#

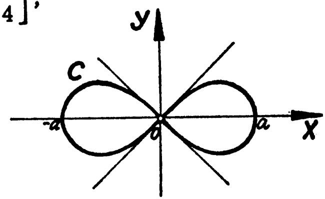
Izračunati krivolinijski integral

$$I=\oint\limits_C |y|\,ds,$$

gde je kriva C lemniskata: $(x^2+y^2)^2=a^2\,(x^2-y^2)$.

Rešenje. Prelaskom na polarne koordinate $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, biće:

$$C:\quad \rho^2=a^2\cos 2\varphi,\quad \varphi\in\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right],$$



$$ds=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi=\frac{a^2}{\rho}\,d\varphi$$

$$|y|\,ds=a^2\,|\sin\varphi|\,d\varphi.$$

Kako je

$$|\sin\varphi|=\begin{cases}-\sin\varphi & \text{za}\quad \varphi\in\left[-\frac{\pi}{4},\ 0\right]\cup\left[\pi,\ \frac{5\pi}{4}\right]\\[2ex] \sin\varphi & \text{za}\quad \varphi\in\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\ \pi\right],\end{cases}$$

to je dati krivolinijski integral jednak određenom integralu po promenljivoj φ:

$$I=a^2\left(-\int_{-\pi/4}^{0}\sin\varphi\,d\varphi+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,d\varphi+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi-\int_{\pi}^{5\pi/4}\sin\varphi\,d\varphi\right).$$

Lako je pokazati da je

$$I=4a^2\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,d\varphi=2a^2(2-\sqrt{2}).$$

Izračunati krivolinijski integral

$$I=\oint\limits_{C} \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\,[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]\,dy,$$

gde je kriva C kontura koja ograničava oblast: $y^2 \leqslant 2(x-1)$, $x \leqslant 2$, $y \geqslant 0$.

Rešenje: Ispunjeni su uslovi za primenu formule Greena:

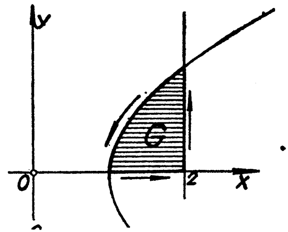
$$\oint\limits_{C} P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_{G}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

pa je dati krivolinijski integral jednak dvojnom integralu

$$I=\iint\limits_{G} y^2\,dx\,dy,$$

gde je G oblast koju ograničava kriva C.

$$I=\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2(x-1)}} y^2\,dy=\frac{4\sqrt{2}}{15}.$$



Izračunati integral

$$I=\oint\limits_{C} \sqrt{z}\,dx+x\,dy+y\,dz,$$

gde je C kontura definisana jednačinama $z=y^2-x^2$, $y=2$ i $y=2$, $z=0$; smer, posmatran sa pozitivnog dela ose Oy, pozitivan.

Rezultat.

$$I=2\pi.$$

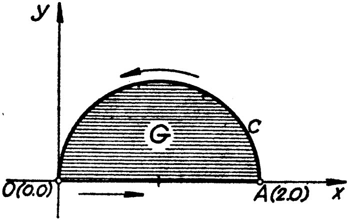
\# Izračunati krivolinijski integral

$$I=\int_C (x^2 \sin y+2 y^2)\, dx+\left(\frac{1}{3} x^3 \cos y-2\right) dy,$$

gde je kriva C gornja polovina kružnice $x^2+y^2=2x$ od tačke $A\,(2, 0)$ do tačke $O\,(0, 0)$.

