Izračunati integral po površi prve vrste

$$\iint\limits_{\Gamma} (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma) \; d\sigma,$$

gde je Γ površ tela koje ograničavaju površi

$$x^2+y^2+2rz=r^2, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

Rešenje. Zadatak ćemo rešiti na više načina.

I način. Kosinusi uglova za površ datu jednačinom $z=z(x, y)$ izračunavaju se po obrascima:

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

U datom slučaju zatvorena površ Γ se sastoji iz delova površi paraboloida i koordinatnih ravni. Na paraboloidu je

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{r^2+x^2+y^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{r^2+x^2+y^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{r}{\sqrt{r^2+x^2+y^2}}$$

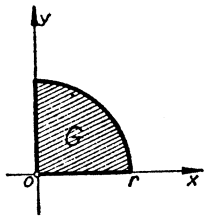
$$d\sigma = \frac{\sqrt{r^2+x^2+y^2}}{r}\, dx\, dy,$$

pa se dati integral, po delu površi paraboloida, svodi na dvojni integral

$$I_1 = \frac{1}{r} \iint\limits_{G} \left[x^3+y^3+r\left(\frac{r^2-x^2-y^2}{2r}\right)^2\right] dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{r} \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \left[\rho^3 (\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4r}(r^2-\rho^2)^2\right] \rho\, d\rho = \left(\frac{4}{15}+\frac{\pi}{48}\right) r^4.$$



Na ravni xOy je: $z=0$, $\cos\alpha=0$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=-1$, pa je dati integral po odgovarajućem delu ravni xOy jednak nuli. Slično je integral i po delovima koordinatnih ravni xOz i yOz jednak nuli, pa je

$$I = \left(\frac{4}{15}+\frac{\pi}{48}\right) r^4.$$

II način. Dati integral se može napisati kao integral po površi druge vrste

$$I=\oiint x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$$

gde treba izračunati svaki od ova tri integrala po onoj strani zatvorene površi Γ koja je određena uglovima α, β, γ. Neka su α, β, γ uglovi koje spoljna normala zaklapa sa koordinatnim osama; neka je Γ_1 deo površi paraboloida, Γ_2 deo ravni $x=0$, Γ_3 deo ravni $y=0$ i Γ_4 deo ravni $z=0$; i neka je

$$I=I_1+I_2+I_3,$$

gde je

$$I_1=\oiint_\Gamma x^2\,dy\,dz,\quad I_2=\oiint_\Gamma y^2\,dz\,dx,\quad I_3=\oiint_\Gamma z^2\,dx\,dy.$$

Tada je

$$I_3=\iint_{\Gamma_1^+} z^2\,dy\,dx+\iint_{\Gamma_2} z^2\,dx\,dy+\iint_{\Gamma_3} z^2\,dx\,dy+\iint_{\Gamma_4^-} z^2\,dx\,dy.$$

$$\iint_{\Gamma_1+} z^2\,dx\,dy=\iint_G\left(\frac{r^2-x^2-y^2}{2r}\right)^2 dx\,dy=\frac{\pi r^4}{48}.$$

a ostala tri jednaka su nuli: prva dva, stoga, što je površ Γ_2, odnosno Γ_3 upravna na ravan $z=0$, a treći, jer je podintegralna funkcija z^2 jednaka nuli na površi Γ_4.

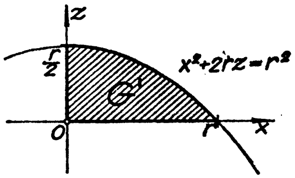
Slično je

$$I_2=\iint_{\Gamma_1^+} y^2\,dx\,dz+\iint_{\Gamma_2} y^2\,dx\,dz+\iint_{\Gamma_3^-} y^2\,dx\,dz+\iint_{\Gamma_4} y^2\,dx\,dz,$$

gde je

$$\iint\limits_{\Gamma_1^+} y^2\,dx\,dz = \iint\limits_{G'} (r^2 - x^2 - 2\,rz)\,dx\,dz =$$

$$= \int_0^r d\,x \int_0^{(r^2-x^2)/2\,r} (r^2 - x^2 - 2\,rz)\,dz = \frac{2\,r^4}{15},$$



a ostala tri integrala jednaka su nuli.

