13. TOK I GRAF FUNKCIJA JEDNE VARIJABLE (2)

ISPITIVANJE TOKA FUNKCIJE

Grafički prikaz funkcije $y = f(x)$ zahtijeva sljedeća ispitivanja:

1. Odrediti domenu funkcije
2. Odrediti sjecišta funkcije s koordinatnim osima
3. Odrediti asimptote funkcije
4. Odrediti ekstreme, te intervale monotonosti
5. Odrediti točke infleksije, te intervale konkavnosti i konveksnosti

Napomena: graf funkcije u većini slučajeva moguće je nacrtati i bez detaljnog ispitivanja svih svojstava

Primjer. Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = x^3 - 3x + 2$

1. D(f) = **R** (zadana funkcija je polinom)
2. Sjecišta s koordinatnim osima:
   - $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$
     $\Rightarrow$ sjecište s osi y je točka $(0,2)$
   - $y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0$
     $\Rightarrow$ sjecište s osi x su točke $(1,0)$ i $(-2,0)$
3. Budući je zadana funkcija polinom ona nema asimptota

Odredimo ekstreme i intervale monotonosti:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Stacionarne točke odredimo iz uvjeta: $f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$ su stacionarne točke

	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … $+\infty$
f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$f''(x) = 6x$

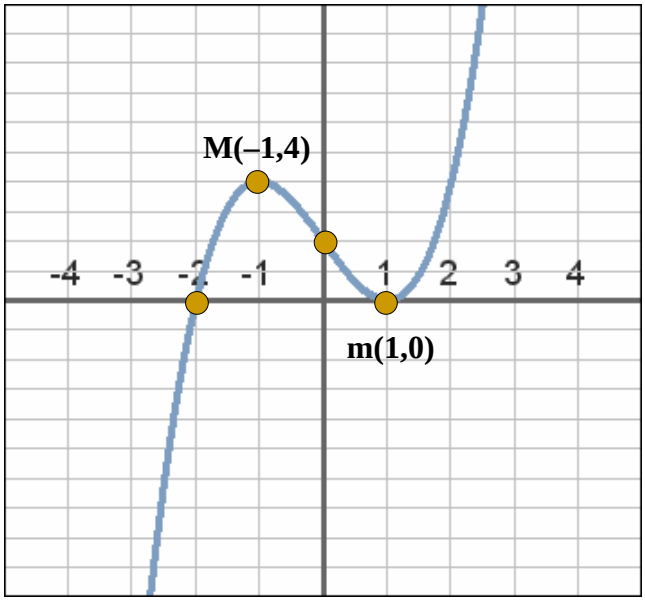
$f''(-1) = -6 < 0 \;\Rightarrow\; M(-1, f(-1))$,
$f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) + 2 = 4 \;\Rightarrow\; M(-1,4)$

$f''(1) = 6 > 0 \;\Rightarrow\; m(1, f(1))$,
$f(1) = 1^3 - 3\cdot 1 + 2 = 0 \;\Rightarrow\; m(1,0)$

Odredimo točku infleksije iz uvjeta $y'' = 0$:
$6x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$
Točka infleksije: T(2,0)

Odredimo još intervale konveksnosti i konkavnosti:

	$-\infty$	0 $+\infty$
$f''(x) = 6x$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$



$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

Primjer. Nacrtajmo funkciju $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$

1. Domena funkcije: $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

2. Nađimo sjecišta s koordinatnim osima:

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0+2}{0-1} = -2$$

graf siječe os y u točki $(0,-2)$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x+2}{x-1} = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

graf siječe os x u točki $(-2,0)$

Asimptote:

a. Vertikalna asimptota je pravac $x=1$

b. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2/:x}{x-1/:x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

horizontalna asimptota je pravac $y=1$

Ispitajmo sada monotonost i nađimo lokalne ekstreme:

$$f'(x)=\frac{(x+2)'(x-1)-(x+2)\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0\Rightarrow -3=0$ što nije istina

