Izračunati krivolinijski integral

$$I=\oint_C (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy,$$

gde je C: $|x-1|+|y-1|=1.$

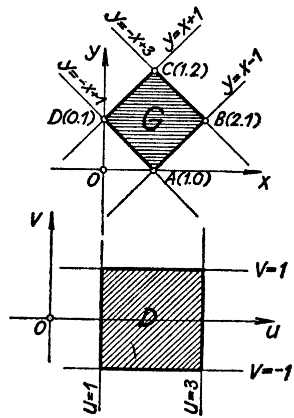
Rešenje. Kriva C je izlomljena linija $C=\overline{AB}\cup\overline{BC}\cup\overline{CD}\cup\overline{DA}$ (vidi sliku!), pa je

$$\oint_C=\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BC}}+\int_{\overline{CD}}+\int_{\overline{DA}}.$$

Izračunavanjem integrala po $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ nalazimo da je

$$I=0.$$

Integral se može izračunati i primenom formule Greena. Tada je



$$I=2\iint_G (x-y)\,dx\,dy=$$

$$=\iint_D -v\,du\,dv=-\int_1^3 du\int_{-1}^1 v\,dv=0,$$

gde je

$$y+x=u,\qquad y-x=v,\qquad J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}.$$

#

Izračunati krivolinijski integral

$$\oint_C xy\left[\left(-\frac{x}{2}+y\right)dy-\left(x+\frac{y}{2}\right)dx\right],$$

gde je C kružnica $x^2+y^2=r^2$, neposredno i primenom formule Greena.

Rešenje. Parametarske jednačine krive C su

$$C:\ \begin{matrix} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{matrix} \qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi; \qquad \begin{matrix} dx=-r\sin t\,dt \\ dy=r\cos t\,dt \end{matrix},$$

pa se dati krivolinijski integral svodi na određeni integral po promenljivoj t

$$I=\int_0^{2\pi} r^2\sin t\,\cos t\left[\left(-\frac{r}{2}\cos t+r\sin t\right)r\cos t+\left(r\cos t+\frac{r}{2}\sin t\right)r\sin t\right]dt=$$

$$=r^4\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin 2t\left(\sin 2t-\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=$$

$$=r^4\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 4t}{4}-\frac{1}{8}\sin 4t\right)dt=\frac{r^4\pi}{2}.$$

II način. Ispunjeni su uslovi za primenu formule Greena: putanja integracije je zatvorena kriva, smer integracije je suprotan kretanju kazaljke na satu, funkcije $P=-xy\left(x+\frac{y}{2}\right)$ i $Q=xy\left(-\frac{x}{2}+y\right)$ i njihovi izvodi $\frac{\partial P}{\partial y}=-x^2-xy$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}=-xy+y^2$ neprekidne su na putanji C i u oblasti G koju putanja C ograničava, pa je

$$I=\iint_G (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

Prelaskom na polarne koordinate:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad J=\rho$$

biće

$$I=\iint_G \rho^2\,|J|\,d\rho\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^r \rho^3\,d\rho=\frac{r^4\pi}{2}.$$