Lako je pokazati da je

$$I_3 = I_2 = \frac{2}{15}\,r^4$$

pa je

$$I = \frac{4\,r^4}{15} + \frac{\pi\,r^4}{48}.$$

III način. Ispunjeni su uslovi za primenu formule Ostrogradskog

$$\oiint\limits_{\Gamma} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint\limits_{\Phi} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

pa je

$$I = 2 \iiint\limits_{\Phi} (x+y+z)\,dx\,dy\,dz.$$

Izračunavanjem ovog integrala dolazimo do istog rezultata.

#
Površi

$$\Gamma_1: \quad \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+z^2=1, \quad y \geqslant 0$$

$$\Gamma_2: \quad \frac{x^2}{2}+2z^2-2z=0$$

i ravan $y=0$ ograničavaju telo ϕ.

1° Pokazati da presečna kriva C površi Γ_1 i Γ_2 leži u jednoj ravni. Izračunati integral

$$I^*=\oint_C zdx+xdy+ydz,$$

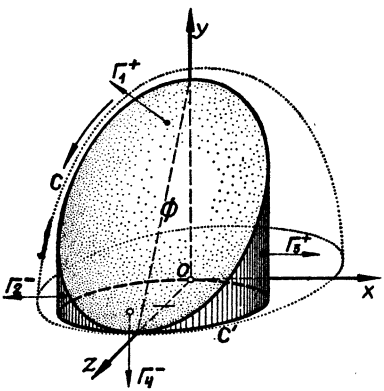
pri čemu se kretanje po krivoj C izvodi u pozitivnom smeru, gledano sa pozitivnog dela ose Oz.

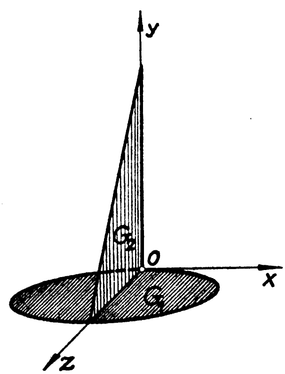
2° Izračunati integral

$$I=\oiint_\Gamma xydydz+3\,xzdxdz+2\,yzdxdy,$$

gde je Γ spoljna strana tela ϕ.

Rešenja.





1° Jednačina ortogonalne projekcije krive C na ravan yOz dobija se eliminacijom promenljive x iz jednačina površi Γ_1 i Γ_2. Imamo dakle

$$y^2=4(1-z)^2 \quad \Rightarrow \quad y=\pm 2(1-z).$$

Pošto je $y \geqslant 0$ i $|z| \leqslant 1$, to će jednačina tražene ravni biti

$$\mathcal{L}: \; y=2-2z.$$

Kriva C je ravna zatvorena kriva, i predstavlja presek bilo koje dve površi iz skupa $\{\mathcal{L}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$. Radi jednostavnosti u daljem radu, uzimamo da je

$$C: \begin{cases} x^2+\dfrac{(z-1/2)^2}{1/4}=1 \\ y=2-2z. \end{cases}$$

Integral I^* izračunaćemo na dva načina.

I način.

Projekcija krive C na ravan xOz je elipsa

$$C': \; x^2+\frac{(z-1/2)^2}{1/4}=1$$

čije su parametarske jednačine: $x=\sin t$, $z=1/2+1/2\cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Prema tome parametarske jednačine krive C su:

$$C: \begin{cases} x=\sin t \\ y=1-\cos t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \\ z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos t. \end{cases}$$

Kako je

$$dx=\cos t\,dt, \quad dy=\sin t\,dt, \quad dz=-\frac{1}{2}\sin t\,dt,$$

to je

$$I^*=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos t-\sin t+\sin t\cos t+\sin^2 t+1)\,dt,$$

i konačno

$$I^*=\frac{3\pi}{2}.$$

II način.

