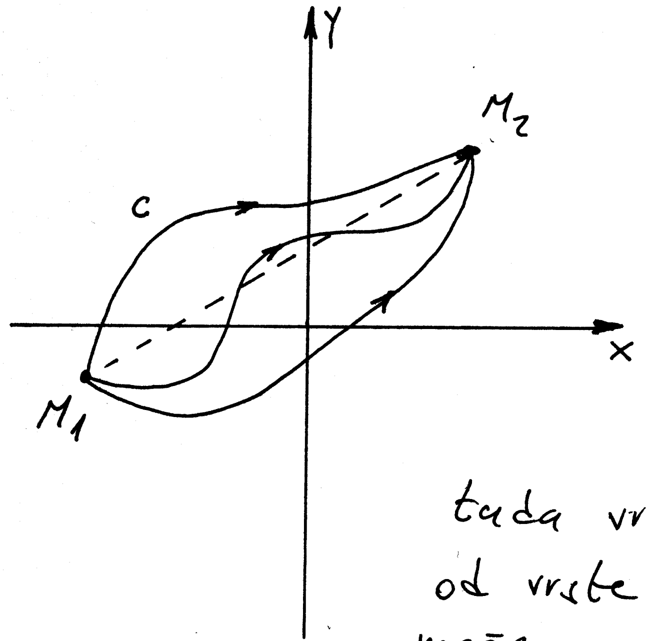
Nezavisnost krivoliniskog integrala od vrste krive linije. Određivanje primitivnih f-ja



Ako je data kriva linija c koja spaja tačke $M_1(a,b)$ i $M_2(c,d)$ (pri čemu je M_1 početak a M_2 kraj krive linije c) i krivolinijski integral $I=\int\limits_c P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$

kod kojeg vrijedi $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

tada vrijednost integrala I ne zavisi od vrste krive linije c (za krivu liniju c možemo uzeti bilo koju krivu koja spaja tačke M_1 i M_2).

Vrijednost integrala obično tražimo tako što nađemo f-ju $u=u(x,y)$ za koju vrijedi $du(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ pa imamo

$$I=\int\limits_c P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int\limits_c du(x,y)=u(x,y)\Big|_{(a,b)}^{(c,d)}=u(c,d)-u(a,b)$$

(#) Dokazati da integral $\int_L f(xy)(y\,dx + x\,dy)$ po zatvorenoj konturi L ima vrijednost 0 (nula) bez obzira na tip f-je uključen u integrand.

Rj. $\int_L f(xy)(y\,dx+x\,dy) = \int_L y f(xy)\,dx + x f(xy)\,dy$

Označimo sa $P(x,y) = y f(xy)$ i $Q(x,y) = x f(xy)$. Imamo

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= f(xy) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial (xy)} \cdot x = f(xy) + xy \cdot \frac{\partial f}{\partial (xy)} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= f(xy) + x\,\frac{\partial f}{\partial (xy)} \cdot y = f(xy) + xy\,\frac{\partial f}{\partial (xy)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy$$ formula Greena

$$\int_L f(xy)(y\,dx + x\,dy) = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy = 0$$ bez obzira na L.

q.e.d.

(#) Izračunati integral $\displaystyle\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4+4xy^3)\,dx + (6x^2y^2-5y^4)\,dy$

Rj. Označimo sa $P(x,y) = x^4+4xy^3$ i $Q(x,y) = 6x^2y^2-5y^4$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2$$

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$; $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ egzaktna diferencijalna jednačina

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = x^4+4xy^3 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) = 6x^2y^2-5y^4 \ \ldots(*)$$

$$\partial u = P(x,y)\,\partial x$$

$$u = \int (x^4+4xy^3)\,dx = \frac{1}{5}x^5 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2y^3 + \varphi(y) = \frac{1}{5}x^5 + 2x^2y^3 + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y^2 + \varphi'(y) \ldots(**) \qquad \text{Iz } (*) \text{ i } (**) \Rightarrow \varphi'(y) = -5y^4$$

$$\varphi(y) = -5\int y^4\,dy = -y^5$$

Prema tome $u(x,y) = \frac{1}{5}x^5 + 2x^2y^3 - y^5$

$$\int_{(-3,-1)}^{(3,0)} (x^4+4xy^3)\,dx + (6x^2y^5-5y^4)\,dy = \int_{(-2,1)}^{(3,0)} du(x,y) = \left(\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3-y^5\right)\Bigg|_{(-3,1)}^{(3,0)}$$

$$= \left(\frac{3^5}{5}+0+0\right) - \left(\frac{(-2)^5}{5} + 2\cdot 4 - 1\right) = \frac{243}{5} + \frac{32}{5} - \frac{40}{5} + \frac{5}{5} = \frac{240}{5}$$

$$= 48$$

(#) Izračunati krivolinijski integral $\int_C \cos 2y\,dx - 2x\sin 2y\,dy$

gdje je c neka kriva koja spaja tačke $A(1,\frac{\pi}{6})$ i $B(2,\frac{\pi}{4})$.

