Материјал припремио **Benjamin Linus**

У материјалу су дате дефиниције, теореме, докази теорема (рађених на предавању) и примери. Додао сам и неке додатне примере да бих илустровао приказану теорију.

Интегрални рачун

Дефиниција 1. Нека је функција f дефинисана на произвољном интервалу I (затворен, отворен, полутворен) ако постоји функција F таква да за свако $x \in I$

$$F'(x) = f(x)$$

каже се да је $F(x)$ **примитивна функција** функције $f(x)$ на I. Ако је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ онда је то и $F(x)+C$, ($C \in \mathbb{R}$, произвољна константа). Класа примитивних функција $F(x)+C$ биће означена са

$$F(x) + C = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}F(x)$$

$$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)$$

Опште методе интеграције

Таблица основних интеграла:

1) $\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \ \alpha \neq -1$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C,\ \ x \neq 0$

3) $\displaystyle\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$

4) $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ \ a > 0,\ \ a \neq 1$

5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

6) $\displaystyle\int -\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arcctg} x + C$

7) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,\ \ |x| < 1$

8) $\displaystyle\int -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C,\ \ |x| < 1$

9) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C = \operatorname{arsh} x + C$

10) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x - \sqrt{x^2+1}| + C = \operatorname{arch} x + C, \qquad x > 1$

11) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C = \begin{cases} \operatorname{arth} x, & |x| < 1 \\ \operatorname{arcth} x, & |x| > 1 \end{cases}$

12) $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$

13) $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$

14) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

15) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

16) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x$

17) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x$

18) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$

19) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$

Теорема 1. Ако функције f и g имају примитивну функцију на I тада функција $\alpha f(x) + \beta g(x)$ има примитивну функцију на I и важи

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Доказ. $d\left[\alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx\right] = \alpha d \int f(x)dx + \beta d \int g(x)dx = (\alpha f(x) + \beta g(x))dx$

Теорема 2. Ако су на I функције f, φ и φ' непрекидне и ако функција $x = \varphi(t)$ има инверзну функцију $t = \varphi^{-1}(x)$ и притом важи $\varphi(t) \neq 0$ на I, тада је

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t, \qquad t = \varphi^{-1}(x)$$

Доказ.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\varphi'(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\varphi(t)) = f(x)$$

Парцијална интеграција

$$\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u$$
$$uv = \int u\,\mathrm{d}v + \int v\,\mathrm{d}u$$
$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

Интеграција помоћу рекурентних формула

$$I(n) = F(I(n-1))$$

Пример 1. $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} \qquad u = \frac{1}{(1+x^2)^n}, \quad \mathrm{d}u = -\frac{2nx\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}, \quad \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, \quad v = u$

$$I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(I_n - I_{n+1})$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)I_n\right), \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$
$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + I_1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x\right) + C$$
$$I_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{1+x^2} + 3I_2\right) = \frac{x}{4(1+x^2)} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + C$$

Интеграција рационалних функција

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ P и Q полиноми, $\operatorname{dg} P \geqslant \operatorname{dg} Q$ (неправа рационална функција) $\Rightarrow$
$\dfrac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$.

Посматрајмо случај $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ $\operatorname{dg} P < \operatorname{dg} Q$ (права рационална функција)
Функција f се разлаже на парцијалне разломке:

1) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$

2) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C \quad k = 2, 3, 4, \ldots$

3) $I_n = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+bx+c)^n}$, $b^2 - 4c < 0$

Интеграл I_1 се решава на следећи начин, напишимо најпре именилац датог разломка у канонском облику:

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} = \alpha^2\left(\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\alpha}\right)^2 + 1\right)$$

где је $\alpha^2 = c - \dfrac{b^2}{4}$. Увођењем смене $t = \dfrac{x+\frac{b}{2}}{\alpha}$, добијамо да је

$$I_1 = \frac{1}{\alpha}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg} t + C$$

Помоћу исте смене, интеграл I_n се, за произвољно $n \in \mathbb{N}$, израчунава у облику

$$I_n = \frac{1}{\alpha^{2n-1}}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}.$$