Pošto su funkcije: $P=z$, $Q=x$, $R=y$ neprekidno diferencijabilne na glatkoj površi Γ^*, koja je ograničena zatvorenom linijom C, možemo koristiti formulu Stokesa. Imamo, dakle

$$I^* = \iint_{\Gamma^*} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} d\sigma = \iint_{\Gamma^*} (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\, d\sigma,$$

$$\Gamma^*:\quad \underset{G_1}{y=2-2z};\quad y_x=0,\quad y_z=-2,\quad \vec{n}=\frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2),\quad d\sigma=\sqrt{5}\,dx\,dz,$$

$$I^* = \iint_{\Gamma^*} \frac{0+1+2}{\sqrt{5}}\sqrt{5}\,dx\,dz = 3\iint_{G_1} dx\,dz = 3\,m(G_1).$$

Kako je

$$G_1:\quad x^2 + \frac{(z-1/2)^2}{1/4} - 1 \leqslant 0,\quad m(G_1) = \frac{\pi}{2} \text{ (površina elipse)}$$

to je konačno

$$I^* = \frac{3\pi}{2}.$$

2° I ovaj integral izračunaćemo na dva načina.

I način.

Pošto funkcije:

$$P=xy,\quad Q=3xz \quad \text{i} \quad R=2yz$$

imaju neprekidne parcijalne izvode u oblasti Φ, i na njenom (delimično glatkom) omotaču Γ, možemo koristiti formulu Gaussa-Ostrogradskog. Imamo, dakle

$$P_x=y,\quad Q_y=0,\quad R_z=2y,$$

$$I=\iiint\limits_{\Phi}(P_x+Q_y+R_z)\,dx\,dy\,dz=3\iiint\limits_{\Phi}y\;dx\,dy\,dz=3\iint\limits_{G_1}dx\,dz\int\limits_0^{2\sqrt{1-z^2-\frac{x^2}{2}}}y\;dy$$

$$I=6\iint\limits_{G_1}\left(1-z^2-\frac{x^2}{2}\right)dx\,dz,$$

Korišćenjem uopštenih polarnih koordinata:

$$(^*)\qquad\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\\ z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\rho\cos\varphi,\quad J=\dfrac{1}{2}\rho,\end{cases}$$

pomoću kojih se elipsa G_1 preslikava na jedinični krug, nalazimo

$$I=3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\;\rho\cos\varphi-\frac{1}{4}\rho^2\cos^2\varphi-\frac{1}{2}\rho^2\sin^2\varphi\right)\rho\,d\rho.$$

Integracijom sledi

$$I=\frac{27\pi}{16}.$$

II način.

Koristićemo sledeći integracioni postupak: ako je glatka površ Γ određena jednačinom

$$\Gamma:\quad z=f\underset{G}{(x,y)},\quad \vec{N}=(-p,-q,1),$$

gde je $\vec{N}$ vektor normale površi u proizvoljnoj tački, tada važi jednakost

$$\iint\limits_{\Gamma\pm}P\,dy\,dz+Q\,dx\,dz+R\,dxdy=\pm\iint\limits_{G}(-pP-qQ+R)\Bigg|_{z=f(x,y)}dx\,dy.$$

Pretpostavlja se da svaka prava paralelna Oz osi prodire površ Γ samo u jednoj tački. U konkretnom slučaju površ Γ je sastavljena od glatkih površi: Γ_1^+, Γ_2^-, Γ_3^+ i Γ_4^-. Stoga će biti

$$I=\iint\limits_{\Gamma_1+}+\iint\limits_{\Gamma_2-}+\iint\limits_{\Gamma_3+}+\iint\limits_{\Gamma_4-}.$$