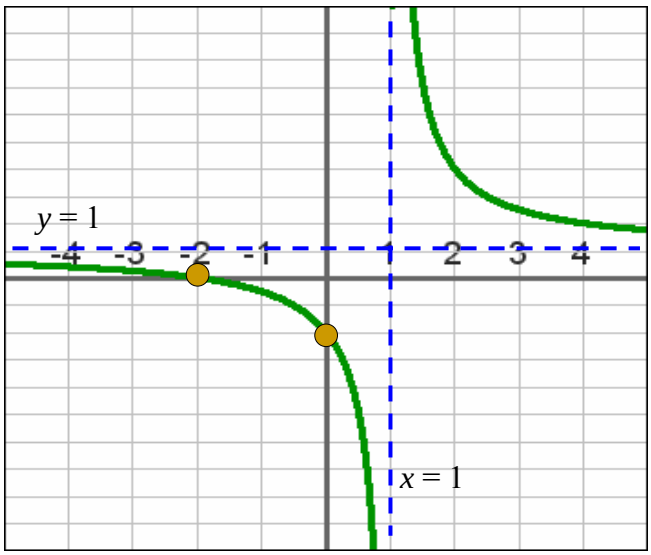
$\Rightarrow$ funkcija nema stacionarnih točki

$\Rightarrow$ funkcija nema ekstreme

$\Rightarrow$ funkcija je stalno ili padajuća ili rastuća

Budući je $f'(x)=\frac{-3}{(x-1)^2}<0$ za $\forall x\in D(f)$

$\Rightarrow$ <u>funkcija f je padajuća</u>



$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

Primjer. Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = \dfrac{3x - x^2}{x-4}$

$D(f) = \mathbf{R} \setminus \{4\}$

Sjecišta s koordinatnim osima:

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = 0 \Rightarrow 3x - x^2 = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow$

$x_1 = 0, x_2 = 3$ sjecišta s osi x

Vertikalna asimptota: $x = 4$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x - x^2 \,/ : x^2}{x - 4 \,/ : x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$\Rightarrow$ **ne postoji horizontalna asimptota**

Odredimo kosu asimptotu: $y = kx + l$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x - x^2}{x^2 - 4x} = -1,$$

$$l = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - kx \right] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x - x^2}{x - 4} + x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x - 4} = -1$$

Kosa asimptota je pravac: $y = -x - 1$

$$f'(x) = \frac{(3 - 2x)(x - 4) - (3x - x^2)}{(x - 4)^2} =$$

$$= \frac{3x - 12 - 2x^2 + 8x - 3x + x^2}{(x - 4)^2} =$$

$$= \frac{-x^2 + 8x - 12}{(x - 4)^2}$$

Stacionarne točke: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 12 = 0$

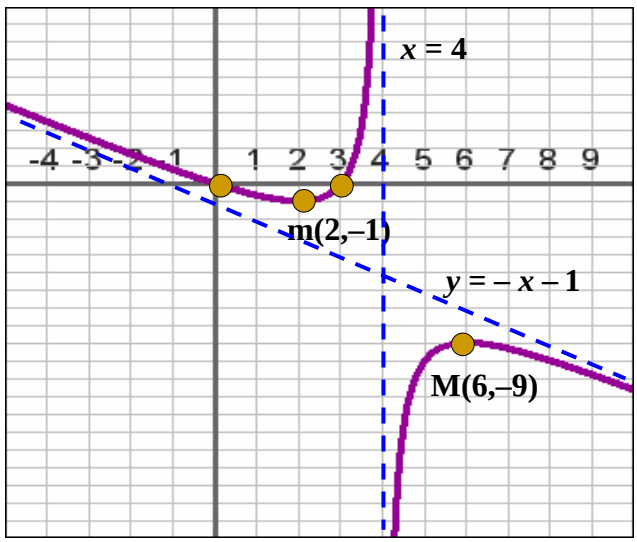
$\Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 6$

Vrijednosti funkcije u tim točkama su:

$f(-2) = 1$ i $f(6) = -9$

	$-\infty$	2	6	$+\infty$
$f'(x)=\dfrac{-x^2+8x-12}{(x-4)^2}$	$-$	$+$	$-$	
f	↘	↗	↘	

Iz tablice vidimo da je maksimum $M(6,-9)$,
a minimum $m(2,-1)$



$$f(x)=\frac{3x-x^2}{x-4}$$