**Zadatak 1.** Nacrtajte graf funkcije $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

*Rješenje:*

1. Odredimo domenu. Budući je zadana funkcija racionalna funkcija, domenu čine svi realni brojevi bez nultočki nazivnika:

$$x^2-1=0$$
$$x^2=1$$
$$x=\pm 1$$

Dakle, $\boxed{\mathrm{D}(f)=\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}}$

2. Odredimo presjeke zadane funkcije s koordinatnim osima:

$x=0 \Rightarrow y=f(0)=\dfrac{0}{0^2-1}=0 \Rightarrow$ funkcija prolazi kroz ishodište $\boxed{(0,0)}$

$y=0 \Rightarrow \dfrac{x}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow x=0$

3. **Vertikalne asimptote** su pravci $\boxed{x=-1 \text{ i } x=1}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x/:x^2}{x^2-1/:x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\dfrac{0}{1-0}=0 \Rightarrow$ pravac $\boxed{y=0}$ je **horizontalna asimptota**

4. Odredimo derivaciju zadane funkcije:

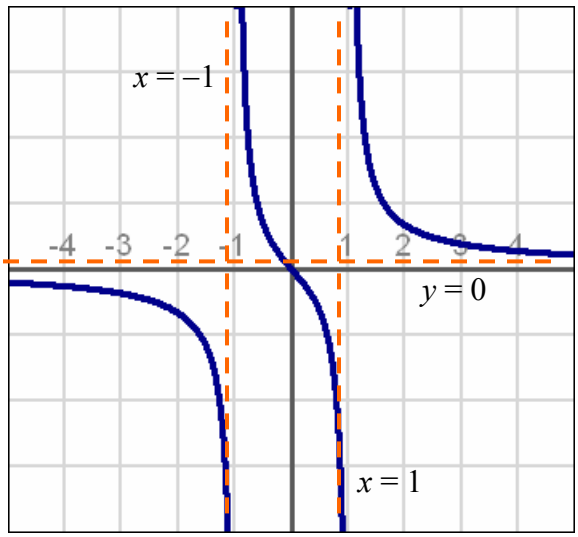
$$y'=\left(\frac{x}{x^2-1}\right)'=\frac{x^2-1-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

Stacionarne točke određujemo iz uvjeta: $y'=0$

$$\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}=0 \Leftrightarrow -x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$$

Ova kvadratna jednadžba nema realnih rješenja, tj. zadana funkcija nema stacionarne točke, tj. zadana funkcija nema ekstrema. U tom slučaju, funkcija je ili stalno rastuća ili stalno padajuća (odredimo po predznaku prve derivacije)

$y'=\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}<0 \;\Rightarrow$ **funkcija je stalno padajuća**




graf funkcije $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

✓

**Zadatak 2.** Nacrtajte graf funkcije $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

*Rješenje:*

1. $\mathrm{D}(f)=\mathbf{R}\setminus\{-1\}$

2. $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = \dfrac{0^2}{0+1} = 0 \Rightarrow$ funkcija prolazi kroz ishodište $\boxed{(0,0)}$

3. **Vertikalna asimptota** je pravac $\boxed{x = -1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 / : x^2}{x + 1 / : x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{0+0} = \infty \Rightarrow \text{funkcija nema horizontalnu asimptotu}$$

Potražimo kosu asimptotu: $y = kx + l$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 / : x^2}{x^2 + x / : x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$l = \lim_{x\to\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\infty} \left[ \frac{x^2}{x+1} - x \right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x / : x}{x + 1 / : x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-1}{1+0} = -1$$

**Kosa asimptota** je pravac $\boxed{y = x - 1}$

4. Odredimo derivaciju zadane funkcije:

$$y' = \left( \frac{x^2}{x+1} \right)' = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

Odredimo stacionarne točke:

$$\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0$$

**Stacionarne točke** su $\boxed{x_1 = 0,\ x_2 = -2}$.

Koja vrsta ekstrema (minimum ili maksimum) se nalazi u kojoj stacionarnoj točki, odredit ćemo preko pada i rasta funkcije, tj. preko predznaka prve derivacije:

