Površinski integrali II vrste

Obično su oblika: $\iint\limits_S P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy$

Uvijek ga svodimo na dvostruki integral.
S je neka data površina. Početni integral se obično podijeli na tri dijela $\iint\limits_S P(x,y,z)\,dy\,dz$, $\iint\limits_S Q(x,y,z)\,dz\,dx$ i $\iint\limits_S R(x,y,z)\,dx\,dy$.

$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ je vektor normale na površinu S gdje su α, β i γ uglovi koje zaklapa vektor normale sa x, y i z osom.
Kad računamo $\iint\limits_S P(x,y,z)\,dy\,dz$ treba uzeti u obzir predznak broja $\cos\alpha$. Ako je $\cos\alpha < 0$ ispred integrala stavljamo $-$ (minus), ako je $\cos\alpha > 0$ ispred integrala stavljamo $+$ (plus) i ako je $\cos\alpha = 0$ tada $\iint\limits_S P(x,y,z)\,dy\,dz = 0$.
Analogno uzimamo vrijednost $\cos\beta$ za $\iint\limits_S Q(x,y,z)\,dz\,dx$ i $\cos\gamma$ za $\iint\limits_S R(x,y,z)\,dx\,dy$. $I = I_1 + I_2 + I_3$
Integral I_1 rješavamo projekcijom površi S na yOz ravan, integral I_2 projekcijom na xOz ravan i integral I_3 $I_3 = \iint\limits_S R(x,y,z)\,dx\,dy$ projekcijom površi S na xOz ravan.

Kod površinskih integrala II vrste mora se označiti koju stranu površi uzimamo. Zavisi od toga sa koje strane vektor normale djeluje (ili sa unutrašnje ili sa spoljašnje oblasti površi).
Kod izbora površi S po kojoj se integrira mora se precizirati da li se uzima vanjska ili unutrašnja strana površi, jer prelaskom na suprotnu stranu integral mijenja predznak.

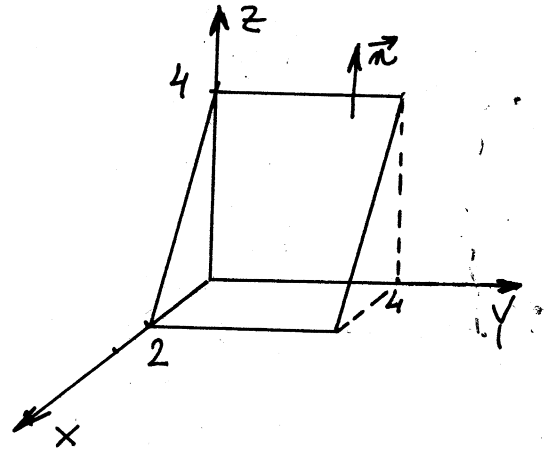
(#) Izračunati $\iint\limits_S z\,dx\,dy + x\,dz\,dx + y\,dy\,dz$ pri čemu je S gornja strana ravni $2x + z = 4$, $0 < y < 4$ u prvom oktantu.

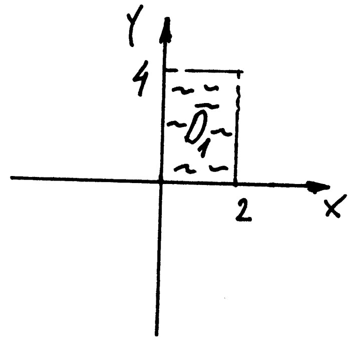
Rj.:

$2x + z = 4 \quad /:4$

$\frac{x}{2} + \frac{z}{4} = 1$ segmentni oblik jednačine ravni

$z = 4 - 2x$





$\vec{n} = (2, 0, 1)$ vektor normale ravni

$|\vec{n}| = \sqrt{5}$ $\quad \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma$

$I_1 = \iint\limits_S z\,dx\,dy$ projeciramo površ na xOy ravan $\quad D_1: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$

