frac{y^8}{16p^4}\,dy = \frac{\rho\pi}{32p^4}\left|\frac{y^9}{9}\right|_0^b = \frac{\rho\pi b^9}{288p^4} =$$

$$= \frac{5\rho\pi b^9}{5\cdot 288p^4} = \frac{5\rho\pi b^9}{72\cdot 20p^4} = \frac{5}{72}\rho\frac{\pi b^5}{20p^2}\cdot\frac{b^4}{p^2} = \underline{\frac{5}{72}M\frac{b^4}{p^2}}$$

gdje je M = masa paraboloida = gustoća ρ puta volumen $\frac{\pi b^5}{20p^2}$, koji se dobije iz $\frac{\pi a^2 b}{5}$ uvrštenjem $a = \frac{b^2}{2p}$ (vidi primjer 2 na str. 224).

2. Odredi moment tromosti rotacionog stošca visine h, polumjera osnovke R i gustoće ρ obzirom na os stošca.

Prema slici 80 i primjeru 1 na str. 228 imamo:

$$x = R\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

Uvrštenje u (100a) daje:

$$I_y = \frac{1}{2}\rho\pi R^4\int_0^h\left(1 - \frac{y}{h}\right)^4 dy$$

Uz supstituciju $1 - \frac{y}{h} = z$ dobijemo:

$$I_y = -\frac{1}{2}\rho\pi R^4\left|\frac{h\left(1 - \frac{y}{h}\right)^5}{5}\right|_0^h =$$

$$= -\frac{1}{10}\rho\pi R^4h(-1) = \frac{1}{10}\rho\pi R^4h = \frac{3}{10}\cdot\rho\cdot\frac{\pi R^2h}{3}\cdot R^2 = \underline{0{,}3\,MR^2}$$

3. Odredi moment tromosti kugle polumjera R i gustoće ρ obzirom na bilo koji promjer kugle kao os rotacije.

Rotiramo gornju polovinu kružnice $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$ oko osi X.

Prema (100) imamo:

$$I_x = \frac{1}{2}\rho\pi\int_{-R}^{+R}(R^2 - x^2)^2\,dx = \frac{1}{2}\rho\pi\left|R^4x - 2R^2\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right|_{-R}^{+R} =$$

$$= \frac{1}{2}\rho\pi\left(R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{R^5}{5} + R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{R^5}{5}\right) = \frac{1}{2}\rho\pi\frac{16}{15}R^5 =$$

$$= \frac{8}{15}\rho\pi R^5 = \frac{2}{5}\rho\frac{4}{3}\pi R^3\cdot R^2 = \underline{0{,}4\,MR^2}$$

4. Odredi polarni moment kugle polumjera R i gustoće ρ obzirom na središte kugle.

Zamislimo element kugle u obliku lupine debljine dr u udaljenosti r od središta kugle. Volumen tog elementa dV = površina puta debljina $= 4r^2\pi\cdot dr$.

Uvrštenje u (98) daje:

$$I_p = \rho\int_0^R r^2\cdot 4r^2\pi\,dr = 4\pi\rho\left|\frac{r^5}{5}\right|_0^R = \frac{4}{5}\pi\rho\cdot R^5 = \frac{3}{5}\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}R^3\pi\cdot R^2 = \underline{0{,}6\,MR^2}$$

Izračunaj

1. Moment tromosti prikraćenog stošca, koji je nastao rotacijom oko osi Y pravca $4x + 3y - 20 = 0$ od $y = 0$ do $y = 4$ i to obzirom na os rotacije.

$$\left[I_y = \frac{2062}{5}\rho\pi = \rho\frac{\pi h}{10}\cdot\frac{R_1^5 - R_2^5}{R_1 - R_2} = \frac{3}{10}M\frac{R_1^5 - R_2^5}{R_1^3 - R_2^3},\ \text{gdje je } h = 4,\ R_1 = 5 \text{ i } R_2 = 2\right]$$

2. Moment tromosti kuglina odsječka (kapice) nastalog rotacijom oko osi X luka kružnice $x^2 + y^2 = R^2$ od $x = R - h$ do $x = R$ i to obzirom na os rotacije.

$$\left[I_x = \rho\frac{\pi h^3}{30}(20R^2 - 15Rh + 3h^2) = 0{,}1Mh\frac{20R^2 - 15Rh + 3h^2}{3R - h}\right]$$

§ 8. Nepravi integrali

Dosada smo pri računanju određenih integrala pretpostavljali, da su granice integracije konačne i da je podintegralna funkcija u intervalu integracije neprekinuta. Ako jedna od tih pretpostavaka nije ispunjena, imamo t. zv. nepravi integral, koji se računa tako, da se shvati kao granična vrijednost (limes) pravog integrala.

Ako je taj limes konačan određen broj, kaže se, da nepravi integral konvergira i za njegovu vrijednost uzima se vrijednost tog limesa.

Pokaže li račun, da takav limes ne postoji, tada ne postoji ni integral, pa se kaže, da nepravi integral divergira.

Promotrimo posebno pojedine slučajeve nepravih integrala.

1. Gornja ili donja, odnosno obje granice integracije su beskonačne. U tom slučaju neprave integrale definiramo ovako:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(x)\,dx$$

$$\int_{\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \int_x^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to-\infty} \int_x^c f(x)\,dx + \lim_{x\to+\infty} \int_c^x f(x)\,dx$$

(c je bilo koja točka intervala integracije)

naravno uz uvjet, da ti limesi postoje.

Primjeri

1. $$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{dx}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left| -\frac{1}{x} \right|_1^x = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{x} + 1\right) = \underline{1}$$

2. $$\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 e^x\,dx = \lim_{x\to-\infty} \left| e^x \right|_x^0 = \lim_{x\to-\infty} (1 - e^x) = \underline{1}$$

3. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left| \operatorname{arc\,tg} x \right|_x^0 + \lim_{x\to+\infty} \left| \operatorname{arc\,tg} x \right|_0^x =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (0 - \operatorname{arc\,tg} x) + \lim_{x\to+\infty} (\operatorname{arc\,tg} x - 0) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \underline{\pi}$$

4. $$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{dx}{x} = \lim_{x\to\infty} \left| \ln x \right|_1^x = \lim_{x\to\infty} (\ln x - 0) = \lim_{x\to\infty} (\ln x) = \infty$$

Integral nema smisla (divergira).

5. $$\int_1^{\infty} \sin x\,dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \sin x\,dx = \lim_{x\to\infty} \left| -\cos x \right|_0^x = \lim_{x\to\infty} (-\cos x + 1)$$

Kad $x \to \infty$, $\cos x$ oscilira bez kraja i konca između -1 i $+1$ i ne teži nikakvom određenom limesu, granične vrijednosti dakle nema, pa nema ni integrala (integral divergira).

2. Podintegralna funkcija $f(x)$ je prekinuta u nutrini, odnosno na krajevima intervala integracije.

U tom slučaju neprave integrale definiramo kako slijedi, naravno uz uvjet, da dolje navedeni limesi postoje.

a) $f(x) \to \infty$, kad $x \to c$, gdje je $a < c < b$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{c+\varepsilon_1}^b f(x)\,dx$$

b) $f(x) \to \infty$, kad $x \to a + 0$, t. j. x teži donjoj granici integracije s desna.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x \to a+0} \int_x^b f(x)\,dx$$

c) $f(x) \to \infty$, kad $x \to b - 0$, t. j. x teži gornjoj granici integracije s lijeva.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x \to b-0} \int_a^x f(x)\,dx$$

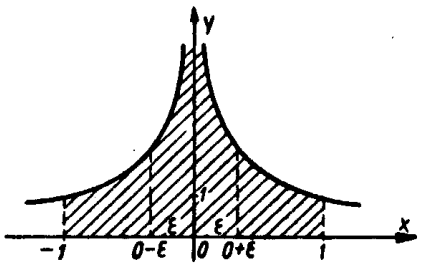
Primjeri

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = ?$$

Iz slike 83 vidimo, da funkcija $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \to \infty$, kad $x \to 0$ s desna i s lijeva.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} x^{-\frac{2}{3}}\,dx + \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{0+\varepsilon_1}^{1} x^{-\frac{2}{3}}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left| \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \left| \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right|_{\varepsilon_1}^{1} =$$



Sl. 83.

$$= 3\left[\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\sqrt[3]{-\varepsilon} - \sqrt[3]{-1}\right) + \lim_{\varepsilon_1 \to 0}\left(\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{\varepsilon_1}\right)\right] = 3(1 + 1) = \underline{6}$$

2. $$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = ?$$

Funkcija $\frac{1}{x^2}$ ima oblik sličan obliku funkcije $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, jer je također pozitivna i teži u beskonačnost kad $x \to 0$, ali:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{\varepsilon_1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left| -\frac{1}{x} \right|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \left| -\frac{1}{x} \right|_{\varepsilon_1}^{1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(+\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) + \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) = \underline{\infty}$$

Integral nema smisla.

Pretpostavimo, da si nismo dali truda da predočimo tok funkcije $\frac{1}{x^2}$ za x od -1 do $+1$, pa smo jednostavno integrirali:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = \left| -\frac{1}{x} \right|_{-1}^{+1} = -1 - 1 = -2$$

Dobili smo očito apsurdan rezultat, jer je funkcija $\frac{1}{x^2}$ pozitivna.

Iz toga vidimo, od kolike je važnosti analizirati prije integriranja tok funkcije u intervalu integracije.

3. $$\int_0^1 \ln x \, dx = ?$$

Kako $\ln x \to -\infty$, kad $x \to +0$, prelazimo na limes:

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{x \to +0} \int_x^1 \ln x \, dx = \text{vidi primjer na str. 76} =$$

$$= \lim_{x \to +0} \left| x \ln x - x \right|_x^1 = -1 - \lim_{x \to +0} (x \ln x - x) =$$

$$= -1 - \lim_{x \to +0} (x \ln x) + \lim_{x \to +0} x = -1 - \lim_{x \to +0} (x \cdot \ln x)$$

Taj limes računamo po L'Hospital-ovu pravilu (Dio I. § 15):

$$\lim_{x \to +0} (x \ln x) = \lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to +0} x = \underline{0}$$

Prema tome

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \underline{-1}$$

4. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \to 1-0} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \to 1-0} \left| \arcsin x \right|_0^x =$$

$$= \lim_{x \to 1-0} \arcsin x = \arcsin 1 = \underline{\frac{\pi}{2}}$$

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x}{\cos^3 x}\,dx = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \int_0^x \frac{2\sin x}{\cos^3 x}\,dx = \text{(uz supstituciju } \cos x = t) =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \left| \frac{1}{\cos^2 x} \right|_0^x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \underline{\underline{\infty}}$$

Integral ne postoji (divergira).

§ 9. Određivanje približne vrijednosti određenog integrala

1. Numerička integracija (kvadratura)

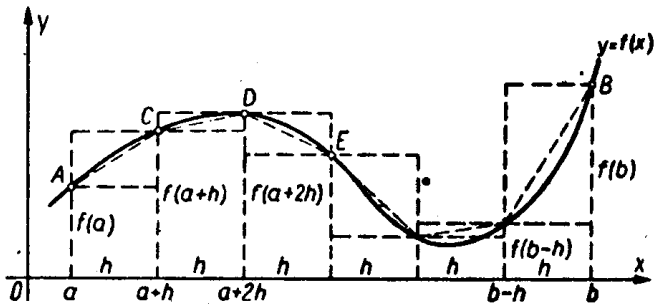
Pod numeričkom integracijom razumije se izračunavanje približne numeričke vrijednosti određenog integrala, t. j. površine.

Čest je slučaj, da vrijednost određenog integrala ne možemo izračunati i to s razloga, što pripadni neodređeni integral ne možemo izraziti pomoću neke jednostavne funkcije ili nije poznata jednadžba krivulje, koja omeđuje traženu površinu, jer su mjerenjem određene samo pojedine točke te krivulje. U tim slučajevima služimo se numeričkom integracijom, da barem približno izračunamo vrijednost određenog integrala.

Postoji više metoda numeričke kvadrature.

a) Metoda pravokutnika nutarnjih i vanjskih

Ta metoda sastoji se u tome, da se interval integracije $[a, b]$ podijeli u n jednakih dijelova duljine $h = \frac{b-a}{n}$, u svim diobenim točkama povuku se ordinate krivulje pa se konstruiraju nutarnji, odnosno vanjski pravokutnici, kako je to pokazano na sl. 84 (nutarnji pravokutnici imaju za visinu manju, a vanjski - veću krajnju ordinatu krivulje dotičnog dijela intervala).



Sl. 84.

Površinu S omeđenu lukom AB krivulje $y = f(x)$, odreskom osi X od a do b i ordinatama krivulje u tim krajnjim točkama intervala aproksimirano zbrojem površina nutarnjih pravokutnika:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \doteq h[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(b-h)] \quad (101)$$

ili zbrojem površina vanjskih pravokutnika:

$$S \doteq h[f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(b-h) + f(b)] \quad (101a)$$

gdje je $h = \frac{b-a}{n}$ (n = broj pravokutnika).

Jasno je, da s povećanjem broja n pravokutnika povećava se i točnost površine izračunate po toj metodi.

b) Metoda trapeza

Kako se vidi iz slike 84, mjesto pravokutnika konstruiramo po toj metodi trapeze tako, da vučemo tetive AC, CD, DE i t. d., pa površinu S aproksimiramo zbrojem površina tih trapeza. Pošto je površina trapeza jednaka umnošku visine trapeza (h) i poluzbroja osnovaka dobijemo:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \doteq h\left[\frac{f(a)+f(a+h)}{2} + \frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{f(a+2h)+f(a+3h)}{2} + \ldots + \frac{f(b-h)+f(b)}{2}\right]$$

ili

$$S \doteq h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(b-h)\right] \quad (102)$$

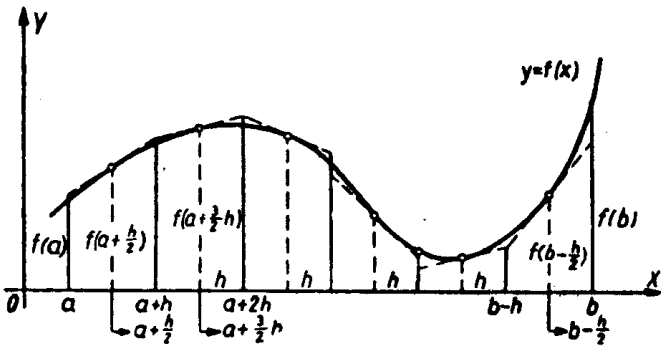
gdje je $h = \frac{b-a}{n}$ (n = broj trapeza).

Uzmemo li aritmetičku sredinu iz formula (101) i (101a), dobit ćemo trapeznu formulu (102), a to se jasno vidi iz sl. 84.

c) Metoda tangenata

Opet podijelimo interval $[a, b]$ u n jednakih dijelova duljine $h = \frac{b-a}{n}$, svaki tako dobiveni djelić intervala raspolovimo i u svim diobenim točkama povučemo ordinate zadane krivulje $f(x)$.

Iza toga konstruiramo u srednjim točkama svakog djelića intervala $[a, b]$ tangente na krivulju, kako je to prikazano na slici 85. Na taj način dobijemo n trapeza visine h pa površinu S između krivulje i osi X aproksimiramo zbrojem površina tih trapeza, pri čemu površinu svakog pojedinog trapeza računamo po formuli: visina puta srednica.



Sl. 85.

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \doteq h\left[f\left(a+\frac{h}{2}\right)+f\left(a+\frac{3}{2}h\right)+f\left(a+\frac{5}{2}h\right)+\ldots+f\left(b-\frac{h}{2}\right)\right]$$

gdje je $h = \dfrac{b-a}{n}$ (n = broj trapeza).

d) Simpsonova formula

To je najvažnija i najtočnija od jednostavnijih metoda numeričke kvadrature.

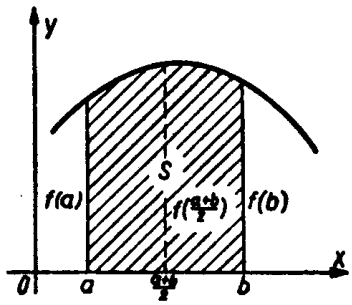
Da izvedemo Simpsonovu formulu, moramo najprije upoznati Cavalieri-Gregory-evu formulu, koja daje točnu vrijednost površine između parabole $y = Ax^2 + Bx + C$ i osi X (sl. 86).

$$S = \int_a^b (Ax^2 + Bx + C)\,dx =$$

$$= \left|\frac{A}{3}x^3 + \frac{B}{2}x^2 + Cx\right|_a^b = \frac{A}{3}(b^3 - a^3) +$$

$$+ \frac{B}{2}(b^2 - a^2) + C(b - a) =$$

$$= \frac{b-a}{6}\left[2A(b^2 + ba + a^2) + 3B(b + a) + 6C\right]$$



Sl. 86.

Izraz, koji smo dobili za površinu S, možemo transformirati u oblik:

$$S = \frac{b-a}{6}\left\{[Aa^2 + Ba + C] + 4\left[A\frac{(a+b)^2}{4} + B\frac{(a+b)}{2} + C\right] + \right.$$

$$\left. + [Ab^2 + Bb + C]\right\}$$

Uvrstimo li u $y = Ax^2 + Bx + C$ redom $x = a$, $x = \frac{a+b}{2}$ i $x = b$, dobit ćemo izraze, koji se nalaze u uglatim zagradama gornje formule za S, pa Cavalieri-Gregoryeva formula glasi:

$$S = \frac{b-a}{6}\left[y(a) + 4y\left(\frac{a+b}{2}\right) + y(b)\right] \tag{103}$$

To znači: površina izmedu luka parabole, kojoj je os simetrije okomita na os X, i osi X točno je jednaka $\frac{\text{duljini intervala}}{6}$ puta [početna ordinata parabole + 4 srednje + krajnja ordinata]. Vidi sl. 86.

Iz Cavalieri-Gregoryeve formule možemo lako izvesti formulu (75) $S = \frac{2}{3}bh$ za površinu parabole, jer je za parabolu, kojoj je vrh u točki $(0, h)$ a nultočke $-\frac{b}{2}$ i $+\frac{b}{2}$, $y(a) = 0$; $y(b) = 0$; $y\left(\frac{a+b}{2}\right) = h$ i $b - a = b$.

Uvrštenje daje:

$$S = \frac{b}{6}\ 4h = \frac{2}{3}bh$$

Primijetimo još, da Cavalieri-Gregoryeva formula daje točnu vrijednost površine i za kubnu parabolu $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, dok za parabole viših stepena — samo približnu.

Primjeri

1. Izračunaj površinu između luka parabole $y = x^2 - 3x - 10$ i osi X od $x = -1$ do $x = 3$

$$a = -1;\ y(a) = 1 + 3 - 10 = -6;$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1;\ y\left(\frac{a+b}{2}\right) = 1 - 3 - 10 = -12$$

$$b = 3;\ y(b) = 9 - 9 - 10 = -10$$

$$\frac{b-a}{6} = \frac{3+1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S = \frac{2}{3}(-6 - 4 \cdot 12 - 10) = -\frac{2}{3} \cdot 64 = -\frac{128}{3} = \underline{-42\frac{2}{3}}.$$

Proba:

$$\int_{-1}^{3}(x^2 - 3x - 10)\,dx = \left|\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 - 10x\right|_{-1}^{3} = 9 - \frac{27}{2} - 30 + \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 10 = -42\frac{2}{3}$$

2. Isto za $y = -x^3 + 7x^2 + 22x + 40$ od $x = -3$ do $x = 1$

$$a = -3; \quad y(a) = 27 + 63 - 66 + 40 = 64$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1; \quad y\left(\frac{a+b}{2}\right) = 1 + 7 - 22 + 40 = 26$$

$$b = 1; \quad y(b) = -1 + 7 + 22 + 40 = 68$$

$$\frac{b-a}{6} = \frac{1+3}{6} = \frac{2}{3}$$

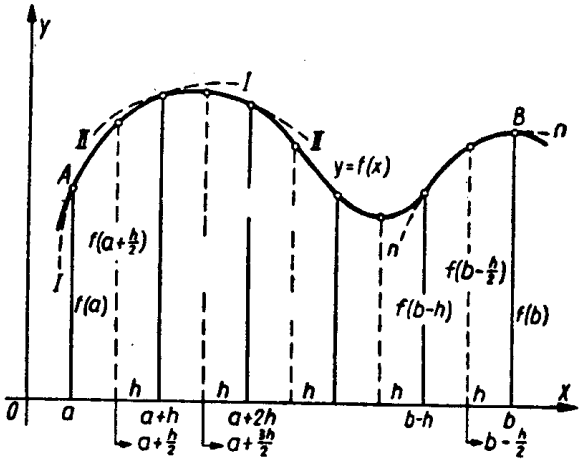
$$S = \frac{2}{3}(64 + 4 \cdot 26 + 68) = \frac{2}{3} \cdot 236 = \frac{472}{3} = \underline{157\frac{1}{3}}$$

Proba:

$$\int_{-3}^{1} (-x^3 + 7x^2 + 22x + 40)\,dx =$$

$$= \left| -\frac{x^4}{4} + \frac{7}{3}x^3 + 11x^2 + 40x \right|_{-3}^{1} = -\frac{1}{4} + \frac{7}{3} + 11 + 40 + \frac{81}{4} + 63 -$$

$$-99 + 120 = \underline{157\frac{1}{3}}$$



Sl. 87.

Prelazimo na izvod Simpsonove formule (sl. 87).

Na početku postupamo na isti način kao kod izvoda tangentne formule: Interval $[a, b]$ podijelimo u n jednakih dijelova duljine $h = \frac{b-a}{n}$, svaki djelić intervala raspolovimo i u svim tim točkama povučemo ordinate. Na taj način dobijemo u svakom djeliću intervala po tri točke na krivulji, kroz koje zamislimo da prolaze parabole (parabola, kojoj je os simetrije okomita na os X, jednoznačno je određena s tri točke, vidi teorem identičnosti polinoma, Dio I. § 4, 1).

Traženu površinu S omeđenu lukom AB zadane krivulje $y = f(x)$ i odreskom osi X od $x = a$ do $x = b$ aproksimiramo zbrojem površina tih parabola, pri čemu te površine računamo po Cavalieri-Gregoryevoj formuli (103).

Prema slici 87 imamo:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{h}{6}\left[f(a) + 4f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f(a+h)\right] +$$

$$+ \frac{h}{6}\left[f(a+h) + 4f\left(a + \frac{3}{2}h\right) + f(a+2h)\right] + \dots$$

$$\dots + \frac{h}{6}\left[f(b-h) + 4f\left(b - \frac{h}{2}\right) + f(b)\right]$$

Uočimo li, da prva i posljednja ordinata krivulje dolaze samo jedamput, da ordinate $f(a+h), f(a+2h), \dots$ po dva puta, jer se uzimaju kao krajnja, a zatim kao početna ordinata dviju susjednih parabola, i da su sve srednje ordinate parabola množene s 4, dobijemo Simpsonovu formulu u konačnom obliku:

$$S \doteq \frac{h}{6}\Big\{ f(a) + f(b) + 2[f(a+h) + f(a+2h) + f(a+3h) + \dots +$$

$$+ f(b-h)] + 4\left[f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f\left(a + \frac{3}{2}h\right) + f\left(a + \frac{5}{2}h\right) + \dots \right.$$

$$\left. + f\left(b - \frac{h}{2}\right)\right]\Big\} \qquad (104)$$

gdje je $h = \dfrac{b-a}{n}$ (n = broj parabola).

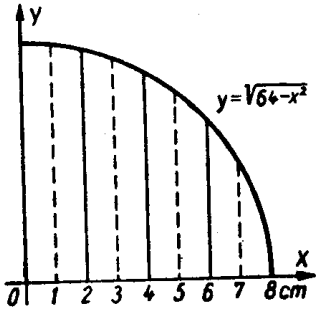
Zanimljiva je činjenica, da je Simpsonova formula kombinacija trapezne i tangentne formule: ako uzmemo jednu trećinu zbroja trapezne formule i udvostručene tangentne formule, dobit ćemo Simpsonovu formulu, t. j.

Simpsonova formula $= \frac{1}{3}$ (trapezna formula + 2 tangentne formule). (a)

Izvedi to!

Primjer

Odredi po svim metodama numeričke kvadrature površinu kvadranta kruga polumjera $r = 8\ cm$ podijelivši interval u četiri jednaka dijela, i izračunaj za svaku metodu procentualnu pogrešku dobivenog rezultata (sl. 88).



Sl. 88.