За $n > 1$, применом парцијалне интеграције може се добити веза између I_n и I_{n-1} и снижавати ред све док се не дође до интеграла I_n, за који смо извели решење.

$$I_{n-1} = \frac{1}{\alpha^{2n-1}}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{n-1}} = \frac{1}{\alpha^{2n-1}}\left(\frac{t}{(t^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha^{2n-1}}\left(\frac{t}{(t^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)(I_{n-1} - I_n)\right)$$

4) Интеграл $J_n = \displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+bx+c)^n}$ једноставним трансформацијама се своди на интеграл I_n :

$$J_n = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+bx+c)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+b-b}{x^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^n} - \frac{b}{2}I_n,$$

где је $u = x^2 + bx + c$.

Интеграција ирационалних функција

1) Ако је $\int R(x^{p_1/q_1}, x^{p_2/q_2}, \ldots, x^{p_n/q_n})\,\mathrm{d}x$ где је R рационална функција, а p_i и q_i цели бројеви, уводи се смена $x = t^q$ где је $q = \text{НЗС}\ (q_1, q_2, \ldots, q_n)$.
Уопштење: ако се уместо x појави $ax+b$ или $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ исто се уводи смена $ax+b = t^q$ или $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^q$.

Пример 2.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \left\{ \begin{array}{cc} x = t^6 & t = \sqrt[6]{x} \\ \mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t & \end{array} \right\} = \int \frac{t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t+1} = 6\cdot\left(\int (t^2-t)\,\mathrm{d}t + \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{t+1}\right) =$$

$$= 6\cdot\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| + C\right) = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C$$

2) Ојлерове смене: Ако је $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$, где је R рационална функција, своди се на рационалну функцијуна следећи начин:

1° за $a > 0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{ax} + t$
2° за $c \geqslant 0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$
3° Ако су нуле квадратног тринома x_1 и x_2 реалне и различите $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$. За $a < 0$ и ако нема реалне различите нуле онда је корен недефинисан.

У прве две формуле произвољно се може ставити или знак $+$ или знак $-$.

Пример 3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+2x+3}}$

$$\sqrt{x^2+2x+3} = x+t, \quad x = \frac{t^2-3}{2(1-t)}, \quad \mathrm{d}x = \frac{-t^2+2t-3}{2(1-t)^2}\,\mathrm{d}t, \quad x+t = \frac{-t^2+2t-3}{2(1-t)}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+2x+3}} = \int \frac{\dfrac{-t^2+2t-3}{2(1-t)^2}\,\mathrm{d}t}{\dfrac{t^2-3}{2(1-t)}\cdot\dfrac{-t^2+2t-3}{2(1-t)}} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-3}$$

$$\frac{1}{t^2-3} = \frac{A}{t-\sqrt{3}} + \frac{B}{t+\sqrt{3}}$$

$$(A+B)t + \sqrt{3}(A-B) = 1$$

$$\left.\begin{array}{r} A+B=0 \\ A-B=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad B = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int\left(\frac{1}{t-\sqrt{3}} - \frac{1}{t+\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+3}-x-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2x+3}-x+\sqrt{3}}\right| + C$$

3) Интеграл биномног диференцијала $\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x,\ \ m,n,p\in\mathbb{Q}$

1° $p\in\mathbb{Z}$ $\nearrow$ ако је $p\in\mathbb{N}$, своди се на интеграл степених функција
$\searrow$ $p<0$, своди се на интеграл ирационалних функција

2° $p\notin\mathbb{Z}\quad q=\dfrac{m+1}{n}$

а) $q\in\mathbb{Z}$, уводи се смена $a+bx^n=t^r$ где је r именилац разломка p

б) $q\notin\mathbb{Z},\quad p+q\in\mathbb{Z}$, уводи се смена $\dfrac{a}{x^n}+b=t^r$ где је r именилац разломка p

