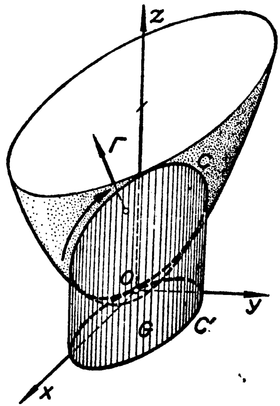
\# Izračunati krivolinijski integral



$$I=\oint\limits_C y\,dx+x^2\,dy+z\,dz,$$

gde je kriva C data jednačinama

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$$

$$(a,\, b,\, c\neq 0).$$

Primenom formule Stokesa proveriti rezultat.

Rešenje. Presek cilindrične površi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ i ravni $z=0$ (projekcija krive C na ravan xOy) je elipsa

$$C'\colon\ \frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{\left(y-\frac{b}{2}\right)^2}{\frac{b^2}{2}}=1.$$ Parametarske jednačine elipse C' su:

$$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t, \qquad y=\frac{b}{2}+\frac{b}{\sqrt{2}}\sin t.$$

Parametarske jednačine krive C su:

$$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t, \qquad y=\frac{b}{2}+\frac{b}{\sqrt{2}}\sin t, \quad z=c+\frac{c}{\sqrt{2}}\left(\cos t+\sin t\right),$$

odakle je

$$dx=-\frac{a}{\sqrt{2}}\sin t\,dt, \qquad dy=\frac{b}{\sqrt{2}}\cos t\,dt, \quad dz=\frac{c}{\sqrt{2}}(-\sin t+\cos t)\,dt,$$

pa je

$$I=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{ab+2c^2}{2\sqrt{2}}\sin t+\frac{a^2b+4c^2}{4\sqrt{2}}\cos t-\frac{ab}{2}\sin^2 t+\right.$$

$$\left.+\frac{a^2b}{2\sqrt{2}}\cos^3 t+\frac{a^2b}{2}\cos^2 t+\frac{c^2}{2}\cos 2t\right)dt.$$

$$I=\frac{ab\pi(a-1)}{2}.$$

Primenom formule Stokesa imamo

$$I=\iint_{\Gamma}(2x-1)\,dx\,dy,$$

gde je Γ unutrašnja strana dela paraboloida $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}$ (unutar cilindra).

$$I=\iint_{G}(2x-1)\,dx\,dy$$

G je oblast ograničena elipsom C'.

Uvođenjem novih promenljivih smenom

$$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{\sqrt{2}}\rho\cos\varphi,\qquad y=\frac{b}{2}+\frac{b}{\sqrt{2}}\rho\sin\varphi;\quad \text{biće}\quad J=\frac{ab}{2}\rho,$$

slika oblasti G je oblast $D:\rho\leqslant 1$, pa je

$$I=\iint_D(a-1+a\sqrt{2}\,\rho\cos\varphi)\,|J|\,d\rho\,d\varphi=$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1[(a-1)\rho+a\sqrt{2}\,\rho^2\cos\varphi]\,d\rho=\frac{ab\pi(a-1)}{2}.$$

#

Izračunati krivolinijski integral

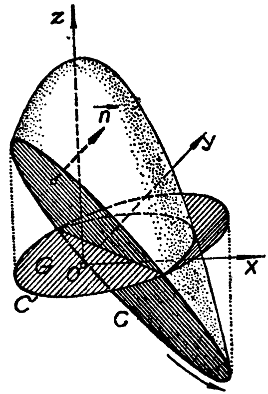
$$I=\oint_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz,$$

gde je C presečna kriva površi

$$z=4-x^2-2\,y^2$$

i ravni

$$x+2\,y+z=1.$$



Rešenje. Kriva C je prostorna kriva. U tom slučaju parametarske jednačine se mogu odrediti tako što se nađe projekcija krive C na jednu od koordinatnih ravni, napišu parametarske jednačine te projekcije, a zatim, koristeći jednu od datih jednačina krive, odredi i treća promenljiva u funkciji od parametra. Eliminacijom promenljive z, iz jednačina krive C, nalazimo jednačine projekcije krive C na ravan xOy:

$$C'\colon \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{4} \qquad z=0.$$

Parametarske jednačine krive C' su

$$x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}\cos t, \qquad y=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}\sin t, \qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

Uzimajući u obzir jednačinu $x+2\,y+z=1$ nalazimo z. Dakle, parametarske jednačine krive C su:

$$x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}\cos t, \qquad dx=-\frac{\sqrt{15}}{2}\sin t\,dt$$

$$y=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}\sin t, \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi; \qquad dy=\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}\cos t\,dt$$

$$z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}\cos t-\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}\sin t, \qquad dz=\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\sin t-\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}\cos t\right)dt.$$

Dati krivolinijski integral svodi se na određen integral po promenljivoj t:

$$I=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}\sin t-\frac{15}{\sqrt{2}}-\frac{15}{2\sqrt{2}}\cos t\right)dt=-15\pi\sqrt{2}.$$

Zadatak se može rešiti i primenom formule Stokesa:

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_\Gamma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma.$$

Ovde je $P=y-z$, $Q=z-x$, $R=x-y$, a za površ integracije Γ možemo uzeti deo ravni $x+2y+z=1$ koji iseca paraboloid $z=4-x^2-2y^2$ (gornja strana). Tada je

$$\cos\alpha=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\cos\beta=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \cos\gamma-\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$d\sigma=\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy, \qquad d\sigma=\sqrt{6}\,dx\,dy \quad \text{i}$$

dati krivolinijski integral jednak je integralu po površi

$$I=-2\iint_\Gamma (\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,d\delta,$$

a ovaj se svodi na dvojni integral

$$I=-8\iint_G dx\,dy,$$

G je deo ravni xOy na koji se projektuje pomenuti deo ravni $x+2y+z=1$ — površ Γ: oblast ograničena elipsom C'.

$$I=-15\sqrt{2}\,\pi.$$