Računamo pomoću logaritamskog računala:

$$y = \sqrt{64 - x^2}$$

$$S = \int_0^8 \sqrt{64 - x^2}\,dx = \frac{\pi \cdot 8^2}{2} = 16\,\pi \doteq 50{,}27\ cm^2$$

$$a = 0;\quad b = 8;\quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{8-0}{4} = 2$$

$$f(a) = f(0) = \sqrt{64} = 8{,}00$$

$$f\left(a + \frac{h}{2}\right) = f(1) = \sqrt{63} = 7{,}94$$

$$f(a + h) = f(2) = \sqrt{60} = 7{,}75$$

$$f\left(a + \frac{3}{2}h\right) = f(3) = \sqrt{55} = 7{,}42$$

$$f(a + 2h) = f(4) = \sqrt{48} = 6{,}93$$

$$f\left(a + \frac{5}{2}h\right) = f(5) = \sqrt{39} = 6{,}24$$

$$f(b - h) = f(6) = \sqrt{28} = 5{,}29$$

$$f\left(b - \frac{h}{2}\right) = f(7) = \sqrt{15} = 3{,}87$$

$$f(b) = f(8) = \sqrt{0} = 0{,}00$$

1) Metoda pravokutnika

a) nutarnjih:

$$S \doteq 2(7{,}75 + 6{,}93 + 5{,}29 + 0{,}00) = \underline{39{,}94\ cm^2}$$

$$\frac{\Delta S}{S} \cdot 100\% = \frac{50{,}27 - 39{,}94}{50{,}27} 100\% = \frac{1033}{50{,}27}\% = \underline{20{,}5\%}$$

b) vanjskih:

$$S \doteq 2(8{,}00 + 7{,}75 + 6{,}93 + 5{,}29) = \underline{55{,}94\ cm^2}$$

$$\frac{\Delta S}{S} \cdot 100\% = \frac{55{,}94 - 50{,}27}{50{,}27} 100\% = \frac{567}{50{,}27}\% = \underline{11{,}3\%}$$

2) Metoda trapeza

$$S \doteq 2\left(\frac{8{,}00 + 0{,}00}{2} + 7{,}75 + 6{,}93 + 5{,}29\right) = \underline{47{,}94\ cm^2}$$

Proba:

$$\frac{39{,}94 + 55{,}94}{2} = \underline{47{,}94\ cm^2}$$

$$\frac{\Delta S}{S} \cdot 100\% = \frac{50{,}27 - 47{,}94}{50{,}27} \cdot 100\% = \frac{233}{50{,}27}\% = \underline{4{,}6\%}$$

3) Metoda tangenata

$$S \doteq 2(7{,}94 + 7{,}42 + 6{,}24 + 3{,}87) = \underline{50{,}94\ cm^2}$$

$$\frac{\Delta S}{S} \cdot 100\% = \frac{50{,}94 - 50{,}27}{50{,}27} \cdot 100\% = \frac{67}{50{,}27}\% = \underline{1{,}3\%}$$

4) Simpsonova formula:

$$S \doteq \frac{2}{6}[8{,}00 + 0{,}00 + 2(7{,}75 + 6{,}93 + 5{,}29) + 4(7{,}94 + 7{,}42 + 6{,}24 + 3{,}87)] = \underline{49{,}94\ cm^2}$$

Proba prema (a):

$$\frac{1}{3}(47{,}94 + 2 \cdot 50{,}94) = \underline{49{,}94\ cm^2}$$

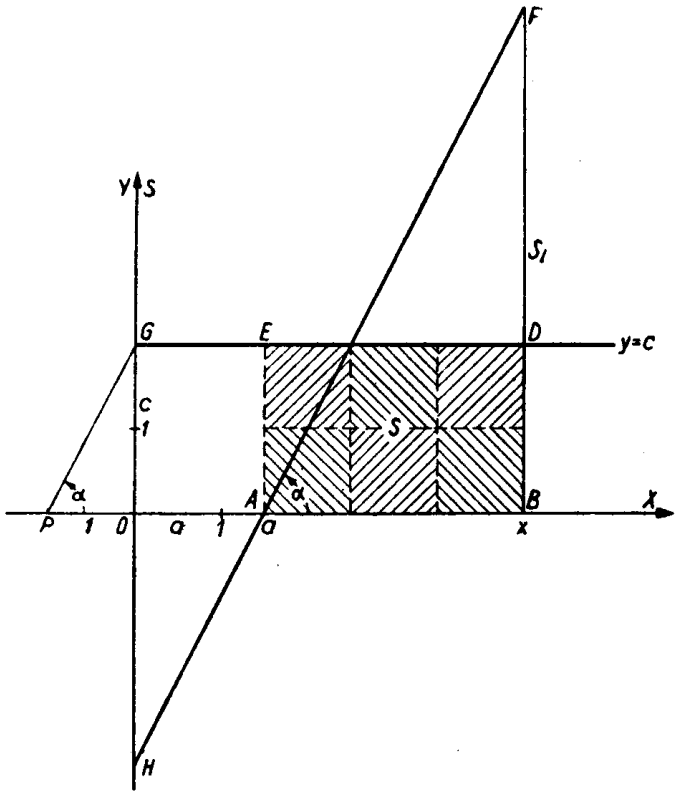
$$\frac{\Delta S}{S} \cdot 100\% = \frac{50{,}27 - 49{,}94}{50{,}27} \cdot 100\% = \frac{33}{50{,}27}\ \% = \underline{0{,}66\%}$$

Iz gornjih rezultata vidimo, da je točnost svake slijedeće metode veća od predašnje.

2. Grafička integracija

Ako je funkcija zadana svojim grafom, površina između te krivulje i osi X određuju se grafičkim putem. Grafička integracija temelji se na grafičkom određivanju vrijednosti površine S između osi X i pravca $y = c$, koji je usporedan s osi X. To se određivanje vrši tako, da se konstruira dužina, koja ima toliko linearnih jedinica, koliko kvadratnih jedinica ima površina S (sl. 89).

Analitičko rješenje:



Sl. 89.

$$S = \int_a^b y \cdot dx = \int_a^x c \cdot dx = c \left| x \right|_a^x = cx - ac \qquad \text{(a)}$$

$S = cx - ac$ predočuje pravac gradijenta c i odsječka $-ac$ na osi Y. To je integralni pravac, jer svaka ordinata (BF) toga pravca sadrži toliko linearnih

jedinica, koliko kvadratnih jedinica ima površina pravokutnika između pravca $y = c$ i osi X i to od $x = a$ do dotične ordinate (površ. pravokutnika $ABDE$).

Na slici 89 $BF = S_l = 6\ cm$, a površ. $ABDE = 6\ cm^2$.

Grafičko rješenje

Zadatak se sastoji u tome, da se grafičkim putem dobije taj integralni pravac.

Postupak: Na negativni dio osi X nanese se dužina $OP = 1$, pa se točka P spoji s točkom G, u kojoj pravac $y = c$ siječe os Y. U točki A apscise a povuče se pravac AF usporedan s PG (sl. 89).

Tvrdimo, da je taj pravac AF integralni pravac, t. j. njegova jednadžba glasi:

$$S = cx - ac$$

Dokaz: Iz slike 89 slijedi, da je gradijent pravca AF

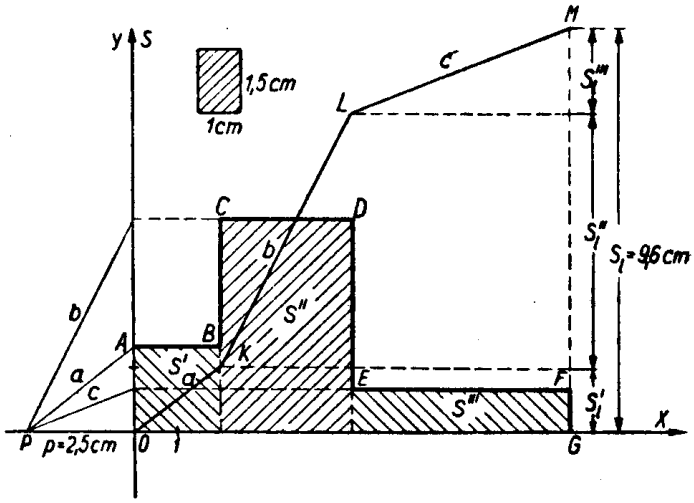
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OG}{OP} = \frac{c}{1} = \underline{c}$$

a iz sličnosti pravokutnih trokuta AOH i GOP imamo:

$$OH : a = c : 1$$

pa je odsječak na osi Y

$$OH = \underline{ac}$$



Sl. 90.

Znajući odrediti grafičkim putem površinu pravokutnika, t. j. površinu između osi X i pravca usporednog s osi X, lako možemo odrediti i površinu između osi X i poligona, kojemu su stranice usporedne s osi X i osi Y.

Kako se vidi iz slike 90, površina između poligona $ABCDEF$ i osi X raspada se u tri pravokutnika, čiju površinu određujemo na gore opisani način. Međutim, da neposredno dobijemo ordinatu GM, koja daje vrijednost S čitave površine mnogokuta $ABCDEFGOA$, svaki slijedeći integralni pravac, čija krajnja ordinata daje vrijednost površine pređašnjeg pravokutnika, naslanjamo na kraj pređašnjeg integralnog pravca.

Na taj način dobijemo integralni poligon $OKLM$, čija je krajnja ordinata:

$$GM = S_l' + S_l'' + S_l''' = S_l$$

O jedinicama

Vrlo je rijedak slučaj, da se mogu uzeti jednake jedinice j_x i j_y na osima X i Y i ista jedinica $OP = p$, kako je to bilo provedeno na slici 89. Praktički smo uvijek prisiljeni, da za jedinicu $OP = p$ uzmemo veću dužinu, da integralni poligon bude položit i ne izađe iz okvira slike. U tom slučaju nastaje pitanje, u kojoj jedinici j_l ćemo mjeriti krajnju ordinatu integralnog poligona i koliko mm^2, odnosno cm^2 iznosi zadana površina S.

Kako je:

$$j_x\,mm \cdot j_y\,mm = j_x \cdot j_y\,mm^2,$$

bit će

$j_l = \frac{j_x \cdot j_y}{p}\,mm$ — linearna jedinica za mjerenje konačne ordinate $GM = S_l$ integralnog poligona, pa tražena površina S sadrži:

$$\frac{S_l}{j_l} = \frac{S_l \cdot p}{j_x \cdot j_y} \text{ kvadratnih jedinica } j_x \cdot j_y.$$

Prema tome pomnožimo li broj kvadratnih jedinica $\frac{S_l \cdot p}{j_x \cdot j_y}$ našom kvadratnom jedinicom $j_x \cdot j_y$, dobit ćemo vrijednost tražene površine S:

$$\underline{S = S_l \cdot p}$$

i to u mm^2 ili cm^2 već prema tome, da li smo S_l i p mjerili u mm ili cm.

Za naš primjer prikazan na sl. 90 dobijemo:

$$p = 2{,}5\ cm; \quad S_l = 9{,}6\ cm$$

$$S = S_l \cdot p = 9{,}6\ cm \cdot 2{,}5\ cm = \underline{24{,}0\ cm^2}$$

Kako vidimo, pri izračunavanju vrijednosti površine S i krajnje ordinate integralnog poligona jedinice na osima X i Y nemaju nikakvog značenja naravno uz uvjet, da su nanesene u mjerilu 1 : 1.

Međutim, ako je jedinica na osi X nanesena u umanjenom mjerilu 1 : m, a na osi Y u mjerilu 1 : n, tada je:

$$S = S_l \cdot p \cdot m \cdot n$$

Ako je na pr. u našoj slici 90 jedinica j_x nanesena u mjerilu 1 : 100 (1 cm = = 1 m), a j_y u mjerilu 1 : 10 (1 cm = 1 dm), tada je

$$S = 9{,}6 \cdot 2{,}5 \cdot 100 \cdot 10 = 24\,000\ cm^2 = \underline{2{,}4\ m^2}$$

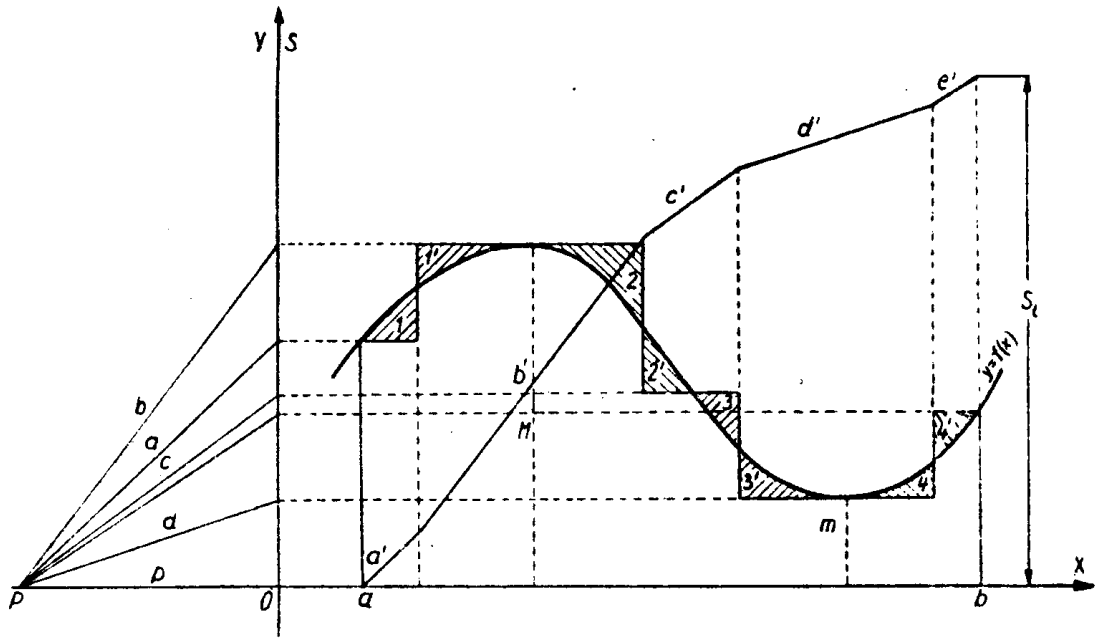
Sada možemo lako odrediti grafičkim putem vrijednost:

$\int_a^b f(x)dx$, t. j. vrijednost površine omeđene krivuljom $f(x)$ i osi X od $x = a$ do $x = b$.

$p = 3\ cm \quad S_l = 6{,}2\ cm$

$S = S_l \cdot p = 18{,}6\ cm^2$ (mjerilo 1 : 1 za j_x i j_y).

$S = 18{,}6 \cdot 1000 \cdot 100 = 186\ m^2$ (mjerilo 1 : 1000 za j_x i 1 : 100 za j_y).



Sl. 91.

Zadatak se svodi na pređašnji i to tako, da se ta površina aproksimira površinom između osi X i poligona, kojemu su stranice usporedne s osi X i osi Y (sl. 91).

U tu svrhu rišemo najprije tangente na krivulju u točkama ekstrema, a zatim konstruiramo stepenice poligona, pri čemu pazimo, da bi oduzeta površina bila jednaka dodatoj, t. j. da bude:

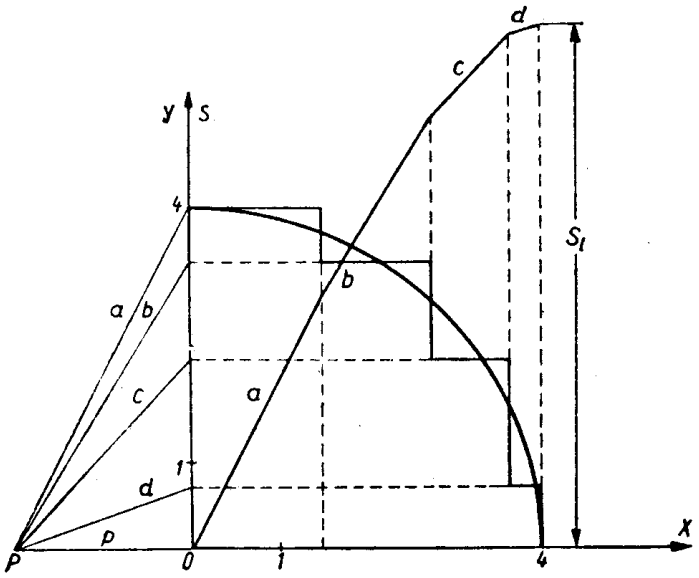
površ. 1 = površ. 1'
površ. 2 = površ. 2'
i t. d.

Vršimo li grafičku integraciju na milimetarskom papiru, možemo to izjednačenje oduzetih i dodatih površina provesti s velikom točnosti.

Kad je taj stepenasti poligon narisan, određujemo na gore opisani način površinu između tog poligona i osi X, pa dobivena vrijednost S_l konačne ordinate integralnog poligona daje približnu vrijednost $\int_a^b f(x)dx$, t. j. vrijednost površine S

između krivulje $f(x)$ i osi X od $x = a$ do $x = b$. Uz sliku 91 naznačene su numeričke vrijednosti grafički rješenog primjera.

Na slici 91 aproksimativni poligon narisan je s većim stepenicama radi jasnoće slike. Pri praktičkoj primjeni grafičke integracije prave se uže stepenice, pa integralni poligon dobije mnogo kratkih stranica i prima približno oblik integralne krivulje.



Sl. 92.

Od mnogobrojnih primjena grafičke integracije spomenimo, da se na taj način određuje kubatura zemljinih masa pri izradbi detaljnih projekata cesta i željeznica.

Primjer

Odredi grafičkim putem površinu kvadranta kruga polumjera $r = 4\ cm$ i izračunaj procentualnu pogrešku dobivenog rezultata.

Iz slike 92 imamo:

$$p = 2\ cm, \quad S_l = 6{,}3\ cm$$

$$S \doteq S_l \cdot p = 6{,}3 \cdot 2 = 12{,}6\ cm^2$$

$$S = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} = 12{,}57\ cm^2$$

$$\frac{\Delta S}{S} \cdot 100\% = \frac{12{,}6 - 12{,}57}{12{,}57} 100\% = \frac{0{,}03}{12{,}57} 100\% = \underline{0{,}24\%}$$

§ 10. Diferencijalne jednadžbe

1. Općenito o diferencijalnim jednadžbama

Pod diferencijalnom jednadžbom razumije se jednadžba, koja sadrži derivacije ili diferencijale.

Na pr.

$$y' = \cos x$$
$$y\,dy + x\,dx = 0$$
$$y^2 y'^2 + y^2 = R^2$$
$$y'' + 4y' - 5y = 3e^{5x} - x$$

jesu diferencijalne jednadžbe.

Razlikuje se red diferencijalne jednadžbe.

Red diferencijalne jednadžbe je red najviše derivacije, koja ulazi u diferencijalnu jednadžbu.

Od gore navedenih diferencijalnih jednadžbi prve tri su prvog reda, a posljednja — drugog reda.

Riješiti diferencijalnu jednadžbu znači odrediti takvu najopćenitiju relaciju između x i y, koja identički, t. j. za svaki x, zadovoljava diferencijalnu jednadžbu. Kako se diferencijalna jednadžba obično rješava integriranjem, mjesto riješiti diferencijalnu jednadžbu kaže se često integrirati diferencijalnu jednadžbu i onda, kad se rješenje ne može naći integriranjem, a mjesto rješenje diferencijalne jednadžbe kaže se integral diferencijalne jednadžbe. Integracija u običnom smislu naziva se u teoriji diferencijalnih jednadžbi kvadraturom.

Iz navedenog slijedi, da rješenje svake diferencijalne jednadžbe može se kontrolirati tako, da ga uvrstimo u zadanu diferencijalnu jednadžbu.

Na pr. treba pokazati, da je

$$y = \sin x - 1 + C e^{-\sin x} \qquad \text{(a)}$$

rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' + y \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

Deriviramo (a):

$$y' = \cos x - C \cos x \cdot e^{-\sin x}$$

Uvrštenje izraza za y i y' u diferencijalnu jednadžbu daje:

$\cos x - C \cos x e^{-\sin x} + \sin x \cos x - \cos x + C \cos x e^{-\sin x} = \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$, a to je baš desna strana zadane diferencijalne jednadžbe.

Vidimo, da je:

$$y = \sin x - 1 + C e^{-\sin x}$$

rješenje te diferencijalne jednadžbe, jer je identički zadovoljava.

Navedimo nekoliko primjera diferencijalnih jednadžbi.

1. $$y' = \cos x$$

ili

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \mid \cdot dx$$

$$dy = \cos x \cdot dx$$

Integriramo:

$$y = \int \cos x \, dx + C$$

$$\underline{y = \sin x + C}$$

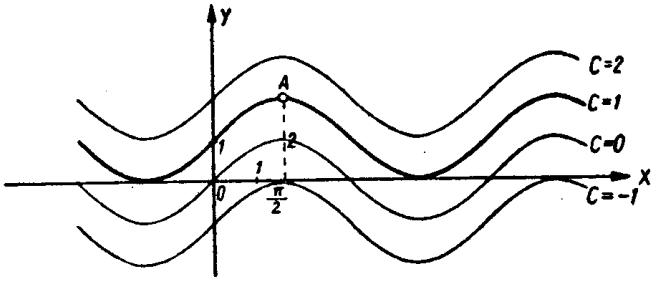
Dobili smo opće rješenje ili opći integral zadane diferencijalne jednadžbe.

Rješenje se zove opće, jer sadrže konstantu po volji C, a kako toj konstanti možemo dati bilo koju vrijednost, opće rješenje sadrži beskonačno mnogo rješenja.

Geometrijski predočuje opće rješenje diferencijalne jednadžbe familiju krivulja, koja ovisi o jednom parametru C, u našem slučaju — familiju sinusoida (sl. 93).

Te se krivulje zovu integralne krivulje, jer su grafička predodžba općeg integrala zadane diferencijalne jednadžbe.

Da se iz bezbroja rješenja, koja sadrži opći integral diferencijalne jednadžbe, izluči jedno naročito rješenje, koje odgovara uvjetima konkretnog zadatka, koji se rješava pomoću diferencijalne jednadžbe, ili, geometrijski shvaćeno, da se dobije



Sl. 93.

jedna naročita krivulja familije, treba uvesti početne uvjete, a ti su za diferencijalne jednadžbe prvog reda koordinate jedne točke $x = x_0$, $y = y_0$, kojom ta naročita krivulja familije ima da prođe. To naročito rješenje diferencijalne jednadžbe zove se partikularno rješenje ili partikularni integral diferencijalne jednadžbe.

Prema tome opće rješenje diferencijalne jednadžbe sadrži beskonačno mnogo partikularnih rješenja, do kojih dolazimo uvođenjem početnih uvjeta u to opće rješenje.

Uzmimo za naš primjer, da ta naročita sinusoida ima proći točkom $A\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$.

Uvrštenje $x_0 = \frac{\pi}{2}$ i $y_0 = 2$ u opće rješenje $y = \sin x + C$ daje:

$$2 = \sin\frac{\pi}{2} + C$$

a odatle je:

$$C = 1$$

Uvrštenje $C = 1$ u opće rješenje $y = \sin x + C$ daje partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = \cos x$ za naše početne uvjete:

$$\underline{y = \sin x + 1}$$

(Vidi sl. 93).

Rekli smo već, da opće rješenje $y = \sin x + C$ predočuje familiju sinusoida. Kako se vidi iz sl. 93, sve te sinusoide možemo dobiti translacijom, t. j. paralelnim pomakom jedne sinusoide uzduž osi Y. Iz toga ne slijedi, da opće rješenje svake diferencijalne jednadžbe predočuje familiju krivulja, koja nastaje pomakom jedne krivulje familije uzduž osi Y.

Kako opće rješenje diferencijalne jednadžbe prvog reda dobijemo integriranjem, a svaki neodređeni integral sadrži aditivnu konstantu C, opće rješenje diferencijalne jednadžbe prvog reda predočuje uvijek familiju krivulja, koja ovisi o jednom parametru C, ali međusobni položaj tih krivulja može biti najrazličitiji.

Na pr. govoreći o geometrijskom značenju konstante integracije C, riješili smo diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad \text{odnosno} \quad y\,dy + x\,dx = 0$$

pa smo dobili familiju koncentričnih kružnica (vidi primjer 1. na str. 81 i sl. 26).

Primijetimo, da samo diferencijalne jednadžbe oblika $y' = f(x)$ imaju opća rješenja, koja predočuju familiju krivulja nastalu translacijom jedne krivulje familije uzduž osi Y.

2. $$y'' = 0$$

To je diferencijalna jednadžba drugog reda.

Prvo integriranje daje

$$y' = C_1$$

jer je derivacija bilo koje konstante C jednaka nuli.

ili

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \,\Big|\, \cdot dx$$

$$dy = C_1 \cdot dx$$

Integriramo drugi put:

$\underline{y = C_1 x + C_2}$ — opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe drugog reda sadrži dvije konstante po volji C_1 i C_2, jer se to rješenje dobije nakon dvokratnog integriranja. Prema tome opće rješenje diferencijalne jednadžbe drugog reda predočuje familiju krivulja, koja ovisi o dvjema parametrima C_1 i C_2.

U našem slučaju predočuje opće rješenje $y = C_1 x + C_2$ familiju svih pravaca u ravnini, jer su gradijent C_1 i odsječak C_2 na osi Y veličine po volji.

Kako svakom točkom ravnine prolazi beskonačno mnogo pravaca, nije dovoljno zadati koordinate jedne točke, da se dobije jedan naročiti pravac familije, t. j. partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe, već je potrebno zadati i smjer, odnosno tangens smjera toga pravca u toj ili kojoj drugoj točki pravca.

Općenito predočuje opće rješenje diferencijalne jednadžbe drugog reda familiju krivulja, koja ovisi o dvjema parametrima C_1 i C_2, pa za diferencijalne jednadžbe drugog reda početni uvjeti jesu:

1. koordinate jedne točke $x = x_0$, $y = y_0$, kojom ta naročita krivulja ima proći,
2. gradijent tangente, t. j. $\operatorname{tg} \alpha = y'$ u toj ili nekoj drugoj točki krivulje.

Pretpostavimo, da traženo partikularno rješenje za naš primjer dobijemo uz početne uvjete:

$$x_0 = 2, \quad y_0 = -3 \quad \text{i} \quad y' = \frac{1}{2}$$

Uvrštenje u $y' = C_1$ i u opće rješenje $y = C_1 x + C_2$ daje:

$$\frac{1}{2} = C_1; \quad -3 = \frac{1}{2} \cdot 2 + C_2, \quad \text{odatle je} \quad C_2 = -4, \quad \text{pa je}$$

$$\underline{y = \frac{1}{2} x - 4}$$

partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' = 0$ uz gore navedene početne uvjete.

Primijetimo još, da se početni uvjeti ne uzimaju po volji, kako smo to u predašnjim primjerima učinili, već se određuju prema konkretnim uvjetima zadatka, koji se rješava pomoću diferencijalne jednadžbe.

Vidi primjer 2. na str. 82 i primjere, koji dalje slijede.

3. $y''' = x^2 - 2x + 1$ — diferencijalna jednadžba trećeg reda.

Prvo integriranje daje:

$$y'' = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + C_1$$

a drugo:

$$y' = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

i treće:

$$\underline{y = \frac{x^5}{60} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3}$$

— opće rješenje, koje predočuje familiju krivulja, koja ovisi o trima parametrima C_1, C_2 i C_3.

Vidimo, da opće rješenje diferencijalne jednadžbe trećeg reda ima tri konstante po volji C_1, C_2 i C_3, pa možemo općenito reći:

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe n-tog reda sadrži uvijek n konstanata po volji $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$.

Iz navedenih primjera već se naslućuje veliko značenje tih konstanata integracije u općim rješenjima diferencijalnih jednadžbi.

Izostaviti te konstante znači od bezbroja rješenja diferencijalne jednadžbe uzeti samo jedno slučajno partikularno rješenje, koje po svoj prilici ne odgovara uvjetima zadatka.

