12. TOK I GRAF FUNKCIJA JEDNE VARIJABLE (1)

1. EKSTREMI FUNKCIJA JEDNE VARIJABLE

- Pod pojmom ekstrema podrazumijeva se minimum ili maksimum neke funkcije. Taj pojam se definira za bilo koju funkciju f koja je neprekidna i definirana u toj točki

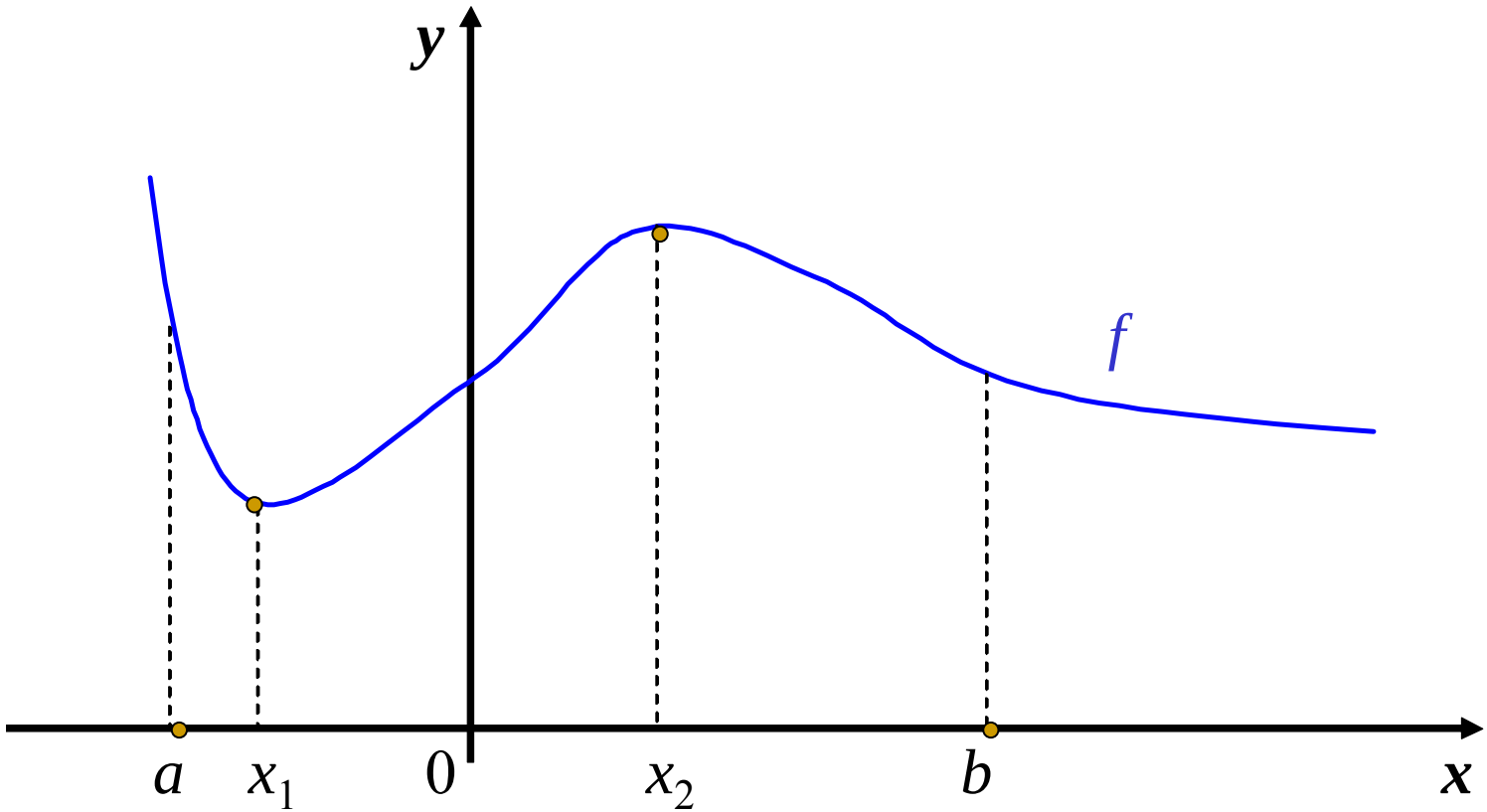
- Funkcija $y = f(x)$ ima **lokalni minimum** u točki x_0 ako postoji interval (a,b) koji sadrži tu točku tako da vrijedi