У осталим случајевима интеграл је нерешив

Пример 4. $m=-\dfrac{1}{4},\quad n=\dfrac{1}{6},\quad p=-2$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x}(1-\sqrt[6]{x})^2}=\left\{\begin{array}{c} x=t^{12}\quad t=\sqrt[12]{x}\\ \mathrm{d}x=12t^{11}\,\mathrm{d}t\end{array}\right\}=\int\frac{12t^{11}\,\mathrm{d}t}{t^3(1-t^2)^2}=12\int\frac{t^8\,\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2}=$$

$$=12\int(t^2+2)\,\mathrm{d}t+12\int\frac{3t^2-2}{(t-1)^2(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{3t^2-2}{(t-1)^2(t+1)^2}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{(t-1)^2}+\frac{D}{(t+1)^2}$$

$$3t^2-2=t^3(A+B)+t^2(A-B+C+D)+t(-A-B+2C-2D)+(-A+B+C+D)$$

$$\left.\begin{array}{r} A+B=0\\ A-B+C+D=3\\ -A-B+2C-2D=0\\ -A+B+C+D=-2\end{array}\right\}\Rightarrow A=\frac{5}{4}\quad B=-\frac{5}{4}\quad C=D=\frac{1}{4}$$

$$12\int(t^2+2)\,\mathrm{d}t+12\cdot\left(\frac{5}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1}-\frac{5}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}+\int\frac{\mathrm{d}t}{4(t-1)^2}+\int\frac{\mathrm{d}t}{4(t+1)^2}\right)=$$

$$=4t^3+24t+15\ln|t-1|-15\ln|t+1|-\frac{3}{t-1}-\frac{3}{t+1}+C$$

Пример 5. $\displaystyle\int\frac{x^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},\qquad m=5,\quad n=2,\quad p=-\frac{1}{2},\quad q=\frac{6}{2}=3\in\mathbb{Z}$

$$1-x^2=t^2,\qquad t=\sqrt{1-x^2},\qquad x\,\mathrm{d}x=-t\,\mathrm{d}t$$

$$\int\frac{x^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=-\int\frac{(1-t^2)^2t\,\mathrm{d}t}{t}=-\int(t^4-2t^2+1)\,\mathrm{d}t=$$

$$=-\frac{t^5}{5}+\frac{2t^3}{3}-t+C$$

Пример 6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}, \qquad m=0,\ n=3,\ p=-\frac{1}{3},\ q=\frac{1}{3}, \quad p+q=0\in\mathbb{Z}$

$$\frac{1}{x^3}+1=t^3, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{x^4}=t^2\,\mathrm{d}t, \qquad t=\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+1}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}} = -\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t(t^3-1)} = -\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

$$\frac{t}{(t-1)(t^2+t+1)} \equiv \frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1}$$

$$t=t^2(A+B)+t(A-B+C)+A-C$$

$$\left.\begin{aligned} A+B&=0\\ A-B+C&=1\\ A-C&=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow A=\frac{1}{3} \quad B=-\frac{1}{3} \quad C=\frac{1}{3}$$

$$\frac{t}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{1}{3(t-1)}-\frac{t-1}{3(t^2+t+1)}$$

$$-\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t-1)(t^2+t+1)} = -\frac{1}{3}\cdot\left(\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1}-\int\frac{t-1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\left(\ln|t-1|-\frac{1}{2}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t+\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}\right)+C_1=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\left(\ln|t-1|-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(t^2+t+1)}{t^2+t+1}t+\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right)+C_1=\{u=\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\}=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\left(\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln|t^2+t+1|+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}\right)+C_2=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\left(\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln|t^2+t+1|+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\frac{|t-1|}{(t^2+t+1)^{1/2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

Интеграција тригонометријских функција

1) $\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x$ где је R рационална функција, тада се уводи смена $t=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\,, \qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \qquad \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

2) Ако је $R(\sin^2 x,\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$ може се увести смена

$$t=\mathrm{tg}\,x, \qquad \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{1+t^2}$$

3) $\int R(\operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}x$, смена $\operatorname{tg} x = t$

4) Ако је $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ тј. непарна по $\sin x$ уводи се смена

$$\cos x = t\,, \qquad \sin x = \sqrt{1-t^2}\,, \qquad \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

5) Ако је $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ тј. непарна по $\cos x$ уводи се смена

$$\sin x = t\,, \qquad \cos x = \sqrt{1-t^2}\,, \qquad \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