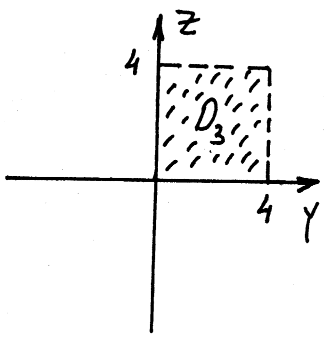
Kako je $\cos\gamma > 0 \Rightarrow I_1 = + \iint\limits_{D_1} (4 - 2x)\,dx\,dy =$

$= \int_0^4 \left[\int_0^2 (4-2x)\,dx\right] dy = \int_0^4 \left(4x\Big|_0^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^2\right) dy = \int_0^4 (8-4)\,dy = 4y\Big|_0^4 = 16$

$I_2 = \iint\limits_S x\,dz\,dx$ (gledamo ugao β)

Kako je $\cos\beta = 0 \Rightarrow I_2 = 0$

$I_3 = \iint\limits_S y\,dy\,dz$ (gledamo ugao α) $\cos\alpha > 0 \Rightarrow I_3 = + \iint\limits_{D_3} y\,dy\,dz$



$D_3: \begin{cases} 0 \le y \le 4 \\ 0 \le z \le 4 \end{cases}$

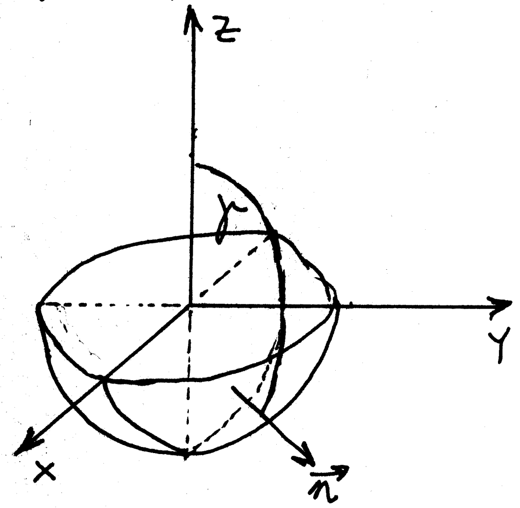
$I_3 = \int_0^4 \left[\int_0^4 y\,dy\right] dz = \int_0^4 \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^4 dz$

$= \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot z\Big|_0^4 = 32$

$\iint\limits_S z\,dx\,dy + x\,dz\,dx + y\,dy\,dz = 16 + 0 + 32 = 48$

Izračunati $\iint\limits_S x^2y^2z\,dx\,dy$ gdje je S-vanjska strana donje polovine sfere $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Rj.



Kako imamo $dx\,dy$: zanima nas ugao γ (γ je ugao koji vektor normale $\vec{n}$ na površ zaklapa sa z-osom).

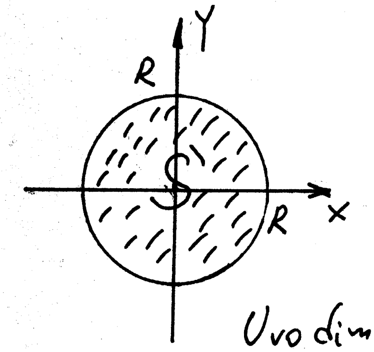
$$\gamma > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\gamma < 0$$

$$z^2 = R^2 - x^2 - y^2$$

$$z<0 \qquad z = -\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

Da smo imali čitavu sferu tada bi integral podijelili na dva dijela za gornji i za donji dio sfere.