$$\boxed{f(x_0) \leq f(x), \text{ za svaki } x \in (a,b).}$$

Funkcija $y = f(x)$ ima **lokalni maksimum** u točki x_0 ako postoji interval (a,b) koji sadrži tu točku tako da vrijedi

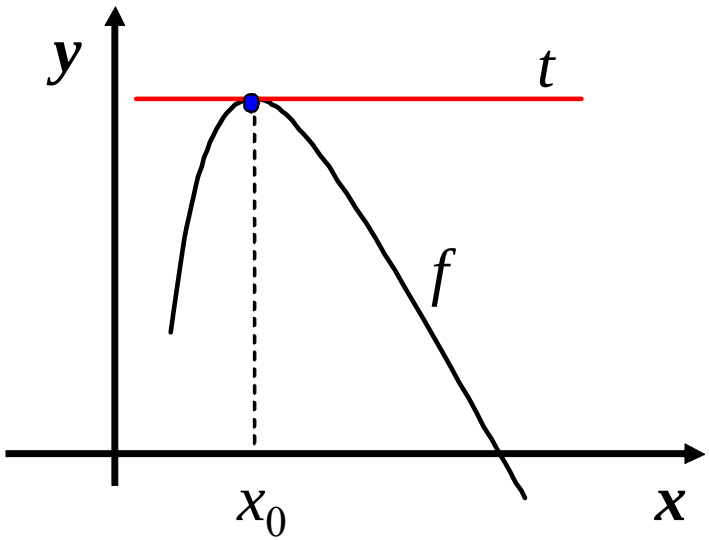
$$\boxed{f(x_0) \geq f(x), \text{ za svaki } x \in (a,b).}$$

Napomena: govorimo o lokalnim ekstremima, tj. o ekstremima na nekom intervalu, a ne nužno na cijelom području definicije funkcije



Funkcija f (na slici) na intervalu (a,b) ima lokalni minimum u točki x_1 , a lokalni minimum u točki x_2

- Promotrimo prvo kako odrediti maksimum neke funkcije $y = f(x)$



Na grafu funkcije vidi se da je tangenta u točki maksimuma paralelna s osi x, pa je njezin koeficijent smjera jednak nuli, tj.

$$f'(x_0) = 0$$

Napomena: u ovom slučaju pretpostavljamo da postoji prva derivacija za $x = x_0$

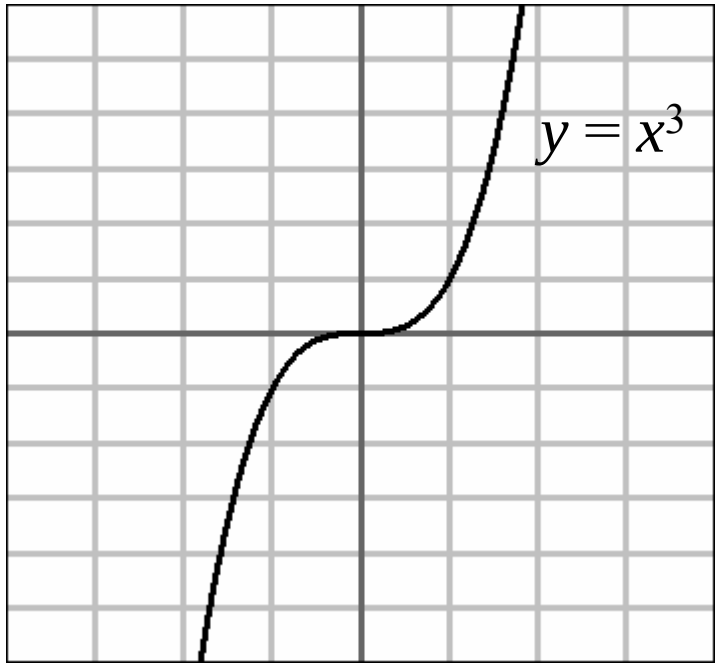
- Dakle, ako funkcija $y = f(x)$ ima maksimum u točki x_0 tada je vrijednost prve derivacije u toj točki jednaka nuli. Taj uvjet je **nužan uvjet** za egzistenciju maksimuma.