Rj. Označimo sa $P(x,y) = \cos 2y$ i $Q(x,y) = (-2x)\sin y$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2\sin 2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2\sin y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

vrijednost integrala ne zavisi od vrste konture

I način:

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_C du(x,y) = u(x,y)\Big|_{(a,b)}^{(c,d)}$$ gdje je

$du(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, tačka (a,b) početak a (c,d) kraj konture c

Odredimo f-ju $u = u(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = \cos 2y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) = -2x\sin 2y$$

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$; $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ovo je egzaktna diferencijalna jednačina

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos 2y$$

$$\partial u = \cos 2y\,\partial x \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2x\sin 2y \quad \ldots(*)$$

$$u = \int \cos 2y\,dx = x\cos 2y + \varphi(y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = x\cdot(-\sin 2y)\cdot 2 + \varphi'(y) =$$

$$= -2x\sin 2y + \varphi'(y) \quad \ldots(**)$$

Sad imamo $\overset{\text{iz } (*) \text{ i } (**)}{\varphi'(y) = 0} \Rightarrow \varphi(y) = c$

$$u(x,y) = x\cos 2y + c$$

$$\int_C \cos 2y\,dx - 2x\sin 2y\,dy = \int_C d(x\cos 2y + c) = x\cos 2y\Big|_{(1,\frac{\pi}{6})}^{(2,\frac{\pi}{4})} + c\Big|_{(1,\frac{\pi}{6})}^{(2,\frac{\pi}{4})} =$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{3} + (c - c) = -\frac{1}{2}$$

II način: (za vježbu) standardno rješavamo krivolinijski integral s tim da izaberemo pogodnu konturu koja spaja date tačke

Izračunati krivoliniski integral $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$ duž putanje koja ne siječe osu Oy.

Rj:

Vrijednost integrala $I = \int_c P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ ne zavisi od vrste konture c ako je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

U našem slučaju $I = \int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y}{x^2}\,dx - \frac{1}{x}\,dy$ $\quad P(x,y) = \frac{y}{x^2}, \quad Q(x,y) = -\frac{1}{x}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$$

Prema tome vrijednost integrala ne zavisi od vrste krive linije c koja spaja tačke $(2,1)$ i $(1,2)$.

I način: Odredićemo primitivnu f-ju

$$u = u(x,y)$$

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ovo je egzaktna dif. jednačina

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

$$du = \frac{y}{x^2}\,dx - \frac{1}{x}\,dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x} \quad \ldots(1)$$

$$\partial u = \frac{y}{x^2}\,\partial x$$

$$u = \int \frac{y}{x^2}\,dx + \varphi(y) = y\,\frac{x^{-1}}{-1} + \varphi(y) = -\frac{y}{x} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x} + \varphi'(y) \quad \ldots(2)$$

$$(1)\ i\ (2) \Rightarrow \varphi'(y) = 0$$

$$\varphi(y) = c$$

$$u = -\frac{y}{x} + c$$

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2} = \int_{(2,1)}^{(1,2)} du = -\frac{y}{x}\Big|_{(2,1)}^{(1,2)} = -\frac{2}{1} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

II način: Spojimo tačke $(2,1)$ i $(1,2)$ nekom krivom (ili pravom) ili izlomljenom pravom linijom i izračunamo integral na klasičan način.

(#) Izračunati krivolinijski integral $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ duž puta

koji ne prolazi kroz koordinatni početak.

Rj: Ako je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ tada vrijednost integrala $\int_C P dx + Q dy$ ne zavisi od vrste izbora puta integracije.

$$I = \int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dy \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ Q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

Prema tome vrijednost integrala ne zavisi od izbora krive kojom ćemo spojiti tačke $(1,0)$ i $(6,8)$.

I način: Odrediti ćemo primitivnu f-ju u.

$$u = u(x,y)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \ldots(1)$$

$$\partial u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \partial x$$

$$u = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx + \varphi(y) = \left| \begin{array}{c} x^2+y^2 = t^2 \\ 2x\,dx = 2t\,dt \\ x\,dx = t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{\sqrt{t^2}} dt + \varphi(y)$$

$$= t + \varphi(y) = \sqrt{x^2+y^2} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \varphi'(y) \quad \ldots(2)$$

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow u = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{(1,0)}^{(6,8)} du = u \Big|_{(1,0)}^{(6,8)} = \sqrt{x^2+y^2} \Big|_{(1,0)}^{(6,8)} = \sqrt{36+64} - \sqrt{1+0} = 9$$

II način: Spojimo tačke $(1,0)$ i $(6,8)$ nekom krivom koja ne prolazi kroz koordinatni početak i izračunamo integral na klasičan način.

Zadaci za vježbu

1. Na dva načina izračunati $\int_L (1-x^2)y\,dx + x(1+y^2)\,dy$ ako kontura integracije L prolazi krugom $x^2+y^2=R^2$:
   a) direktno
   b) uz pomoć Greenove formule

2. Izračunati $\int_L (xy+x+y)\,dx + (xy+x-y)\,dy$ gdje je L elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Integraciju izvesti u pozitivnom smjeru. Račun sprovesti na dva načina a) neposredno b) uz pomoć Greenove formule.

3. Provjeriti da integrali prolazeći po zatvorenim konturama su jednaki nula bez obzira na tip f-je uključen u integrand
   a) $\int_L \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$ b) $\int_L f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$

4. Dokazati da vrijednost integrala $\int \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ koji prolazi duž neke zatvorene konture, konture koja sadrži koordinatni početak, iznosi 2π.

5. Izračunati površinu figure koja je ograničena krivom kardioidom $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$.

Rješenja: 1. $\frac{\pi R^4}{2}$ 2. 0 4. primjeniti formulu Greena na dvostruku oblast ograničenu konturom L i na bilo kakav krug s centrom u koordinatnom početku koji ne sijeće konturu L.

5. $6\pi a^2$