\# Izračunati zapreminu tela ograničenog površima

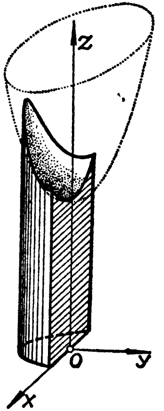
$$z=3+x^2+2y^2, \quad y=2x^2-1, \quad y=0, \quad z=0$$

i površinu tela ograničenog površima

$$z=a\ (a>0), \quad y=2x^2-1, \quad y=0, \quad z=0.$$

**Rešenje.**

Zapremina je jednaka




$$V=\iint_G z\,dx\,dy=\iint_G (3+x^2+2y^2)\,dx\,dy=$$

$$=2\int_0^{1/\sqrt{2}} dx \int_{2x^2-1}^{0} (3+x^2+2y^2)\,dy=$$

$$=-\frac{2}{3}\int_0^{1/\sqrt{2}} (16x^6-18x^4+27x^2-11)\,dx=\frac{83\sqrt{2}}{35}.$$

Površina je jednaka zbiru površina bazisa i omotača.
Površine bazisa mogu se izračunati pomoću dvojnog integrala:

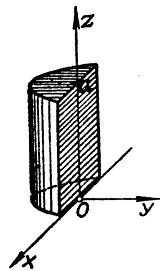
$$\sigma_1=2\iint_G dx\,dy, \qquad \text{gde je} \quad G:\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad 2x^2-1\leqslant y\leqslant 0.$$

$$\sigma_1 = 2\cdot 2\int_0^{1/\sqrt{2}} dx \int_{2x^2-1}^{0} dy$$

$$\sigma_1 = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

U omotaču imamo pravougaonik sa stranicama $2/\sqrt{2}$ i $a$, i deo cilindrične površi $y=2x^2-1$ između $xOy$ ravni i ravni $z=a$. Površinu dela cilindrične površi možemo izračunati primenom krivolinijskog integrala, pa je površina omotača jednaka

$$\sigma_2 = 2a/\sqrt{2} + a\int_C ds,$$




gde je C: $y=2x^2-1, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sigma_2 = a\sqrt{2} + 2a\int_0^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

$$\sigma_2 = a\sqrt{2} + 2a\int_0^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1+16x^2}\, dx$$

$$\sigma_2 = a\sqrt{2} + 2a\left[\frac{1}{8}\ln(2\sqrt{2}+3) + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right].$$

Stoga je

$$\sigma = \frac{4\sqrt{2}}{3}a + \frac{5a\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{4}\ln(2\sqrt{2}+3).$$

#

Izračunati površinu i zapreminu tela $T$ određenog nejednakostima:

$$0 \leqslant z \leqslant 2-\sqrt{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2 \leqslant 2y, \quad y \leqslant 3/2.$$

**Rešenje.** Površina $\sigma$ jednaka je zbiru površina: $\sigma_1$ dela konusne površi, $\sigma_2$ dela ravni $y=3/2$, $\sigma_3$ dela kružnog cilindra $x^2+y^2=2y$ između $xOy$ ravni i konusa i $\sigma_4$ dela ravni $xOy$. Površina dela konusa koji iseca cilindrična površ jednaka je

$$\sigma_1 = \iint\limits_G \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy.$$

Ovde je $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$, pa je

$$p = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad q = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

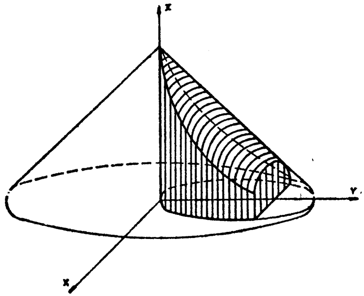
$$1+p^2+q^2=2$$

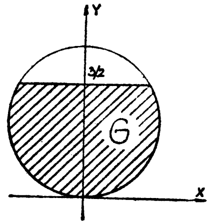
i

$$\sigma_1 = \sqrt{2}\iint\limits_G dx\, dy = 2\sqrt{2}\int_0^{3/2} dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} dx = 2\sqrt{2}\int_0^{3/2} \sqrt{2y-y^2}\, dy =$$

$$\left( y-1=\sin t, \quad dy=\cos t\, dt, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= 2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/6} \cos^2 t\, dt = \frac{2\sqrt{2}\,\pi}{3} + \frac{\sqrt{6}}{4}.$$




Površina dela ravni $y=3/2$ može se izračunati primenom krivolinijskog integrala.

$$\sigma_2 = \int_C z\, ds = \int_C (2-\sqrt{x^2+y^2})\, ds,$$

gde je

$$C:\ y=3/2,\ \ z=0 \ \Rightarrow\ y'=0 \ \Rightarrow\ ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=dx$$

i

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma_2 = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (2-\sqrt{x^2+9/4})\,dx = 2\left[2x-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+9/4}-\right.$$