6) Ако је $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ уводи се смена

$$\operatorname{tg} x = t\,, \qquad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,, \qquad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Пример 7. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$ $\quad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

Пример 8. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}$, смена $t = \operatorname{tg} x$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3\sin^2 x+5\cos^2 x} = \int \frac{\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\dfrac{3t^2}{1+t^2}+\dfrac{5}{1+t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{3t^2+5} = \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}t\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{5}} + C$$

Пример 9. $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$, смена $t = \sin x$.

$$\int \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x = \int t^2(1-t^2)^2\,\mathrm{d}(\sin x) = \int t^2(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C$$

Пример 10. $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x\,\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$, смена $t = \cos x$.

$$\int \frac{\sin^5 x\,\mathrm{d}x}{\cos^4 x} = -\int \frac{(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t}{t^4} = -\int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{2}{t^2}+1\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{3t^2} - \frac{2}{t} - t + C$$

Интеграли који нису елементарне функције

Пример:

$$\int \frac{e^x}{x^n}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \frac{\sin x}{x^n}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \frac{x^n}{\ln x}\,\mathrm{d}x$$

Одређен (Риманов) интеграл

Дефиниција 2. **Подела** d одсечка $[a,b]$ означава се са $d = (x_0, x_1, \ldots, x_n;\ \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Дефиниција 3. **Интегрална (Риманова) сума** функције f на одсечку $[a,b]$ је:

$$S(f,d,a,b) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Дефиниција 4. **Норма** дате поделе d је $||d|| = \underset{0 \leqslant i \leqslant n-1}{max} (x_{i+i} - x_i)$
Очигледно, када $||d|| \to 0 \Rightarrow (\forall i)\ x_{i+1} - x_i \to 0 \Rightarrow n \to \infty$

Дефиниција 5. Нека је функција f дефинисана на $[a,b]$. Ако

$$(\exists I \in \mathbb{R})(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta(\epsilon) > 0)(\forall d)(||d|| < \delta \Rightarrow |S(f,d,a,b) - I| < \epsilon)$$

тада се I назива **одређен (Риманов) интеграл** функције f на $[a,b]$,

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

то уствари значи $\lim\limits_{||d|| \to 0} S(f,d,a,b) = I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Дефиниција 6. За функцију f која има Риманов интеграл на одсечку $[a,b]$ каже се да је **интеграбилна** на $[a,b]$.

Напомена, ако је $f(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$ I добија смисао површине.

Теорема 3. Свака функција f интеграбилна на одсечку $[a,b]$ ограничена је на $[a,b]$.

Дефиниција 7. Нека је функција f интеграбилна на $[a,b]$. Ако одсечак $[a,b]$ поделимо на $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (подела d) и формирамо суме:

$$\underline{S}(f,d,a,b) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$\overline{S}(f,d,a,b) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

где су m_i и M_i инфинум тј. супремум функције f на $[x_i, x_{i+1}]$, $\underline{S}$ и $\overline{S}$ су **доња и горња Дарбуова сума** дункције f на $[a,b]$.

Теорема 4. Ограничена функција f је интеграбилна на $[a,b]$, ако и само ако је

$$\lim_{||d||\to 0}(\overline{S}(f,d,a,b)-\underline{S}(f,d,a,b))=\lim_{||d||\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)=0$$

$$M_i>m_i\,,\qquad \sup[x_{i+1}-x_i]>\inf[x_{i+1}-x_i]\,,\qquad x_{i+1}>x_i.$$

Теорема 5. Ако је функција f дефинисана и ограничена на $[a,b]$ и на њему има:
1° коначно много прекида, или
2° пребројиво много прекида, функција f је интеграбилна на $[a,b]$.

Теорема 6. Ако је функција f дефинисана и монотона на $[a,b]$ она је и интеграбилна на $[a,b]$.

Особине Римановог интеграла

Теорема 7. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$

Теорема 8. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Доказ. За поделу

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

у другом интегралу она би постала

$$b=x_0<x_1<\ldots<x_n=a$$

па је $x_i-x_{i+1}<0$, и знак у Римановој суми се мења.

