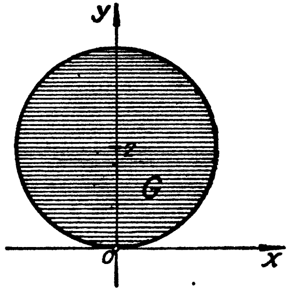
#

Izračunati površinu površi koju cilindar

$$x^2+(y-2)^2=4$$

iseca na konusu

$$z=2-\sqrt{x^2+y^2}.$$

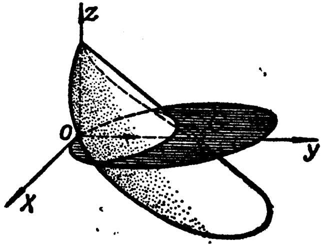


Rešenje. Površina dela površi $z=z(x, y)$ koji iseca cilindar $f(x, y)=0$ jednaka je

$$\sigma=\iint_G \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy,$$

gde je G deo ravni xOy koji iseca cilindar $f(x, y)=0$.

U ovom slučaju je $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ pa je



$$p=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad q=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$1+p^2+q^2=2$ i

$$\sigma=\sqrt{2}\iint_G dx\, dy=\sqrt{2}\, m\,(G)=4\sqrt{2}\,\pi.$$

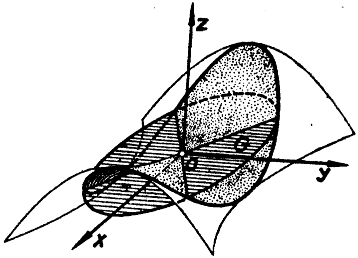
#

Izračunati površinu dela površi

$$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=2z$$

koji se nalazi unutar cilindra

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$



Rešenje.

$$\sigma=\iint_G \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$

$$\sigma=\iint_G \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy, \qquad G:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$$

$$\sigma=\iint_D \sqrt{1+\rho^2}\,ab\rho\,d\rho\,d\varphi \qquad \begin{aligned} x&=a\,\rho\cos\varphi\\ y&=b\,\rho\sin\varphi\end{aligned}$$

$$=ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho \qquad \begin{aligned} &J=ab\,\rho\\ &D:\ \rho\leqslant 1\end{aligned}$$

$$=\frac{2}{3}\,ab\pi\,(1+\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{2ab\pi}{3}\,(2\sqrt{2}-1).$$

Izračunati površinu dela lopte $x^2+y^2+z^2=4$ isečenog cilindrom $x^2+2y^2=4$ iznad ravni $z=0$.

Rešenje.

$$\sigma=\iint\limits_G \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$

$$\sigma=\iint\limits_G \frac{2\,dx\,dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \qquad G:\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}\leqslant 1 \ \Rightarrow\ D:\ \rho^2\leqslant\frac{4}{1+\sin^2\varphi}$$

$$=2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2/\sqrt{1+\sin^2\varphi}} \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} \qquad \begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ J=\rho. \end{array} \qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$$

$$=-4\int_0^{2\pi}\left(\frac{|\sin\varphi|}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}}-1\right)d\varphi$$

$$=-4\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2-\cos^2\varphi}}\,d\varphi+4\varphi\Big|_0^{2\pi}+4\int_\pi^{2\pi}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2-\cos^2\varphi}}\,d\varphi$$

$$=4\pi,$$

\# Data je površ

$$\Gamma:\ z=-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

Izračunati površinu $P(a)$ onog dela površi Γ koji se nalazi između ravni $z=a\ (a>0)$ i $z=0$.

Naći zatim

$$\lim_{a\to\infty} P(a).$$

Rezultati.

$$P(a)=\pi\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})-e^{-a}\sqrt{1+e^{-2a}}-\ln\left(e^{-a}+\sqrt{1+e^{-2a}}\right)\right]$$

$$\lim_{a\to\infty} P(a)=\pi\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right].$$

\# Pokazati da za komplanaciju površi $x=\varphi(u)\cos v$, $y=\varphi(u)\sin v$, $z=\psi(u)$; $(\alpha\leqslant u\leqslant\beta,\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi)$ gde su $\varphi(u)$ i $\psi(u)$ diferencijabilne funkcije, važi obrazac:

$$\sigma=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}|\varphi(u)|\sqrt{\varphi'^2(u)+\psi'^2(u)}\,du.$$

Izračunati površinu površi

$$x=e^{-u}\cos v,\quad y=e^{-u}\sin v,\quad z=\int_{0}^{u}\sqrt{1-e^{-2t}}\,dt.$$

Rezultati i uputstva.

Polazeći od obrasca za izračunavanje površine površi datih parametarskim jednačinama

$$\sigma=\iint_G\sqrt{g_{11}\,g_{22}-g_{12}{}^2}\,du\,dv \quad \text{gde je}\quad g_{11}=\vec{r}_u^{\,2},\quad g_{12}=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v,\quad g_{22}=\vec{r}_v^{\,2}$$

$\vec{r}=\{x(u,v),\,y(u,v),\,z(u,v)\}$, lako se dolazi do gornjeg obrasca.

U datom slučaju je

$$\sigma=2\pi\,(e^{-\alpha}-e^{-\beta}).$$