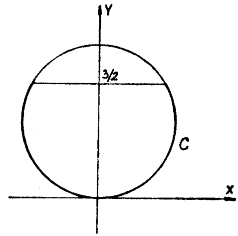
$$\left.-\frac{9}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+9/4})\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}-\frac{3}{2}-\frac{9}{8}\ln 3.$$

Površinu dela kružnog cilindra možemo, takođe, izračunati primenom krivolinijskog integrala.

$$\sigma_3 = \int_C z\, ds = \int_C (2-\sqrt{x^2+y^2})\, ds$$

gde je

$$C:\ x^2+y^2=2y,\quad y\leqslant 3/2,\quad z=0.$$




U polarnim koordinatama je

$$C:\ \rho=2\sin\varphi,\quad \rho'=2\cos\varphi,$$

$$ds=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi=2\,d\varphi,$$

pa je

$$\sigma_3=2\int_0^{\pi/3}(2-\rho)\,2\,d\varphi=8\int_0^{\pi/3}(1-\sin\varphi)\,d\varphi=\frac{8\pi}{3}-4$$

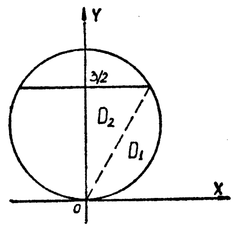
$$\sigma_4=\iint_G dx\,dy=\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Konačno je

$$\sigma=\frac{2\sqrt{2}\,\pi}{3}+\frac{\sqrt{6}}{4}+2\sqrt{3}-\frac{3}{2}-\frac{9}{8}\ln 3+\frac{8\pi}{3}-4+\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Zapremina, primenom dvojnog integrala, jednaka je

$$V=\iint_G z\,dx\,dy=\iint_G\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy.$$




Prelaskom na polarne koordinate imamo

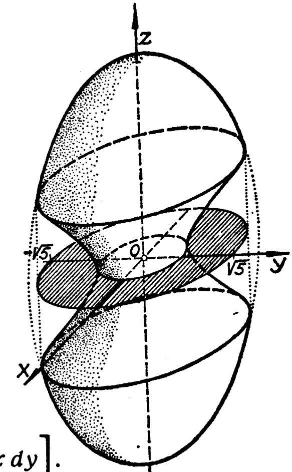
$$V=2\left[\iint_{D_1}(2-\rho)\,\rho\,d\rho\,d\varphi+\iint_{D_2}(2-\rho)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\right]=$$

$$=2\left[\int_0^{\pi/3}d\varphi\int_0^{2\sin\varphi}(2-\rho)\,\rho\,d\rho+\int_{\pi/3}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\frac{3}{2\sin\varphi}}(2-\rho)\,\rho\,d\rho\right]=$$

$$=\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{67}{36}-\frac{9}{16}\ln 3.$$

\# Izračunati površinu i zapreminu tela određenog relacijama

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}\leqslant 6, \quad x^2+y^2-z^2\leqslant 1.$$




**Rešenje.** Zbog simetrije u odnosu na ravan $xOy$ možemo uzeti

$$V=2\left[\iint\limits_{G_1} z_1\,dx\,dy-\iint\limits_{G_2} z_2\,dx\,dy\right]$$

gde je

$z_1=2\sqrt{6-x^2-y^2}$, $z_2=\sqrt{x^2+y^2-1}$

$G_1$: $x^2+y^2\leqslant 5$, $G_2$: $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 5$.

Dakle,

$$V=2\left[\iint\limits_{G} 2\sqrt{6-x^2-y^2}\,dx\,dy-\iint\limits_{G_2}\sqrt{x^2+y^2-1}\,dx\,dy\right].$$

Prelaskom na polarne koordinate biće

$$V=4\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{6-\rho^2}\,\rho\,d\rho-2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_1^{\sqrt{5}}\sqrt{\rho^2-1}\,\rho\,d\rho=\frac{8\pi}{3}(6\sqrt{6}-5).$$

Površina $\sigma$ je jednaka zbiru $\sigma_1$ i $\sigma_2$, gde je $\sigma_1$ površina dela elipsoida, a $\sigma_2$ površina dela hiperboloida.

$$\sigma_1=2\iint\limits_{G_1}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy=2\iint\limits_{G_1}\sqrt{\frac{6+3x^2+3y^2}{6-x^2-y^2}}\,dx\,dy=$$

$$=2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\sqrt{5}}\rho\sqrt{\frac{6+3\rho^2}{6-\rho^2}}\,d\rho=\left(6-\sqrt{21}+\frac{4\sqrt{3}}{3}\arcsin\frac{3}{4}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\right)2\pi.$$

$$\sigma_2=2\iint\limits_{G_2}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy=2\iint\limits_{G_2}\sqrt{\frac{2(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2-1}}\,dx\,dy=$$

$$=2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_1^{\sqrt{5}}\rho\sqrt{\frac{2\rho^2-1}{\rho^2-1}}\,d\rho=2\pi\left(6+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(17+12\sqrt{2})\right).$$