Tako na pr. izostavivši u posljednjem primjeru C_1, C_2 i C_3, dobili bismo partikularno rješenje

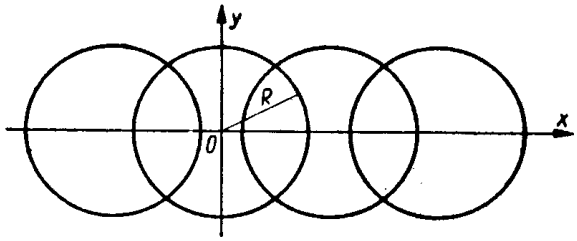
$$y = \frac{x^5}{60} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6}$$

izgubivši pri tom vrlo vjerojatno ono, koje se tražilo.

Uostalom, već smo prije potanko rekli o geometrijskom i fizičkom značenju konstante integracije C (vidi § 5, 4).

Naš problem možemo okrenuti i kazati: ako je zadana jednadžba familije krivulja, koja ovisi o n parametara $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$, pa ako tu jednadžbu redom n puta deriviramo pa iz zadane i tako dobivenih n jednadžbi uklonimo sve parametre, dobit ćemo diferencijalnu jednadžbu n-tog reda, kojoj je zadana jednadžba familije opće rješenje.

Na pr. neka je zadana jednadžba familije kružnica čvrstog polumjera R sa središtima na osi X (sl. 94):



Sl. 94.

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2$$

Deriviranje daje:

$$2(x - C) + 2y \cdot y' = 0$$

Odakle:

$$x - C = -yy'$$

pa ako to uvrstimo u zadanu jednadžbu, dobijemo:

$$y^2y'^2 + y^2 = R^2$$

To je diferencijalna jednadžba zadane familije kružnica.

Ako je riješimo, dobit ćemo za opće rješenje:

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2$$

t. j. zadanu jednadžbu familije kružnica.

Prelazimo na promatranje pojedinih vrsti diferencijalnih jednadžbi, koje ćemo podijeliti slično neodređenim integralima u tipove.

2. Diferencijalne jednadžbe prvog reda

a) Općenito

Opći oblik jednadžbe:

$$y' = f(x, y) \quad \text{ili implicitno} \quad F(x, y, y') = 0$$

Opće rješenje:

$$y = y(x, C) \quad \text{ili implicitno} \quad \varphi(x, y, C) = 0$$

početni uvjeti:

$$\text{koordinate jedne točke} \left.\begin{matrix} x = x_0 \\ y = y_0 \end{matrix}\right\} \text{početni položaj.}$$

b) Geometrijsko značenje diferencijalne jednadžbe prvog reda $y' = f(x, y)$

Dajući x i y vrijednosti po volji, t. j. zadajući točke u ravnini (X, Y), računamo iz diferencijalne jednadžbe $y' = f(x, y)$ za te točke pripadne vrijednosti derivacije y', na pr. za neku točku $A(x_1, y_1)$ po volji dobijemo iz diferencijalne jednadžbe $y'_1 = f(x_1, y_1)$. Drugim riječima, mi zadajemo točku u ravnini (X, Y), a diferencijalna jednadžba daje tangens smjera $y' = \operatorname{tg} \alpha$ u toj točki, t. j. daje komadić tangente u toj točki. Na taj način određuje diferencijalna jednadžba prvog reda polje smjerova u ravnini (X, Y), jer dodjeljuje svakoj točki ravnine jedan smjer.

Prema tome, riješiti diferencijalnu jednadžbu prvog reda znači geometrijski povući u ravnini (X, Y) familiju krivulja, koje imaju u svakoj svojoj točki smjer propisan diferencijalnom jednadžbom.

Kako se pod silnicama nekog polja sila razumiju krivulje, koje u svakoj svojoj točki imaju smjer sile, koja pripada toj točki, može se kazati, da su integralne krivulje silnice polja sila zadanog diferencijalnom jednadžbom.

c) Grafičko rješavanje diferencijalnih jednadžbi

Iz navedene interpretacije diferencijalne jednadžbe prvog reda slijedi mogućnost grafičkog rješavanja tih jednadžbi: konstruiraju se krivulje, koje u svakoj svojoj točki imaju tangens smjera y' izračunat iz diferencijalne jednadžbe za dotičnu točku.

Moglo bi se postupati tako, da se u ravnini (X, Y) nariše gusta mreža kvadrata, pa se u vrhovima tih kvadrata nanesu komadići tangenata, čiji je smjer izračunat iz diferencijalne jednadžbe za koordinate dotičnih vrhova. Spojimo li pripadne tangente u krivulje, dobit ćemo niz traženih integralnih krivulja. Međutim, mnogo je podesniji drugi način, koji se sastoji u tome, da se konstruira:

1. mreža ili familija izoklina, t. j. krivulja istih kutova. To znači, da u svim točkama svake pojedine izokline imaju tražene integralne krivulje isti smjer pa sijeku dotičnu izoklinu pod nekim stalnim kutom.

Do tih izoklina dolazimo tako, da stavimo

$$y' = f(x, y) = C$$

pa dajući C vrijednosti po volji rišemo pripadne izokline

$$f(x, y) = C$$

i nanašamo u točkama tih izoklina komadiće tangenata pod kutom, koji je određen iz

$$y' = \operatorname{tg} \alpha = C$$

2. Napose za

$$y' = C = 0$$

dobijemo izoklinu, koja predočuje geometrijsko mjesto ekstrema integralnih krivulja.

3. Konačno se konstruira:

Geometrijsko mjesto točaka inflekcije, t. j. krivulja određena jednadžbom

$$y'' = 0$$

Primjer, koji slijedi, jasno ilustrira taj postupak.

Primjer

Traži se grafičko rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' - y + x = 0$$

Napisavši zadanu diferencijalnu jednadžbu u obliku

$$y' = y - x$$

računamo:

1. Izokline

Stavimo

$$y' = C$$

pa dobijemo

$$y - x = C$$

ili

$$y = x + C$$

To su izokline traženih integralnih krivulja, koje, kako vidimo, predočuju u našem slučaju familiju pravaca gradijenta 1 i odsječka po volji C na osi Y.

2. Za $y' = C = 0$ dobijemo geometrijsko mjesto ekstrema integralnih krivulja:

$$y = x$$

To je raspolovnica prvog i trećeg kvadranta.

3. Geometrijsko mjesto točaka infleksije:

Iz

$$y' = y - x \qquad \text{(a)}$$

računamo

$$y'' = y' - 1$$

Uvrštenje (a) daje:

$$y'' = y - x - 1$$

Stavimo $y'' = 0$, pa dobijemo

$$y = x + 1$$

Opažamo, da je geometrijsko mjesto točaka infleksije $y = x + 1$ u našem slučaju izoklina za $C = 1$, a također je i integralni pravac.

Kako je krivulja konveksna za $y'' < 0$, odnosno konkavna za $y'' > 0$ (vidi Dio I. § 17, 3), bit će tražene integralne krivulje konveksne za

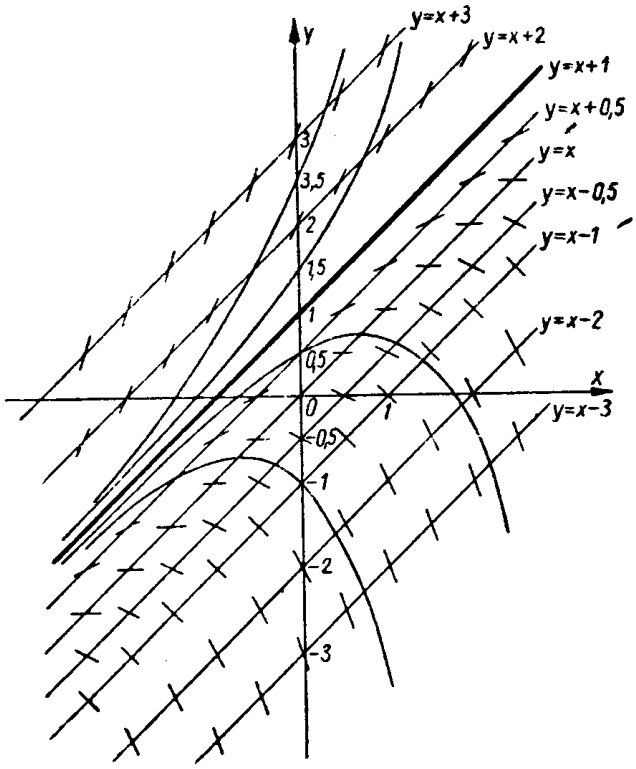
$$y'' = y - x - 1 < 0$$

t. j. za

$$y < x + 1$$

a konkavne za

$$y > x + 1$$



Sl. 95.

To znači: sve tražene integralne krivulje, koje leže iznad pravca $y = x + 1$, su konkavne, a one ispod tog pravca su konveksne.

Sada dajući C vrijednosti po volji $(0, \pm 0{,}5, \pm 1, \ldots)$ rišemo, najbolje na milimetarskom papiru, izokline, a također geometrijska mjesta ekstrema i točaka infleksije i nanosimo u pojedinim točkama tih krivulja (u našem slučaju pravaca) pripadne smjerove u obliku komadića tangenata. Kako je tangens omjer suprotne i priležeće katete, te tangente konstruiramo neposredno iz vrijednosti $\operatorname{tg} \alpha = C$, tako da otpada računanje kutova i njihovo nanašanje pomoću kutomjera. Kad je to napravljeno, možemo lako konstruirati nekoliko traženih integralnih krivulja, kako je to prikazano na slici 95.

Vidimo uostalom, da u našem slučaju integralne krivulje uopće nemaju infleksija i da je geometrijsko mjesto točaka, gdje je $y'' = 0$, ovdje integralna krivulja (i to pravac). Zahtjev $y'' = 0$ dakle daje infleksije samo onda, kad ih stvarno ima, što je dakako samo po sebi razumljivo.

Riješi na isti način grafičkim putem diferencijalnu jednadžbu

$$y' - x + x^2 = 0$$

(izokline u tom su primjeru parabole!).

d) Tipovi diferencijalnih jednadžbi prvog reda

Samo neznatan dio diferencijalnih jednadžbi možemo riješiti elementarno. Navedimo nekoliko tipova diferencijalnih jednadžbi, čija rješenja možemo izraziti konačnim brojem elementarnih funkcija.

Tip I.

Promjenljive x i y su separirane (odjeljene), odnosno daju se separirati.

U tom slučaju svodi se zadana diferencijalna jednadžba nakon različitih transformacija na oblik

$$f(x)\mathrm{d}x = F(y)\mathrm{d}y \qquad \text{(a)}$$

t. j. dobije se jednadžba, u kojoj su promjenljive x i y separirane.

Taj postupak zove se separacija promjenljivih.

Rješenje te jednadžbe dobijemo tako, da integriramo njene obje strane:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int F(y)\,\mathrm{d}y + C \qquad \text{(b)}$$

Mogućnost integriranja obiju strana jednadžbe (a) unatoč tome, što sadrže funkcije različitih promjenljivih x i y, možemo obrazložiti time, što promjenljive x i y nisu nezavisne jedna od druge, već je y funkcija od x, pa je $F(y)$ također funkcija od x, i to složena funkcija te promjenljive x.

U drugu ruku znamo: kad su derivacije, odnosno diferencijali dviju funkcija jednake, tada se funkcija razlikuje za konstantu [Dio I, § 13, 2)], pa iz jednadžbe (a) slijedi jednadžba (b).

Pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi toga tipa postupak se obično svodi na pet koraka.

1. Ako u diferencijalnu jednadžbu ulazi derivacija y', pišemo je u obliku $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
2. Diferencijalna jednadžba se riješi nazivnikâ.
3. Spoje se članovi, koji sadrže isti diferencijal.
4. Diferencijalna se jednadžba podijeli takvim izrazom, da se promjenljive separiraju.
5. Diferencijalna jednadžba se integrira.

Primjeri

1. $$y' = \frac{1 + y^2}{(1 + x^2)\,x\,y}$$

1) Pišemo y' u obliku $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1 + y^2}{(1 + x^2)\,xy}$$

2) Da se riješimo nazivnika, množimo jednadžbu s $(1 + x^2)\,x\,y\,\mathrm{d}x$:

$$(1 + x^2)\,xy\,\mathrm{d}y = (1 + y^2)\,\mathrm{d}x$$

3) Otpada

4) Da separiramo promjenljive x i y, dijelimo jednadžbu s $(1 + x^2)\,x\,(1 + y^2)$:

$$\frac{y\,\mathrm{d}y}{1 + y^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x(1 + x^2)}$$

5) Promjenljive su separirane, pa možemo integrirati:

$$\int \frac{y\,\mathrm{d}y}{1 + y^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1 + x^2)} + C$$

Drugi integral rastavljamo u parcijalne razlomke (vidi tip I neodređenih integrala) pa dobijemo:

$$\int \frac{y\,\mathrm{d}y}{1 + y^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1 + x^2} + C$$

a sada integriramo uz supstitucije $1 + y^2 = t$ i $1 + x^2 = z$

$$\frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$$

ili

$$\frac{1}{2}[\ln(1 + y^2) + \ln(1 + x^2)] = \ln x + C$$

ili

$$\ln[(1 + y^2) \cdot (1 + x^2)] = 2\ln x + 2C$$

Da dademo općem rješenju diferencijalne jednadžbe jednostavniji oblik, pišemo konstantu po volji $2C$ u obliku $\ln C_1$, što je dopušteno, jer se $\ln C_1$ mijenja kao i C od $-\infty$ do $+\infty$.

Dobijemo:

$$\ln[(1 + y^2) \cdot (1 + x^2)] = 2\ln x + \ln C_1$$

ili

$$\ln[(1 + y^2)(1 + x^2)] = \ln(x^2 \cdot C_1)$$

a odatle opće rješenje glasi:

$$\underline{(1 + x^2) \cdot (1 + y^2) = C_1 x^2}$$

2. $$a(xy' + 2y) = xyy'$$

1) $$a\left(x\frac{dy}{dx} + 2y\right) = xy\frac{dy}{dx}\Big| \cdot dx$$

2) $$ax\,dy + 2ay\,dx = xy\,dy$$

3) Spojimo zajedno članove s dy:

$$x(a - y)\,dy + 2ay\,dx = 0 \;|\; : xy$$

4) $$\frac{a - y}{y}dy + 2a\frac{dx}{x} = 0$$

5) Integriramo:

$$\int\frac{a - y}{y}dy + 2a\int\frac{dx}{x} = C$$

ili

$$a\int\frac{dy}{y} - \int dy + 2a\int\frac{dx}{x} = C$$

Odatle:

$$a\ln y - y + 2a\ln x = C$$

ili

$$a(\ln y + 2\ln x) = y + C$$

ili

$$\ln(x^2 \cdot y) = \frac{y}{a} + \frac{C}{a}$$

Odatle po definiciji logaritama imamo:

$$e^{\frac{y}{a} + \frac{C}{a}} = x^2 y$$

ili

$$x^2 y = e^{\frac{y}{a}} \cdot e^{\frac{C}{a}}$$

Konačno označivši $e^{\frac{C}{a}}$ s C_1, dobijemo opće rješenje u obliku:

$$\underline{x^2 y = C_1 e^{\frac{y}{a}}}$$

3. Odredi sve krivulje u ravnini

a) konstantne subnormale, b) konstantne suptangente.

a) Iz slike 96 slijedi:

subnormala

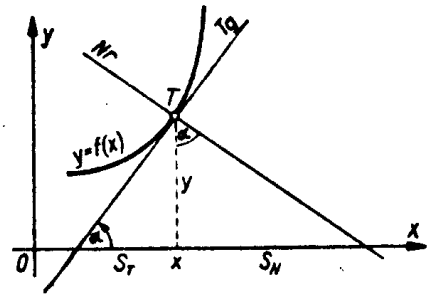
$$S_N = y \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

a kako je $\operatorname{tg} \alpha = y'$

$$S_N = y \cdot y' \qquad (105)$$

Stavimo li

$$y \cdot y' = p,$$



Sl. 96.

gdje je p neka zadana konstanta, dobijemo diferencijalnu jednadžbu krivulja konstantne subnormale.

Riješimo tu diferencijalnu jednadžbu:

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = p \mid \cdot dx$$

$$y\, dy = p\, dx$$

$$\int y\, dy = p \int dx + C$$

$$\frac{y^2}{2} = px + C \mid \cdot 2$$

$$y^2 = 2px + 2C$$

ili za

$$2C = C_1$$

$$\underline{y^2 = 2px + C_1}$$

Dobili smo familiju parabola, kojima je os simetrije os X. Dakle, od sviju krivulja u ravnini samo parabole u tom položaju imaju konstantnu subnormalu.

b) Iz slike 96 slijedi:

$$\text{suptangenta } S_T = y \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{y}{y'} \qquad (105\text{ a})$$

$$\frac{y}{y'} = k$$

gdje je k neka zadana konstanta, predočuje diferencijalnu jednadžbu krivulja konstantne suptangente.

Riješimo je:

$$\frac{y \cdot dx}{dy} = k \mid : dx$$

$$\frac{y}{dy} = \frac{k}{dx}$$

ili recipročno:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{k}$$

Integriramo:

$$\ln y = \frac{x}{k} + \ln C$$

ili

$$\ln y - \ln C = \frac{x}{k}$$

Odatle:

$$\ln \frac{y}{C} = \frac{x}{k}$$

Po definiciji logaritma imamo:

$$e^{\frac{x}{k}} = \frac{y}{C}$$

ili

$$\underline{y = C e^{\frac{x}{k}}}$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe kazuje, da samo eksponencijalne krivulje imaju konstantnu suptangentu.

Riješi diferencijalne jednadžbe:

1) $y' = \frac{1+y}{1-x}$ $\quad [(1-x)(1+y) = C]$

2) $(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0$ $\quad \left[\frac{x+y}{xy} + \ln \frac{y}{x} = C\right]$

3) $(1+x^2)\,dy - \sqrt{1-y^2}\,dx = 0$ $\quad [\arcsin y - \operatorname{arc\,tg} x = C]$

4) $xy - (a+x)(b+y)y' = 0$ $\quad [x - y = C + \ln (a+x)^a y^b]$

5) $(1-t^2)\frac{ds}{dt} + st = at$ $\quad [s = a + C\sqrt{1-t^2}]$

6) Odredi jednadžbu krivulje, koja prolazi točkom (3, 2), ako je gradijent tangente u svakoj točki krivulje dva puta veći od apscise dotične točke.

$$[y = x^2 + C; \quad y = x^2 - 7].$$

Tip II.

Homogene diferencijalne jednadžbe

Opći oblik:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Funkcija od x i y zove se homogena funkcija obzirom na promjenljive, ako uvrštenje λx i λy, gdje je λ neka konstanta po volji, mjesto x i y daje istu funkciju pomnoženu s λ^n, pri čemu se n zove stepen homogene funkcije.

Na pr. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ je homogena funkcija drugog stepena, jer zamjena x i y s λx i λy daje:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 - \lambda^2 xy + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 (x^2 - xy + y^2) = \lambda^2 f(x, y),$$

dok je $f\left(\frac{y}{x}\right)$ homogena funkcija nultog stepena, jer je

$$f\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = \frac{\lambda}{\lambda} f\left(\frac{y}{x}\right) = \lambda^0 f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Homogene diferencijalne jednadžbe stepena nultoga svode se na tip I, t. j. rješavaju se separacijom promjenljivih na taj način, da se prethodno uvede supstitucija:

$$\frac{y}{x} = z$$

Odatle

$$y = x \cdot z$$

Deriviranje po x daje:

$$y' = xz' + z \qquad \text{(a)}$$

To uvrstimo u zadanu diferencijalnu jednadžbu $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$:

$$xz' + z = f(z)$$

Tu diferencijalnu jednadžbu rješavamo načinom separacije promjenljivih x i z, pa u dobiveni rezultat uvrštavamo uzetu supstituciju $z = \frac{y}{x}$.

Primjeri

1. $$y' = \frac{x + y}{x - y}$$

Podijelivši brojnik i nazivnik desne strane jednadžbe s x dobijemo:

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$$

Desna strana ima sada oblik $f\left(\frac{y}{x}\right)$, pa možemo uvesti supstituciju:

$$z = \frac{y}{x}$$

a također uvrstiti prema (a)

$$y' = xz' + z$$

Dobijemo:

$$xz' + z = \frac{1 + z}{1 - z}$$

Tu diferencilajnu jednadžbu rješavamo separacijom promjenljivih x i z, t. j. po tipu I:

$$x\frac{dz}{dx} + z = \frac{1 + z}{1 - z}$$

Odatle

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{1 + z}{1 - z} - z$$

ili

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{1+z^2}{1-z}\Bigg| : dz$$

i uzevši recipročne vrijednosti lijeve i desne strane jednadžbe dobijemo:

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-z}{1+z^2}dz$$

Integriramo:

$$\ln x = \int \frac{dz}{1+z^2} - \int \frac{z\,dz}{1+z^2} + \ln C$$

ili

$$\ln x - \ln C = \operatorname{arc\,tg} z - \frac{1}{2}\ln(1+z^2)$$

ili

$$\ln \frac{x\sqrt{1+z^2}}{C} = \operatorname{arc\,tg} z$$

Odatle po definiciji logaritma imamo:

$$x\sqrt{1+z^2} = C\,e^{\operatorname{arc\,tg} z}$$

Uvrštenje $z = \frac{y}{x}$ daje traženo opće rješenje

$$\underline{\sqrt{x^2+y^2} = C\,e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}}$$

Dobili smo familiju logaritamskih špirala sa zajedničkim polom u ishodištu koordinatnog sustava. Da se u to uvjerimo, izvršimo prijelaz na polarne koordinate.
Uvrštenje:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad \text{odnosno} \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

daje:

$$r = C\,e^{\varphi}$$

a to je jednadžba familije logaritamskih spirala (vidi primjer 3 na str. 32 i sliku 11).

2. $$y^2\,dx + x^2\,dy = xy\,dy$$

Dijelimo jednadžbu s dx:

$$y^2 + x^2 y' = xy\,y'$$

Odatle

$$y'(xy - x^2) = y^2$$

ili

$$y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$$

ili podijelivši brojnik i nazivnik desne strane s x^2 dobijemo

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1}$$

Supstitucija $\frac{y}{x} = z$ i uvrštenje (a) $y' = xz' + z$ daje:

$$xz' + z = \frac{z^2}{z-1}$$

Odatle:

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{z}{z-1}$$

ili

$$\frac{dx}{x} = \frac{z-1}{z}dz$$

Integriramo:

$$\ln x = \int dz - \int \frac{dz}{z} + \ln C$$

$$\ln x = z - \ln z + \ln C$$

Uvrštenje $z = \frac{y}{x}$ daje:

$$\ln x = \frac{y}{x} - \ln\frac{y}{x} + \ln C$$

ili

$$x = \frac{y}{x} - \ln y + \ln x + \ln C$$

Odatle:

$$\frac{y}{x} = \ln\frac{y}{C}$$

ili po definiciji logaritma:

$$e^{\frac{y}{x}} = \frac{y}{C}$$

pa je

$$\underline{y = C \cdot e^{\frac{y}{x}}} \text{ — opće rješenje}$$

Primijetimo, da je u diferencijalnim jednadžbama tipa II, t. j. u homogenim diferencijalnim jednadžbama, zbroj eksponenata u svakom članu jednadžbe uvijek isti (u našem primjeru 2. taj je zbroj 2), pa se time razlikuju od diferencijalnih jednadžbi nekih drugih tipova, na pr. od tipa I.

Riješi diferencijalne jednadžbe:

1. $y' = -\frac{x+y}{x}$ $[x^2 + 2xy = C]$
2. $(10x + 8y)\,dx + (7x + 5y)\,dy = 0$ $[(x+y)^2 \cdot (2x+y)^3 = C]$
3. $\frac{xy' - y}{x} = \operatorname{tg}\frac{y}{x}$ $\left[\sin\frac{y}{x} = Cx\right]$
4. $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$ $[x^2 = Cy + C\sqrt{x^2+y^2}$ ili, ako se kvadriranjem riješimo korijena, $x^2 = C^2 + 2Cy]$
5. $(t - s)\,dt + t\,ds = 0$ $[t \cdot e^{\frac{s}{t}} = C]$

Tip III.

Linearne diferencijalne jednadžbe

I. Općenito

Diferencijalna jednadžba zove se linearna, ako su sve derivacije pa i sama zavisna promjenljiva *(y)* u prvom stepenu.

Prema tome linearna diferencijalna jednadžba prvog reda općenito glasi:

$$y' + f(x)y = g(x)$$

gdje su $f(x)$ i $g(x)$ neke zadane funkcije od x.

II. Prvi način rješavanja

Da riješimo tu diferencijalnu jednadžbu, pretpostavimo, da njeno opće rješenje ima oblik:

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

pa mjesto da određujemo y odredit ćemo u i v.

Kako je $y = u \cdot v$ rješenje linearne diferencijalne jednadžbe, ono mora da je zadovoljava, pa izračunavši

$$y' = uv' + vu',$$

uvrstimo to i $y = u \cdot v$ u diferencijalnu jednadžbu
Dobijemo:

$$uv' + vu' + f \cdot uv = g$$

ili

$$uv' + v(u' + f \cdot u) = g$$

Kako smo y označili kao umnožak u i v, jedan od tih množitelja možemo odrediti po volji. U tu svrhu stavimo, da je izraz u zagradama t. j.

$$u' + f \cdot u = 0 \qquad \text{(a)}$$

ostaje

$$uv' = g \qquad \text{(b)}$$

Dobili smo dvije diferencijalne jednadžbe, iz kojih određujemo u i v.
Iz (a) slijedi:

$$\frac{du}{dx} + f(x) \cdot u = 0 \mid \cdot \frac{dx}{u}$$

$$\frac{du}{u} = -f(x)\,dx$$

Integriramo:

$$\ln u = -\int f(x)\,dx + \ln C_1$$

ili

$$\ln \frac{u}{C_1} = -\int f(x)\,dx$$

a po definiciji logaritma imamo:

$$u = C_1 e^{-\int f(x)\,dx} \qquad \text{(c)}$$

$u(x)$ smo odredili.

Uvrštenje (c) u (b) daje:

$$\frac{dv}{dx} \cdot C_1 e^{-\int f(x)\,dx} = g(x)$$

Odatle:

$$dv = \frac{1}{C_1} e^{+\int f(x)\,dx} \cdot g(x)\,dx$$

Integriramo:

$$v = \frac{1}{C_1}\left[\int e^{\int f(x)\,dx} \cdot g(x)\,dx + C\right] \qquad \text{(d)}$$

Sada smo odredili i $v(x)$.

