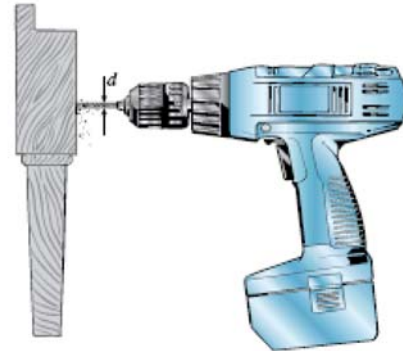


ISPIT 18.06.2012 - GRUPA A

1. Pri bušenju rupe u nogari stola, koristi se ručna bušilica s burgijom prečnika $d = 4\text{ mm}$. Odrediti:

- maksimalan tangencijalni napon, ako je otpor momentu uvijanja jednak 0.3 Nm .
- (uzdužni) ugao uvijanja, ako je materijal burgije čelik ($E = 210\text{ GPa}$, $\nu = 0.33$), a moment uvijanja kao pod a).



$$d := 4\text{ mm} \quad W_o := \frac{d^3 \pi}{16} = 12.566 \cdot \text{mm}^3 \quad I_o := \frac{d^4 \pi}{32} = 25.133 \cdot \text{mm}^4$$

$$E := 210\text{ GPa}$$

$$\nu := 0.33 \quad G := \frac{E}{2(1 + \nu)} = 78.947 \cdot \text{GPa}$$

$$T := 0.3\text{ N}\cdot\text{m}$$

Rješenje

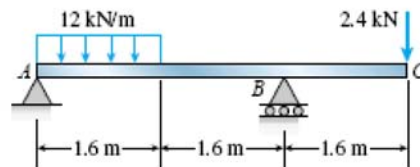
- Maksimalni tangencijalni napon nalazi se na spoljašnjoj površini burgije, a određuje se na osnovu izraza

$$\tau_{\max} := \frac{T}{W_o} = 23.873 \cdot \text{MPa}$$

- Uzdužni ugao uvijanja određuje se na osnovu izraza

$$\gamma := \frac{T}{G \cdot I_o} = 0.151 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{m}} \quad \gamma = 8.663 \cdot \frac{\circ}{\text{m}}$$

2. Odredi najmanju dozvoljenu stranicu grede kvadratnog poprečnog presjeka opterećene kao na slici desno. Dozvoljeni napon na savijanje je $\sigma_{\text{doz}} = 150\text{ MPa}$, a dozvoljeni tangencijalni napon je $\tau_{\text{doz}} = 100\text{ MPa}$.



$$q := 12 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$I = \frac{b^4}{12}$$

$$\sigma_{\text{doz}} := 150 \text{MPa}$$

$$F := 2.4 \text{kN}$$

$$A = b^2$$

$$\tau_{\text{doz}} := 100 \text{MPa}$$

$$L_1 := 1.6 \text{m}$$

$$L_{AB} := 3.2 \text{m}$$

$$L_{BC} := 1.6 \text{m}$$

Rješenje

Posmatrajmo raspodjelu transferzalnih sila i momenata savijanja za gredu *ABC*.

Reakcije u osloncima *A* i *B* (pretpostavlja se da sile F_A i F_B djeluju prema gore).

$$\sum_i F_i = 0 \quad F_A - q \cdot L_1 + F_B - F = 0 \quad (1)$$

$$\sum_i M_A = 0 \quad \frac{q \cdot L_1^2}{2} - F_B \cdot L_{AB} + F \cdot (L_{AB} + L_{BC}) = 0 \quad (2)$$