- Točke koje su rješenja jednadžbe

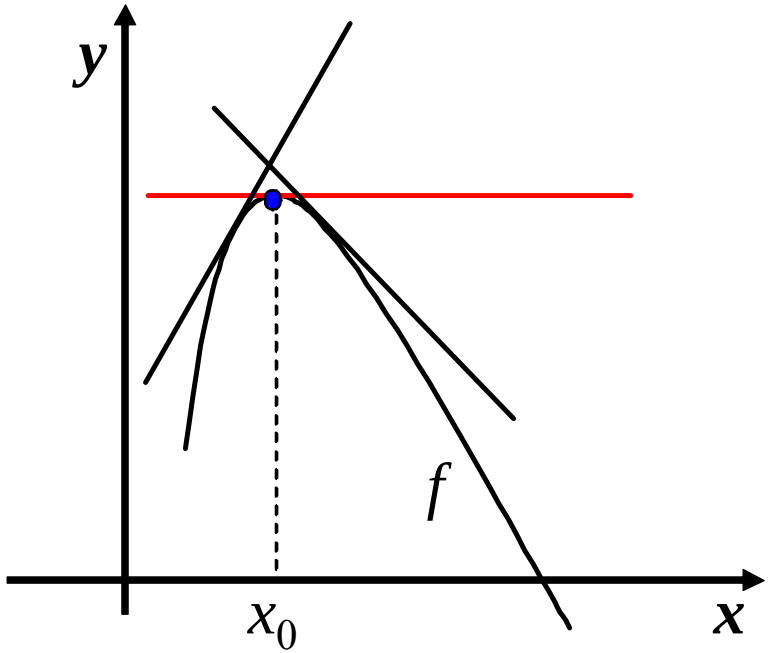
$$\boxed{f'(x_0) = 0}$$

nazivaju se **stacionarnim točkama** funkcije $y = f(x)$ i to su točke u kojima funkcija može imati ekstrem.

- Međutim, to nije i dovoljan uvjet, jer npr. funkcija $y = x^3$ ima jednu stacionarnu točku $x_0 = 0$, ali u toj točki nema ekstrem



Očito je da treba promotriti ponašanje tangente u okolini stacionarne točke



U slučaju maksimuma za $x < x_0$ koeficijent smjera tangente je pozitivan, a za $x > x_0$ koeficijent smjera je negativan, tj. prva derivacija mijenja predznak prolazeći kroz x_0

- Dakle, u slučaju maksimuma imamo:

za $x < x_0$: $f(x)$ raste $\Rightarrow f'(x) \succ 0$

za $x = x_0$: stacionarna točka $\Rightarrow f'(x) = 0$

za $x > x_0$: $f(x)$ pada $\Rightarrow f'(x) \prec 0$

Očito je da prva derivacija pada prolazeći kroz x_0, što znači da je derivacija te prve derivacije u točki x_0 negativna, tj.

$$\left(f'\right)'\left(x_0\right) = f''\left(x_0\right) \prec 0$$

- Analogno razmatranje možemo provesti i za minimum samo što je u tom slučaju koeficijent smjera tangente negativan za $x < x_0$ i pozitivan za $x > x_0$

$$\text{za } x < x_0: \ f(x) \text{ pada} \quad \Rightarrow \quad f'(x) \prec 0$$

$$\text{za } x = x_0: \ \text{stacionarna točka} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

