Zadaci za vježbu

U sljedećim zadacima izračunati površinske integrale:

1. $\iint\limits_S xyz\,dS$ gdje je S- dio ravni $x+y+z=1$ koja leži u prvom oktantu.

2. $\iint\limits_S y\,dS$ gdje je S- polusfera $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

3. $\iint\limits_S \frac{dS}{r^2}$ gdje je S- sfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ a r- rastojanje od tačke sfere do fiksirane tačke $P(0,0,c)$, $(c>R)$.

4. $\iint\limits_S \frac{dS}{r}$ gdje je S- dio površine hiperboličkog paraboloida $z=xy$ odsječen cilindrom $x^2+y^2=R^2$ a r- rastojanje od tačke površine do ose Oz.

5. $\iint\limits_S z\,dx\,dy$ gdje je S- vanjska strana elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

6. $\iint\limits_S xz\,dx\,dy+xy\,dy\,dz+yz\,dx\,dz$ gdje je S- vanjska strana piramide koju čine ravni $x=0$, $y=0$, $z=0$ i $x+y+z=1$.

7. $\iint\limits_S yz\,dx\,dy+xz\,dy\,dz+xy\,dx\,dz$ gdje je S- vanjska strana površine, koja se nalazi u prvom oktantu koju čine cilindar $x^2+y^2=R^2$ i ravni $x=0$, $y=0$, $z=0$ i $z=H$.

Rješenja:

1. $\frac{\sqrt{3}}{120}$

2. 0

3. $\frac{2\pi R}{c(n-2)}\left[\frac{1}{(c-R)^{n-2}}-\frac{1}{(c+R)^{n-2}}\right]$

4. $\pi\left[R\sqrt{R^2+1}+\ln(R+\sqrt{R^2+1})\right]$

5. $\frac{4\pi abc}{3}$

6. $\frac{1}{8}$

7. $R^2H\left(\frac{2R}{3}+\frac{\pi H}{8}\right)$

Primjena površinskih integrala

I Izračunavanje površine dijela glateke površi, koja pripada prostoru $\mathbb{R}^3$

Neka je površ S zadana jednačinom $z = z(x,y)$ gdje su $(x,y) \in D$. (D - je oblast u ravni xOy u koju se projektuje površ $z = z(x,y)$).

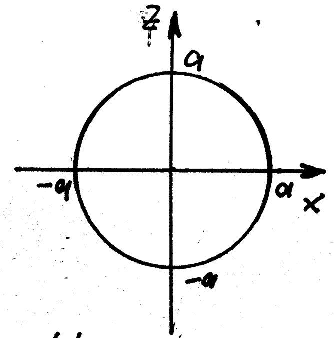
Površina P dijela glatke površi $S \subseteq \mathbb{R}^3$ računa se po formuli

$$P = \iint_D dS = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\, dy.$$

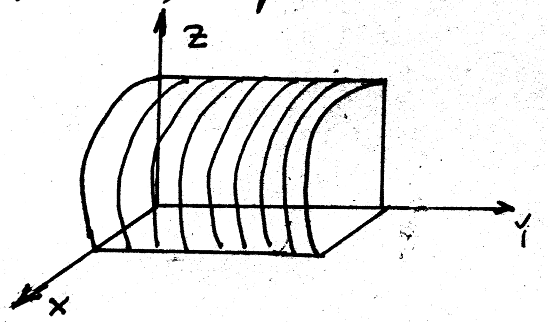
\# Neka je S površina tijela koje je dobijeno presjekom dva cilindra $S_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2=a^2,\ y\in\mathbb{R}\}$ i $S_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y^2+z^2=a^2,\ x\in\mathbb{R}\}$. Izračunati površinu dobijenog tijela.

R.j. $P = \iint\limits_S dS$ Skicirajmo S_1 i S_2, pa skicirajmo njihov presjek.

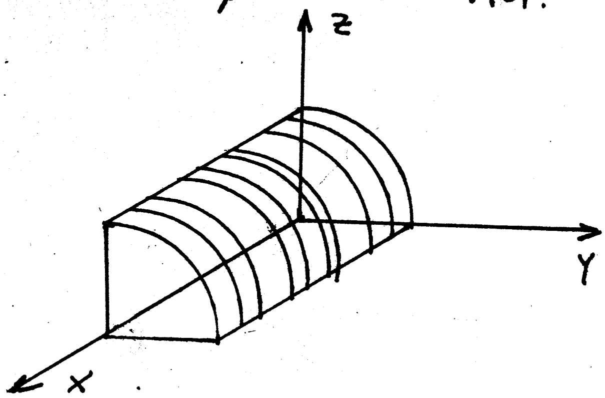
S_1: $x^2+z^2=a^2$ u ravni: xOz



U prostoru, u prvom oktantu:



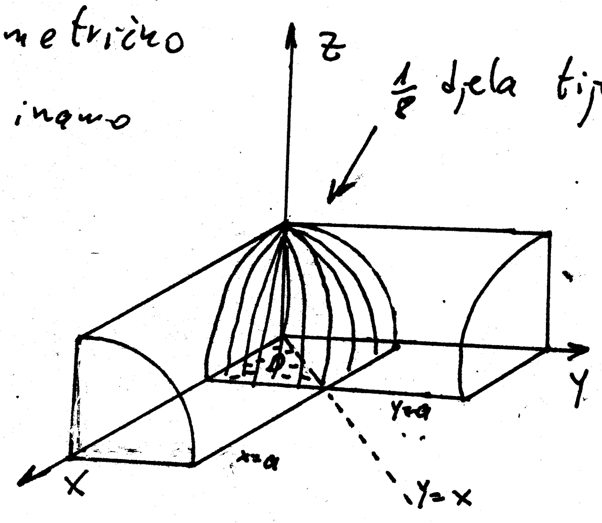
S_2 u prvom oktantu:



Presjek $S_1 \cap S_2$ će kao rezultat dati tijelo koje je simetrično u odnosu na sve tri ravni xOy, xOz i yOz.

$\frac{1}{8}$ dijela tijela će se nalaziti u prvom oktantu:

Primjetimo da je i ovo tijelo simetrično u odnosu na pravu $y=x$ pa imamo



$$P = \frac{1}{16}\iint\limits_D \sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dx\,dy$$

gdje je $D: \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le x \end{cases}$

$z^2 = a^2 - x^2$ tj. $z = \sqrt{a^2-x^2}$.

$z_x' = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $z_y' = 0$ $\quad 1+(z_x')^2+(z_y')^2 = 1+\frac{x^2}{a^2-x^2} = \frac{a^2}{a^2-x^2}$

tražena površina

$$P = 16a\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^x dy = 16a\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left| \begin{matrix} a^2-x^2=t \\ -2x\,dx=dt \\ x\,dx = -\frac{1}{2}dt \\ \dots \end{matrix} \right| = \dots = 16a\sqrt{a^2-x^2}\Big|_a^0 = 16a^2$$

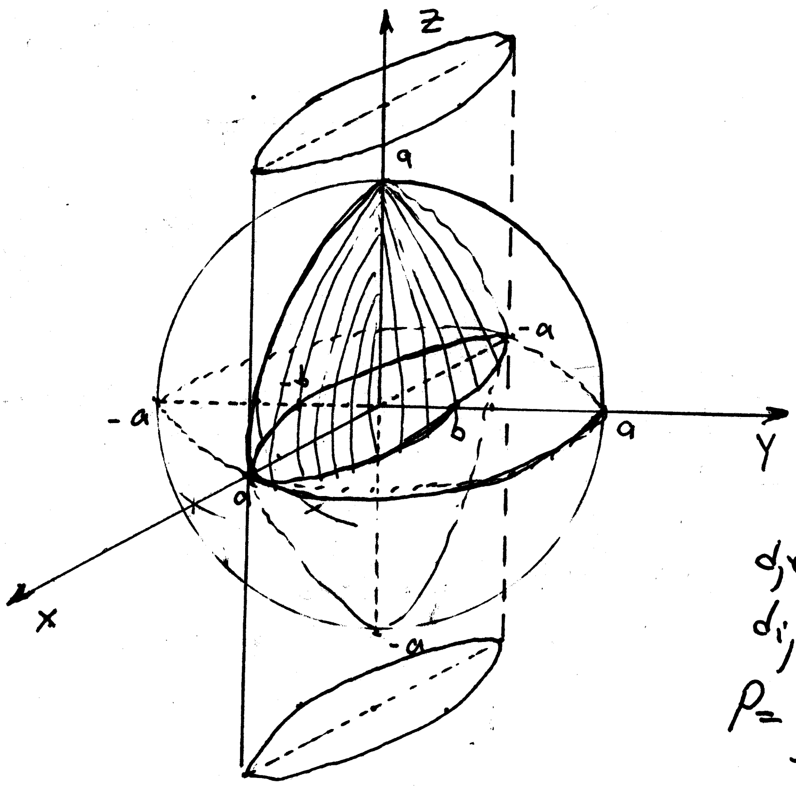
\# Izračunati površinu dijela sfere

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=a^2\}$$

koji se nalazi u unutrašnjosti cilindra

$$S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z\in\mathbb{R}\},\quad b\le a$$

R: Skicirajmo sferu S i cilindar S_1.



Cilindrična površ u presjeku sa sferom, isjeca iz nje simetričnu površ u odnosu na ravan xOy. Ta dva simetrična dijela označimo sa l_1 i l_2. Svaku od ova dva dijela, koordinatne ravni xOz i yOz ih dijele na četiri jednaka dijela.

$P=\iint\limits_S dS$ gdje je S površina dijela sfere ograničena cilindrom.