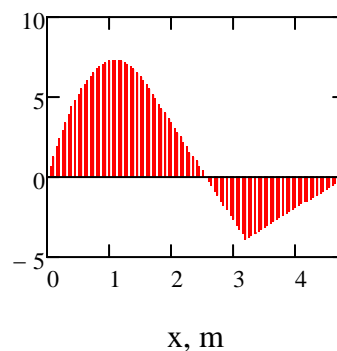
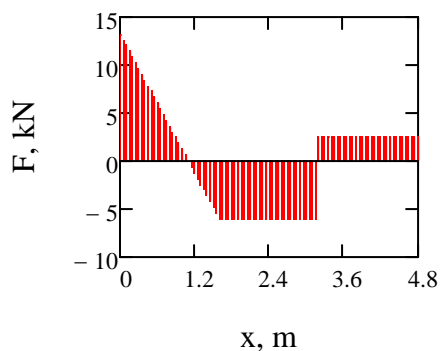
Iz (2) slijedi:

$$F_B := \frac{\frac{q \cdot L_1^2}{2} + F \cdot (L_{AB} + L_{BC})}{L_{AB}} = 8.4 \cdot \text{kN}$$

Iz (1) slijedi:

$$F_A := F + q \cdot L_1 - F_B = 13.2 \cdot \text{kN}$$

Dijagrami momenata savijanja i sila



Maksimalni moment savijanja je za : $F_A - q \cdot x_{\max} = 0$ tj. $x_{\max} := \frac{F_A}{q} = 1.1 \text{ m}$

pa se dobija: $M_{\max} := M(x_{\max}) = 7.26 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$

Dimenzionisanje na osnovu najvećeg momenta savijanja

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot \frac{b}{2}}{I} = \frac{M_{\max} \cdot \frac{b}{2}}{\left(\frac{b^4}{12}\right)} = \sigma_{\text{doz}}$$

$$b := \sqrt[3]{\frac{6M_{\max}}{\sigma_{\text{doz}}}} = 66.221 \cdot \text{mm}$$

Provjera tangencijalnog napona:

Maksimalna transferzalna sila (po intenzitetu): $F_{\max} := F_A = 13.2 \cdot \text{kN}$

$$A := b^2 = 4.385 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

$$\tau_{\max} := \left| \frac{3F_{\max}}{2A} \right| = 4.515 \cdot \text{MPa} \quad \tau_{\max} < \tau_{\text{doz}}$$

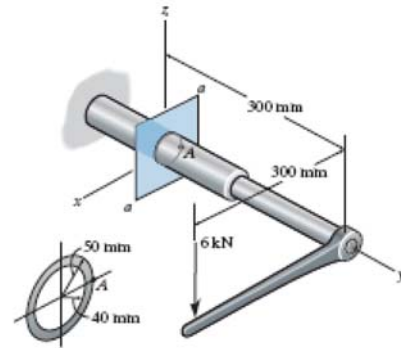
ili

$$b := \sqrt{\frac{3F_{\max}}{2\tau_{\text{doz}}}} = 14.071 \cdot \text{mm}$$

pa dimenzija 66.22 mm zadovoljava.

3. Za dio na slici desno u tački A odrediti:

- tangencijalne napone,
- normalne napone.



$$L_1 := 300 \text{ mm} \quad P := 6 \text{ kN}$$

$$L_2 := 300 \text{ mm}$$

$$d_1 := 100 \text{ mm}$$

$$d_2 := 80 \text{ mm}$$

$$I := \frac{(d_1^4 - d_2^4) \cdot \pi}{64} = 2.898 \times 10^6 \cdot \text{mm}^4$$

$$W := \frac{2I}{d_1} = 1.159 \times 10^5 \cdot \text{mm}^3$$

$$A := \frac{(d_1^2 - d_2^2) \cdot \pi}{4} = 2.827 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

Rješenje

Tačka A je izložena sljedećim naponima usljed djelovanja sile P , koja vrši savijanje, uvijanje i smicanje .

a) Normalni naponi - nema djelovanja normalnih napona usljed savijanja, s obzirom da se tačka nalazi u neutralnoj ravni

b) Tangencijalni naponi - smicanje

$$\tau_s := \frac{4P}{3A} \left(\frac{d_1^2 + d_1 \cdot d_2 + d_2^2}{d_1^2 + d_2^2} \right) = 4.21 \cdot \text{MPa}$$