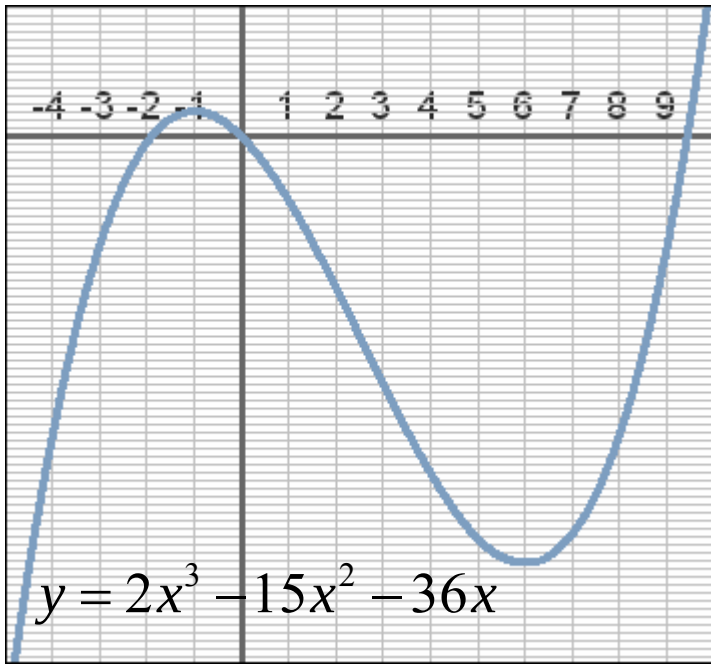
$$\text{za } x > x_0: \ f(x) \text{ raste} \quad \Rightarrow \quad f'(x) \succ 0$$

To znači da prva derivacija raste pa je derivacija te prve derivacije pozitivna, tj. $f''(x_0) \succ 0$

<u>Teorem o ekstremima funkcije</u>. Ako funkcija f ima u točki x_0 ekstrem, onda je $f'(x_0)=0$. Ako je $f''(x_0)<0$ onda je taj ekstrem maksimum, a ako je $f''(x_0)>0$ onda je minimum.

Ako je pak $f''(x_0)=0$, onda treba tražiti više derivacije dok se ne dođe do derivacije koja je u x_0 različita od nule. Ako je ona parnog reda, u toj točki je ekstrem (i to maksimum ako je ona manja od nule, a minimum ako je veća od nule), a ako je ona neparnog reda, u toj točki nije ekstrem.

Primjer. Odredimo ekstreme funkcije $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x$



$f'(x) = 6x^2 - 30x - 36$

<u>Stacionarne točke</u> odredimo iz uvjeta: $f'(x) = 0$

$6x^2 - 30x - 36 = 0 \ / :6$

$x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 6,\ x_2 = -1}$

$f''(x) = 12x - 30$

$f''(6) = 12 \cdot 6 - 30 = 42 > 0 \Rightarrow$ u $x_1 = 6$ je **minimum**, i vrijednost tog minimuma je $f(6) = 2 \cdot 6^3 - 15 \cdot 6^2 - 36 \cdot 6 = -324$