$S:\ x^2+y^2+z^2=a^2$

$$z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

Zbog navedene simetričnosti posmatraću sferu samo u prvom oktantu

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\qquad z'_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad z'_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\iint\limits_S dS=\iint\limits_D\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy$$ gdje je D projekcija površi S na xOy ravan

$$1+(z'_x)^2+(z'_y)^2=1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}=\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}$$

$$P=8\iint\limits_{\substack{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\\ a\ge 0,\ b\ge 0}}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy=8a\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\ a\ge 0,\ b\ge 0}\frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=8a\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

gdje je $D: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$ ili drugačije napisano $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \end{cases}$

$$\frac{y^2}{b^2} \leq 1-\frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 \leq \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$P = 8a\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{\underbrace{a^2-x^2}_{\text{ovo je broj za } dy}-y^2}} = 8a\int_0^a \left(\arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}} \Bigg|_{y=0}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\right) dx$$

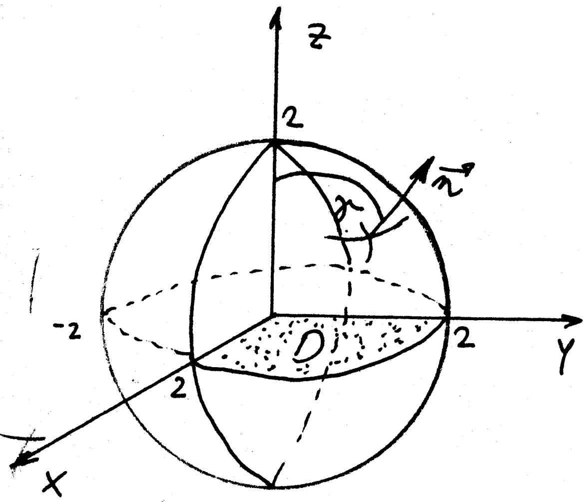
$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C}$$

$$= 8a\int_0^a \Big(\arcsin \frac{b}{a} - \underbrace{\arcsin 0}_{=0}\Big)\, dx =$$

$$= 8a \arcsin \frac{b}{a} \int_0^a dx = 8a^2 \arcsin \frac{b}{a}$$ tražena površina

(#) Izračunati površinski integral $I=\iint\limits_S xy^3z\,dx\,dy$, ako je S vanjska strana sfere $x^2+y^2+z^2=4$ u prvom oktantu.

Rj. $x^2+y^2+z^2=4$ je sfera sa centrom u koordinatnom početku čiji je poluprečnik dužine 2.



Kad računamo $\iint\limits_S f(x,y,z)\,dx\,dy$, treba uzeti u obzir predznak broja $\cos\gamma$.
Ako je $\cos\gamma<0$ ispred integrala stavljamo minus, ako je $\cos\gamma>0$ ispred integrala stavljamo plus, a ako je $\cos\gamma=0$ tada je integral jednak 0.
γ je ugao koji vektor normale $\vec{n}$ ($\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$) zaklapa sa z-osom

Vektor normale $\vec{n}$ je u prvom oktantu $\Rightarrow$ $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ $\cos\gamma>0$

$$x^2+y^2+z^2=4$$

$$z=\pm\sqrt{4-(x^2+y^2)}$$ nama treba +

$$I=\iint\limits_S xy^3z\,dx\,dy=\iint\limits_D xy^3\left(\sqrt{4-(x^2+y^2)}\right)dx\,dy=\left|\begin{array}{l}\text{uvedimo polarne koordinate}\\ x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ dx\,dy=r\,dr\,d\varphi \\ x^2+y^2=r^2\end{array}\quad D':\begin{cases}0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le r\le 2\end{cases}\right|$$

$$=\iint\limits_{D'} r\cos\varphi\, r^3\sin^3\varphi\sqrt{4-r^2}\,r\,dr\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi\int_0^2 r^5\sqrt{4-r^2}\,dr=I_1\cdot I_2$$

$$I_1=\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\cdot\sin^3\varphi\,d\varphi=\left|\begin{array}{l}\sin\varphi=t\\ \cos\varphi\,d\varphi=dt\\ \varphi\big|_0^{\pi/2}\Rightarrow t\big|_0^1\end{array}\right|=\int_0^1 t^3dt=\frac{1}{4}t^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

$$I_2=\int_0^2 r^5\sqrt{4-r^2}\,dr=\int_0^2 r^4\sqrt{4-r^2}\,r\,dr=\left|\begin{array}{l}4-r^2=t^2\\ -2r\,dr=2t\,dt\\ r\,dr=-t\,dt\end{array}\quad r\big|_0^2\Rightarrow t\big|_2^0\right|=\int_0^2(4-t^2)^2\cdot t\,t\,dt$$

$$=\int_0^2(16-8t^2+t^4)\cdot t^2\,dt=\int_0^2(t^6-8t^4+16t^2)\,dt=\ldots=\frac{1024}{105}$$

$$I=\frac{1}{4}\cdot\frac{1024}{105}=\frac{256}{105}$$ traženo rješenje