Rešenje. Ako putanju C dopunimo odsečkom $\overline{OA}$ ose Ox biće:

$$(*) \qquad \oint_L = \int_C + \int_{\overline{OA}}$$



gde je sa L obeležena zatvorena putanja $C \cup \overline{OA}$. Lako je proveriti da je

$$\int_{\overline{OA}} (x^2 \sin y+2 y^2)\, dx+\left(\frac{1}{3} x^3 \cos y-2\right) dy=0,$$

jer je na $\overline{OA}$ $y=0$ i $dy=0$. Integral po zatvorenoj putanji L može se izračunati primenom formule Greena, pa je, prema (*),

$$I=\iint_G -4y\, dx\, dy=-\frac{8}{3}.$$

#

Izračunati krivolinijski integral

$$I = \int_C \frac{dx}{(y+1)\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{(x^3+x)\sqrt{1-y}}$$

duž parabole $y=x^2$ od tačke $O\,(0,0)$ do tačke $A\,(1,1)$.

Rešenje. Duž parabole $y=x^2$ je $dy=2\,xdx$ pa je dati krivolinijski integral jednak određenom integralu po promenljivoj x:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}} + \frac{2x\,dx}{x(x^2+1)\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{3\,dx}{(x^2+1\ \ \sqrt{1-x^2}} = \lim_{a\to 1} \int_0^a \frac{3\,dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}.$$

Smenom $x=\sin t$, $dx=\cos t\,dt$ nalazimo

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{3}{\sin^2 t+1} = \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}.$$

#

Izračunati krivolinijski integral

$$I=\int_{AmO}(e^x \sin y-ny)\,dx+(e^x \cos y-n)\,dy \qquad (n=\text{const}),$$

gde je AmO deo kružnice $x^2+y^2=ax\,(a>0)$ koji leži u prvom kvadrantu od tačke $A\,(a, 0)$ do tačke $O\,(0, 0)$.

Rezultat.

$$I=\frac{a^2\pi n}{8}.$$

#

Pokazati da vrednost integrala

$$I=\int_{AB}(x^4+4\,xy^3)\,dx+(6\,x^2\,y^2-5\,y^4)\,dy$$

ne zavisi od krive koja spaja tačke $A\,(-2, -1)$ i $B\,(3, 0)$. Kolika je vrednost tog integrala?

Rezultat. Izraz pod znakom integrala je totalni diferencijal neke funkcije dve promenljive, pa krivolinijski integral ne zavisi od putanje integracije, već samo od krajnjih tačaka. Za integraciju je najzgodnije uzeti izlomljenu liniju $\overline{AC}\cup\overline{CB}$, gde je $C\,(-2, 0)$.

$$I=62.$$

#

Krivolinijski integral

$$I=\int_{C}\frac{(ax-y)\,(a+1)\,dx+(x+ay)\,(a-1)\,dy}{xy}$$

izračunati:

1) duž odsečka AB, gde je $A\,(1, 1)$ i $B\,(2, 2)$;

2) duž izlomljene linije ACB, ako je $C\,(1, 2)$.

Odrediti konstantu a tako da ta dva integrala budu jednaka. Pokazati da tada integral ne zavisi od putanje integracije.

Rezultati. $a=0$; $I=-2\ln 2$.

Izračunati krivolinijski integral

$$I = \oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

duž zatvorene presečne krive površi $x^2+y^2=r^2$ i $x^2=rz$. Rezultat proveriti primenom integralne teoreme Stokesa.

Rezultat.

$$I = -r^2\pi.$$

Izračunati krivolinijski integral

$$I = \oint_C y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz,$$

gde je kriva C definisana jednačinama

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x^2+y^2=ax \qquad (a>0;\ \ z \geqslant 0).$$

Smer integracije se poklapa sa smerom kretanja kazaljke na satu kada se posmatra iz unutrašnjosti lopte.

Rezultat.

$$I = -\frac{a^3\pi}{4}.$$

Izračunati integral

$$I = \oint_C 8y\sqrt{(1-x^2-z^2)^3}\,dx + xy^3\,dy + \sin z\,dz,$$

gde je kriva C presek elipsoida $4x^2+y^2+4z^2=4$ i koordinatnih ravni $(x, y, z \geqslant 0)$; smer integracije, posmatran sa pozitivnog dela ose Oz, pozitivan.

Rezultat.

$$I = -\frac{32}{5}.$$