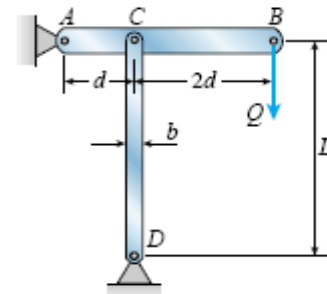
c) Tangencijalni naponi - uvijanje

$$\tau_u := \frac{P \cdot L_2}{W_o} = 15.527 \cdot \text{MPa}$$

Prema tome, u tački A djeluju samo tangencijalni naponi usljed smicanja i uvijanja, i suprotnog su smjera, pa je:

$$\tau_{\max} := \tau_u - \tau_s = 11.318 \cdot \text{MPa}$$

4. Horizontalna greda AB je zglobno vezana u tački A i opterećena silom Q u tački B , kao što je prikazano na slici desno. U tački C greda je oslonjena na čelični štap ($E = 200 \text{ GPa}$) kvadratnog poprečnog presjeka dužine $L = 1.8 \text{ m}$ i stranice presjeka $b = 60 \text{ mm}$. Odrediti dozvoljenu silu Q , ako je stepen sigurnosti protiv izvijanja 2.



$$L := 1.8 \text{ m}$$

$$b := 60 \text{ mm} \quad I := \frac{b^4}{12} \quad A := b^2$$

$$S := 2$$

Rješenje

Sila kojom je šipka CD izložena dobiva se na osnovu jednačine momenta za tačku A:

$$F_{CD} \cdot d - Q \cdot 3 \cdot d = 0 \quad \text{tj.} \quad F_{CD} = 3Q \quad (1)$$

Na osnovu slike, jasno je da se radi o slučaju izvijanja proste grede (zglobno oslonjene na oba oslonca), pa se kritična sila određuje prema obrascu ($k=1$)

$$F_{kr} = \frac{E \cdot \pi^2 \cdot I}{L^2} \quad \text{i vrijedi} \quad F_{CD} < \frac{F_{kr}}{S} \quad (2)$$

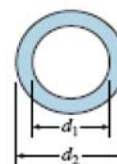
Kombinujući izraze (1) i (2) dobija se

$$3Q_{\text{doz}} < \frac{F_{kr}}{S} = \frac{E \cdot \pi^2 \cdot I}{S \cdot L^2} \quad Q_{\text{doz}} := \frac{E \cdot \pi^2 \cdot I}{3S \cdot L^2} = 115.145 \cdot \text{kN}$$

ISPIT 18.06.2012 - GRUPA B

1. Šuplje čelično vratilo, koje je dio sistema za bušenje rupa u zemlji, kao na slici desno, ima vanjski prečnik $d_2 = 150$ mm i unutrašnji prečnik od $d_1 = 125$ mm. Za primjenjeni moment uvijanja od 15 kNm odrediti:

- maksimalan tangencijalni napon,
- (uzdužni) ugao uvijanja ($E = 210$ GPa, $\nu = 0.33$).



$$d_1 := 125 \text{ mm}$$

$$d_2 := 150 \text{ mm}$$

$$I_o := \frac{(d_2^4 - d_1^4) \cdot \pi}{32} = 2.573 \times 10^7 \cdot \text{mm}^4 \quad W_o := \frac{I_o}{\frac{d_2}{2}} = 3.431 \times 10^5 \cdot \text{mm}^3$$

$$E := 210 \text{ GPa}$$

$$\nu := 0.33$$

$$G := \frac{E}{2(1 + \nu)} = 78.947 \cdot \text{GPa}$$

$$T := 15 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Rješenje

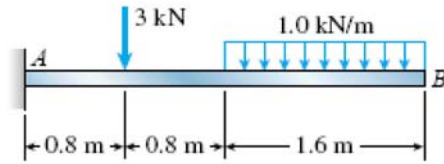
- Maksimalni tangencijalni napon nalazi se na spoljašnjoj površini burgije, a određuje se na osnovu izraza

$$\tau_{\max} := \frac{T}{W_o} = 43.719 \cdot \text{MPa}$$

- Uzdužni ugao uvijanja određuje se na osnovu izraza

$$\gamma := \frac{T}{G \cdot I_o} = 7.384 \times 10^{-3} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{m}} \quad \gamma = 0.423 \cdot \frac{\circ}{\text{m}}$$