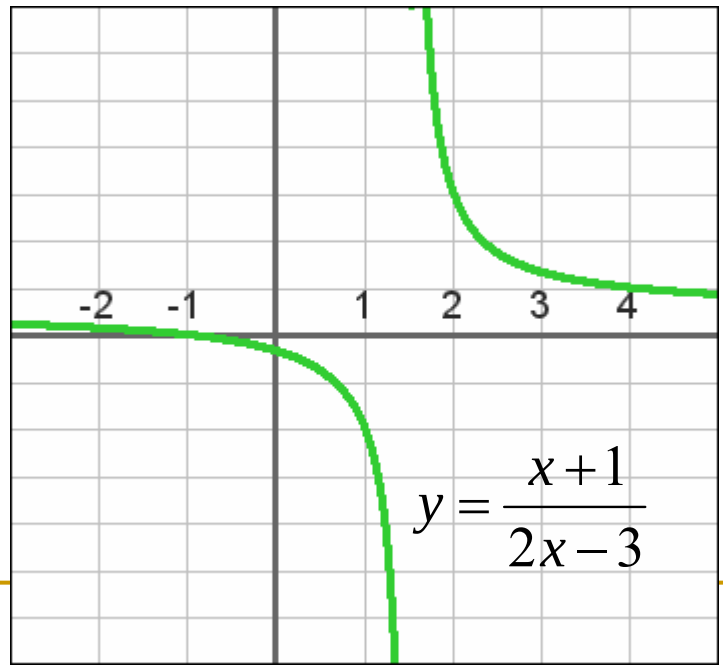
$f''(-1) = 12 \cdot (-1) - 30 = -42 < 0 \Rightarrow$ u $x_2 = -1$ je **maksimum**, i vrijednost tog maksimuma je $f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 15 \cdot (-1)^2 - 36 \cdot (-1) = 19$

Funkcija ima maksimum u točki *A*(-1, 19), a minimum u točki *B*(6,-324).

Primjer. Odredi ekstreme funkcije $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-3}$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(2x-3)-(x+1)\cdot 2}{(2x-3)^2}=\frac{2x-3-2x-2}{(2x-3)^2}=\frac{-5}{(2x-3)^2}$$

Jednadžba $f'(x)=0$ nema rješenja, pa funkcija nema stacionarnu točku, dakle ni ekstrema.