Uvrštenje (c) i (d) u $y = u(x) \cdot v(x)$ daje:

opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda.

$$y' + f(x)y = g(x)$$

$$y = e^{-\int f(x)\,dx}\left[\int e^{\int f(x)\,dx} \cdot g(x)\,dx + C\right] \qquad (106)$$

Prema toj formuli (106) rješavamo linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda.

Primjeri

1. $$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

Usporedivši zadanu linearnu diferencijalnu jednadžbu s njenim općim oblikom

$$y' + f(x)\,y = g(x)$$

vidimo, da je

$$f(x) = \frac{1}{x}\,; \quad g(x) = \sin x$$

pa prema (106) računamo:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

te je

$$e^{\int f(x)\,dx} = e^{\ln x} = x$$

jer, ako $e^{\ln x} = x$ logaritmiramo, dobijemo $\ln x = \ln x$, pa je

$$e^{-\int f(x)\,dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Uvrštenje u (106) daje:

$$y = \frac{1}{x}\left[\int x \sin x\,dx + C\right]$$

a kako je $\int x \sin x\,dx = -x\cos x + \sin x$ (vidi str. 74), dobijemo konačno traženo opće rješenje:

$$\underline{y = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}}$$

2. $$y' \cos x + y \sin x - 1 = 0 \,/ : \cos x$$

$$y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

Prema (106) računamo:

$$f(x) = \operatorname{tg} x; \quad g(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln \cos x$$

(supstitucija $\cos x = t$)

$$e^{\int f(x)\,dx} = e^{-\ln \cos x} = \frac{1}{e^{\ln \cos x}} = \frac{1}{\cos x}$$

$$e^{-\int f(x)\,dx} = e^{\ln \cos x} = \cos x$$

Uvrštenje u (106) daje:

$$y = \cos x \left[\int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}\,dx + C \right]$$

$$y = \cos x (\operatorname{tg} x + C)$$

$$\underline{y = \sin x + C \cos x}$$

3. $$t^2\,ds + (3 - 2\,ts)\,dt = 0$$

i partikularno rješenje za $t = \frac{1}{2}$ i $s = 5$.

Dijelimo jednadžbu s $t^2 \cdot dt$:

$$\frac{ds}{dt} - \frac{2}{t} s = -\frac{3}{t^2}$$

Prema (106):

$$f(t) = -\frac{2}{t}; \quad g(t) = -\frac{3}{t^2}$$

$$\int f(t)\,dt = -2 \int \frac{dt}{t} = -2 \ln t = -\ln t^2 = \ln \frac{1}{t^2}$$

$$e^{\int f(t)\,dt} = e^{\ln \frac{1}{t^2}} = \frac{1}{t^2}; \quad e^{-\int f(t)\,dt} = e^{\ln t^2} = t^2$$

$$s = t^2 \left[-3 \int \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{t^2}\,dt + C \right]$$

$$s = t^2 \left(+3 \cdot \frac{1}{3t^3} + C \right)$$

$$\underline{s = \frac{1}{t} + C t^2} \text{ — opće rješenje.}$$

Partikularno rješenje za $t = \frac{1}{2}$ i $s = 5$:

Uvrštenje u opće rješenje daje:

$$5 = 2 + \frac{C}{4}$$

Odatle

$$C = 12$$

pa partikularno rješenje za zadani početni uvjet glasi:

$$s = \frac{1}{t} + 12\,t^2$$

III. Drugi način rješavanja. Varijacije konstanata.

Linearne diferencijalne jednadžbe mogu se riješiti i na drugi način i to Lagrange-evom metodom varijacije konstanata. Ta se metoda sastoji u tome, da se riješi prikraćena ili homogena linearna diferencijalna jednadžba, koja se dobije iz zadane potpune

$$y' + f(x)y = g(x)$$

tako, da se stavi $g(x) = 0$:

$$y' + f(x)y = 0$$

Opće rješenje te prikraćene diferencijalne jednadžbe ne će naravno zadovoljavati zadanu potpunu jednadžbu.

Da to rješenje bude i opće rješenje zadane potpune diferencijalne jednadžbe, uzima se, da je konstanta integracije C, koja ulazi u opće rješenje prikraćene diferencijalne jednadžbe, nije konstanta već je neka funkcija od x, t. j. $C = C(x)$.

Zadatak se prema tome u daljnjem svodi na određenje te funkcije $C(x)$. Primjeri, koji slijede, tumače primjenu te metode.

Primjeri

1. Riješimo metodom varijacije konstanata naš 1. primjer:

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

Rješavamo pripadnu prikraćenu diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 \;\Big|\cdot \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + \ln C$$

$$\ln y = \ln \frac{C}{x}$$

$y = \frac{C}{x}$ — opće rješenje prikraćene diferencijalne jednadžbe.

Uzevši da je $C = C(x)$, smatramo, da je

$$y = \frac{C(x)}{x} \qquad \text{(a)}$$

opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe. Kako to opće rješenje mora zadovoljavati zadanu diferencijalnu jednadžbu, računamo prema (a):

$$y' = \frac{x \cdot C'(x) - C(x)}{x^2}$$

pa vrijednosti za y i y' uvrstimo u zadanu diferencijalnu jednadžbu

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

Dobijemo:

$$\frac{xC' - C}{x^2} + \frac{C}{x^2} = \sin x \mid \cdot x^2$$

$$xC' - C + C = x^2 \sin x$$

Odatle računamo $C(x)$:

$$x\frac{dC}{dx} = x^2 \sin x$$

$$dC = x \sin x \, dx$$

$$C = \int x \sin x \, dx + A$$

$$C(x) = -x \cos x + \sin x + A$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$\underline{y = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{A}{x}}$$

Dobili smo isti rezultat.

2. Riješimo metodom varajacija konstanata:

$$y' + y = \cos x$$

Prikraćena diferencijalna jednadžba:

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \Big| \cdot \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = -dx$$

$$\ln y = -x + \ln C$$

$$\ln \frac{y}{C} = -x$$

$$e^{-x} = \frac{y}{C}$$

$$y = Ce^{-x} \qquad (a)$$

$$y = C(x) \cdot e^{-x}; \qquad y' = -Ce^{-x} + e^{-x} \cdot C'$$

Uvrštenje u zadanu diferencijalnu jednadžbu daje:

$$-Ce^{-x} + e^{-x} \cdot \frac{dC}{dx} + Ce^{-x} = \cos x$$

$$dC = e^x \cdot \cos x \, dx$$

$$C = \int e^x \cdot \cos x \, dx + A$$

Prema (65):

$$C(x) = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + A$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$y = \left[\frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + A\right] \cdot e^{-x}$$

ili

$$\underline{y = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + A e^{-x}}$$

Riješi na oba načina:

$y' - y + x = 0$ [$y = C e^x + x + 1$, vidi c) ovog paragrafa i sl. 95]

$y' - y + x^2 = 0$ [$y = C e^x + x^2 + 2x + 2$]

$y' + 2x = 4x$ [$y = 2x - 1 + C e^{-2x}$]

$y' = \frac{y+1}{x}$ [$x^2 = 2Cy + C^2$]

$dy + y \cos x \, dx = \sin x \cos x \, dx$ [$y = \sin x - 1 + C e^{-\sin x}$]

Pažljivi čitalac je sigurno opazio, da je ta metoda u bitnosti isto, što i prijašnja. Treba samo uočiti, da je kod prijašnje metode stavljeno $u' + f \cdot u = 0$, a to znači, da je u stvari riješena skraćena jednadžba, dok v ima značenje naše funkcije $C(x)$.

Tip IV.

Bernoulli-jeva diferencijalna jednadžba (čitaj Bernuli)

Opći oblik

$$y' + f(x)y = g(x) \cdot y^n$$

Iz uspoređenja Bernoulli-jeve jednadžbe s linearnom vidimo, da je razlika samo u tome, što je funkcija $g(x)$ pomnožena sa y^n, t. j. za $n = 0$ Bernoulli-jeva jednadžba prelazi u linearnu.

Bernoulli-jeva jednadžba se svodi na linearnu tako, da se podijeli s y^n:

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{f(x)}{y^{n-1}} = g(x) \qquad \text{(a)}$$

pa se uvede supstitucija

$$\frac{1}{y^{n-1}} = z \qquad \text{(b)}$$

Deriviranje po x daje:

$$z' = -\frac{(n-1)y^{n-2} \cdot y'}{y^{2n-2}} = (1-n) \cdot \frac{y'}{y^n}$$

a odatle je

$$\frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{1-n} \qquad \text{(c)}$$

Uvrštenje (b) i (c) u (a) daje linearnu diferencijalnu jednadžbu u z i x, t. j. tip III:

$$\frac{z'}{1-n} + f(x) \cdot z = g(x)$$

Primjer

$$y' + xy = xy^3 \mid : y^3$$

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{x}{y^2} = x \qquad \text{(a)}$$

Supstitucija:

$$\frac{1}{y^2} = z \qquad \text{(b)}$$

odatle

$$z' = -\frac{2yy'}{y^4} = -\frac{2y'}{y^3}$$

a odatle je

$$\frac{y'}{y^3} = -\frac{z'}{2} \qquad \text{(c)}$$

Uvrštenje (b) i (c) u (a) daje:

$$-\frac{z'}{2} + xz = x \mid \cdot -2$$

$$z' - 2xz = -2x$$

Prema (106):

$$\int f(x)\,dx = -2\int x\,dx = -x^2$$

$$z = e^{x^2}\left[-2\int e^{-x^2} x\,dx + C\right]$$

Uz supstituciju $-x^2 = t$ dobijemo:

$$z = e^{x^2}(e^{-x^2} + C)$$

ili

$$z = 1 + Ce^{x^2}$$

a kako je $z = \frac{1}{y^2}$, odnosno $y = \frac{1}{\sqrt{z}}$, dobijemo

$$\underline{y = \frac{1}{\sqrt{1 + Ce^{x^2}}}}$$

Riješi:

$y' - y\,\mathrm{tg}\,x + y^2 \cos x = 0$ $\qquad \left[y = \frac{1}{(x + C)\cos x}\right]$

$xy' + y = y^2 \ln x$ $\qquad \left[y = \frac{1}{1 + \ln x + Cx}\right]$

Prije nego prijeđemo na slijedeći tip V. diferencijalnih jednadžbi prvog reda, kažemo nekoliko riječi o t. zv. singularnim, t. j. čudnim, neobičnim rješenjima diferencijalnih jednadžbi.

e) Singularna rješenja diferencijalnih jednadžbi

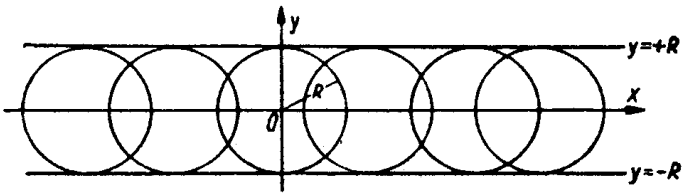
Govoreći općenito o diferencijalnim jednadžbama, pokazali smo (vidi str. 251), da opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y^2y'^2 + y^2 = R^2$$

glasi:

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2 \qquad \text{(b)}$$

i da predočuje familiju kružnica čvrstog polumjera R sa središtima na osi X (sl. 97).



Sl. 97.

Znamo, da sva partikularna rješenja diferencijalne jednadžbe dobijemo iz njenog općeg rješenja uvodeći početne uvjete, t. j. mijenjajući vrijednost konstante integracije C. Međutim, u opće rješenje naše diferencijalne jednadžbe ne ulaze 2 partikularna rješenja

$$y = \pm R$$

jer do njih ne možemo nikako doći dajući konstanti C u općem rješenju bilo koje vrijednosti.

Ipak ta rješenja zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu, jer uvrštenje $y = \pm R$ i $y' = 0$ u (a) daje identitet $R = R$. Ta dva partikularna rješenja $y = R$ i $y = -R$ nisu dakle sadržana u općem rješenju diferencijalne jednadžbe pa se zovu singularna rješenja diferencijalne jednadžbe.

Općenito:

Singularna rješenja diferencijalne jednadžbe su ona rješenja, koja ne možemo dobiti iz općeg rješenja dajući konstanti integracije C bilo koje vrijednosti.

Geometrijski predočuje singularno rješenje ovojnicu ili anvelopu (od francuske riječi envelopper = omotati), t. j. krivulju, koja omotava familiju integralnih krivulja zadanih općim rješenjem diferencijalne jednadžbe, ili geometrijsko mjesto singularnih točaka, t. j. dvostrukih točaka ili šiljaka integralnih krivulja, naravno ako te krivulje imaju singularne točke. (O singularnim točkama krivulje vidi Dio III. Repetitorija).

Pogled na sliku 97 kazuje, da u našem primjeru predočuje singularno rješenje $y = \pm R$ ovojnicu, jer pravci omotavaju familiju kružnica zadanu općim rješenjem diferencijalne jednadžbe.

Nastaje pitanje, zašto jednadžba ovojnice familije integralnih krivulja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu tih krivulja. Ovojnica omotava familiju krivulja određenih općim rješenjem diferencijalne jednadžbe, tangira dakle u svakoj točki onu krivulju familije, koja prolazi tom točkom, pa ima u svakoj točki smjer propisan diferencijalnom jednadžbom.

Rekli smo već, da riješiti diferencijalnu jednadžbu znači povući u ravnini familiju krivulja, koje u svakoj svojoj točki imaju smjer propisan diferencijalnom jednadžbom. Ovojnica ima u svakoj svojoj točki taj smjer, pa je također rješenje i to singularno rješenje diferencijalne jednadžbe.

Na sl. 97 vidimo, da pravci $y = \pm R$ tangiraju kružnice, pa imaju u svakoj točki isti smjer $\alpha = 0$ kao i kružnice, imaju dakle smjer određen diferencijalnom jednadžbom.

f) Tipovi diferencijalnih jednadžbi prvog reda (nastavak)

Tip V.

Clairaut-ova diferencijalna jednadžba (čitaj Kleró)

Opći oblik:

$$y = xy' + f(y') \tag{a}$$

na pr.

$$y = xy' + \underbrace{\frac{1}{2}y'^2 - 3y' + 2}_{f(y')}$$

Obratimo pažnju na to, da je prvi član desne strane Clairaut-ove diferencijalne jednadžbe uvijek xy', dok svi ostali članovi čine neku funkciju od y'. Ako je taj prvi član xy' pomnožen nekim faktorom, diferencijalna jednadžba nije više Clairaut-ova, već Lagrange-eva (vidi dalje tip VI).

Clairaut-ova diferencijalna jednadžba rješava se **deriviranjem**!

Derivirajući (a) dobijemo:

$$y' = xy'' + y' + f'(y') \cdot y''$$

Odatle

$$y''[x + f'(y')] = 0$$

Slijedi:

$$y'' = 0 \tag{b}$$

i

$$x + f'(y') = 0 \tag{c}$$

Iz (b) imamo: $y' = C$, pa uvrštenje u (a) daje opće rješenje Clairaut-ove diferencijalne jednadžbe:

$$y = xC + f(C) \tag{d}$$

Vidimo, da se **Clairaut-ova diferencijalna jednadžba rješava tako, da se u diferencijalnu jednadžbu uvrsti $y' = C$, gdje je C konstanta integracije.**

Opće rješenje Clairaut-ove diferencijalne jednadžbe $y = Cx + f(C)$ je linearna jednadžba, pa grafički predočuje familiju pravaca gradijenta C po volji, dok je odsječak na osi Y zadana funkcija toga gradijenta C.

Promotrimo sada drugu dobivenu jednadžbu (c):

$$x + f'(y') = 0$$

Budući da tražena funkcija y mora zadovoljavati Clairaut-ovu diferencijalnu jednadžbu (a), možemo tu funkciju dobiti tako, da izračunavši y' iz (c) uvrstimo dobiveni izraz za y' u (a), drugim riječima uklonimo y' iz (a) i (c). Na taj način

dobijemo relaciju između x i y, koja ne sadrži konstante po volji C, ali će zadovoljavati Clairaut-ovu diferencijalnu jednadžbu, bit će dakle partikularno rješenje te diferencijalne jednadžbe.

Tvrdimo, da je to partikularno rješenje singularno rješenje Clairaut-ove diferencijalne jednadžbe, jer ga ne možemo dobiti iz općeg rješenja (d) dajući konstanti C bilo koje vrijednosti. U tu svrhu pretpostavimo u suprotnosti s našom tvrdnjom, da to partikularno rješenje možemo dobiti iz (d) za neku vrijednost C_0 konstante C, t. j.

$$y = xC_0 + f(C_0)$$

A kako iz (b) slijedi, da je $y' = C$, uvrštenje $y' = C_0$ u (c) daje:

$$x + f'(C_0) = 0$$

ili

$$x = -f'(C_0) = \text{konstanta},$$

a to nema smisla, jer x nije konstanta, već nezavisna promjenljiva.

Prema tome uklonimo li y' iz Clairaut-ove diferencijalne jednadžbe

$$y = xy' + f(y')$$

i jednadžbe (c)

$$x + f'(y') = 0$$

dobit ćemo singularno rješenje Clairaut-ove diferencijalne jednadžbe, koje predočuje ovojnicu, jer familija pravaca nema singularnih točaka.

Primjeri

1. $$y = xy' + \frac{1}{2}y'^2$$

Uvrštenje $y' = C$ daje odmah opće rješenje

$$\underline{y = Cx + \frac{C^2}{2}}$$

Da dobijemo singularno rješenje, deriviramo diferencijalnu jednadžbu po x:

$$y' = xy'' + y' + y' \cdot y''$$

Odatle:

$$y''(x + y') = 0$$

Jednadžba $y'' = 0$ vodi do općeg rješenja, dok jednadžba

$$x + y' = 0$$

vodi do singularnog rješenja.

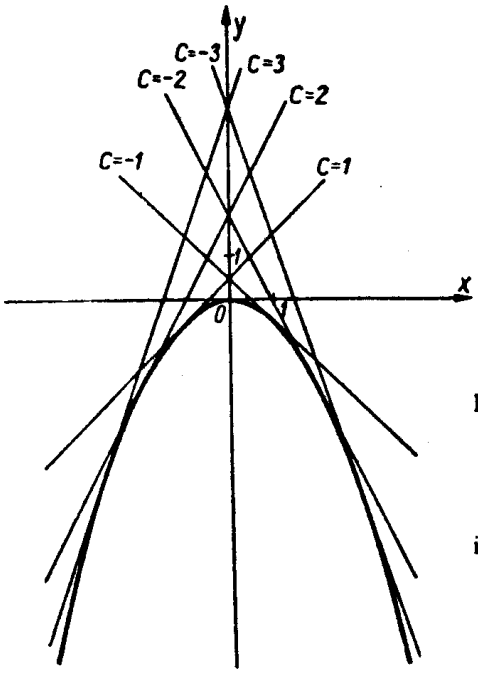
Iz (a) imamo

$$y' = -x$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje traženo singularno rješenje

$$\underline{y = -\frac{x^2}{2}}$$

Ono predočuje parabolu, koja omotava familiju pravaca zadanih općim rješenjem diferencijalne jednadžbe, kako se to vidi iz slike 98.



Sl. 98.

2.

$$y = xy' + \sqrt{1 + y'^2} \qquad \text{(a)}$$

$$y = Cx + \sqrt{1 + C^2} \text{ — opće rješenje}$$

$$y' = xy'' + y' + \frac{1}{2\sqrt{1 + y'^2}} \cdot 2y' \cdot y''$$

$$y''\left(x + \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0$$

$$x + \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0 \qquad \text{(b)}$$

Da uklonimo y' iz (a) i (b), kvadriramo (b):

$$x^2 = \frac{y'^2}{1 + y'^2}$$

i odredimo y':

$$x^2 + x^2y'^2 = y'^2$$

$$x^2 = y'^2(1 - x^2)$$

$$y' = \frac{x}{\pm\sqrt{1 - x^2}}$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$y = -\frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}$$

Odatle

$$y = \left.\frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\right|^2$$

$$y^2 = 1 - x^2$$

ili

$$\underline{x^2 + y^2 = 1} \text{ — singularno rješenje.}$$

Ovojnica je jedinična kružnica sa središtem u ishodištu, koju integralni pravci tangiraju. (Nariši ovojnicu i nekoliko integralnih pravaca dajući C vrijednosti po volji).

Odredi opća i singularna rješenja i nariši integralne pravce i ovojnice:

$y = xy' + \frac{1}{2}y'^2 - 3y' + 2$ $\qquad \left[y = Cx + \frac{1}{2}C^2 - 3C + 2;\ y = -\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{5}{2}\right]$

$y = xy' + \frac{1}{y'}$ $\qquad \left[y = Cx + \frac{1}{C};\ y^2 = 4x\right]$

Tip VI.

Lagrange-eva diferencijalna jednadžba

Opći oblik

$$y = x \cdot \varphi(y') + f(y')$$

Vidimo, da je Clairaut-ova diferencijalna jednadžba poseban slučaj Lagrange-eve diferencijalne jednadžbe, jer za $\varphi(y') = y'$ dobijemo Clairaut-ovu diferencijalnu jednadžbu.

Lagrange-eva diferencijalna jednadžba rješava se također deriviranjem.

Označivši y' s p

$$y = x \cdot \varphi(p) + f(p) \tag{a}$$

deriviramo jednadžbu po x:

$$p = x \cdot \varphi'(p) \cdot \frac{dp}{dx} + \varphi(p) + f'(p) \cdot \frac{dp}{dx}$$

ili

$$p - \varphi(p) = x\,\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx} \tag{b}$$

Primijetivši, da je općenito $p - \varphi(p) \neq 0$ za Lagrange-evu diferencijalnu jednadžbu, smatramo, da je x tražena funkcija od p, pa jednadžba (b) u tom slučaju predočuje linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda, koju rješavamo prema formuli (106).

Dobiveno rješenje:

$$x = x(p, C) \tag{c}$$

uvrstimo u diferencijalnu jednadžbu (a), pa dobijemo:

$$y = y(p, C) \tag{d}$$

Jednadžbe (c) i (d) daju opće rješenje Lagrange-eve diferencijalne jednadžbe u parametarskom obliku. Uspijemo li, da iz tih jednadžbi uklonimo parametar p, dobit ćemo opće rješenje Lagrange-eve diferencijalne funkcije u obliku

$$y = y(x, C), \text{ odnosno } F(x, y, C) = 0$$

Osim općeg rješenja Lagrange-eva diferencijalna jednadžba može imati i singularno rješenje.

Pretpostavimo, da je

$$p - \varphi(p) = 0 \tag{e}$$

za neku vrijednost $p = p_0$.

Jasno je, da $p = p_0$ zadovoljava jednadžbu (b).

Uvrštenje $p = p_0$ u polaznu jednadžbu (a) daje linearnu funkciju

$$y = \varphi(p_0)x + f(p_0)$$

koja je singularno rješenje Lagrange-eve diferencijalne jednadžbe.

Primjer

$$y = xy'^2 + y'^2$$

Označivši $y' = p$:

$$y = xp^2 + p^2 \tag{f}$$

deriviramo po x:

$$p = 2px\frac{dp}{dx} + p^2 + 2p\frac{dp}{dx} \Big| : p$$

$$1 = 2x\frac{dp}{dx} + p + 2\frac{dp}{dx}$$

ili

$$p - 1 = -2\frac{dp}{dx}(x+1) \Big| \cdot \frac{dx}{dp}$$

$$(p-1)\frac{dx}{dp} = -2x - 2$$

a odatle

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = -\frac{2}{p-1}$$

To je linearna diferencijalna jednadžba prvog reda, pa prema (106) imamo:

$$\int f(p)\,dp = \int \frac{2}{p-1}dp = 2\ln(p-1) = \ln(p-1)^2$$

$$e^{-\int f(p)dp} = e^{-\ln(p-1)^2} = \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$e^{\int f(p)dp} = (p-1)^2$$

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left[-2\int (p-1)^2 \cdot \frac{1}{p-1}dp + C\right]$$

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left[-2\int (p-1)\,dp + C\right]$$

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left[-2\frac{(p-1)^2}{2} + C\right]$$

$$x = -1 + \frac{C}{(p-1)^2} \tag{g}$$

U našem slučaju možemo iz (f) i (g) ukloniti p, pa ćemo opće rješenje dobiti ne u parametarskom, već u eksplicitnom obliku.
U tu svrhu uzevši u (g) C^2 mjesto C, dobijemo:

$$(x+1)(p-1)^2 = C^2$$

odatle

$$p - 1 = \frac{C}{\sqrt{x+1}}$$

ili

$$p = \frac{C + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$$

Uvrštenje toga izraza za p u (f): $y = p^2(x+1)$ daje traženo opće rješenje:

$$\underline{y = (C + \sqrt{x+1})^2}$$

Da dobijemo singularno rješenje, uočimo iz uspoređenja zadane diferencijalne jednadžbe s njenim općim oblikom, da je u našem slučaju

$$\varphi(y') = \varphi(p) = y'^2 = p^2$$

pa prema (e) imamo:

$$p - p^2 = 0$$

Odatle je

$$p = 0 \quad \text{i} \quad p = 1.$$

Uvrštenje $p = 0$ u diferencijalnu jednadžbu daje singularno rješenje

$$\underline{y = 0}$$

dok za p = 1 dobijemo

$$y = x + 1$$

To nije singularno rješenje, jer ga možemo dobiti iz općeg rješenja uzevši $C = 0$.

Odredi opća i singularna rješenja:

$y = 2xy' + y'^2$ $\quad \left[x = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3};\ y = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3};\ y = 0\right]$

$y = 2xy' + \frac{1}{2}y'^2 - 3y' + 2$ $\quad \left[x = \frac{C}{p^2} - \frac{p}{3} + \frac{3}{2};\ y = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{6} + 2;\ y = 2\right]$

Tip VII.

Egzaktne diferencijalne jednadžbe. Eulerov multiplikator

Vidi Dio III. § 8.

g) Primjedba o rješavanju diferencijalnih jednadžbi prvog reda

Navedenim tipovima diferencijalnih jednadžbi nisu naravno iscrpljeni svi oblici diferencijalnih jednadžbi prvog reda, koji se daju integrirati. Vrlo je čest slučaj, da zadana diferencijalna jednadžba ne spada ni u jedan od navedenih tipova, pa ipak se može uz podesnu supstituciju transformirati u jednadžbu, čiji je način rješavanja poznat.