2. Odredi najmanji dozvoljeni prečnik konzole kružnog poprečnog presjeka opterećenoj kao na slici desno. Dozvoljeni napon na savijanje je $\sigma_{\text{doz}} = 150 \text{ MPa}$, a dozvoljeni tangencijalni napon je $\tau_{\text{doz}} = 100 \text{ MPa}$.



$$q := 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$I = \frac{d^4 \pi}{64}$$

$$\sigma_{\text{doz}} := 150 \text{ MPa}$$

$$F := 3 \text{ kN}$$

$$A = \frac{d^2 \pi}{4}$$

$$\tau_{\text{doz}} := 100 \text{ MPa}$$

$$L_1 := 0.8 \text{ m}$$

$$L_2 := 0.8 \text{ m}$$

$$L_{AB} := 3.2 \text{ m}$$

Rješenje

Posmatrajmo raspodjelu transferzalnih sila i momenata savijanja za gredu ABC .

Reakcije u osloncima A i B (pretpostavlja se da sila F_A djeluje prema gore, a moment M_A u obrnutom smjeru kazaljke na satu).

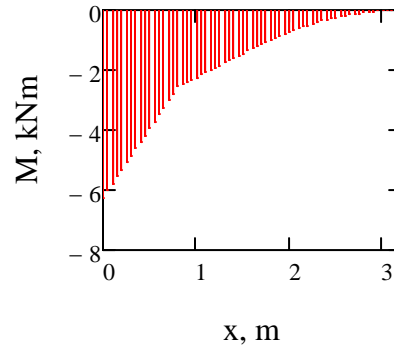
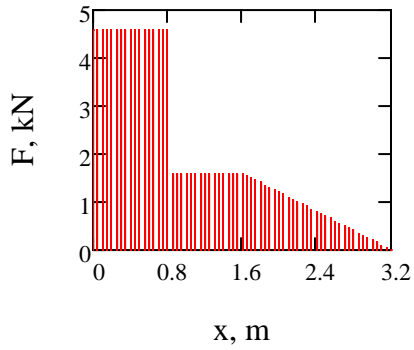
$$\sum_i F_i = 0 \quad F_A - q \cdot (L_{AB} - L_1 - L_2) = 0 \quad (1)$$

$$\sum_i M_A = 0 \quad M_A - F \cdot L_1 - q \cdot (L_{AB} - L_1 - L_2) \cdot \left(\frac{L_{AB} + L_1 + L_2}{2} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Iz (2) slijedi:} \quad M_A := F \cdot L_1 + q \cdot (L_{AB} - L_1 - L_2) \cdot \frac{L_{AB} + L_1 + L_2}{2} = 6.24 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{Iz (1) slijedi:} \quad F_A := F + q \cdot (L_{AB} - L_1 - L_2) = 4.6 \cdot \text{kN}$$

Dijagrami momenata savijanja i sila



Maksimalni moment savijanja je u A :

$$M_{\max} := |M_A|$$

Dimenzionisanje na osnovu najvećeg momenta savijanja

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot \frac{d}{2}}{I} = \frac{M_{\max} \cdot \frac{d}{2}}{\left(\frac{d^4 \pi}{64}\right)} = \sigma_{\text{doz}}$$

$$d := \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}}{\pi \cdot \sigma_{\text{doz}}}} = 75.11 \cdot \text{mm}$$

Provjera tangencijalnog napona:

Maksimalna transferzalna sila (po intenzitetu):

$$F_{\max} := F_A = 4.6 \cdot \text{kN}$$

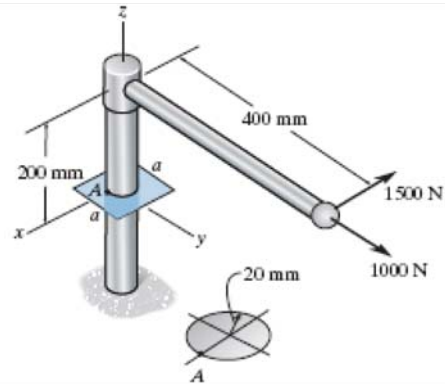
$$A := \frac{d^2 \pi}{4} = 4.431 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

$$\tau_{\max} := \left| \frac{4F_{\max}}{3A} \right| = 1.384 \cdot \text{MPa} \quad \tau_{\max} < \tau_{\text{doz}}$$

pa dimenzija 75.11 mm zadovoljava.