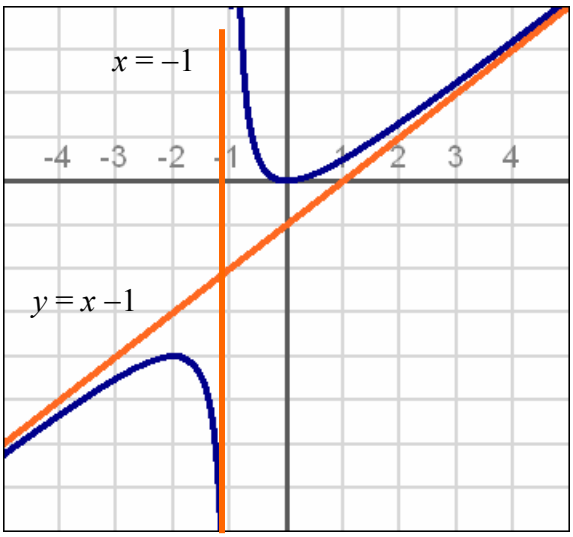
| | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $y' = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ | $+$ | $-$ | $+$ | |
| $y$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | |

Iz tablice se vidi da funkcija ima maksimum u $x = -2$ (lijevo od te točke funkcija je rastuća, a desno od te točke funkcija je padajuća). Odredimo još vrijednost funkcije u toj točki kako bismo imali točne koordinate maksimuma.

$$f(-2) = \frac{(-2)^2}{-2+1} = \frac{4}{-1} = -4$$

Dakle, **maksimum funkcije** se nalazi u točki $\boxed{M(-2,-4)}$.

Analogno, **minimum funkcije** je u točki $x = 0$, tj. $\boxed{m(0,0)}$




graf funkcije $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

✓

**Zadatak 3.** Nacrtajte graf funkcije $f(x)=\dfrac{2x^2-8x-10}{x^2-4x+3}$

*Rješenje:*

1. Nultočke nazivnika su $x_1=1$ i $x_2=3$, pa je domena funkcije $\boxed{D(f)=\mathbf{R}\setminus\{1,3\}}$

2. Presjeci s koordinatnim osima:

$$x=0:\quad y=f(0)=\frac{2\cdot 0^2-8\cdot 0-10}{0^2-4\cdot 0+3}=-\frac{10}{3}=-3.3$$

Funkcija siječe os $y$ u točci $\boxed{(0,-3.3)}$

$$y=0:\quad \frac{2x^2-8x-10}{x^2-4x+3}=0 \Leftrightarrow 2x^2-8x-10=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=5$$

Funkcija siječe os $x$ u točkama $\boxed{(-1,0)\ \text{i}\ (5,0)}$

3. **Vertikalne asimptote** su pravci $\boxed{x=1\ \text{i}\ x=3}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-8x-10/:x^2}{x^2-4x+3/:x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{8}{x}-\frac{10}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{2-0-0}{1-0+0}=2$$

**Horizontalna asimptota** je pravac $\boxed{y=2}$

4. Odredimo derivaciju zadane funkcije:

$$y'=\left(\frac{2x^2-8x-10}{x^2-4x+3}\right)'=\frac{(4x-8)(x^2-4x+3)-(2x^2-8x-10)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}=$$

$$=\frac{4x^3-16x^2+12x-8x^2+32x-24-4x^3+8x^2+16x^2-32x+20x-40}{(x^2-4x+3)^2}=$$

$$=\frac{32x-64}{(x^2-4x+3)^2}=\frac{32(x-2)}{(x^2-4x+3)^2}$$

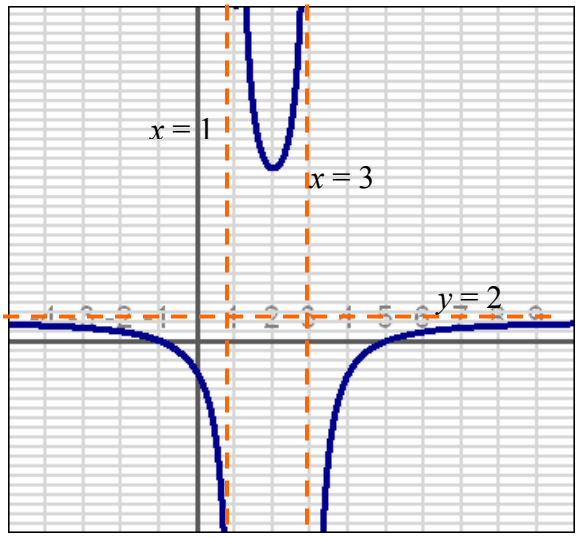
$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{32(x-2)}{(x^2-4x+3)^2} = 0 \Leftrightarrow 32(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \textbf{stacionarna točka}$$

| | $-\infty$ | $2$ $\quad +\infty$ |
|---|---|---|
| $y' = \dfrac{32(x-2)}{(x^2-4x+3)^2}$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