Nije moguće navesti opća pravila za iznalaženje tih supstitucija. Kao i pri računanju neodređenih integrala, tako i pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi samo će vježbanje i snalažljivost ukazati najkraći put, koji vodi cilju, ako taj put uopće postoji.

Navedimo nekoliko primjera:

1. $$y' = \frac{2x + y + 1}{4x + 2y - 2}.$$

Supstitucija:

$$2x + y = t$$

tada je

$$4x + 2y = 2t$$

a iz $y = t - 2x$ slijedi:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 2$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje

$$\frac{dt}{dx} = \frac{t + 1}{2t - 2} + 2 \qquad \text{ili} \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{5t - 3}{2t - 2}$$

Separiramo promjenljive:

$$dx = \frac{2t-2}{5t-3}\,dt$$

$$x = \int \frac{2t-2}{5t-3}\,dt + C$$

Odatle prema tipu I neodređenih integrala imamo:

$$x = \frac{2}{5}\left[t - \frac{2}{5}\ln\left(t - \frac{3}{5}\right)\right] + C$$

Uvrštenje $t = 2x + y$ daje konačno

$$\underline{x = \frac{2}{5}(2x+y) - \frac{4}{25}\ln\left(2x + y - \frac{3}{5}\right) + C}$$

2. U primjeru 1. predočivala je desna strana diferencijalne jednadžbe kvocijent dviju linearnih funkcija, t. j. pravaca i to usporednih pravaca. Ako ti pravci nisu usporedni, diferencijalna jednadžba rješava se tako, da se određuje njihovo sjecište, u koje se prenosi paralelnim pomakom ishodište koordinatnog sustava.

Na taj način linearne funkcije gube članove slobodne od promjenljivih, jer pravci prolaze ishodištem, pa se diferencijalna jednadžba svodi na homogenu, t. j. na tip II.

Primjer

$$(-2x + y - 5)\,dx + (3x + y - 1)\,dy = 0 \;|\; :(3x + y - 1)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y + 5}{3x + y - 1}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 5 &= 0 \\ 3x + y - 1 &= 0 \end{aligned}\right| \;+$$

$$5x = -4; \quad x_0 = -\frac{4}{5}; \quad y_0 = \frac{17}{5} \text{ — koordinate sjecišta pravaca.}$$

Uvrštenje $\begin{aligned} x &= x_1 - \frac{4}{5} \\ y &= y_1 + \frac{17}{5} \end{aligned}$ i $\begin{aligned} dx &= dx_1 \\ dy &= dy_1 \end{aligned}$ u diferencijalnu jednadžbu daje

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2x_1 - y_1}{3x_1 + y_1}$$

Odatle

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2 - \frac{y_1}{x_1}}{3 + \frac{y_1}{x_1}}$$

$$\frac{y_1}{x_1} = z; \quad y_1 = x_1 \cdot z; \quad \frac{dy_1}{dx_1} = x_1 \cdot \frac{dz}{dx_1} + z$$

$$x_1 \cdot \frac{dz}{dx_1} + z = \frac{2 - z}{3 + z}$$

$$\frac{dx_1}{x_1} = -\frac{z + 3}{z^2 + 4z - 2} dz$$

$$\ln x_1 = -\int \frac{z + 3}{z^2 + 4z - 2} dz + \ln C$$

Taj integral izračunamo prema tipu I. neodređenih integrala, pa konačno uvrstimo

$$z = \frac{y_1}{x_1} \quad \text{i} \quad x_1 = x + \frac{4}{5}; \quad y_1 = y - \frac{17}{5}$$

Primijetimo, da se na isti način računaju diferencijalne jednadžbe općenitijeg oblika

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

h) Ortogonalne trajektorije

Ortogonalnim trajektorijama za zadanu familiju krivulja, koja ovisi o jednom parametru C, zovemo onu familiju krivulja, koje sijeku krivulje zadane familije ortogonalno, t. j. pod pravim kutom.

Kako ortogonalne trajektorije sijeku krivulje zadane familije pod pravim kutom, gradijent tangente $y_1' = \operatorname{tg} \alpha_1$ ortogonalne trajektorije mora biti recipročan i protivnog predznaka od gradijenta $y' = \operatorname{tg} \alpha$ one krivulje familije, koju ta trajektorija siječe, t. j.

$$y_1' = -\frac{1}{y'}$$

Odatle slijedi postupak za određivanje ortogonalnih trajektorija za zadanu familiju krivulja $y = f(x, C)$:

a) Deriviramo po x jednadžbu zadane familije krivulja i uklonivši iz zadane i deriviranjem dobivene jednadžbe parametar C dobijemo diferencijalnu jednadžbu zadane familije krivulja.

b) Zamijenivši u toj jednadžbi y' s $-\frac{1}{y'}$ dobijemo diferencijalnu jednadžbu traženih ortogonalnih trajektorija.

c) Rješavamo tu diferencijalnu jednadžbu. Dobiveno opće rješenje jest tražena jednadžba ortogonalnih trajektorija.

Primjeri

1. Odredi ortogonalne trajektorije za familiju koncentričnih kružnica $x^2 + y^2 = C^2$.

a) $$2x + 2y \cdot y' = 0$$

$y' = -\frac{x}{y}$ — diferencijalna jednadžba familije koncentričnih kružnica.

b) Uvrstimo $-\frac{1}{y'}$ mjesto y':

$-\frac{1}{y'} = -\frac{x}{y}$ — diferencijalna jednadžba traženih ortogonalnih trajektorija.

Odatle

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$$

ili

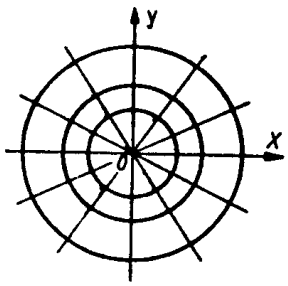
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

c) Integriramo:

$$\ln y = \ln x + \ln C$$

ili

$$\underline{y = Cx}$$



Sl. 99.

Dobili smo traženu jednadžbu ortogonalnih trajektorija, koja predočuje familiju pravaca kroz ishodište (sl. 99).

2. Odredi ortogonalne trajektorije za familiju konfokalnih elipsa, kojima su fokusi u točkama $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$.

Kako je za elipsu $e^2 = a^2 - b^2$, gdje je e linearni ekscentricitet, a a i b velika i mala poluos elipse, a za sve elipse zadane familije

$$1 = a^2 - b^2$$

uzmimo, da je $$a = \sqrt{1 + C}, \quad \text{a} \quad b = \sqrt{C}$$

gdje je C parametar, jer je tada

$$e^2 = a^2 - b^2 = 1 + C - C = 1,$$

pa jednadžba zadane familije konfokalnih elipsa glasi:

$$\frac{x^2}{1+C} + \frac{y^2}{C} = 1 \qquad (a)$$

pri čemu je $C > 0$.

a) $$\frac{2x}{1+C} + \frac{2y \cdot y'}{C} = 0$$

Odatle računamo C:

$$xC + yy' + yy'C = 0$$

$$(x + yy')C = -yy'$$

$$C = -\frac{yy'}{x + yy'}$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$\frac{x^2(x + yy')}{x} - \frac{y^2(x + yy')}{yy'} = 1$$

ili $$x^2y' + xyy'^2 - xy - y^2y' = y'$$

ili $(x + yy')(xy' - y) = y'$ — diferencijalna jednadžba zadane familije elipsa.

b) $$\left(x - \frac{y}{y'}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y'} - y\right) = -\frac{1}{y'}$$

ili

$(xy' - y)(x + yy') = y'$ — diferencijalna jednadžba traženih ortogonalnih trajektorija.

Vidimo, da je ona identična s diferencijalnom jednadžbom zadane familije konfokalnih elipsa, a dakle je njeno opće rješenje identično s jednadžbom

$$\frac{x^2}{1+C} + \frac{y^2}{C} = 1$$

zadane familije tih elipsa.

Medutim, ta ista jednadžba predočuje za $C < 0$ familiju konfokalnih hiperbola

$$\frac{x^2}{1-C} - \frac{y^2}{C} = 1$$

s poluosima $\sqrt{1-C}$ i $\sqrt{C}$ i sa zajedničkim fokusima u istim točkama $F_1(-1, 0)$ i $F_2(1, 0)$, jer je za hiperbolu $e^2 = a^2 + b^2$, pa je opet

$$e^2 = 1 - C + C = 1$$

Prema tome su te hiperbole ortogonalne trajektorije za zadanu familiju elipsa.

Odredi ortogonalne trajektorije za familiju

1) parabola $y = ax^2$, gdje je a parametar

$$\left[\frac{x^2}{2C} + \frac{y^2}{C} = 1, \quad C > 0\right]$$

2) kružnica $x^2 + y^2 = 2ax$

$$[y = C(x^2 + y^2)]$$

3) elipsa zajedničke velike osi $2a$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, gdje je b parametar.

$$[x^2 + y^2 = 2a^2 \ln (Cx)]$$

i prikaži grafički krivulje zadanih familija i njihove ortogonalne trajektorije.

3. Diferencijalne jednadžbe drugog i viših redova

a) Općenito

Diferencijalna jednadžba drugog reda ima općenito oblik

$$y'' = f(x, y, y') \quad \text{ili implicitno} \quad F(x, y, y', y'') = 0$$

Da prikažemo geometrijsko značenje diferencijalne jednadžbe drugog reda, podijelimo diferencijalnu jednadžbu s $(1 + y'^2)^{3/2}$:

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{f(x, y, y')}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

Lijeva strana jednadžbe predočuje prema (26) zakrivljenost $\frac{1}{\rho}$ krivulje $y = y(x)$ u nekoj točki apscise x, dok je desna strana neka funkcija od x, y i y', koju označimo s $\varphi(x, y, y')$.

Dobijemo:

$$\frac{1}{\rho} = \varphi(x, y, y')$$

Iz te jednadžbe jasno slijedi geometrijsko značenje diferencijalne jednadžbe drugog reda: za svaku vrijednost x, y i y', t. j. za svaku po volji uzetu točku (x, y) u ravnini XY i po volji uzeti tangens smjera y' u toj točki diferencijalna jednadžba drugog reda daje zakrivljenost, odnosno polumjer zakrivljenosti integralne krivulje, koja prolazi tom točkom.

Drugim riječima: mi zadajemo jedan linijski element, t. j. točku i smjer u toj točki, a diferencijalna jednadžba drugog reda dodjeljuje toj točki pripadni polumjer zakrivljenosti ρ.

Prema tome riješiti diferencijalnu jednadžbu drugog reda znači geometrijski povući u ravnini familiju krivulja, koje ispresjecaju tu ravninu u svim smjerovima, ali od bezbroja krivulja te familije, koje prolaze nekom točkom ravnine, svaka krivulja ima zakrivljenost propisanu diferencijalnom jednadžbom.

Kako se opće rješenje diferencijalne jednadžbe drugog reda dobije nakon dvije kvadrature, ono sadrži uvijek dvije konstante po volji C_1 i C_2, pa općenito glasi:

$$y = y(x, C_1, C_2) \quad \text{ili} \quad f(x, y, C_1, C_2) = 0$$

Iz geometrijskog značenja diferencijalne jednadžbe drugog reda jasno slijede početni uvjeti, da se dobije partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe, t. j. jedna naročita krivulja familije zadane diferencijalnom jednadžbom.

Ti uvjeti jesu:

1) početni položaj, t. j. koordinate jedne točke $x = x_0$, $y = y_0$, kojom ta krivulja ima proći, i
2) početni smjer, t. j. tangens smjera $y' = y'_1$ u nekoj točki (x_1, y_1) te naročite krivulje.

Uvrstimo li početne uvjete $x = x_0$ i $y = y_0$ u opće rješenje $y = y(x, C_1, C_2)$, a $x = x_1$, $y = y_1$ i $y' = y'_1$ u $y' = y'(x, C_1, C_2)$, dobit ćemo dvije jednadžbe iz kojih odredimo C_1 i C_2. Uvrštenje tako dobivenih za C_1 i C_2 vrijednosti u opće rješenje daje partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe drugog reda za te početne uvjete.

b) Redukcija diferencijalnih jednadžbi drugog reda na diferencijalne jednadžbe prvog reda

Rekli smo već, da diferencijalna jednadžba drugog reda ima općenito oblik $y'' = f(x, y, y')$. Ako u diferencijalnu jednadžbu ne ulazi eksplicitno jedna ili više od tih promjenljivih x, y i y', diferencijalna jednadžba je nepotpuna, pa je možemo reducirati, t. j. svesti na diferencijalnu jednadžbu prvog reda.

Promotrimo pojedine slučajeve redukcije.

1. slučaj.

$$y'' = f(x)$$

t. j. desna strana diferencijalne jednadžbe ne sadrži traženu funkciju i njenu prvu derivaciju.

Primjeri

1. $$y'' = x + \sin x$$

Kako y'' možemo pisati u obliku $\frac{dy'}{dx}$ imamo

$$\frac{dy'}{dx} = x + \sin x \mid \cdot dx$$

$$dy' = x\,dx + \sin x\,dx$$

Integriramo:

$$y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1 \mid \cdot dx$$

$$dy = \frac{x^2}{2}\,dx - \cos x\,dx + C_1\,dx$$

Integriramo drugi put:

$$y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2 \text{ — opće rješenje.}$$

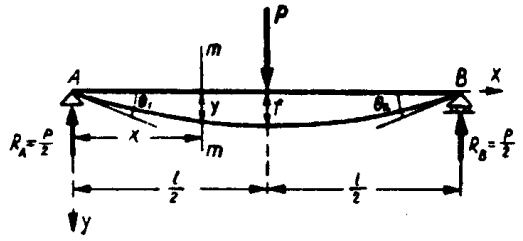
2. Primjer iz čvrstoće

Odredi jednadžbu elastične linije opterećenog nosača, koji je prikazan na slici 100, a također kutove Θ_1 i Θ_2 i najveći progib f nosača.

Pod elastičnom (progibnom) linijom opterećenog nosača razumije se savinuta os nosača, t. j. spojnica težišta njegovih poprečnih presjeka.

Kako je zakrivljenost elastične linije

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \qquad \text{[vidi (26)]}$$



Sl. 100.

u nekom presjeku $m - m$ nosača u udaljenosti x od ležaja to veća, što je veći moment savijanja M_x u tom presjeku, a to je manja, što je veća krutost EI nosača, gdje je E modul elasticiteta, a I moment tromosti poprečnog presjeka, diferencijalna jednadžba elastične linije glasi:

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{M}{EI}$$

Uzmemo li u obzir, da praktički ne možemo dopustiti, da nosač ima velik progib, zatvarat će tangente na elastičnu liniju s osi X vrlo malene kutove α, pa možemo uzeti, da je $y' = \operatorname{tg}\alpha \doteq \operatorname{tg} 0 = 0$, pa diferencijalna jednadžba elastične linije prima jednostavniji oblik:

$$y'' = \frac{M_x}{EI} \tag{107}$$

Za naš slučaj prema slici 100 imamo:

$$M_x = \frac{P}{2} \cdot x$$

Uvrštenje u (107) daje:

$$y'' = -\frac{P}{2EI}x$$

a to je baš prvi slučaj nepotpune diferencijalne jednadžbe drugog reda.

Na desnoj strani jednadžbe uzeli smo predznak minus, jer je elastična linija za naš slučaj konveksna (gledaj u negativnom smislu osi Y), pa je $y'' < 0$ (Dio I. § 15,3).

Pretpostavivši, da je čitav nosač napravljen od istog materijala i da je uvijek stalnog poprečnog presjeka, t. j. da su E i I konstantne veličine, integriramo prvi put:

$$y' = -\frac{P}{4EI}x^2 + C_1 \qquad \text{(a)}$$

Da odredimo konstantu integracije C_1, uvedimo prvi početni uvjet. Iz slike 100 vidimo, da je u sredini nosača, t. j. za $x = \frac{l}{2}$ tangenta na elastičnu liniju usporedna s osi X, pa je $\alpha = 0$, a dakle i $\operatorname{tg}\alpha = y' = 0$.

Uvrštenje $x = \frac{l}{2}$ i $y' = 0$ u (a) daje:

$$0 = -\frac{P}{4EI} \cdot \frac{l^2}{4} + C_1$$

a odatle:

$$C_1 = \frac{Pl^2}{16EI}$$

pa (a) prima oblik:

$$y' = -\frac{P}{4EI}x^2 + \frac{Pl^2}{16EI} \qquad \text{(b)}$$

Kako su kutovi α maleni, pa je $y' = \operatorname{tg}\alpha \doteq \alpha$, daje ta jednadžba za svaki x kut, što ga tangenta na elastičnu liniju u dotičnoj točki nosača zatvara s osi X.

Tako za $x = 0$ (vidi sl. 100) dobijemo kutove $\Theta_1 = \Theta_2$ (naravno u lučnoj mjeri), što ih tangente na elastičnu liniju u ležajima nosača zatvaraju s osi X.

Uvrštenje $x = 0$ u (b) daje:

$$\underline{\Theta_1 = \Theta_2 = \frac{Pl^2}{16EI}}$$

Zanimljivo je primijetiti, da konstanta C_1 ima u našem slučaju značenje kuta Θ_1, odnosno Θ_2.

Sada integriramo (b):

$$y = -\frac{P}{12EI}x^3 + \frac{Pl^2}{16EI}x + C_2$$

Da odredimo C_2, uvedimo drugi početni uvjet:

prema slici 100 za $x = 0$ progib je $y = 0$. Uvrštenje daje:

$$0 = C_2$$

pa je

$$\underline{y = -\frac{P}{12EI}x^3 + \frac{Pl^2}{16EI}x}$$

tražena jednadžba elastične linije, koja predočuje kubnu parabolu i koja za svaki x daje pripadni progib y.

Tako za $x = \frac{l}{2}$ dobijemo najveći progib $y = f$:

$$f = -\frac{P}{12EI} \cdot \frac{l^3}{8} + \frac{Pl^2}{16EI} \cdot \frac{l}{2}$$

Odatle

$$f = \frac{P l^3}{48 EI}$$

Odredi na isti način jednadžbu elastične linije istog nosača duljine l, koji je kontinuirano opterećen s q kg na jedinicu njegove duljine, a također kutove Θ_1 i Θ_2 i najveći progib f.

$$\left[R_A = R_B = \frac{ql}{2}; \; M_x = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right.$$

$$\left. y = \frac{q}{24EI} x^4 - \frac{ql}{12EI} x^3 + \frac{ql^3}{24EI} x; \quad \Theta_1 = \Theta_2 = \frac{ql^3}{24EI}; \quad f = \frac{5ql^4}{348EI} \right]$$

Izvedi zakon slobodnog pada tijela mase m uz pretpostavku, da je tijelo u početni moment $t = 0$ već prevalilo put $s = s_0$ i imalo brzinu $v = v_0$. Otpor zraka zanemari.

$$\left[m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg: \quad v = gt + v_0; \quad s = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + s_0 \right]$$

2 slučaj redukcije.

$$y'' = f(x, y')$$

t. j. desna strana diferencijalne jednadžbe ne sadrži traženu funkciju.

Supstitucija:

$$y' = p$$

Tada je $y'' = p'$, pa uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje diferencijalnu jednadžbu prvog reda u p i x:

$$p' = f(x, p)$$

Odredivši odatle p kao funkciju od x, traženo opće rješenje dobijemo iz

$$y' = p$$

Primjeri

1. $$y''(x^2 + 1) = 2xy'$$

Stavimo $y' = p$, pa je $y'' = p' = \frac{dp}{dx}$. Uvrštenje daje:

$$\frac{dp}{dx}(x^2 + 1) = 2xp$$

Separiramo promjenljive p i x:

$$\frac{dp}{p} = 2 \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

Integriramo:

$$\ln p = 2 \int \frac{x\,dx}{x^2 + 1} + \ln C_1$$

Uz supstituciju $x^2 + 1 = t$ dobijemo:

$$\ln p = \ln(x^2 + 1) + \ln C$$

ili

$$\ln p = \ln[C_1(x^2 + 1)]$$

Odatle

$$p = C_1(x^2 + 1)$$

a kako je

$$p = y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1(x_2 + 1) \qquad \text{(a)}$$

ili

$$dy = C_1(x^2 + 1)\,dx$$

Integriramo drugi put:

$$\underline{y = C_1\left(\frac{x^3}{3} + x + C_2\right)} \text{ — opće rješenje.} \qquad \text{(b)}$$

Ako se još traži partikularno rješenje uz početne uvjete:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1 \quad \text{i} \quad y' = 3 \quad \text{za} \quad x_0 = 0$$

dobijemo iz (a)

$$3 = C_1$$

Uvrštenje $C_1 = 3$ i $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ u opće rješenje daje:

$$1 = 3\,C_2, \quad \text{pa je } C_2 = \frac{1}{3}$$

Traženo partikularno rješenje glasi prema (b):

$$\underline{y = x^2 + 3x + 1}$$

2.

$$y'' = y' + x$$

$$y' = p; \quad y'' = p'$$

$$p' - p = x$$

Prema (106):

$$f(x) = -1; \quad g(x) = x$$

$$p = e^x\left[\int e^{-x} \cdot x\,dx + C_1\right]$$

$$p = e^x(-xe^{-x} - e^{-x} + C_1)$$

$$p = -x - 1 + C_1e^x$$

$$p = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = (-x - 1 + C_1\,e^x)\,dx$$

$$\underline{y = C_1\,e^x - \frac{x^2}{2} - x + C_2} \text{ — opće rješenje.}$$

Riješi

$$y'' = \frac{a}{x} \cdot y' \qquad \left[y = C_1 \frac{x^{a+1}}{a+1} + C_2\right]$$

$$y'' \cos x + y' \sin x = 1 \qquad [y = -\cos x + C_1 \sin x + C_2]$$

$$y'' + 2y' = 4x \qquad \left[y = x^2 - x - \frac{C_1}{2} e^{-2x} + C_2\right]$$

3. slučaj redukcije.

$$y'' = f(y, y')$$

t. j. desna strana diferencijalne jednadžbe ne sadrži nezavisne promjenljive.

Opet stavimo $y' = \frac{dy}{dx} = p$, ali smatramo, da je p funkcija od y.

Množeći i dijeleći desnu stranu jednakosti

$$y'' = \frac{dp}{dx}$$

s dy, dobijemo

$$y'' = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p$$

gdje je $\frac{dp}{dy} = p'$ derivacija p po y!

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje diferencijalnu jednadžbu prvog reda u p i y:

$$p' p = f(y, p)$$

Odredivši odatle p kao funkciju od y, opće rješenje dobijemo iz

$$y' = \frac{dy}{dx} = p$$

Primjeri

1. $$y'' = \frac{y'^2}{y}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = p; \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

$$\frac{dp}{dy} p = \frac{p^2}{y} \quad \Big| \cdot \frac{dy}{p^2}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln p = \ln y + \ln C_1$$

$$p = C_1 y$$

$$p = \frac{dy}{dx} = C_1 y \quad \Big| \cdot \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = C_1\, dx$$

$$\ln y = C_1 x + \ln C_2$$

$$\ln \frac{y}{C_2} = C_1 x$$

Po definiciji logaritma:

$$\frac{y}{C_2} = e^{C_1 x}$$

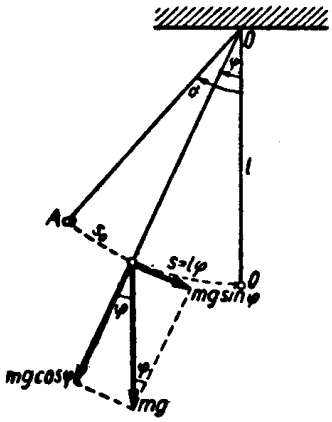
$$\underline{y = C_2 e^{C_1 x}}$$

2. Matematičko njihalo

Matematičko njihalo, t. j. materijalna točka mase m obješena o nerastegljivoj niti bez težine duljine l, izvedeno je iz položaja ravnoteže OO za neki kut φ (vidi sl. 101). Treba odrediti zanemarivši sve otpore jednadžbu gibanja njihala, t. j. vezu između puta s, odnosno otklona φ i vremena t.

Rastavimo li težinu mg materijalne točke u dvije komponente $mg \cos \varphi$ u smjeru niti i $mg \sin \varphi$ u smjeru gibanja, t. j. tangencijalno na kružni luk OA, opažamo, da će se njihalo gibati jedino pod djelovanjem te posljednje komponente, jer će se prva poništiti napetošću niti. Prema tome na gibanje njihala djeluje samo sila

$$mg \sin \varphi$$



Sl. 101.

Znamo, da je općenito sila jednaka masi puta akceleracija, t. j.

$$m l \ddot{\varphi}$$

gdje je $\ddot{\varphi}$ druga derivacija kuta po vremenu, dakle kutna akceleracija, a $l\,\varphi$ obodna akceleracija.

Izjednačimo li ta dva izraza za silu, dobijemo diferencijalnu jednadžbu matematičkog njihala:

$$m l \ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi$$

(Na desnoj strani uzet je predznak minus, jer sila $mg \sin \varphi$ ima uvijek obratni smisao od smisla kuta otklona φ).

Ili

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi$$

Kako u diferencijalnu jednadžbu ne ulazi eksplicitno nezavisna promjenljiva t (vrijeme), imamo

3. slučaj redukcije.

Stavimo

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = p; \quad \ddot{\varphi} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dp}{d\varphi} \cdot p$$

Uvrštenje daje:

$$\frac{dp}{d\varphi} p = -\frac{g}{l} \cdot \sin \varphi \quad \Big| \cdot d\varphi$$

$$p\, dp = -\frac{g}{l} \sin \varphi \cdot d\varphi$$

Integriramo:

$$\frac{p^2}{2} = + \frac{g}{l} \cos \varphi + C_1 \qquad \text{(a)}$$

Uvedimo prvi početni uvjet: za $\varphi = \alpha$, gdje je α najveći otklon ili amplituda njihala, kutna brzina $\dot{\varphi} = p = 0$ (vidi sl. 101):

$$0 = \frac{g}{l} \cos \alpha + C_1$$

Odatle

$$C_1 = -\frac{g}{l} \cos \alpha$$

pa je prema (a)

$$\frac{p^2}{2} = \frac{g}{l} \cos \varphi - \frac{g}{l} \cos \alpha$$

ili

$$p = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos \varphi - \cos \alpha)}$$

Odatle

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos \varphi - \cos \alpha)}}$$

ili

$$\sqrt{\frac{2g}{l}} \cdot dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}$$

i nakon integriranja

$$\sqrt{\frac{2g}{l}}(t + C_2) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}$$

To je eliptički integral, koji se dade transformirati u normalni oblik prve vrste (vidi tip V. neodređenih integrala).