3. Za dio na slici desno u tački A odrediti:

- tangencijalne napone,
- normalne napone.



$$L_{1A} := 400 \text{ mm}$$

$$P_1 := 1500 \text{ N}$$

$$L_{2A} := 200 \text{ mm}$$

$$P_2 := 1000 \text{ N}$$

$$d := 40 \text{ mm}$$

$$A := \frac{d^2 \pi}{4} = 1.257 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

$$I := \frac{d^4 \cdot \pi}{64} = 1.257 \times 10^5 \cdot \text{mm}^4$$

$$I_{0A} := 2I = 2.513 \times 10^5 \cdot \text{mm}^4$$

$$W_0 := \frac{I_0}{\frac{d}{2}} = 1.257 \times 10^4 \cdot \text{mm}^3$$

Rješenje

Tačka A je izložena sljedećim naponima usljed djelovanja sile P , koja vrši savijanje, uvijanje i smicanje .

a) Normalni naponi - samo usljed djelovanja sile od 1500 N, pošto se za silu od 1000 N tačka A nalazi na neutralnoj površini

$$\sigma_s := \frac{P_1 \cdot L_1}{I} \cdot \frac{d}{2} = 95.493 \cdot \text{MPa}$$

b) Tangencijalni naponi - smicanje usljed sile 1000 N (u tački A tangencijalni napon usljed smicanja silom 1500 N jednak je nuli)

$$\tau_s := \frac{4P_2}{3A} = 1.061 \cdot \text{MPa}$$

c) Tangencijalni naponi - uvijanje usljed sile 1500 N

$$\tau_u := \frac{P_1 \cdot L_1}{W_0} = 1.749 \cdot \text{MPa}$$

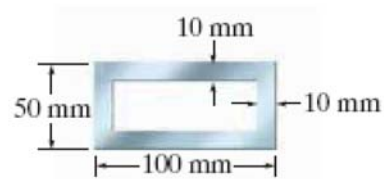
Prema tome, u tački A djeluju samo tangencijalni naponi usljed smicanja i uvijanja, i istog su smjera, pa je:

$$\tau_{\max} := \tau_u + \tau_s = 2.81 \cdot \text{MPa}$$

te normalni napon usljed savijanja:

$$\sigma_s = 95.493 \cdot \text{MPa}$$

4. Čelični stub dužine 5 m uklještena je na oba kraja. Ako je poprečni presjek stuba dat na slici desno, odrediti dozvoljenu silu F , pri čemu je stepen sigurnosti protiv izvijanja 2.



$$L := 5 \text{ m}$$

$$b_1 := 50 \text{ mm} \quad b_2 := 30 \text{ mm}$$

$$h_1 := 100 \text{ mm} \quad h_2 := 80 \text{ mm}$$

$$A := b_1 \cdot h_1 - b_2 \cdot h_2 = 2.6 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

$$E := 200 \text{ GPa}$$

$$S := 2$$

$$I_{\min} := \frac{h_1 \cdot b_1^3}{12} - \frac{h_2 \cdot b_2^3}{12} = 8.617 \times 10^5 \cdot \text{mm}^4$$

Rješenje

Na osnovu uslova zadatka jasno je da se radi o slučaju izvijanja grede s dva uklještenja ($k=0.5$)

$$F_{kr} = \frac{E \cdot \pi^2 \cdot I_{\min}}{(0.5 \cdot L)^2} \quad \text{i vrijedi} \quad F < \frac{F_{kr}}{S}$$

Prema tome, kritična sila je

$$F := \frac{E \cdot \pi^2 \cdot I_{\min}}{S \cdot (0.5L)^2} = 136.069 \cdot \text{kN}$$