Imajući u vidu slike i prethodnu napomenu, nalazimo:

1. $\quad \Gamma_1\colon\ y=2\sqrt{\underset{G_1}{1-z^2-x^2/2}},\quad \vec{N}=\left(\frac{2x}{y},\ 1,\ \frac{4z}{y}\right);$

$$I_1=\iint\limits_{\Gamma_1+}=+\iint\limits_{G_1}\left(xy\,\frac{2x}{y}+3xz+2yz\,\frac{4z}{y}\right)dx\,dz=2\iint\limits_{G_1}(x^2+4z^2)\,dx\,dz.$$

Primenom smena (*), dobijamo

$$I_1=\frac{3\pi}{2}.\ \left(\iint\limits_{G_1}3xz\,dx\,dz=0\ \text{— objašnjenje sledi u nastavku}\right).$$

2. $\quad \Gamma_2\colon\ x_1=-\sqrt{\underset{G_2}{4z-4z^2}},\qquad \vec{N}=\left(1,0,\frac{2-4z}{-x_1}\right);$

$$\Gamma_3\colon\ x_2=\sqrt{\underset{G_2}{4z-4z^2}},\qquad \vec{N}=\left(1,0,\ \frac{2-4z}{-x_2}\right);$$

$$I_2=\iint\limits_{\Gamma_2-}=-\iint\limits_{G_2}\left(x_1y+\frac{2yz(2-4z)}{-x_1}\right)dy\,dz,$$

$$I_3=\iint\limits_{\Gamma_3+}=+\iint\limits_{G_2}\left(x_2y+\frac{2yz(2-4z)}{-x_2}\right)dy\,dz,$$

$$I_2+I_3=\iint\limits_{G_2}\frac{4yz^2}{\sqrt{z-z^2}}\,dy\,dz=4\int\limits_0^1\frac{z^2}{\sqrt{z-z^2}}\,dz\int\limits_0^{2-2z}y\,dy=8\int\limits_0^1(z-z^2)^{3/2}\,dz=$$

$$=8\int\limits_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{3/2}dz.$$

Pomoću smene

$$z-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin t$$

dobijamo

$$I_2+I_3=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 t\,dt=\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\,dt=\frac{3}{4}\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\frac{3\pi}{16}.$$

3.

$$\Gamma_4:\quad y=0,\quad \vec{n}=(0,1,0);$$

$I_4=\iint\limits_{\Gamma_4^-}=-\iint\limits_{G_2} 3\,xz\,dx\,dz=0,$ jer je integrand neparna funkcija po promenljivoj z u oblasti G_1 koja je simetrična prema osi Oz. Konačno dobijamo

$$I=I_1+I_2+I_3+I_4=\frac{27\pi}{16}.$$

Napominjemo, da se do integrala I može doći izračunavanjem integrala:

$$\oiint\limits_{\Gamma} xy\,dy\,dz,\quad \oiint\limits_{\Gamma} 3\,xz\,dx\,dz\quad \text{i}\quad \oiint\limits_{\Gamma} 2\,yz\,dx\,dy.$$

#

Date su površi

Γ_1: $z=xy$

Γ_2: $z=x^2+y^2-1.$

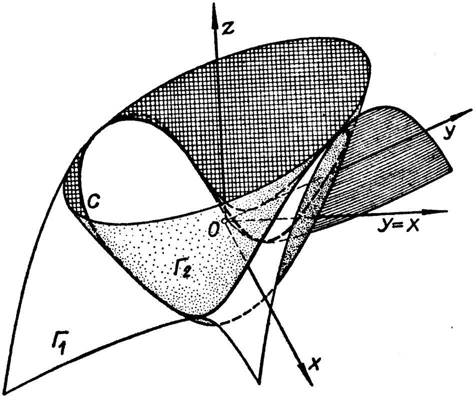
1° Izračunati zapreminu tela ϕ koje je ograničeno datim površima.