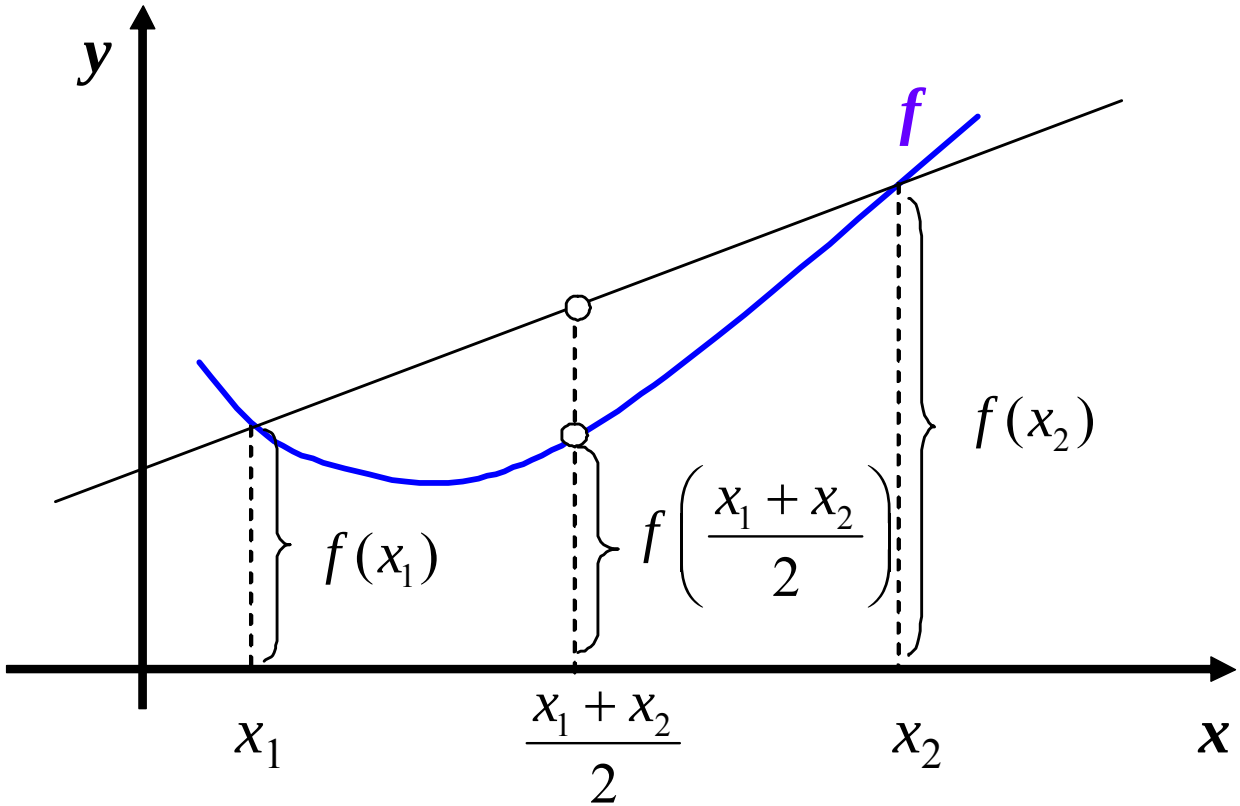


2. KONKAVNOST, KONVEKSNOST I TOČKE INFLEKSIJE

- Pojam konveksnosti i konkavnosti često se upotrebljava u ekonomskim analizama, ekonometriji i matematičkoj ekonomiji

- Za funkciju $f : I \to \mathbf{R}$ se kaže da je **konveksna** na intervalu I ako

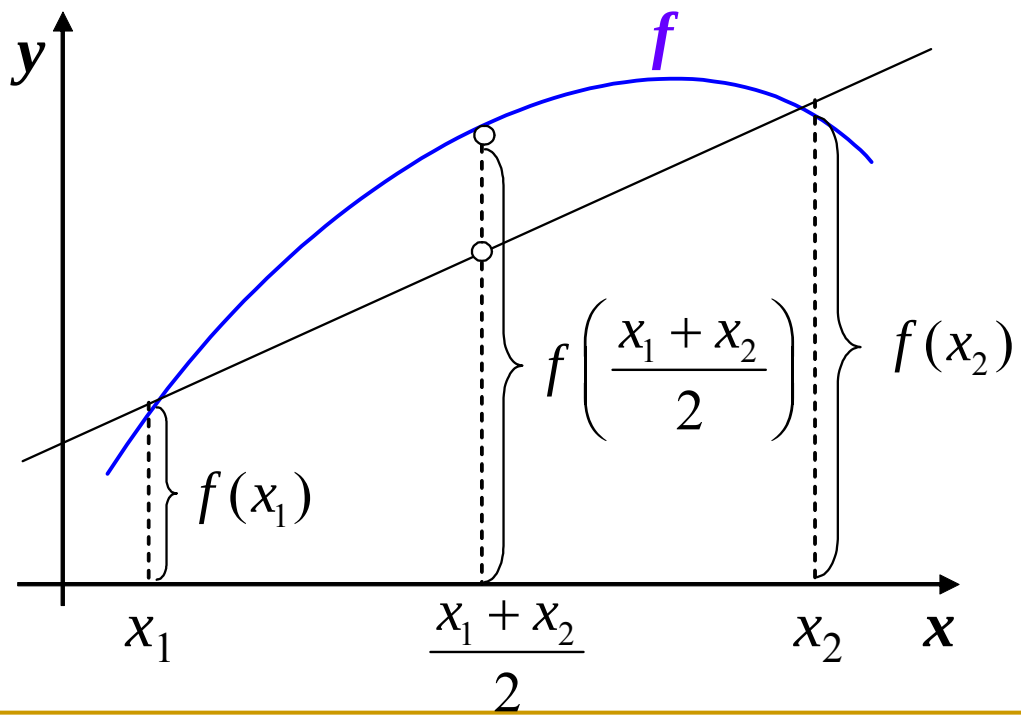
$$\boxed{\left(x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2\right) \Rightarrow \left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \right)}$$