Gledamo projekciju površi S na xOy ravan:



$$S': \ x^2+y^2 \le R^2$$

$$\iint\limits_S x^2y^2z\,dx\,dy = -\iint\limits_{S'} x^2y^2\left(-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)dx\,dy$$

Uvodimo polarne koordinate

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$$D: \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le R \\ dx\,dy = r\,d\varphi\,dr \end{cases} \qquad x^2+y^2=r^2$$

$$\iint\limits_S x^2y^2z\,dx\,dy = \iint\limits_{S'} x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint r^2\cos^2\varphi\, r^2\sin^2\varphi\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\,d\varphi\,dr$$

$$= \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\left[\int_0^R r^5\sqrt{R^2-r^2}\,dr\right]d\varphi \overset{(*)}{=} \frac{8R^7}{105}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi R^7}{105}$$

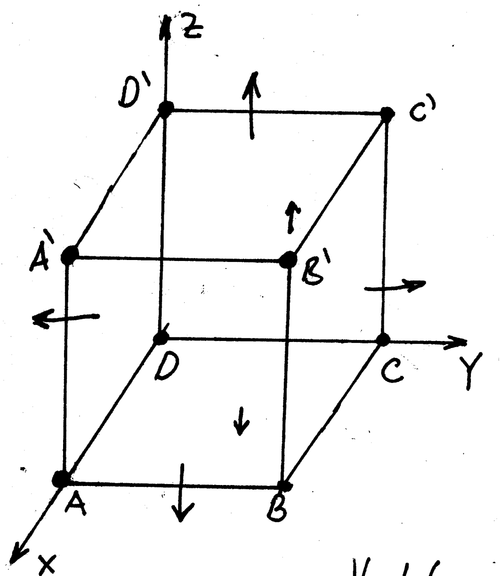
(*)

$$\int_0^R r^5\sqrt{R^2-r^2}\,dr = \int_0^R r^4\sqrt{R^2-r^2}\,r\,dr = \left| \begin{matrix} R^2-r^2=t^2 & r=0 \Rightarrow t=R \\ -2r\,dr = 2t\,dt & r=R \Rightarrow t=0 \\ r\,dr = -t\,dt & \end{matrix} \right| = \int_0^R (R^2-t^2)^2\cdot\sqrt{t^2}\cdot t\,dt = \ldots = \frac{8R^7}{105}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}(2\cos\varphi\sin\varphi)^2d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos4\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{8}\left(\varphi\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{4}\sin4\varphi\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{\pi}{4}$$

(#) Izračunati integral $\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$ gdje je S vanjska strana kocke koju čine ravni $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$.

Rj.



Označimo sa $I_1 = \iint\limits_S x\,dy\,dz$

Ovaj integral radimo po šest površina: $ABCD$, $ABB'A'$, $BCC'B'$, $ADD'A'$, $A'B'C'D'$ i $DCC'D'$.

Kako imamo $dy\,dz$ posmatramo ugao α koj zaklapa vektor normale na površ sa x osom

Vektor normala površina $ABCD$, $A'B'C'D'$, $BCC'B'$ i $ADD'A'$ je okomita na x-osu $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint\limits_{ABCD} x\,dy\,dz = \iint\limits_{A'B'C'D'} x\,dy\,dz = \iint\limits_{BCC'B'} x\,dy\,dz = \iint\limits_{ADD'A'} x\,dy\,dz = 0$$

Kako je $x=0$ za površinu $DCC'D'$ $\Rightarrow \iint\limits_{DCC'D'} x\,dy\,dz = 0$

Za I_1 ostaje nam samo površina $ABB'A'$

$$\vec{n}_0 = (1,0,0) \Rightarrow \cos\alpha > 0 \Rightarrow I_1 = +\iint\limits_D dy\,dz$$

gdje je D oblast dobijena projekcijom kvadrata $ABB'A'$ na yOz ravan $D: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$

$$I_1 = \iint\limits_D dy\,dz = \int_0^1 \Big[\int_0^1 dy\Big] dz = z\Big|_0^1 \, y\Big|_0^1 = 1$$

Sad nije teško, analognim zaključivanjem, vidjeti da je

$\iint\limits_S y\,dz\,dx = 1$ i $\iint\limits_S z\,dx\,dy = 1$ redom po površinama $BCC'B'$ i $A'B'C'D'$

dok je po ostalim površinama $=0$ $\Rightarrow \iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = 3$