#

Izračunati površinu i zapreminu tela ograničenog površima

$$\Gamma_1:\quad x^2+y^2=z+2$$

$$\Gamma_2:\quad x^2+y^2=1$$

$$\Gamma_3:\quad x^2+y^2=3-z.$$

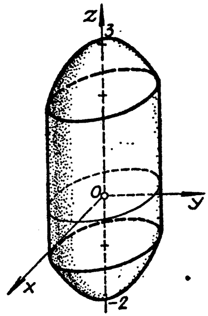
**Rešenje.**

$$V=\iiint_{\Phi} dx\,dy\,dz=\iint_{G} dx\,dy\int_{z_1}^{z_2} dz=$$

$$=\iint_{G}(z_2-z_1)\,dx\,dy=$$

$$=\iint_{G}(3-x^2-y^2-x^2-y^2+2)\,dx\,dy=$$

$$=\iint_{G}[5-2(x^2+y^2)]\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(5-2\rho^2)\rho\,d\rho=4\pi.$$




$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3.$$

$$\sigma_1=\iint_{G}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

$$\sigma_2=\oint_{C}(3-x^2-y^2)\,ds+\oint_{C}(2-x^2-y^2)\,ds=$$

$$=\oint_{C}(5-2x^2-2y^2)\,ds=\int_0^{2\pi}(5-2)\,dt=6\pi.$$

$$x=\cos t$$

$$y=\sin t$$

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=dt$$

$$\sigma_3=\iint_{G}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

$$\sigma=\frac{\pi}{3}(5\sqrt{5}+17).$$

Izračunati površinu dveju kalota koje konusna površ

$$\frac{x^2+y^2}{2}=(z-\sqrt{2})^2$$

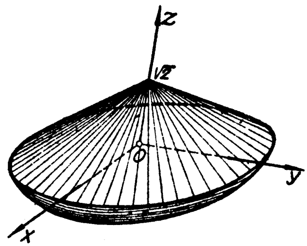
iseca na elipsoidu

$$\frac{x^2+y^2}{6}+\frac{z^2}{2}=1.$$

Izračunati zapreminu onog dela elipsoida koji se nalazi unutar konusa.

**Rešenje.** Površina manje kalote (one koja je unutar konusa) jednaka je

$$\sigma_1=\iint_G \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$




gde je $p=-\dfrac{x}{3z}$, $q=-\dfrac{y}{3z}$

$$G:\quad x^2+y^2\leqslant\frac{144}{25}\quad \text{i}$$

$$\sigma_1=\iint_G \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{18-3(x^2+y^2)}}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{12/5}\rho\sqrt{\frac{18-2\rho^2}{18-3\rho^2}}\,d\rho=$$

$$=\pi\sqrt{6}\ln\frac{7+2\sqrt{6}}{5}+\frac{132}{25}\pi.$$

$\sigma_2$ je razlika između površine čitavog elipsoida $\sigma$ i $\sigma_1$. Kako je u pitanju obrtni elipsoid nastao obrtanjem oko ose $Oz$ elipse

$$\frac{x^2}{6}+\frac{z^2}{2}=1,$$

površinu elipsoida možemo izračunati i pomoću jednostrukog integrala:

$$\sigma=2\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}x\sqrt{1+(x'_z)^2}\,dz=2\pi\sqrt{6}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{1+z^2}\,dz.$$

$$\sigma=12\pi+\pi\sqrt{6}\ln(5+2\sqrt{6}).$$

$$V=\iiint_\Phi dx\,dy\,dz=\iint_G dx\,dy\int_{z_1}^{z_2}dz=\iint_G (z_2-z_1)\,dx\,dy=$$

$$=\iint_G\left[\sqrt{2}-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}-\left(-\sqrt{2-\frac{x^2+y^2}{3}}\right)\right]dx\,dy=\frac{128\sqrt{2}}{25}\pi.$$

\# Telo $T$ je ograničeno površima

$$2z-y-5R=0 \qquad (R>0)$$

$$x^2+y^2=R^2$$

$$z=0.$$

Izračunati površinu i zapreminu tela $T$. Nacrtati sliku.

**Rezultati.** $\sigma=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+6\right)R^2\pi.$ $V=\frac{5\pi R^3}{2}.$

\# Izračunati površinu i zapreminu tela ograničenog površima

$$\Gamma_1: \quad z=4-x^2-y^2$$

$$\Gamma_2: \quad 2z=2+x^2+y^2.$$

**Rezultati.** $V=3\pi.$ $\sigma=\frac{\pi}{3}(6\sqrt{3}+11).$

\# Površ $4-z=x^2+y^2$ i koordinatne ravni $x=0$, $y=0$ i $z=0$ ograničavaju u prvom oktantu telo $T$. Izračunati površinu i zapreminu tela $T$.

**Rezultati.** $V=2\pi.$ $\sigma=\frac{\pi}{24}(17\sqrt{17}+23)+\frac{32}{3},$