Iz tablice se vidi da funkcija ima minimum u $x = 2$ (lijevo od te točke funkcija je padajuća, a desno od te točke funkcija je rastuća). Odredimo još vrijednost funkcije u toj točki kako bismo imali točne koordinate minimuma.

$$f(2) = \frac{2\cdot 2^2 - 8\cdot 2 - 10}{2^2 - 4\cdot 2 + 3} = \frac{-18}{-1} = 18$$

Dakle, **minimum** zadane funkcije nalazi se u točki $(2,18)$




graf funkcije $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8x - 10}{x^2 - 4x + 3}$

✓

**Zadatak 4.** Nacrtajte graf funkcije $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

*Rješenje:*

1. $\boxed{D(f)=\mathbf{R}\setminus\{-2,2\}}$

2. Nađimo sjecišta funkcije s koordinatnim osima:

$x=0\Rightarrow y=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow$ graf siječe $y$ os u točki $\boxed{\left(0,-\dfrac{1}{4}\right)}$

$y=0\Rightarrow \dfrac{1}{x^2-4}=0\Rightarrow 1=0$ što nije istina, dakle, **funkcija ne siječe *x* os**

3. **Vertikalne asimptote** su pravci $\boxed{x=2 \text{ i } x=-2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1/:x^2}{x^2-4/:x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{1}=0 \Rightarrow$$ **horizontalna asimptota** je pravac $\boxed{y=0}$

4. Ispitajmo sada monotonost i nađimo lokalne ekstreme:

$$y'=\frac{1'(x^2-4)-1\cdot(x^2-4)'}{(x^2-4)^2}=\frac{-2x}{(x^2-4)^2}$$

$y'=0 \Leftrightarrow -2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$ je **stacionarna točka**

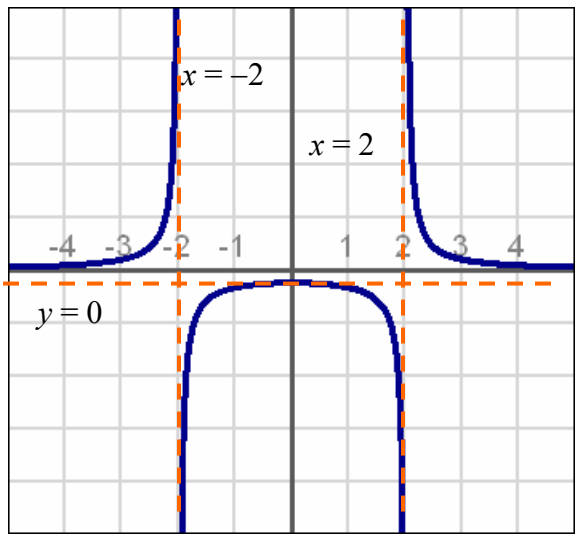
Napravimo sada tablicu predznaka prve derivacije:

| | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y'=\dfrac{-2x}{(x^2-4)^2}$ | $+$ | | $-$ |
| $y$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

$$f''(x)=\frac{-2(x^2-4)^2-(-2x)\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}=\frac{2(x^2-4)\left[-x^2+4+4x^2\right]}{(x^2-4)^4}=\frac{2(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

$f''(0)=\frac{2\cdot 4}{(-4)^3}=\frac{8}{-64}=-\frac{1}{8}<0\Rightarrow$ funkcija ima **maksimum** za $x=0$, tj. $\boxed{M\left(0,-\frac{1}{4}\right)}$

*Napomena: u ovom zadatku smo provjerili o kojem se ekstremu radi u stacionarnoj točki x = 0 pomoću druge derivacije. Da se u stacionarnoj točki x = 0 radi o maksimumu mogli smo utvrditi i iz tablice predznaka prve derivacije.*




graf funkcije $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$

✓