Теорема 9. Ако су функције f и g интеграбилне на $[a,b]$, интеграбилна је и функција $h(x)=\alpha f(x)+\beta g(x),\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ и важи

$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))\,\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Доказ. Заснива се на линеарности суме

$$\sum_{i=0}^{n-1}(\alpha f(\xi_i)+\beta g(\xi_i))(x_{i+1}-x_i)=\alpha\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)+\beta\sum_{i=0}^{n-1}g(\xi_i)(x_{i+1}-x_i).$$

Ако сада узмемо $\lim\limits_{||d||\to 0}$ леве и десне стране, добијамо једнакост интеграла.

Теорема 10. Ако је функција f интеграбилна на $[a,b]$ тада је на $[a,b]$ интеграбилна и функција $g(x)=|f(x)|$ и важи

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)\,\mathrm{d}x|.$$

Доказ. Ово је последица особине суме $|\sum_{i=0}^{n-1} a_i| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$.

Теорема 11. Ако је одсечак $[\alpha, \beta]$ садржан у $[a, b]$ и ако је функција f интеграбилна на $[a, b]$, интеграбилна је и на $[\alpha, \beta]$.

Доказ. Ако је лимес $\lim\limits_{||d||\to 0}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = 0$ на $[a, b]$, притом су α и β деоне тачке, онда се у суми примењеној на $[\alpha, \beta]$ појављује део сабирака, следи да је лимес опет нула.

Теорема 12. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ за сваку тачку c за коју дати интеграли постоје.

Страна 271.

Теорема 13. Ако је $f(x) = g(x)$ за свако $x \in [a, b]$ осим у коначно много тачака и ако је једна од ових функција интеграбилна на $[a, b]$, интеграбилна је и друга и важи

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Теорема 14. Нека је функција f интеграбилна на одсечку $[a, b]$ тада је

1° $(\forall x \in [a, b])(f(x) \geqslant 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0)$

2° $(\forall x \in [a, b])(f(x) > 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0)$

Последица: Нека су функције f и g интеграбилне на $[a, b]$, тада:

1° $(\forall x \in [a, b])(f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x)$

2° $(\forall x \in [a, b])(f(x) < g(x) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x)$

Теорема 15. (Став о средњој вредности интеграбилне функције) Нека је функција интеграбилна на $[a, b]$ и нека је

$$(\forall x \in [a, b]) \quad m \leqslant f(x) \leqslant M \quad m = \inf f(x) \quad M = \sup f(x)$$

тада постоји $\mu \in [m, M]$ тако да је

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b - a).$$

Напомена: Ако је $f(x)$ још и непрекидна на $[a, b]$ тада је $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b - a)$.

Доказ.

$$\int\limits_a^b m\,\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_a^b M\,\mathrm{d}x$$

$$m(b - a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b - a)$$

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M$$

$$\mu(b-a) = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ако је функција $f(x)$ непрекидна тада за $(\forall \mu \in [m, M])(\exists c \in [a, b])\ \mu = f(c)$.

Дефиниција 8. Средња вредност функције f на одсечку $[a, b]$ је

$$f_s = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

под претпоставком да је функција f интеграбилна на $[a, b]$, μ је просечна вредност функције f на $[a, b]$.

Веза одређеног и неодређеног интеграла

Теорема 16. Нека је функција f интеграбилна на $[a, b]$ и нека је за $x \in [a, b]$:

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

1° функција $F(x)$ је непрекидна на $[a, b]$
2° ако је и функција f непрекидна на $[a, b]$ тада је функција F примитивна функција функције f на $[a, b]$.

Доказ. 1° $x \in [a, b]$, Δx довољно мало, тако да је $\Delta x + x \in [a, b]$

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int\limits_a^{\Delta x + x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_x^{\Delta x + x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Нека је $m \leqslant f(x) \leqslant M$ на $[a, b]$. На основу теореме (средње вредности)

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \mu \Delta x \quad m \leqslant \mu \leqslant M$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}(F(x+\Delta x) - F(x)) = \mu x \to 0 \Rightarrow \ F$$

је непрекидна на $[a, b]$.