Nakon razvijanja u binomni red i integriranja dobijemo slijedeći izraz za **vrijeme potpuna njihala** T **matematičkog njihala**:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \frac{25}{256} \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \ldots\right)$$

Iz toga izraza za T vidimo, da vrijeme njihaja ovisi o veličini amplitude α, a to vodi do zaključka o nesavršenstvu običnog njihala za mjerenje vremena.

Primijetimo: ako bi se njihalo gibalo ne po kružnici, nego po običnoj cikloidi, dobili bismo iz diferencijalne jednadžbe matematičkog njihala za trajanje potpunog njihaja izraz

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

u koji uopće ne ulazi amplituda, pa samo cikloidno njihalo ima stalno vrijeme njihaja uz bilo koju amplitudu.

Za male amplitude može se s dovoljnom točnosti uzeti samo prva dva člana reda, a mjesto $\sin \frac{\alpha}{2}$ uzeti $\frac{\alpha}{2}$.

U tom slučaju dobijemo približnu vrijednost T u obliku

$$T \doteq 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)$$

iz kojeg se vidi, da za male amplitude vrijeme njihaja T vrlo malo ovisi o amplitudi α, jer je član $\frac{\alpha^2}{16}$ malen za male α.

Konačno, ako zanemarimo i taj član $\frac{\alpha^2}{16}$, dobit ćemo poznatu približnu formulu:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Do te formule možemo lako doći i tako, da u diferencijalnoj jednadžbi njihala $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$ uzmemo φ mjesto $\sin\varphi$, što je dopuštena aproksimacija za male kutove φ, a dakle i za male amplitude α. Pokažimo to.

Diferencijalna jednadžba matematičkog njihala glasi sada:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi$$

Opet uz

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = p \quad \text{i} \quad \ddot{\varphi} = \frac{dp}{d\varphi}\cdot p$$

dobijemo:

$$p\cdot\frac{dp}{d\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi$$

odatle:

$$\frac{p^2}{2} = -\frac{g}{l}\cdot\frac{\varphi^2}{2} + C_1 \qquad \text{(a)}$$

Za $\varphi = \alpha$ i $p = \dot{\varphi} = 0$ imamo:

$$0 = -\frac{g}{2l}\alpha^2 + C_1$$

ili

$$C_1 = \frac{g}{2l}\alpha^2$$

pa je prema (a)

$$p = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}(\alpha^2 - \varphi^2)}$$

ili

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}$$

integriramo:

$$\sqrt{\frac{g}{l}}(t + C_2) = \frac{1}{\alpha}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^2}}$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t + C_2) = \arcsin\frac{\varphi}{\alpha}$$

Brojimo li vrijeme t od položaja ravnoteže OO (sl. 101), bit će $\varphi = 0$ za $t = 0$. Uvrštenje daje:

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,C_2 = 0$$

$$C_2 = 0$$

pa imamo

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = \arcsin\frac{\varphi}{\alpha}\,.$$

Odatle

$$\frac{\varphi}{\alpha} = \sin\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t$$

ili

$$\varphi = \alpha \cdot \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, t$$

Dobiveno rješenje diferencijalne jednadžbe kazuje, da njihalo vrši harmoničko gibanje ili titranje, naravno uz pretpostavku male amplitude (vidi Dio I. § 4, 4). Period toga gibanja ili u našem slučaju vrijeme potpunog njihaja

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

ili

$$\underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Riješi:

$$2y \cdot y'' = 1 + y'^2 \qquad [4C_1(y - C_1) = (x - C_2)^2]$$

4. slučaj redukcije.

Diferencijalna jednadžba je homogena obzirom na y, y' i y''. O homogenosti funkcija već smo rekli prije govoreći o homogenim diferencijalnim jednadžbama prvog reda (vidi str. 252), pa znamo, da je na pr. diferencijalna jednadžba drugog reda

$$yy'' - y'^2 - 6xy^2 = 0$$

homogena diferencijalna jednadžba stepena homogenosti dva, jer, ako y, y' i y'' pomnožimo sa λ, dobit ćemo:

$$\lambda^2 yy'' - \lambda^2 y'^2 - 6\lambda^2 xy^2 = \lambda^2 (yy'' - y'^2 - 6xy^2)$$

Diferencijalne jednadžbe tog tipa rješavaju se pomoću supstitucije

$$y = e^{\int z\,dx}$$

pri čemu se $z = f(x)$ odredi iz pretpostavke, da je taj izraz za y opće rješenje diferencijalne jednadžbe.

Način rješavanja pokažimo na gore navedenom primjeru

$$yy'' - y'^2 - 6xy^2 = 0 \qquad \text{(a)}$$

Stavimo

$$y = e^{\int z\,dx} \qquad \text{(b)}$$

Odatle derivirajući po x dobijemo:

$$y' = e^{\int z\,dx}\, z$$

i

$$y'' = e^{\int z\,dx} \cdot z' + z^2 \cdot e^{\int z\,dx} = e^{\int z\,dx}(z' + z^2)$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$e^{2\int z\,dx}(z' + z^2) - e^{2\int z\,dx} \cdot z^2 - 6xe^{2\int z\,dx} = 0$$

Odatle

$$e^{2\int z\,dx} \cdot (z' - 6x) = 0$$

Kako prvi faktor ne može biti nula, imamo:

$$\frac{dz}{dx} - 6x = 0$$

a odatle je

$$z = 3x^2 + C_1$$

Uvrštenje u (b) daje traženo opće rješenje

$$y = e^{\int (3x^2 + C_1)\,dx + C_2} = e^{x^3 + C_1 x + C_2} = e^{x^3 + C_1 x} \cdot \underbrace{e^{C_2}}_{C'_2}$$

$$\underline{y = C'_2 \cdot e^{x^3 + C_1 x}}$$

Riješi: $xyy'' - xy'^2 = 3yy'$ $\quad [y = C_2 e^{C_1 x^4}]$

Na isti način rješavaju se homogene diferencijalne jednadžbe toga tipa viših redova.

Riješi: $yy''' - y'y'' = 0$ $\quad [y = C_2 \cdot e^{x\sqrt{C_1}} + C_3 \cdot e^{-x\sqrt{C_1}}]$

c) Linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima

I. Općenito

Do diferencijalnih jednadžbi toga tipa često dolazimo u mnogim primjenama matematike.

Opći oblik diferencijalne jednadžbe:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)$$

Diferencijalna jednadžba zove se **linearna**, kad je linearna, t. j. prvog stepena, obzirom na funkciju i sve njene derivacije.

Ona se zove **homogena**, ako je njena desna strana $f(x) = 0$, inače je **nehomogena** (obrati pažnju na to, da se naziv „homogena" sada upotrebljava u drugom smislu nego prije).

$a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ su zadani realni koeficijenti.

2. Linearne homogene diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima

Opći oblik:

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0 \qquad \text{(a)}$$

Pokažimo, da se opće rješenje diferencijalne jednadžbe toga tipa dobije bez ijedne kvadrature. U tu svrhu dokažimo:

a) Ako je y_1 partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe (a), tada i $y_2 = C_1y_1$, gdje je C_1 bilo koja konstanta, također partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe.

Uvrštenje $y_2 = C_1 y_1$; $y'_2 = C_1 y'_1$ i $y''_2 = C_1 y_1''$ u (a) daje izraz

$$C_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1)$$

koji je jednak nuli, jer smo pretpostavili da je y_1 partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe (a), pa je mora zadovoljavati.

b) Ako su y_1 i y_2 dva partikularna rješenja diferencijalne jednadžbe (a), tada je $y_0 = y_1 + y_2$ također partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe.

Uvrštenje $y_0 = y_1 + y_2$, $y'_0 = y'_1 + y'_2$, i $y''_0 = y''_1 + y''_2$ u (a) daje nakon uređenja izraz:

$$(y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + (y''_2 + a_1 y'_2 + a_0 y_2)$$

koji je također jednak nuli, jer su y_1 i y_2 partikularna rješenja.

Iz navedenog slijedi: ako su $C_1 y_1$ i $C_2 y_2$ dva partikularna rješenja diferencijalne jednadžbe (a), tada je $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ opće rješenje te diferencijalne jednadžbe, ali uz uvjet, da su funkcije $C_1 y_1$ i $C_2 y_2$ linearno nezavisne, t. j. da je

$$\frac{C_1 y_1}{C_2 y_2} \neq a$$

odnosno, da je

$$C_1 y_1 \neq C_2 y_2 \cdot a$$

gdje je a neka konstanta.

Uz pretpostavku, da su te funkcije linearno zavisne, t. j. da je $C_1 y_1 = C_2 y_2 \cdot a$, dobijemo

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_2 y_2 a + C_2 y_2 = \underbrace{(C_2 a + C_2)}_{C'_2} y_2 = C'_2 y_2$$

pa y ne može biti opće rješenje diferencijalne jednadžbe, jer sadrži samo jednu konstantu po volji C'_2.

Prema tome pretpostavimo li, da su $C_1 y_1$ i $C_2 y_2$ linearno nezavisne funkcije, sadržat će

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

dvije konstante po volji C_1 i C_2, pa će biti opće rješenje naše diferencijalne jednadžbe.

Slijedi: opće rješenje linearne homogene diferencijalne jednadžbe drugog reda dobijemo tako, da odredimo dva linearno nezavisna partikularna rješenja te diferencijalne jednadžbe, pa zbroj tih partikularnih rješenja pomnoženih s konstantama C_1 i C_2 daje opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

Da odredimo ta dva partikularna rješenja, pokušajmo uzeti jedno rješenje u obliku $y = e^{rx}$, gdje je r konstanta.

Uvrštenje $y = e^{rx}$; $y' = re^{rx}$ i $y'' = r^2 e^{rx}$ u diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad \text{(a)}$$

daje

$$e^{rx}(r^2 + a_1 r + a_0) = 0$$

a kako je

$$e^{rx} \neq 0$$

bit će

$$r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \qquad \text{(b)}$$

Vidimo, da funkcija e^{rx} stvarno zadovoljava diferencijalnu jednadžbu, ako r zadovoljava jednadžbu (b), t. j. ako je r korijen kvadratne algebarske jednadžbe.

Budući da kvadratna jednadžba ima dva korijena r_1 i r_2, dobit ćemo i dva tražena partikularna rješenja $e^{r_1 x}$ i $e^{r_2 x}$ (o slučaju kad je $r_1 = r_2$ kazat ćemo malo kasnije), koja su linearno nezavisna, jer

$$\frac{e^{r_1 x}}{e^{r_2 x}} = e^{(r_1 - r_2)x}$$

uz naše uvjete, da je $r_1 \neq r_2$, nije konstantna veličina.

Jednadžba (b) zove se **karakteristična jednadžba**, jer o „karakteru" njenih korijena ovisi opće rješenje diferencijalne jednadžbe.

Kako vidimo, karakteristična jednadžba dobije se iz zadane diferencijalne jednadžbe (a) tako, da se uvrsti

$$\begin{aligned} r^2 &\text{ mjesto } y'' \\ r &\text{ mjesto } y' \\ 1 (= r^0) &\text{ mjesto } y \end{aligned}$$

Rješavanje diferencijalne jednadžbe (a) svodi se dakle na rješavanje obične algebarske kvadratne jednadžbe s realnim koeficijentima a_1 i a_0.

Rekli smo, da „karakter" općeg rješenja diferencijalne jednadžbe ovisi o korijenima karakteristične jednadžbe. Promotrimo pojedino sva tri moguća slučaja.

1. Korijeni karakteristične jednadžbe r_1 i r_2 su realni i različiti.

U tom slučaju opće rješenje diferencijalne jednadžbe glasi:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Primjer

$$2y'' + y' - y = 0 \,|\, :2$$

$$y'' + \frac{1}{2} y' - \frac{1}{2} y = 0$$

Karakteristična jednadžba:

$$r^2 + \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} = 0$$

$$r_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}}\,; \quad r_1 = \frac{1}{2}\,; \quad r_2 = -1$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe glasi:

$$\underline{y = C_1 e^{1/2 x} + C_2 e^{-x}}$$

2. Korijeni karakteristične jednadžbe r_1 i r_2 su konjugirano kompleksni, t. j. $r_1 = a + bi$ i $r_2 = a - bi$.

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe ima formalno isti oblik:

$$y = C_1 e^{(a+bi)x} + C_2 e^{(a-bi)x}$$

jer su funkcije $e^{(a+bi)x}$ i $e^{(a-bi)x}$ linearno nezavisne (njihov je omjer $e^{2bix} \neq$ const), ali se obično transformira tako, da se uklone kompleksni brojevi.

Provedimo tu transformaciju.

$$y = C_1 e^{(a+bi)x} + C_2 e^{(a-bi)x}$$

Odatle

$$y = C_1 e^{ax} e^{bix} + C_2 e^{ax} e^{-bix}$$

ili

$$y = e^{ax} (C_1 e^{bix} + C_2 e^{-bix})$$

Prema Eulerovim formulama (vidi Dio I. § 19)

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

imamo

$$y = e^{ax} (C_1 \cos bx + i C_1 \sin bx + C_2 \cos bx - i C_2 \sin bx)$$

a odatle

$$y = e^{ax}[(C_1 + C_2) \cos bx + i(C_1 - C_2) \sin bx]$$

Stavimo li

$$C_1 + C_2 = A$$

i

$$i(C_1 - C_2) = B$$

dobijemo opće rješenje diferencijalne jednadžbe u realnom obliku:

$$y = e^{ax} (A \cos bx + B \sin bx)$$

gdje su A i B realne konstante po volji.

Očito je, da za C_1 i C_2 treba uzeti konjugirano kompleksne veličine, da budu A i B realni, jer za $C_1 = a + bi$ i $C_2 = a - bi$ dobijemo:

$$C_1 + C_2 = 2a$$

$$i(C_1 - C_2) = i(2bi) = -2b.$$

Konačno i taj oblik općeg rješenja možemo transformirati u drugi.

U tu svrhu stavimo

$$A = C \sin D$$

$$B = C \cos D$$

gdje su C i D opet konstante po volji.

Uvrštenje daje

$$y = e^{ax}(C \sin D \cdot \cos bx + C \cos D \cdot \sin bx)$$

a odatle je

$$y = Ce^{ax} \sin(bx + D)$$

Prema tome

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{(a+bi)x} + C_2 e^{(a-bi)x} \\ &= e^{ax}(A \cos bx + B \sin bx) \qquad (108) \\ &= Ce^{ax} \sin(bx + D) \end{aligned}$$

Primjer

1. $$y'' + 4y' + 13y = 0$$

$$r^2 + 4r + 13 = 0$$

$$r_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 13} = -2 \pm 3i$$

$$y = C_1 e^{(-2+3i)x} + C_2 e^{(-2-3i)x}$$

Prema (108)

$$\underline{y = e^{-2x}(A \cos 3x + B \sin 3x)}$$

2. Imali smo diferencijalnu jednadžbu njihala za slučaj vrlo male amplitude α:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi \qquad \text{(vidi str. 288).}$$

Kako ta diferencijalna jednadžba spada baš u tip, koji promatramo, riješimo je sada i na taj način. Stavimo

$$\frac{g}{l} = k^2$$

pa je

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$$

$$r^2 + k^2 = 0$$

$$r_{1,2} = \pm ki$$

$$\varphi = C_1 e^{kit} + C_2 e^{-kit}$$

ili prema (108)

$$\underline{\varphi = C \sin(kt + D)} \text{ — opće rješenje.}$$

Opet smo dobili jednadžbu harmoničkog gibanja perioda $T = \frac{2\pi}{k}$, a kako je $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$ bit će vrijeme potpuna njihaja

$$\underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

3. Korijeni karakteristične jednadžbe su jednaki, t. j. dvostruki:

$$r_1 = r_2 = r.$$

U tom slučaju $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ ne može biti opće rješenje diferencijalne jednadžbe, jer za $r_1 = r_2 = r$ dobijemo:

$$y = e^{rx}(C_1 + C_2) = C e^{rx}$$

pa bi opće rješenje diferencijalne jednadžbe drugog reda imalo samo jednu konstantu po volji, a to ne može biti.

Da odredimo drugo linearno nezavisno partikularno rješenje, pretpostavimo, da to drugo rješenje ima oblik

$$y_2 = y_1 u \tag{a}$$

gdje je u tražena funkcija od x, a $y_1 = e^{rx}$ prvo partikularno rješenje.

Budući da je y_2 rješenje zadane diferencijalne jednadžbe, ono je mora zadovoljavati.

Računamo:

$$y_2' = y_1 u' + u y_1'$$
$$y_2'' = y_1 u'' + 2u' y_1' + u y_1''$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

daje:

$$y_1 u'' + (2y_1' + a_1 y_1) + (y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) u = 0$$

Prva zagrada jednaka je nuli, jer je

$$2y_1' + a_1 y_1 = 2r e^{rx} + a_1 e^{rx} = (2r + a_1) e^{rx} = 0 \cdot e^{rx} = 0$$

prema poznatom svojstvu korijena kvadratne jednadžbe, da je zbroj korijena jednak koeficijentu od nepoznanice u prvom stepenu s protivnim predznakom. U našem je slučaju $r + r = -a_1$.

I druga se zagrada poništava, jer je y_1 rješenje diferencijalne jednadžbe. Ostaje

$$y_1 u'' = 0$$

ili

$$u'' = 0$$

Za u možemo dakle uzeti bilo koju funkciju od x, čija je druga derivacija jednaka nuli. Uzmimo najjednostavniju i to

$$u = x$$

jer je

$$u' = 1, \text{ pa je } u'' = 0$$

Drugo partikularno rješenje glasi dakle prema (a):

$$y_2 = x e^{rx}$$

Imamo sada dva partikularna rješenja diferencijalne jednadžbe, koja glase:

$$y_1 = e^{rx} \quad \text{i} \quad y_2 = xe^{rx}$$

i čija linearna nezavisnost pada u oči.

Prema tome, ako je $r_1 = r_2 = r$, opće rješenje diferencijalne jednadžbe glasi

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

Primjer

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

$$r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1$$

$$\underline{y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} = e^{-x}(C_1 + C_2 x)}$$

Sve što smo rekli za homogene diferencijalne jednadžbe drugog reda vrijedi i za

3. Linearne homogene diferencijalne jednadžbe viših redova s konstantnim koeficijentima

Njihov je opći oblik:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots\ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

gdje su a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1 i a_0 zadane realne konstante. Rješavaju se na slični način kao i diferencijalne jednadžbe drugog reda toga tipa.

Prvi korak. Pišemo karakterističnu jednadžbu, koju dobijemo iz zadane diferencijalne jednadžbe tako, da uvrstimo:

r^n mjesto $y^{(n)}$
r^{n-1} mjesto $y^{(n-1)}$
.....
.....
r^2 mjesto y''
r mjesto y'
1 mjesto y

Drugi korak. Rješavamo tu karakterističnu jednadžbu i određujemo njene korijene.

Treći korak. Pišemo opće rješenje diferencijalne jednadžbe zbrajajući pojedina partikularna rješenja pomnožena s konstantama po volji C_n, C_{n-1}, ..., C_2, C_1, pri čemu pamtimo:

1) Svaki realni različiti korijen r karakteristične jednadžbe daje partikularno rješenje oblika e^{rx}.

2) Svaki par konjugirano kompleksnih korijena $(a \pm bi)$ karakteristične jednadžbe daje dva partikularna rješenja oblika

$$e^{ax} \cos bx \quad \text{i} \quad e^{ax} \sin bx$$

3) s—struki korijen karakteristične jednadžbe daje s partikularnih rješenja oblika 1) odnosno 2), pri čemu se prvo rješenje množi s 1, drugo s x, treće s x^2 i t. d. i konačno s-to rješenje množi se s x^{s-1}.

Postupajući na taj način, dobit ćemo pri rješavanju linearne diferencijalne jednadžbe n-tog reda n partikularnih rješenja, koja su linearno nezavisna.

Da se u to uvjerimo, možemo se poslužiti determinantom Vronskoga:

$$W_n = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots\cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots\cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots\cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots\cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Da je sustav od n funkcija

$$y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_n$$

sustav **zavisnih** funkcija, nužno je i dovoljno, da je determinanta Vronskog

$$W_n = 0$$

(O determinantama vidi § 1. III. dijela Repetitorija).

Na pr. za diferencijalnu jednadžbu drugog reda dobili smo partikularna rješenja

$$y_1 = e^{r_1 x} \quad \text{i} \quad y_2 = e^{r_2 x}$$

Uvrštenje u determinantu daje:

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} =$$

$$= r_2 e^{(r_1+r_2)x} - r_1 e^{(r_1+r_2)x} = e^{(r_1+r_2)x} \cdot (r_2 - r_1) \neq 0$$

$$\text{za } r_1 \neq r_2$$

Uz taj uvjet y_1 i y_2 su linearno nezavisne funkcije.

Pamtimo, konačno, da opće rješenje diferencijalne jednadžbe n-tog reda mora sadržavati n konstanata po volji!

Primjeri

1.
$$y''' - y = 0$$
$$r^3 - 1 = 0$$
ili
$$(r-1)(r^2 + r + 1) = 0$$
$$r_1 = 1; \quad r^2 + r + 1 = 0; \quad r_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x} + C_3 e^{\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x}$$
ili prema (108)
$$\underline{y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$$

2.
$$y^{(IV)} + 3y''' + 3y'' + y' = 0$$
$$r^4 + 3r^3 + 3r^2 + r = 0$$
$$r(r^3 + 3r^2 + 3r + 1) = 0$$
ili
$$r(r+1)^3 = 0$$
Odatle:
$$r_1 = 0; \quad r_{2,3,4} = -1$$
$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} + C_4 x^2 e^{-x}$$
ili
$$\underline{y = C_1 + e^{-x}(C_2 + C_3 x + C_4 x^2)}$$

3.
$$y^{(V)} + y^{(IV)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$$
$$r^5 + r^4 + 2r^3 + 2r^2 + r + 1 = 0$$

Kušanjem određujemo prvi korijen ili rješavamo jednadžbu kao recipročnu. Dobijemo $r_1 = -1$.

Podijelivši karakterističnu jednadžbu s $(r + 1)$ dobijemo:
$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0$$
ili
$$(r^2 + 1)^2 = 0$$
odatle
$$r_{2,3} = +i; \quad r_{4,5} = -i$$
$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{ix} + C_3 x e^{ix} + C_4 e^{-ix} + C_5 x e^{-ix}$$
ili
$$y = C_1 e^{-x} + (C_2 e^{ix} + C_4 e^{-ix}) + x(C_3 e^{ix} + C_5 e^{-ix})$$
Prema (108) imamo:
$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_4 \sin x + x(C_3 \cos x + C_5 \sin x)$$
i konačno
$$\underline{y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x}$$

$$y^{(VI)} + 2y''' + y = 0$$
$$r^6 + 2r^3 + 1 = 0$$

Stavimo li $r^3 = m$, dobijemo bikvadratnu jednadžbu:

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

$$m_{1,2} = -1$$

pa je

$$r = \sqrt[3]{-1}$$

Izračunavši sve tri vrijednosti $\sqrt[3]{-1}$ pomoću Moivre-ove formule (vidi Dio I., § 1, 2) dobijemo

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r_{3,4} = -1$$

$$r_{5,6} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(Korijeni su dvostruki, jer je $m_{1,2} = -1$ dvostruki korijen).

$$y = C_1 e^{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x} + C_2 x e^{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x} + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} + C_5 e^{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x} + C_6 x e^{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x}$$

ili

$$y = (C_3 + C_4 x)\, e^{-x} + e^{\frac{x}{2}} \left[(C_1 \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_5 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x) + \right.$$

$$\left. + x(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_6 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x) \right]$$

ili

$$\underline{y = (C_3 + C_4 x)\, e^{-x} + e^{\frac{x}{2}} \left[(C_1 + C_2 x) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + (C_5 + C_6 x) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right]}$$

Riješi:

$y^{(IV)} - 16y = 0$	$[y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x]$
$y^{(IV)} + 2y''' + y'' = 0$	$[y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}]$
$y^{(VI)} + 64y = 0$	(vidi Dio I., § 1, 2)
$2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = 0$	(vidi Repet. element. matem. I. § 11, 4).

4. Linearne nehomogene diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima

Opći oblik

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{n-2} + \ldots\ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

gdje su $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots\ldots, a_2, a_1, a_0$ zadane realne konstante, a $f(x)$ zadana funkcija od x.

Opće rješenje glasi:

$$y = y_0 + \eta$$

Tu je

y_0 — opće rješenje prikraćene diferencijalne jednadžbe, t. j. homogene diferencijalne jednadžbe, koja se dobije iz zadane tako, da se desna strana $f(x)$ stavi jednakom nuli.

η — partikularno rješenje zadane nehomogene diferencijalne jednadžbe.

Budući da opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe već znamo odrediti, pokažimo, kako glasi partikularno rješenje η za pojedine slučajeve funkcije $f(x)$. U tu svrhu razlikujemo šest slučajeva:

I. $f(x)$ je polinom,
II. $f(x)$ je eksponencijalna funkcija,
III. $f(x)$ je funkcija sinusa ili kosinusa,
IV. $f(x)$ je algebarski zbroj funkcija navedenih u predašnjim slučajevima,
V. $f(x)$ je umnožak polinoma i eksponencijalne funkcije.
VI. $f(x)$ je umnožak polinoma, eksponencijalne funkcije i funkcija sinusa ili kosinusa.

I. slučaj. Desna strana $f(x)$ diferencijalne jednadžbe je polinom n-toga stepena

U tom je slučaju η također polinom, ali stepena $r + n$, gdje je r red najniže derivacije, koja ulazi u zadanu diferencijalnu jednadžbu. (y se smatra kao da je derivacija nultoga reda, pa ulazi li u diferencijalnu jednadžbu y uzima se $r = 0$), dok je n stepen polinoma na desnoj strani zadane diferencijalne jednadžbe. Daljnji postupak jasno slijedi iz primjera.