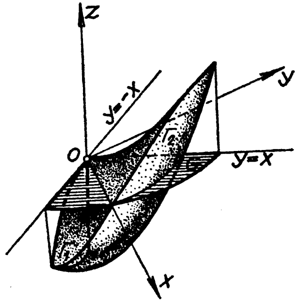
2° Izračunati integral

$$I=\oint_C xdx+ydy+zdz$$

gde je C presečna kriva površi Γ_1 i Γ_2.

Rešenja.





Projekcija krive C na ravan xOy je elipsa C', čija je jednačina

$$C':\ x^2-xy+y^2-1=0.$$

U polarnom sistemu, njena jednačina glasi

$$C':\ \rho=\frac{1}{\sqrt{1-\sin\varphi\cos\varphi}}\equiv\rho(\varphi).$$

Uvođenjem obrazaca rotacije: $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$, dobija se kanonski oblik

$$C':\ \frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{2/3}=1.$$

Parametarske jednačine elipse C' su: $x'=\sqrt{2}\cos t,\quad y'=\sqrt{2/3}\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$
Kako je $z=xy$, to će parametarske jednačine krive C biti

$$C:\begin{cases} x=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\ \sin t+\cos t\\[2mm] y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ \sin t+\cos t\\[2mm] z=\dfrac{-1}{3}\ \sin^2 t+\cos^2 t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

Neka je dalje

$$G:\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4}\\[2mm] 0\leqslant\rho\leqslant\rho(\varphi)\end{cases}$$

i

$$z_1=xy,\quad z_2=x^2+y^2-1.$$

1° Zapremina tela Φ izračunava se po obrascu

$$V=4\iint\limits_G(z_1-z_2)\,dx\,dy=4\iint\limits_G(xy-x^2-y^2+1)\,dx\,dy.$$

Prelaskom na polarne koordinate, dobijamo

$$V=4\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^{\rho(\varphi)}(\rho^2\cos\varphi\sin\varphi-\rho^2+1)\,\rho\,d\rho,$$

$$V=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{1-\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Korišćenjem smene $t=\operatorname{tg}\varphi$, sledi

$$V=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{t^2-t+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

odnosno

$$V=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

pri čemu je korišćena relacija: $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$.

2° Pokazaćemo na nekoliko načina da je dati integral jednak nuli.

I način.

Koristeći parametarske jednačine krive C, kao i relacije:

$$dx=\left(\frac{-\cos t}{\sqrt{3}}-\sin t\right)dt,\quad dy=\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}-\sin t\right)dt,\quad dz=-\frac{4\sin 2t}{3}\,dt,$$

dobijamo

$$I=0.$$

II način.

Primenom formule Stokesa, sledi

$$I=\iint\limits_{\Gamma_1}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}d\sigma=\iint\limits_{\Gamma_1}0\cdot d\sigma=0.$$

III način.

Pošto je izraz pod integralom totalan diferencijal funkcije

$$u=\frac{x^2+y^2+z^2}{2}$$

to će krivolinijski integral I po zatvorenoj putanji integracije C, na osnovu poznatog stava, biti jednak nuli, tj.

$$I=\oint\limits_{C}du=0.$$

#

Dati su telo

$$\phi:\ 1 \leqslant \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 4, \qquad (z \geqslant 0),$$

i površ

$$\Gamma:\ \frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}, \qquad (z \geqslant 0).$$

1° Izračunati zapreminu onog dela tela ϕ koji se nalazi unutar površi Γ.

2° Izračunati krivolinijski integral

$$I=\oint_C (xy^2+z^2)\,dx+(yz+xz)\,dy+(zx^2+yz^2)\,dz$$

gde je C presečna kriva površi

$$\Gamma_1:\ 2x^2+y^2=2$$

$$\Gamma_2:\ z=3-x^2$$

a integracija se vrši u pozitivnom smislu, gledano sa pozitivnog dela ose Oz.