2° Ако је и f непрекидна, тада је $\mu = f(c)$, $\quad c \in (x, \Delta x + x)$ тј. $c = x + \theta \Delta x,\ 0 < \theta < 1$

$$F(x+\Delta x) - F(x) = f(x + \theta \Delta x)\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \theta \Delta x) = f(\lim_{\Delta x \to 0}(x + \theta \Delta x)) = f(x)$$

$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C-$ општи облик примитивне функције

$$F(a) = C, \quad F(b) = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + C \Rightarrow \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Ова једнакост позната је под називом **Њутн-Лајбницова формула.**

Геометријске примене Римановог интеграла

Запремина ротационог тела

$$V = \lim_{||d||\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \pi f(\xi_i)^2 (x_{i+1} - x_i) = \pi \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x$$

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x$$

Дужина лука криве

$$c_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$$

Нека су f и f' непрекидне на $[a, b]$, по Лагранжовој

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \quad x_{i+1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$$

$$c_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2} = (x_{i+1} - x_i)\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}$$

$$l = \lim_{||d||\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} c_i = \lim_{||d||\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}(x_{i+1} - x_i) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \,\mathrm{d}x$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\} \quad l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} \,\mathrm{d}t$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \,\mathrm{d}x$$

Површина ротационог тела

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} \,\mathrm{d}x$$

Несвојствени интеграл

Дефиниција 9. Нека је интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

ако лимес на десној страни постоји одговарајући интеграл за свако b, односно a, интеграл на левој страни назива се **несвојствени интеграл** функције f са бесконачним границама. Ако је одговарајући лимес коначан, несвојствени интеграл је **конвергентан.** У противном је **дивергентан.**

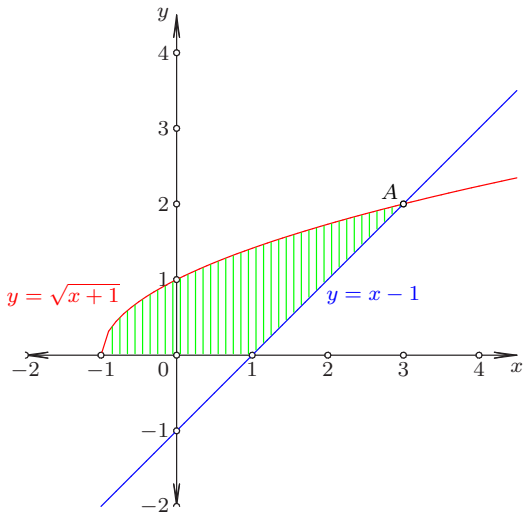
Дефиниција 10. Ако је функција f интеграбилна на сваком одсечку од $[a, b-\epsilon]$, $\epsilon > 0$ и неограничена у околини тачке b, тада је

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

и такође се назива несвојствени интеграл, али интеграл бесконачне функције у коначним границама (аналогно за доњу границу). Ако је лимес коначан интеграл је конвергентан, у супротном је дивергентан.

Пример 11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon\to 0} 2\sqrt{x}\big|_\epsilon^1 = 2 - 0 = 2$

Пример 12. Израчунати површину ограничену линијама $y = \sqrt{x+1}$, $\quad y = x - 1$ и x-осом.



Израчунајмо прво x координату тачке A,

$$\sqrt{x+1} = x - 1, \quad x \geqslant 1 \Rightarrow x = 3.$$

Тражена површина је

$$P = \int_{-1}^{3} \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x - \int_{1}^{3} (x-1)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2(x+1)^{3/2}}{3}\bigg|_{-1}^{3} - \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\bigg|_{1}^{3} = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$$

Литература

[1] М. Меркле: *Математичка анализа, теорија и хиљаду задатака* „Академска мисао”, Београд 2005.

[2] З. Каделбург, В. Мићић, С. Огњановић: *Анализа са алгебром 4*, треће допуњено издање „Круг”, Београд 2003.

[3] Електронски материјал: *http://matematika.etf.bg.ac.yu/predmeti/matematika_2.htm*

God loves you as He loved Jacob.