Primjeri

1. $$y'' + 2y = x^2 + 1$$

Prikraćena diferencijalna jednadžba:

$$y'' + 2y = 0$$

$$r^2 + 2 = 0; \quad r_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$$

$$y_0 = C_1 \cos\sqrt{2}\,x + C_2 \sin\sqrt{2}\,x \qquad \text{(a)}$$

$\eta = ?$ $r = 0$; $n = 2$; $r + n = 2$; η je dakle polinom stepena 2:

$$\eta = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad \text{(b)}$$

Odredimo

$$a_2, a_1 \text{ i } a_0.$$

Kako je η partikularno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe, vrijednosti η, η' i η'' moraju zadovoljavati diferencijalnu jednadžbu.
Računamo:

$$\eta' = 2a_2 x + a_1$$

$$\eta'' = 2a_2$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje:

$$2a_2 + 2a_2 x^2 + 2a_1 x + 2a_0 \equiv x^2 + 1$$

ili

$$2a_2 x^2 + 2a_1 x + (2a_2 + 2a_0) \equiv x^2 + 1$$

Dva su polinoma indentički jednaka, kad su im jednaki koeficijenti od istih potencija x. Dakle

$$\left.\begin{aligned} 2a_2 &= 1 \\ 2a_1 &= 0 \\ 2a_2 + 2a_0 &= 1 \end{aligned}\right| \quad \text{odatle:}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = 0$$

Uvrštenje u (b) daje:

$$\eta = \frac{x^2}{2} \tag{c}$$

a kako je $y = y_0 + \eta$, imamo prema (a) i (c) traženo opće rješenje:

$$\underline{y = C_1 \cos\sqrt{2}\,x + C_2 \sin\sqrt{2}\,x + \frac{x^2}{2}}$$

2.

$$y'' - y' = 1 + 2x - 3x^2 \tag{a}$$

$$r^2 - r = 0$$

$$r(r-1) = 0; \quad r_1 = 0; \quad r_2 = 1$$

$$y_0 = C_1 + C_2 e^x$$

$$\eta = ? \quad r = 1; \quad n = 2; \quad r + n = 3$$

$$\eta = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \tag{b}$$

$$\left.\begin{aligned} \eta' &= 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1 \\ \eta'' &= 6a_3 x + 2a_2 \end{aligned}\right| \tag{c}$$

Uvrštenje (c) u (a) daje:

$$6a_3 x + 2a_2 - 3a_3 x^2 - 2a_2 x - a_1 \equiv 1 + 2x - 3x^2$$

ili

$$-3a_3 x^2 + (6a_3 - 2a_2)\,x + (2a_2 - a_1) \equiv 3x^2 + 2x + 1$$

Odatle

$$\left.\begin{aligned} -3a_3 &= -3 \\ 6a_3 - 2a_2 &= 2 \\ 2a_2 - a_1 &= 1 \end{aligned}\right| \quad \text{Odatle:}$$

$$a_3 = 1; \quad a_2 = 2; \quad a_1 = 3$$

Uvrštenje u (b) daje:

$$\eta = x^3 + 2x^2 + 3x + a_0$$

Prema $y = y_0 + \eta$ imamo:

$$y = C_1 + C_2 e^x + x^3 + 2x^2 + 3x + a_0$$

ili uz

$$C_1 + a_0 = C$$

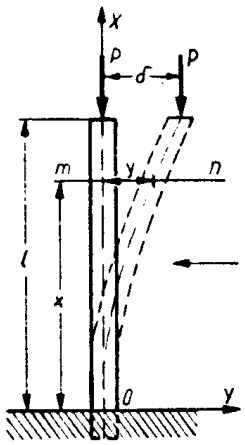
$$\underline{y = C + C_2 e^x + x^3 + 2x^2 + 3x}$$

3. Primjer iz čvrstoće.

Izvedimo Eulerovu formulu za vrijednost kritične sile P, kod koje se vertikalni štap upet donjim krajem počinje izvijati (sl. 102).

Diferencijalna jednadžba elastične linije nam je poznata (vidi primjer 2 na str. 281):

$$y'' = \frac{M_x}{EI}$$



Sl. 102.

Za presjek $m - n$ u udaljenosti x imamo prema slici 102:

$$M_x = P(\delta - y)$$

pa je

$$y'' = \frac{P}{EI}(\delta - y)$$

diferencijalna jednadžba elastične linije za naš slučaj. (Na desnoj strani uzet je predznak +, jer je elastična linija konkavna, pa je $y'' > 0$).

Odatle

$$y'' + \frac{P}{EI}y = \frac{P\delta}{EI}$$

a to je baš slučaj I. nehomogene diferencijalne jednadžbe, jer je na desnoj strani konstanta, t. j. polinom nultog stepena. Odredimo opće rješenje $y = y_0 + \eta$ diferencijalne jednadžbe.

Označimo

$$\frac{P}{EI} = \alpha^2 \tag{a}$$

pa imamo

$$y'' + \alpha^2 y = \alpha^2\delta \tag{b}$$

Karakteristična jednadžba:

$$r^2 + \alpha^2 = 0$$

$$r_{1,2} = \pm i\alpha$$

$$y_0 = C_1 e^{i\alpha x} + C_2 e^{-i\alpha x}$$

ili prema (108):

$$y_0 = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) \tag{c}$$

$$\eta = ? \quad r + n = 0 + 0 = 0$$

$$\eta = a_0 \quad \text{(polinom nultog stepena)}$$

$$\eta' = 0; \quad \eta'' = 0$$

Uvrštenje u (b) daje

$$\alpha^2 a_0 = \alpha^2\delta$$

pa je

$$a_0 = \delta$$

Opće rješenje $y = y_0 + \eta$ glasi dakle:

$$y = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) + \delta \tag{d}$$

Odatle

$$y' = -A\alpha\sin(\alpha x) + B\alpha\cos(\alpha x) \tag{e}$$

Uvedimo početne uvjete.

Prema slici 102: za $x = 0$ $y = 0$ i $y' = \operatorname{tg}\alpha = 0$

Uvrštenje u (d) i (e) daje:

$$0 = A + \delta$$

$$0 = B\alpha$$

Odatle:

$$A = -\delta \quad \text{i} \quad B = 0$$

pa partikularno rješenje prema (d) glasi:

$$y = -\delta \cdot \cos(\alpha x) + \delta$$

ili

$$y = \delta[1 - \cos(\alpha x)] \tag{f}$$

Iz slike 102 vidimo dalje, da je na gornjem kraju štapa, t. j. za $x = l$ progib $y = \delta$

Uvrštenje u (f) daje:

$$\delta = \delta[1 - \cos(\alpha l)]$$

ili

$$\cos(\alpha l) = 0$$

Znamo, da je kosinus jednak nuli, kad je njegov argument, u našem slučaju αl, jednak $1 \cdot \frac{\pi}{2}$, $3 \cdot \frac{\pi}{2}$, $5 \cdot \frac{\pi}{2}$, · · · · · ili općenito za $(2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$.

Imamo dakle

$$\alpha l = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$$

a odatle je

$$\alpha = \frac{(2n + 1)\pi}{2l}$$

Uvrstimo li tu vrijednost α u našu oznaku (a): $\frac{P}{EI} = \alpha^2$, dobijemo

$$\frac{P}{EI} = \frac{(2n + 1)^2 \cdot \pi^2}{4l^2}$$

pa izraz za traženu kritičnu silu P glasi:

$$P = \frac{(2n + 1)^2 \cdot \pi^2 EI}{4l^2}$$

Najmanju kritičnu silu P, t. j. silu, kod koje nastaje mogućnost izvijanja štapa, dobijemo za $n = 0$:

$$\underline{P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}}$$

Riješi:

$$y'' - 4y' - 5y = x + 3 \qquad \left[y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{5}x - \frac{11}{25}\right]$$

$$y''' - 3y' + 2y = x^2 \qquad \left[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} + C_3 x e^{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right]$$

$$y'' + 4y' - 5y = 1 \qquad \left[y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-5x} - \frac{1}{5}\right].$$

II. slučaj. Desna strana diferencijalne jednadžbe je $f(x) = ke^{bx}$, gdje su k i b zadane konstante

U tom slučaju partikularno rješenje glasi:

$$\eta = \frac{ke^{bx}}{P(b)} \tag{A}$$

ako eksponent b nije korijen karakteristične jednadžbe, t. j. ako je

$$b \neq r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq \ldots.$$

$$\eta = \frac{kxe^{bx}}{P'(b)} \tag{B}$$

ako je b jednostruki korijen karakteristične jednadžbe, t. j. ako je

$$b = r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq \ldots.$$

$$\eta = \frac{kx^2e^{bx}}{P''(b)} \tag{C}$$

ako je b dvostruki korijen karakteristične jednadžbe, t. j. ako je

$$b = r_1 = r_2 \neq r_3 \neq r_4 \neq \ldots.$$

i t. d.

Tu je $P(b)$ lijeva strana karakteristične jednadžbe, u koju je uvršteno $r = b$, a $P'(b)$ i $P''(b)$ su derivacije tog polinoma.

Primjeri

1.

$$y''' - 3y' + 2y = 7e^{3x}$$

$$r^3 - 3r + 2 = 0 \tag{a}$$

$$r^3 - 4r + r + 2 = 0$$

$$r(r^2 - 4) + (r + 2) = 0$$

$$r(r + 2)(r - 2) + (r + 2) = 0$$

$$(r + 2)(r^2 - 2r + 1) = 0$$

$$r_1 = -2; \quad r_{2,3} = 1$$

$$y_0 = C_1 e^{-2x} + (C_2 + C_3 x)e^x \tag{b}$$

$b = 3 \neq r_1 \neq r_3$ — slučaj (A).

Prema (a):

$$P(b) = b^3 - 3b + 2$$

a za $b = 3$

$$P(3) = 27 - 9 + 2 = 20$$

Uvrštenje $k = 7$, $b = 3$ i $P(b) = 20$ u (A) daje:

$$\eta = \frac{7e^{3x}}{20}$$

pa opće rješenje $y = y_0 + \eta$ glasi

$$\underline{y = C_1 e^{-2x} + (C_2 + C_3 x) e^x + \frac{7}{20} e^{3x}}$$

2. Uzmimo sada, da zadana diferencijalna jednadžba glasi:

$$y''' - 3y' + 2y = 7e^{-2x}$$

t. j. promijenimo eksponent od e u diferencijalnoj jednadžbi primjera 1.
Kako je razlika samo u eksponentu od e, jer je sada $b = -2$, y_0 ostaje isti, ali se η mijenja.

$$b = -2 = r_1 \neq r_2 \neq r_3 \text{ — imamo slučaj (B).}$$

$$P(b) = b^3 - 3b + 2$$

$$P'(b) = 3b^2 - 3$$

a za $b = -2$

$$P'(-2) = 3 \cdot 4 - 3 = 9$$

Uvrštenje u (B) daje

$$\eta = \frac{7xe^{-2x}}{9}$$

pa opće rješenje glasi:

$$\underline{y = C_1 e^{-2x} + (C_2 + C_3 x) e^x + \frac{7}{9} x e^{-2x}}$$

3. Neka naša zadana diferencijalna jednadžba glasi konačno:

$$y''' - 3y' + 2y = 7e^x$$

Opet je razlika samo u eksponentu od e, jer je sada $b = 1$, a kako je

$$b = r_2 = r_3 \neq r_1$$

imamo slučaj (C).

$$P(b) = b^3 - 3b + 2$$

$$P'(b) = 3b^2 - 3$$

$$P''(b) = 6b$$

a za $b = 1$

$$P''(1) = 6$$

Uvrštenje u (C) daje

$$\eta = \frac{7x^2e^x}{6}$$

pa opće rješenje diferencijalne jednadžbe glasi:

$$\underline{y = C_1 e^{-2x} + (C_2 + C_3 x) e^x + \frac{7}{6} x^2 e^x}$$

Riješi:

$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{2x}$ $\quad [(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^x + e^{2x}]$

$y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 5e^{3x}$ $\quad \left[r_1 = -1;\ y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x) e^{3x} + \frac{5}{8} x^2 e^{3x}\right]$

Primjedba. Ako je desna strana diferencijalne jednadžbe algebarski zbroj eksponencijalnih funkcija, tada se odredi partikularno rješenje za svaku eksponencijalnu funkciju posebno, pa je opće rješenje

$$y = y_0 + \eta_1 + \eta_2 + \ldots.$$

Primjer

$$y'' - 6y' + 8y = e^x + e^{2x}$$

$$r^2 - 6r + 8 = 0$$

odatle

$$r_1 = 4, \quad r_2 = 2$$

$$y_0 = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x}$$

$y'' - 6y' + 8y = e^x$	$y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$
$b = 1 \neq r_1 \neq r_2$	$b = 2 = r_2 \neq r_1$
Prema (A):	Prema (B):
$P(b) = b^2 - 6b + 8$	$P'(b) = 2b - 6$
$P(1) = 3$	$P'(2) = -2$
$\eta = \frac{e^x}{3}$	$\eta_2 = \frac{x\,e^{2x}}{-2}$

$$\underline{y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{3} e^x - \frac{1}{2} x\, e^{2x}}$$

Riješi:

$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} + 7e^{2x}$ $\quad \left[y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \frac{3}{2} x^2 e^{-x} + \frac{7}{9} e^{2x}\right]$

III. slučaj. Desna strana diferencijalne jednadžbe je $f(x) = k \sin(mx)$ ili $k \cos(mx)$

U tom je slučaju:

$$\eta = A \cos(mx) + B \sin(mx)$$

gdje su A i B konstante, koje treba odrediti iz uvjeta, da je η partikularno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe, pa je mora zadovoljavati, dok je m zadana konstanta.

Primjeri

1. $$y'' - 3y' - 4y = \sin x$$

$$r^2 - 3r - 4 = 0; \quad r_1 = 4; \quad r_2 = -1$$

$$y_0 = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$$

$\eta = A \cos x + B \sin x$	Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje:
$\eta' = -A \sin x + B \cos x$	
$\eta'' = -A \cos x - B \sin x$	

$$-A \cos x - B \sin x + 3A \sin x - 3B \cos x - 4A \cos x - 4B \sin x = \sin x$$

ili

$$(-5A - 3B) \cos x + (3A - 5B) \sin x = \sin x$$

Izjednačimo koeficijente od $\cos x$ i $\sin x$ lijeve i desne strane jednadžbe:

$$-5A - 3B = 0$$
$$3A - 5B = 1$$

Odatle:

$$A = \frac{3}{34}; \quad B = -\frac{5}{34}$$

pa je

$$\eta = \frac{3}{34}\cos x - \frac{5}{34}\sin x$$

$$\underline{y = y_0 + \eta = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{34}(3\cos x - 5\sin x)}$$

2. $$y'' - 4y' - 5y = 4\cos 3x$$

$$r^2 - 4r - 5 = 0; \quad r_1 = 5; \quad r_2 = -1$$

$$y_0 = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x}$$

$$\eta = A\cos 3x + B\sin 3x$$
$$\eta' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$$
$$\eta'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + 12A\sin 3x - 12B\cos 3x - 5A\cos 3x - 5B\sin 3x = 4\cos 3x$$

ili

$$(-14A - 12B)\cos 3x + (12A - 14B)\sin 3x = 4\cos 3x$$

Odatle:

$$-14A - 12B = 4$$
$$12A - 14B = 0$$

Odatle:

$$A = -\frac{14}{85}; \quad B = -\frac{12}{85}$$

pa je

$$\eta = -\frac{14}{85}\cos 3x - \frac{12}{85}\sin 3x$$

$$\underline{y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x} - \frac{2}{85}(7\cos 3x + 6\sin 3x)}$$

Važna primjedba. Ako diferencijalna jednadžba ima oblik

$$y'' + m^2 y = k\sin(mx) \qquad \text{ili} \qquad y'' + m^2 y = k\cos(mx)$$

(na pr. $y'' + 4y = 7\cos 2x$; $y'' + y = 5\sin x$ i sl.)

gornja supstitucija $\eta = A\cos(mx) + B\sin(mx)$ ne vodi cilju, jer uvrštenje vrijednosti za η, η' i η'' u diferencijalnu jednadžbu pretvara lijevu stranu jednadžbe u nulu, pa koeficijenti A i B ostaju neodređeni.

Isto vrijedi za jednadžbe, kojima je desna strana ista, dok je lijeva strana $y^{(IV)} - m^4 y$, odnosno $y^{(IV)} + 2m^2 y'' + m^4 y$ i sl.

U tom slučaju moramo $\sin(mx)$, odnosno $\cos(mx)$ prikazati prema Eulerovim formulama u obliku

$$\sin(mx) = \frac{e^{mix} - e^{-mix}}{2i}$$
$$\cos(mx) = \frac{e^{mix} + e^{-mix}}{2} \qquad \text{(a)}$$

(vidi Dio I. § 21) pa na taj način svesti ovaj slučaj na drugi, t. j. na slučaj, kad je $f(x)$ eksponencijalna funkcija.

Primjer

$$y'' + 9y = 4\sin(3x)$$

$$r^2 + 9 = 0; \quad r_{1,2} = \pm 3i$$

$$y_0 = C_1 e^{3ix} + C_2 e^{-3ix} = \text{prema (108)} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

Prema (a):

$$y'' + 9y = 4\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i}$$

ili

$$y'' + 9y = \frac{2}{i} e^{3ix} - \frac{2}{i} e^{-3ix} \qquad \text{(vidi II. slučaj!).}$$

$y'' + 9y = \frac{2}{i} e^{3ix}$	$y'' + 9y = -\frac{2}{i} e^{-3ix}$
$b = 3i = r_1 \neq r_2$	$b = -3i = r_2 \neq r_1$
Prema (B):	Prema (B):
$\eta = \frac{k x e^{bx}}{P'(b)}$	$\eta = \frac{k x e^{bx}}{P'(b)}$
$P(b) = b^2 + 9$	$P(b) = b^2 + 9$
$P'(b) = 2b$	$P'(b) = 2b$
$P'(3i) = 6i$	$P'(-3i) = -6i$
$\eta_1 = \frac{2x e^{3ix}}{i \cdot 6i} = -\frac{2x e^{3ix}}{6}$	$\eta_2 = -\frac{2x e^{-3ix}}{-i \cdot 6i} = -\frac{2x e^{-3ix}}{6}$

$$y = y_0 + \eta_1 + \eta_2 = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{2}{3} x \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2}$$

ili prema (a)

$$\underline{y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{2}{3} x \cos 3x}$$

2. $$y'' + y = \sin x \cdot \sin 2x$$

Prema poznatoj trigonometrijskoj formuli imamo (vidi Repet. elem. mat. III. § 10):

$$y'' + y = \frac{1}{2}[\cos(x - 2x) - \cos 3x]$$

ili

$$y'' + y = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)$$

$$r^2 + 1 = 0 \quad ; \quad r_{1,2} = \pm i$$

$$y_0 = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$y'' + y = \frac{1}{2}\cos x$$

$$y'' + y = \frac{1}{4}e^{ix} + \frac{1}{4}e^{-ix}$$

$$y'' + y = \frac{1}{4}e^{ix} \quad ; \quad b = i = r_1 \neq r_2$$

$$\eta = \frac{k x e^{bx}}{P'(b)}$$

$$P(b) = b^2 + 1$$

$$P'(b) = 2b$$

$$P'(i) = 2i$$

$$\eta_1 = \frac{x e^{ix}}{4 \cdot 2i}$$

$$y'' + y = \frac{1}{4}e^{-ix}$$

$$b = -i = r_2 \neq r_1$$

$$P'(-i) = -2i$$

$$\eta_2 = -\frac{x e^{-ix}}{4 \cdot 2i}$$

$$\eta_1 + \eta_2 = \frac{x}{4}\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{4}x \sin x$$

$$y'' + y = -\frac{1}{2}\cos 3x$$

Na isti način riješimo i ovu jednadžbu

$$y'' + y = -\frac{1}{4}e^{3ix} - \frac{1}{4}e^{-3ix}$$

$$y'' + y = -\frac{1}{4}e^{3ix}$$

$$b = 3i = r_1 \neq r_2$$

$$\eta = \frac{k e^{bx}}{P'(b)}$$

$$P(b) = b^2 + 1$$

$$P(\pm 3i) = -8$$

$$\eta_3 = \frac{e^{3ix}}{32}$$

$$y'' + y = -\frac{1}{4}e^{-3ix}$$

$$\eta_4 = -\frac{e^{-3ix}}{32}$$

$$\eta_3 + \eta_4 = \frac{1}{16}\,\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} = \frac{1}{16}\cos 3x$$

$$y = y_0 + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4$$

$$\underline{y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{4}x \sin x + \frac{1}{16}\cos 3x}$$

$$y^{(IV)} - 16y = 5 \sin 2x$$

$$r^4 - 16 = 0; \qquad (r^2 - 4)(r^2 + 4) = 0; \qquad r_{1,2} = \pm 2; \qquad r_{3,4} = \pm 2i$$

$$y_0 = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x} + C_3 \cdot \cos 2x + C_4 \cdot \sin 2x$$

$$y^{(IV)} - 16y = 5\,\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}$$

$$y^{(IV)} - 16y = \frac{5}{2i} \cdot e^{2ix}$$

$$b = 2i = r_3 \neq r_1 \neq r_2 \neq r_4$$

$$y^{(IV)} - 16y = -\frac{5}{2i} \cdot e^{-2ix}$$

$$b = -2i = r_4 \neq r_1 \neq r_2 \neq r_3$$

$$\eta = \frac{k x e^{bx}}{P'(b)}$$

$$P(b) = b^4 - 16$$

$$P'(b) = 4b^3$$

$$P'(2i) = 4(2i)^3 = -32i \qquad \Big| \qquad P'(-2i) = 4(-2i)^3 = 32i$$

$$\eta = \frac{5}{2i} \cdot \frac{x \cdot e^{2ix}}{-32i} = \frac{5}{64} \cdot x \cdot e^{2ix} \qquad \Big| \qquad \eta = -\frac{5}{2i} \cdot \frac{x \cdot e^{-2ix}}{32i} = \frac{5}{64} x \cdot e^{-2ix}$$

$$\eta_1 + \eta_2 = \frac{5}{32} x \frac{e^{2ix} + {}^{-2ix}}{2} = \frac{5}{32} x \cdot \cos 2x$$

$$y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x} + C_3 \cdot \cos 2x + C_4 \cdot \sin 2x + \frac{5}{32} x \cdot \cos 2x$$

Riješi:

$y'' - 7y' + 6y = \sin x$ $\quad \left[y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x + \frac{1}{74}(7 \cos x + 5 \sin x) \right]$

$y'' + 4y = \cos 2x$ $\quad \left[y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x \right]$

$y'' + y = 5 \sin x$ $\quad \left[y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{5}{2} x \cos x \right]$

$y^{(IV)} - y = \cos x$ $\quad [y = C_1 \cdot e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cdot \cos x + C_4 \cdot \sin x - \frac{1}{4} x \cdot \sin x]$

$y^{(IV)} + 2a^2 y'' + a^4 y = \cos(ax)$ $\quad [y = (A + Cx) \cos(ax) + (B + Dx) \sin(ax) - \frac{x^2}{8a^2} \cos(ax)]$

IV. slučaj. Desna strana diferencijalne jednadžbe $f(x)$ je zbroj polinoma, eksponencijalne funkcije i funkcije sinusa ili kosinusa

Na gore opisani način određuje se za svaki pojedini član desne strane $f(x)$ diferencijalne jednadžbe partikularno rješenje η, pa je opće rješenje

$$y = y_0 + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots$$

Primjer

$$y'' - y = 1 - x^2 + e^{2x}$$

$$r^2 - 1 = 0; \quad r_{1,2} = \pm 1$$

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$y'' - y = 1 - x^2$

Imamo prvi slučaj:

$r = 0; \quad n = 2 \quad r + n = 2$

$\eta = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$\eta' = 2a_2 x + a_1$

$\eta'' = 2a_2$

$2a_2 - a_2 x^2 - a_1 x - a_0 \equiv 1 - x^2$

$-a_2 x^2 - a_1 x + (2a_2 - a_0) \equiv -x^2 + 1$

$-a_2 = -1; \quad a_2 = 1$

$-a_1 = 0; \quad a_1 = 0$

$2a_2 - a_0 = 1; \quad a_0 = 1$

$\eta_1 = x^2 + 1$

$y'' - y = e^{2x}$

Imamo drugi slučaj:

$b = 2 \neq r_1 \neq r_2$

Prema (A):

$\eta = \frac{k e^{bx}}{P(b)}$

$P(b) = b^2 - 1$

$P(2) = 4 - 1 = 3$

$\eta_2 = \frac{e^{2x}}{3}$

$$y = y_0 + \eta_1 + \eta_2 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x^2 + 1 + \frac{1}{3} e^{2x}$$

Riješi:

$y'' - 7y' + 10y = 10x + 10 \sin x \qquad \left[y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{2x} + x + \frac{7}{10} + \frac{1}{13}(7 \cos x + 9 \sin x)\right]$

$y''' - y = 2 + e^x \qquad \left[y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) - 2 + \frac{1}{3} x e^x\right]$

V. slučaj. Desna strana diferencijalne jednadžbe je

$$f(x) = (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0) e^{bx}$$

t. j. umnožak je polinoma n-tog stepena i eksponencijalne funkcije. U tom je slučaju

$$\eta = x^s (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) e^{bx}$$

Tu je

$s = 0$, pa je $x^s = x^0 = 1$, ako b nije korijen karakteristične jednadžbe, t. j. ako je

$$b \neq r_1 \neq r_2 \neq \ldots$$

$s = 1$, ako je b jednostruki korijen karakteristične jednadžbe, t. j. ako je

$$b = r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq \ldots$$

$s = 2$, ako je b dvostruki korijen karakteristične jednadžbe, t. j. ako je

$$b = r_1 = r_2 \neq r_3 \neq r_4 \neq \ldots$$

Vidimo, da u η ulazi polinom istog stepena n, čije koeficijente $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ treba odrediti.