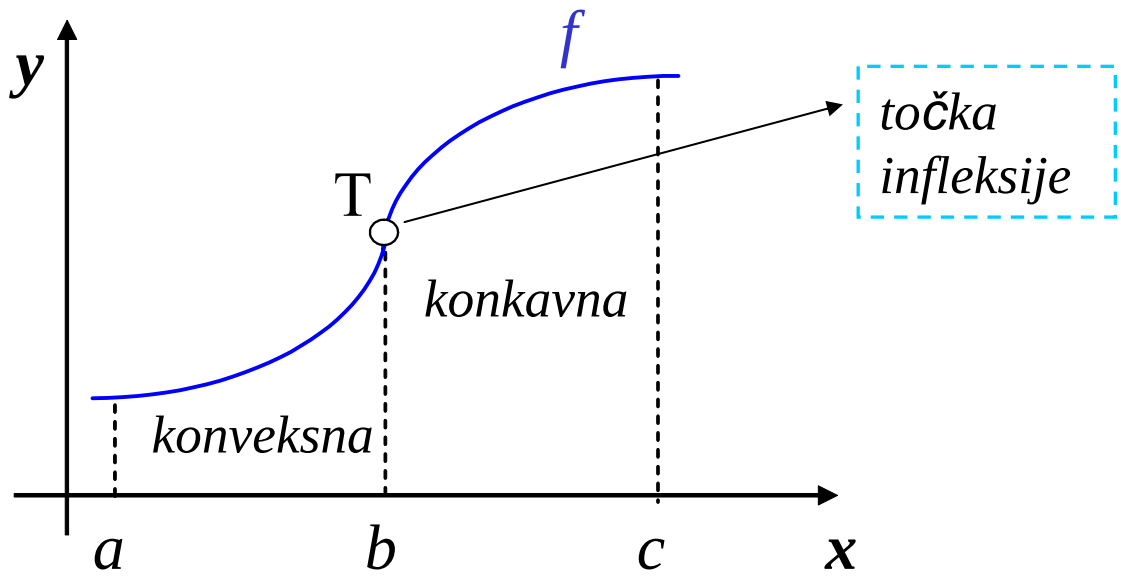
Može se reći i da je funkcija na nekom intervalu konveksna ukoliko se tangenta u bilo kojoj točki iz tog intervala nalazi ispod grafa funkcije

- Za funkciju $f : I \to \mathbf{R}$ se kaže da je **konveksna** na intervalu I ako

$$\left(x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2\right) \Rightarrow \left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \right)$$



- **Točka infleksije** je točka u kojoj funkcija $y = f(x)$ prelazi iz konveksnog u konkavni oblik ili obratno



Sa slike se vidi da u intervalu konveksnosti koeficijent smjera tangente stalno raste što znači da prva derivacije raste, tj. $f''(x) > 0$

Analogno, u intervalu konkavnosti je $f''(x) < 0$

Dakle, dovoljan uvjet za postojanje infleksije je:

1. Druga derivacija početne funkcije u toj točki mora biti jednaka nuli, tj.

$$f''(x_I) = 0$$

2. Treća derivacija početne funkcije mora biti različita od nule, tj.

$$f'''(x_I) \neq 0$$

U posebnom slučaju može i treća derivacija biti jednaka nuli. Tada se deriviranje nastavlja dalje do prve derivacije višeg reda koja je različita od nule. Ako je ta derivacija neparnog reda točka infleksije postoji, a u protivnom ne postoji.

Primjer. Odredimo točku infleksije te intervale konkavnosti i konveksnosti funkcije $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x$$

$$f''(x) = 6x + 4$$

$f'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ funkcija ima točku infleksije u onim točkama za koje je $f''(x) = 0$, tj.