Rezultati i uputstva.

1° $\quad V=\frac{7}{3}abc\pi(2-\sqrt{2})$.

Koristiti uopštene sferne koordinate:

$$x=a\rho\cos\varphi\sin\psi$$

$$y=b\rho\sin\varphi\sin\psi$$

$$z=c\rho\cos\psi$$

$$J=abc\rho^2\sin\psi;\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{4},\quad 1\leqslant\rho\leqslant 2.$$

2° $\quad I=\frac{9\pi\sqrt{2}}{4}$.

Koristiti parametarske jednačine krive C:

$$C:\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sqrt{2}\sin t \\ z=3-\cos^2 t, \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi, \end{cases}$$

ili formulu Stokesa.

Data je površ

$$\Gamma:\ 3-z=x^2+3\,y^2.$$

1° Izračunati zapreminu tela koje je ograničeno datom površi i ravni xOy.

2° Izračunati krivolinijski integral

$$I=\int_C (x^2+y^2+z^2)\,dx$$

gde je C deo linije iznad ravni xOy po kojoj ravan $z=2\,x$ seče datu površ Γ.

Rezultati.

1°. $V=\dfrac{3\pi\sqrt{3}}{2}$. 2°. $I=0$.

Data je površ

$$\Gamma:\ y^2+z+x-4=0$$

pri čemu je $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ i $z\geqslant 0$.

1° Izračunati zapreminu tela ograničenog datom površi i koordinatnim ravnima.

2° Izračunati krivolinijski integral

$$I=\oint_C x\,dx-z\,dy+y\,dz$$

gde je C presečna kriva date površi i koordinatnih ravni, a smer integracije pozitivan posmatran sa pozitivnog dela ose Oz. Dobiveni rezultat proveriti primenom formule Stokesa.

Rezultati.

1°. $V=\dfrac{128}{15}$. 2°. $I=\dfrac{32}{3}$.

Date su površi

$$\Gamma_1:\quad x^2+y^2+z^2=3$$

$$\Gamma_2:\quad x^2+y^2=2\,z.$$

Izračunati integrale:

$$I_1=\iiint\limits_{\Phi}(x+y+z)\,dxdydz$$

gde je Φ oblast ograničena datim površima, i

$$I_2=\mathop{{\int\!\!\!\int}\mkern-21mu \bigcirc}\limits_{\Gamma_1}(x+y+z)\,dxdy.$$

Rezultati.

$$I_1=\frac{5\pi}{3}.\qquad\qquad I_2=4\sqrt{3}\,\pi.$$

Date su površi

$$\Gamma_1:\ z=4-x^2-y^2$$

$$\Gamma_2:\ z=y^2.$$

1° Izračunati integral

$$I_1=\mathop{{\int\!\!\!\int}\mkern-21mu \bigcirc}\limits_{\Gamma}(x+y)\,dy\,dz+(y+z)\,dx\,dz+(x+z)\,dx\,dy$$

gde je Γ spoljna strana tela Φ ograničenog površima Γ_1 i Γ_2.

2° Izračunati krivolinijski integral

$$I_2=\oint\limits_{C}(4\,y^2+2\,x^2)\,dx+(x+z)\,dy+y\,dz$$

gde je C presečna kriva površi Γ_1 i Γ_2, a smer integracije pozitivan posmatran sa pozitivnog dela ose Oz. Rezultat proveriti primenom formule Stokesa.

3° Izračunati zapreminu tela ograničenog površima Γ_1 i Γ_2.

Rezultati.

1° $\quad I_1=12\,\pi\sqrt{2}.$

2° $\quad I_2=2\,\pi\sqrt{2}.$

3° $\quad V=4\,\pi\sqrt{2}.$