Primjeri

1.
$$y'' + y' - 6y = (3 - 4x) e^x$$

$$r^2 + r - 6 = 0; \quad r_1 = 2; \quad r_2 = -3$$

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$$

$s = 0$, jer je $b = 1 \neq r_1 \neq r_2$

$$\eta = (a_1 x + a_0) e^x$$

$$\eta' = (a_1 x + a_0) e^x + a_1 e^x$$

ili

$$\eta' = e^x (a_1 x + a_0 + a_1)$$

$$\eta'' = a_1 e^x + (a_1 x + a_0 + a_1) e^x$$

ili

$$\eta'' = e^x (a_1 x + 2a_1 + a_0)$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje:

$$e^x (a_1 x + 2a_1 + a_0 + a_1 x + a_0 + a_1 - 6a_1 x - 6a_0) \equiv (3 - 4x) e^x$$

Podijelivši s e^x i uredivši dobijemo:

$$-4a_1 x + (3a_1 - 4a_0) \equiv 3 - 4x$$

Izjednačimo koeficijente:

$$\left.\begin{aligned} -4a_1 &= -4 \\ 3a_1 - 4a_0 &= 3 \end{aligned}\right|$$

Odatle:

$$a_1 = 1; \qquad a_0 = 0$$

pa je

$$\eta = (a_1 x + a_0)\, e^x = x\, e^x$$

i

$$\underline{y = y_0 + \eta = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + x\, e^x}$$

2. $$y'' - 5y' + 6y = (1 - x)\, e^{2x}$$

$$r^2 - 5r + 6 = 0; \quad r_1 = 3; \quad r_2 = 2$$

$$y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

$s = 1$, jer je $b = 2 = r_2 \neq r_1$

$$\eta = x\,(a_1 x + a_0)\, e^{2x}$$

ili

$$\eta = (a_1 x^2 + a_0 x)\, e^{2x}$$

$$\eta' = 2(a_1 x^2 + a_0 x)\, e^{2x} + e^{2x}(2a_1 x + a_0)$$

ili

$$\eta' = e^{2x}(2a_1 x^2 + 2a_0 x + 2a_1 x + a_0)$$

ili

$$\eta' = e^{2x}[2\, a_1 x^2 + 2\,(a_1 + a_0)\, x + a_0]$$

$$\eta'' = e^{2x}[4\, a_1 x + 2\,(a_1 + a_0)] + 2\,[2\, a_1 x^2 + 2\,(a_1 + a_0)\, x + a_0)]\, e^{2x} =$$

$$= e^{2x}[4\, a_1 x + 2\, a_1 + 2\, a_0 + 4\, a_1 x^2 + 4\,(a_1 + a_0)\, x + 2\, a_0]$$

ili

$$\eta'' = e^{2x}[4\, a_1 x^2 + (8\, a_1 + 4\, a_0)\, x + 2\, a_1 + 4\, a_0]$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje:

$$e^{2x}\{[4a_1 x^2 + (8a_1 + 4a_0)x + 2a_1 + 4a_0] - 10a_1 x^2 - 10(a_1 + a_0)x - 5a_0 + 6a_1 x^2 + 6a_0 x\} \equiv$$

$$\equiv (1 - x)\, e^{2x}$$

Podijelivši s e^{2x} i uredivši dobijemo:

$$-2\, a_1 x + (2\, a_1 - a_0) \equiv 1 - x$$

Izjednačimo koeficijente:

$$-2\, a_1 = -1; \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

$$2\, a_1 - a_0 = 1$$

$$1 - a_0 = 1; \quad a_0 = 0$$

Uvrštenje u $\eta = x\,(a_1 x + a_0) \cdot e^{2x}$ daje

$$\eta = \frac{x^2}{2} e^{2x}$$

$$\underline{y = y_0 + \eta = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}}$$

Riješi:

$y'' - 7\, y' + 12\, y = x\, e^x$ $\qquad \left[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{6x + 5}{36} e^x\right]$

$y^{(IV)} - y = x\, e^x$ $\qquad \left[y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{x^2 - 3\, x}{8} e^x\right]$

VI. slučaj. Desna strana diferencijalne jednadžbe ima oblik:

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$$

ili

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad \text{(a)}$$

gdje su α i β zadane konstante. U tom slučaju partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe glasi:

$$\eta = x^s e^{\alpha x}[Q_n(x)\cos\beta x + R_n(x)\sin\beta x] \qquad \text{(b)}$$

gdje je:

$s = 0$, ako je $\alpha \pm i\beta$ nije par konjugirano kompleksnih korijena karakteristične jednadžbe,

$s = 1$, ako je $\alpha \pm i\beta$ jednostruki par konjugirano kompleksnih korijena karakteristične jednadžbe,

$s = 2$, ako je $\alpha + i\beta$ dvostruki par konjugirano kompleksnih korijena te jednadžbe i. t. d.

dok su $Q_n(x)$ i $R_n(x)$ polinomi istog stepena kao i zadani polinom $P_n(x)$

Njihove koeficijente određujemo metodom neodređenih koeficijenata.

Isti oblik ima partikularno rješenje η, ako je desna strana diferencijalne jednadžbe oblika:

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + P_m(x)\sin\beta x] \qquad \text{(c)}$$

t. j. zadani su polinomi različitog stepena n i m, pri čemu treba u η uzeti polinom stepena n, ako je $n > m$, odnosno stepena m, ako je $m > n$.

Primjeri

1.

$$y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}\cos x$$

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

$$r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1$$

$$y_0 = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$$

Iz uspoređenja desne strane zadane diferencijalne jednadžbe s njenim općim oblikom

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$$

vidimo, da je

$$\alpha = -1 \quad ; \quad \beta = 1$$

pa je

$$\alpha \pm i\beta = -1 \pm i$$

a kako karakteristična jednadžba uopće nema konjugirano kompleksnih rješenja

$$s = 0$$

pa je

$$x^s = x^0 = 1$$

Dalje imamo

$$x^2 = P_2(x)$$

dakle

$$Q_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$R_2(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$$

Partikularno rješenje glasi dakle:

$$\eta = e^{-x}[(a_2x^2 + a_1x + a_0)\cos x + (b_2x^2 + b_1x + b_0)\sin x]$$

Neodređene koeficijente a_2, a_1, a_0, b_2, b_1 i b_0 odredimo pomoću uvjeta, da je η partikularno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe, pa je mora zadovoljavati. U tu svrhu računamo η' i η''. Nakon uređenja dobivamo:

$$\eta = e^{-x}\{[(-a_2 - b_2)x^2 + (-a_1 + 2b_2 - b_1)x + (-a_0 + b_1 - b_0)]\sin x + \\ + [(b_2 - a_2)x^2 + (2a_2 + b_1 - a_1)x + (a_1 + b_0 - a_0)]\cos x\}$$

$$\eta'' = e^{-x}\{[+2a_2x^2 + (-4a_2 - 4b_2 + 2a_1)x + (2b_2 - 2a_1 - 2b_1 + 2a_0)]\sin x + \\ + [-2b_2x^2 + (4b_2 - 4a_2 - 2b_1)x + (2a_2 + 2b_1 - 2a_1 - 2b_0)]\cos x\}$$

Nakon uvrštenja dobivenih izraza za η'', η' i η u diferencijalnu jednadžbu i uređenja dobivamo:

$$e^{-x}\{[-b_2x^2 + (-4a_2 - b_1)x + (2b_2 - 2a_1 - b_0)]\sin x + \\ + [-a_2x^2 + (4b_2 - a_1)x + (2a_2 + 2b_1 - a_0)]\cos x\} \equiv x^2e^{-x}\cos x$$

Odatle slijedi:

$$-b_2x^2 + (-4a_2 - b_1)x + (2b_2 - 2a_1 - b_0) \equiv 0$$
$$-a_2x^2 + (4b_2 - a_1)x + (2a_2 + 2b_1 - a_0) \equiv x^2$$

pa je

$$b_2 = 0$$
$$-4a_2 - b_1 = 0$$
$$2b_2 - 2a_1 - b_0 = 0$$
$$-a_2 = 1$$
$$4b_2 - a_1 = 0$$
$$2a_2 + 2b_1 - a_0 = 0$$

Odatle dobijemo:

$$a_2 = -1; \quad a_1 = 0; \quad a_0 = 6$$
$$b_2 = 0; \quad b_1 = 4; \quad b_0 = 2$$

Uvrštenje u η daje:

$$\eta = e^{-x}[(-x^2 + 6)\cos x + 4x\sin x]$$

Opće rješenje:

$$\underline{y = y_0 + \eta = e^{-x}[C_1 + C_2x - (x^2 - 6)\cos x + 4x\sin x]}$$

2. $$y'' - 2y' + 5y = e^x(4\cos 2x - 3x\sin 2x)$$

$$r^2 - 2r + 5 = 0$$

$$r_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2i$$

$$y_0 = C_1e^{(1+2i)x} + C_2e^{(1-2i)x} = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

$$\alpha = 1 \quad ; \quad \beta = 2.$$

$\alpha \pm i\beta = 1 \pm 2i$ je jednostruki par konjugirano kompleksnih korijena karakteristične jednadžbe, pa je

$$s = 1$$

4 je polinom nultog, dok je $-3x$ polinom prvog, dakle višeg stepena, pa je

$$\eta = x e^x [(a_1 x + a_0) \cos 2x + (b_1 x + b_0) \sin 2x]$$

ili

$$\eta = e^x [(a_1 x^2 + a_0 x) \cos 2x + (b_1 x^2 + b_0 x) \sin 2x]$$

Računamo, pa nakon uređenja dobijemo:

$$\eta' = e^x \Big\{ [(-2a_1 + b_1) x^2 + (-2a_0 + 2b_1 + b_0) x + b_0] \sin 2x + \\ + [(2b_1 + a_1) x^2 + (2a_1 + 2b_0 + a_0) x + a_0] \cos 2x \Big\}$$

$$\eta'' = e^x \Big\{ [(-4a_1 - 3b_1) x^2 + (-8a_1 + 4b_1 - 4a_0 - 3b_0) x + (2b_1 - 4a_0 + 2b_0)] \sin 2x + \\ + [(-3a_1 + 4b_1) x^2 + (4a_1 + 8b_1 - 3a_0 + 4b_0) x + (2a_1 + 2a_0 + 4b_0)] \cos 2x \Big\}$$

Nakon uvrštenja u diferencijalnu jednadžbu i uređivanja dobijemo:

$$e^x \Big\{ [-8a_1 x + (2b_1 - 4a_0)] \sin 2x + [8b_1 x + (2a_1 + 4b_0)] \cos 2x \equiv e^x (4 \cos 2x - 3x \sin 2x) \Big\}$$

Slijedi:

$$-8a_1 x + (2b_1 - 4a_0) = -3x$$
$$8b_1 x + (2a_1 + 4b_0) = 4$$

Odatle

$$-8a_1 = -3$$
$$2b_1 - 4a_0 = 0$$
$$8b_1 = 0$$
$$2a_1 + 4b_0 = 4$$

pa je

$$a_1 = \frac{3}{8} \quad ; \quad a_0 = 0$$
$$b_1 = 0 \quad ; \quad b_0 = \frac{13}{16}$$

Uvrštenje u η daje:

$$\eta = x e^x \left(\frac{3}{8} x \cos 2x + \frac{13}{16} \sin 2x \right)$$

ili

$$\eta = \frac{1}{16} x e^x (6x \cos 2x + 13 \sin 2x)$$

Opće rješenje:

$$y = y_0 + \eta = e^x [A \cos 2x + B \sin 2x + \frac{1}{16} x (6x \cos 2x + 13 \sin 2x)]$$

ili

$$\underline{y = \frac{e^x}{16} [2(8A + 3x^2) \cos 2x + (16B + 13x) \sin 2x}$$

Ako je $\alpha = 0$, $e^{\alpha x} = e^0 = 1$, desna strana diferencijalne jednadžbe prima prema (a) i (c) oblik:

$$f(x) = P_n(x) \cos \beta x$$

ili

$$f(x) = P_n(x) \sin \beta x$$

ili

$$f(x) = P_n(x) \cos \beta x + P_m(x) \sin \beta x$$

pa prema (b) partikularno rješenje za sva tri slučaja glasi:

$$\eta = x^s [Q_n(x) \cos \beta x + R_n(x) \sin \beta x]$$

pri čemu u trećem slučaju treba uzeti u η, kao i prije, polinome stepena, koji je jednak višem od stepena polinoma $P_n(x)$ i $P_m(x)$.

I u daljnjem postupak je isti, treba samo držati na pameti, da je $\alpha = 0$.

Primjeri

1. $$y'' - y' = (12x - 3x^2) \cos 3x - (9x^2 + 2x - 2) \sin 3x$$

$$r^2 - r = 0$$

$$r(r - 1) = 0$$

$$r_1 = 0 \quad ; \quad r_2 = 1$$

$$y_0 = C_1 + C_2 e^x$$

$$\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = 3 \quad ; \quad \alpha \pm i\beta = \pm 3i \neq r_1 \neq r_2$$

dakle

$$s_0 = 0 \quad ; \quad x^0 = 1$$

pa je

$$\eta = (a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \cos 3x + (b_2 x^2 + b_1 x + b_0) \sin 3x$$

Računamo η' i η''. Nakon uređenja dobijemo:

$$\eta' = [-3a_2 x^2 + (-3a_1 + 2b_2)x + (-3a_0 + b_1)] \sin 3x + \\ + [3b_2 x^2 + (3b_1 + 2a_2)x + (3b_0 + a_1)] \cos 3x$$

$$\eta'' = [-9b_2 x^2 + (-12a_2 - 9b_1)x + (-6a_1 + 2b_2 - 9b_0)] \sin 3x + \\ + [-9a_2 x^2 + (12b_2 - 9a_1)x + (6b_1 + 2a_2 - 9a_0)] \cos 3x$$

Nakon uvrštenja u diferencijalnu jednadžbu i uređenja dobijemo:

$$[(3a_2 - 9b_2)x^2 + (-12a_2 - 2b_2 + 3a_1 - 9b_1)x + (2b_2 - 6a_1 - b_1 + 3a_0 - 9b_0)] \sin 3x + \\ + [(-9a_2 - 3b_2)x^2 + (12b_2 - 2a_2 - 9a_1 - 3b_1)x + (2a_2 + 6b_1 - a_1 - 9a_0 - 3b_0)] \cos 3x \equiv \\ \equiv (12x - 3x^2) \cos 3x - (9x^2 + 2x - 2) \sin 3x$$

Odatle:

$$(-9a_2 - 3b_2)x^2 + (12b_2 - 2a_2 - 9a_1 - 3b_1)x + (2a_2 + 6b_1 - a_1 - 9a_0 - 3b_0) \equiv \\ \equiv 12x - 3x^2$$

$$(3a_2 - 9b_2)x^2 + (-12a_2 - 2b_2 + 3a_1 - 9b_1)x + (2b_2 - 6a_1 - b_1 + 3a_0 - 9b_0) \equiv \\ \equiv -9x^2 - 2x + 2$$

pa je

$$
\begin{aligned}
&-9a_2 - 3b_2 = -3\\
&12b_2 - 2a_2 - 9a_1 - 3b_1 = 12\\
&2a_2 + 6b_1 - a_1 - 9a_0 - 3b_0 = 0\\
&3a_2 - 9b_2 = -9\\
&-12a_2 - 2b_2 + 3a_1 - 9b_1 = -2\\
&2b_2 - 6a_1 - b_1 + 3a_0 - 9b_0 = 2
\end{aligned}
$$

Riješimo li tih šest jednadžbi sa šest nepoznanica, dobit ćemo:

$$
\begin{aligned}
&a_2 = 0 \quad ; \quad a_1 = 0 \quad ; \quad a_0 = 0\\
&b_2 = 1 \quad ; \quad b_1 = 0 \quad ; \quad b_0 = 0
\end{aligned}
$$

pa partikularno rješenje glasi:

$$\eta = x^2 \sin 3x$$

Opće rješenje:

$$\underline{y = y_0 + \eta = C_1 + C_2 e^x + x^2 \sin 3x}$$

2.

$$y'' + 4y = 8x \sin 2x$$

$$r^2 + 4 = 0$$

$$r_{1,2} = \pm 2i$$

$$y_0 = C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$$\alpha = 0; \quad \beta = 2$$

dakle $\alpha \pm i\beta = \pm 2i = r_{1,2} =$ jednostruki par konjugirano kompleksnih korijena karakteristične jednadžbe, dakle

$$s = 1$$

pa je

$$\eta = x[(a_1 x + a_0) \cos 2x + (b_1 x + b_0) \sin 2x]$$

Računamo η' i η'':

$$\eta' = [-2a_1 x^2 + (2b_1 - 2a_0)x + b_0] \sin 2x + [2b_1 x^2 + (2a_1 + 2b_0)x + a_0] \cos 2x$$

$$\begin{aligned}\eta'' = {} & [-4b_1 x^2 + (-8a_1 - 4b_0)x + (2b_1 - 4a_0)] \sin 2x +\\ & + [-4a_1 x^2 + (8b_1 - 4a_0)x + (2a_1 + 4b_0)] \cos 2x\end{aligned}$$

Nakon uvrštenja u diferencijalnu jednadžbu i uređenja dobijemo:

$$[-8a_1 x + (2b_1 - 4a_0)] \sin 2x + [8b_1 x + (2a_1 + 4b_0)] \cos 2x \equiv 8x \sin 2x$$

Odatle slijedi:

$$
\begin{aligned}
-8a_1 x + (2b_1 - 4a_0) &\equiv 8x\\
8b_1 x + (2a_1 + 4b_0) &\equiv 0
\end{aligned}
$$

pa je

$$
\begin{aligned}
&-8a_1 = 8\\
&2b_1 - 4a_0 = 0\\
&8b_1 = 0\\
&2a_1 + 4b_0 = 0
\end{aligned}
$$

Dobijemo:

$$a_1 = -1 \quad ; \quad a_0 = 0$$

$$b_1 = 0 \quad ; \quad b_0 = \frac{1}{2}$$

Partikularno rješenje glasi:

$$\eta = x\left(-x\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)$$

Opće rješenje:

$$y = y_0 + \eta = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x$$

ili

$$\underline{y = (C_1 - x^2)\cos 2x + \left(C_2 + \frac{x}{2}\right)\sin 2x}$$

Konačno na isti način rješavaju se linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima, kojim je desna strana:

$$f(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

ili

$$f(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

ili

$$f(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x)$$

t. j. prema (a) i (c) $P_n(x) = Q_n(x) = R_m(x)$ je 1 ili konstanta, dakle su polinomi nultog stepena, pa je partikularno rješenje prema (b)

$$\eta = x^s e^{\alpha x}(a_0\cos\beta x + b_0\sin\beta x)$$

Primjer

$$y''' - 2y' + 4y = e^x\cos x$$

$$r^3 - 2r + 4 = 0$$

Nije teško pogoditi, da je

$$r_1 = -2$$

jer je

$$(-2)^3 - 2\cdot(-2) + 4 = 0$$

$$(r^3 - 2r + 4) : (r + 2) = r^2 - 2r + 2$$

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

$$r_{1,2} = 1 \pm i$$

$$y_0 = C_1 e^{-2x} + e^x(C_2\cos x + C_3\sin x)$$

$$\alpha = 1 \quad ; \quad \beta = 1$$

$\alpha \pm i\beta = 1 \pm i$ = jednostruki par konjugirano kompleksnih korijena karakteristične jednadžbe, dakle

$$s = 1$$

$$P_n(x) = 1 = \text{polinom nultog stepena.}$$

$$\eta = x\,e^x(a_0 \cos x + b_0 \sin x)$$

$$\eta' = e^x\left\{[(-a_0 + b_0)x + b_0] \sin x + [(a_0 + b_0)x + a_0] \cos x\right\}$$

$$\eta'' = e^x\left\{[(-2a_0 x + (-2a_0 + 2b_0)] \sin x + [2b_0 x + (2a_0 + 2b_0)] \cos x\right\}$$

$$\eta''' = e^x\left\{[(-2a_0 - 2b_0)x - 6a_0] \sin x + [(-2a_0 + 2b_0)x + 6b_0)] \cos x\right\}$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje:

$$e^x[(-6a_0 - 2b_0) \sin x + (-2a_0 + 6b_0)] \cos x \equiv e^x \cos x$$

Slijedi:

$$-6a_0 - 2b_0 = 0$$

$$-2a_0 + 6b_0 = 1$$

Odatle

$$a_0 = -\frac{1}{20} \quad ; \quad b_0 = \frac{3}{20}$$

pa je

$$\eta = x\,e^x\left(-\frac{1}{20}\cos x + \frac{3}{20}\sin x\right)$$

Opće rješenje:

$$\underline{y = y_0 + \eta = C_1 e^{-2x} + e^x(C_2 \cos x + C_3 \sin x) + \frac{x}{20}e^x(3 \sin x - \cos x)}$$

Riješi diferencijalne jednadžbe:

1. $y'' + y = 4x \sin x$

$[y = (C_1 - x^2) \cos x + (C_2 + x) \sin x]$

2. $y''' - y'' - 6y' = x \sin x$

$$\left\{y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{250}[(5x - 46) \sin x + (35x + 3) \cos x]\right\}$$

3. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 6x + 2x \sin x$

$[y = C_1 + C_2 x + (C_3 x + C_4)e^{-x} - 3 \sin x + (x - 1) \cos x].$

d) Rješavanje linearnih nehomogenih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima Lagrange-evim načinom varijacija konstanata

Govoreći o linearnim diferencijalnim jednadžbama prvoga reda pokazali smo, kako se te jednadžbe rješavaju načinom varijacija konstanata (vidi str. 265). Na taj način možemo rješavati i linearne nehomogene diferencijalne jednadžbe viših redova.

Pokažimo to na primjerima.

Primjeri

1. $y'' - y' = 1 + 2x - 3x^2$

$$r^2 - r = 0; \quad r_1 = 0; \quad r_2 = 1$$

$$y_0 = C_1 + C_2 e^x$$

Pretpostavivši, da C_1 i C_2 nisu konstante, već da su funkcije od x:

$$C_1 = C_1(x) \quad \text{i} \quad C_2 = C_2(x),$$

smatramo, da je

$$y = C_1(x) + C_2(x)\, e^x \tag{a}$$

opće rješenje zadane nehomogene diferencijalne jednadžbe, koje tu jednadžbu mora zadovoljavati.

Prema tome računamo:

$$y' = C_1' + C_2 e^x + e^x \cdot C_2'$$

ili

$$y' = C_2 e^x + (C_1' + e^x C_2')$$

Budući da tražimo dvije funkcije C_1 i C_2, jedan njihov odnos možemo uzeti po voljr, pa stavimo

$$C_1' + e^x C_2' = 0 \tag{b}$$

Ostaje

$$y' = C_2 e^x \tag{c}$$

Odatle

$$y'' = C_2 e^x + e^x C_2' \tag{d}$$

Uvrštenje (c) i (d) u diferencijalnu jednadžbu daje:

$$C_2 e^x + C_2' e^x - C_2 e^x = 1 + 2x - 3x^2$$

ili

$$C_2' e^x = 1 + 2x - 3x^2$$

imali smo (b) $\quad C_1' + e^x C_2' = 0$

Dobili smo dvije diferencijalne jednadžbe, iz kojih odredimo C_1 i C_2.

Iz prve jednadžbe imamo:

$$C_2' = \frac{1 + 2x - 3x^2}{e^x} \tag{e}$$

Uvrštenje u drugu jednadžbu daje:

$$C_1' + 1 + 2x - 3x^2 = 0$$

Odatle

$$dC_1 = (3x^2 - 2x - 1)\, dx$$

pa je

$$\underline{C_1 = x^3 - x^2 - x + A}$$

Iz (e) slijedi:

$$dC_2 = (e^{-x} + 2x e^{-x} - 3x^2 e^{-x})\, dx$$

Odatle integrirajući dobijemo:

$$C_2 = -e^{-x} + 2(-x e^{-x} - e^{-x}) - 3[-x^2 e^{-x} + 2(-x e^{-x} - e^{-x})] + B$$

ili

$$\underline{C_2 = 3e^{-x} + 4x e^{-x} + 3x^2 e^{-x} + B}$$

Uvrštenje vrijednosti dobivenih za C_1 i C_2 u

$$y = C_1 + C_2 e^x$$

daje traženo opće rješenje:

$$\underline{y = C + B e^x + x^3 + 2x^2 + 3x}$$

gdje je $C = A + 3$.

Isti rezultat smo dobili prije (vidi primjer 2. na str. 301).

2. $$y'' - 3y' - 4y = \sin x$$

$$r^2 - 3r - 4 = 0; \quad r_1 = 4; \quad r_2 = -1$$

$$y = C_1(x)\, e^{4x} + C_2(x) \cdot e^{-x} \qquad \text{(a)}$$

$$y' = 4C_1 e^{4x} - C_2 e^{-x} + (e^{4x} \cdot C'_1 + e^{-x} C'_2)$$

Stavimo:

$$e^{4x} \cdot C'_1 + e^{-x} \cdot C'_2 = 0 \qquad \text{(b)}$$

ostaje

$$y' = 4C_1 e^{4x} - C_2 e^{-x}$$

odatle

$$y'' = 16C_1 e^{4x} + 4e^{4x} \cdot C'_1 + C_2 e^{-x} - e^{-x} \cdot C'_2$$

Uvrštenje vrijednosti dobivenih za y, y' i y'' u zadanu diferencijalnu jednadžbu daje nakon uređenja:

$$4e^{4x} C'_1 - e^{-x} C'_2 = \sin x \qquad \text{(c)}$$

Iz (b) i (c) računamo C'_1 i C'_2. Dobijemo:

$$C'_1 = \frac{1}{5} e^{-4x} \sin x$$

$$C'_2 = -\frac{1}{5} e^{x} \sin x$$

Odatle prema (64) imamo:

$$C_1 = \frac{1}{5} \int e^{-4x} \sin x \, dx + A = \frac{1}{5} \left[\frac{e^{-4x}}{17} (-4 \sin x - \cos x) \right] + A$$

$$C_2 = -\frac{1}{5} \int e^{x} \sin x \, dx + B = -\frac{1}{5} \left[\frac{e^{x}}{2} (\sin x - \cos x) \right] + B$$

Uvrštenje u (a) daje traženo opće rješenje:

$$\underline{y = A e^{4x} + B e^{-x} + \frac{1}{34}(3 \cos x - 5 \sin x)}$$

Isti rezultat smo dobili prije (vidi primjer 1. na str. 307).

Riješi načinom varijacija konstanata sve gore navedene primjere linearnih nehomogenih diferencijalnih jednadžbi.

Lagrange-ovim načinom varijacija konstanata rješavamo i linearne nehomogene diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima, koje ne spadaju u gore navedene tipove tih jednadžbi.

P r i m j e r :

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r_{1,2} = \pm i$$

$$y = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x \qquad \text{(a)}$$

$$y' = -C_1 \cdot \sin x + C'_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \cos x + C'_2 \cdot \sin x$$

$$y' = -C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x + (C'_1 \cdot \cos x + C'_2 \sin x)$$