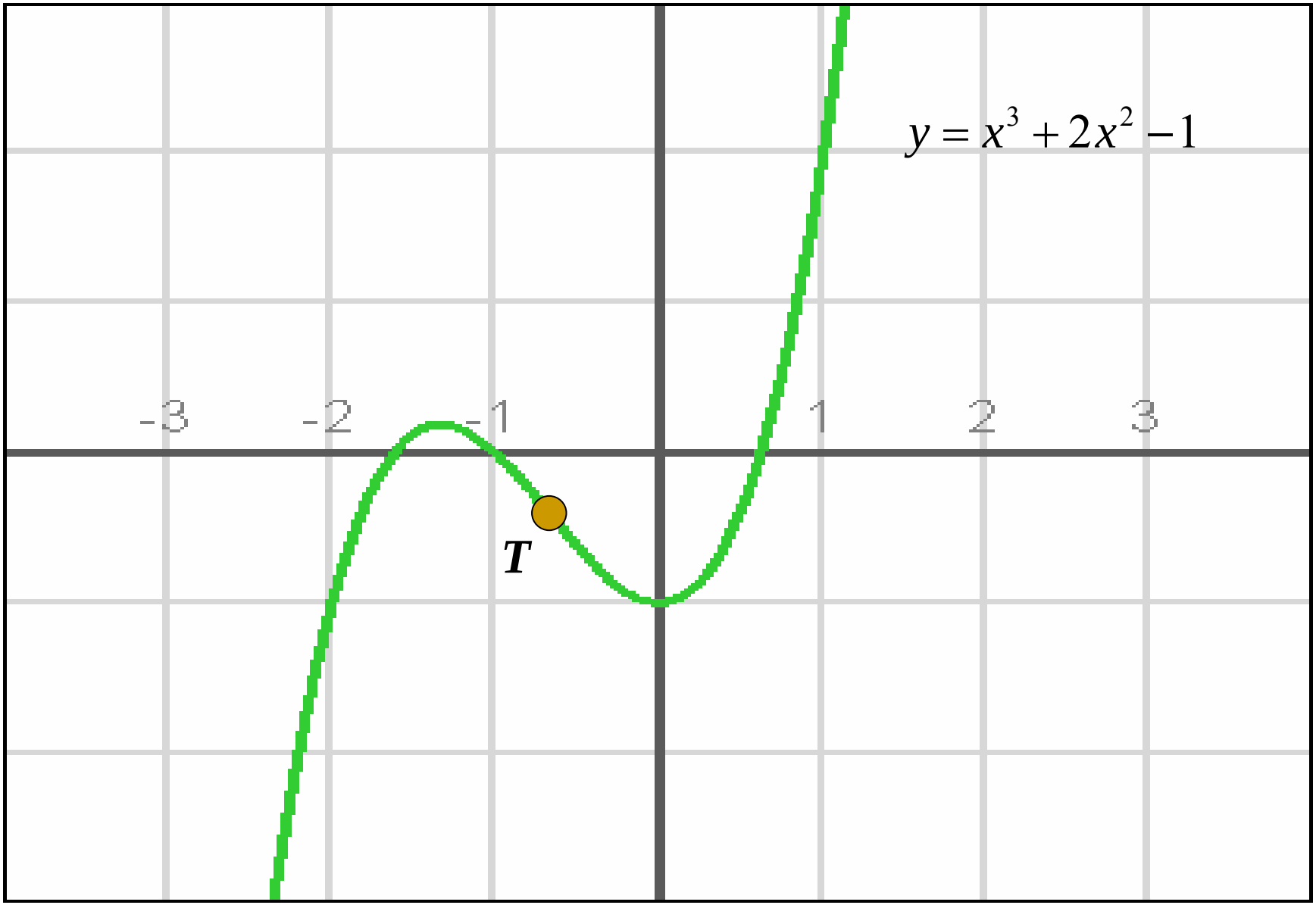
$$6x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \Rightarrow \text{točka infleksije: } T\left(-\frac{2}{3}, -\frac{11}{27}\right)$$

Funkcija je konveksna na intervalu gdje je $f''(x) > 0$, tj.

$$6x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$$

Funkcija je konkavna na intervalu gdje je $f''(x) < 0$, tj.

$$6x + 4 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$$


$y = x^3 + 2x^2 - 1$
-3
-2
-1
1
2
3
T