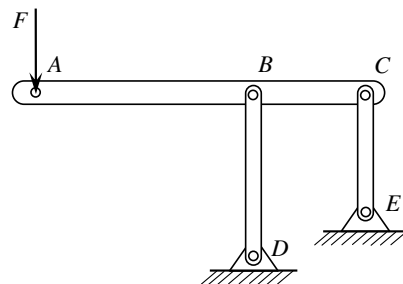


1. Kruta poluga ABC se oslanja pomoću dvije šipke BD i CE kao na slici desno. Šipka BD , dužine 0.5 m, izrađena je od čelika ($E_{AB} = 210 \text{ GPa}$) i ima poprečni presjek od 500 mm^2 . Šipka CE , dužine 0.4 m, izrađena je od aluminija ($E_{BC} = 72 \text{ GPa}$) i ima poprečni presjek od 400 mm^2 . Ako na polugu ABC u tački A djeluje sila $F = 20 \text{ kN}$, odrediti:

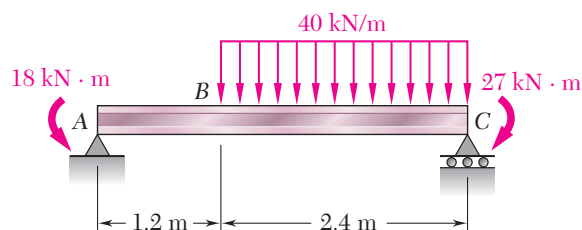
- sile koje vladaju u štapovima BD i CE ,
- izduženje štapova BD i CE ,
- pomjeranje tačke A ,
- nagib krute poluge ABC usljed djelovanja sile F .

Dodatni podaci: dužina dijela krute poluge AB je 400 mm, a dužina dijela krute poluge BC je 200 mm



(15+6+9+5=35%)

2. Za gredu opterećenu kao na slici desno odrediti dimenzije poprečnog presjeka grede ako je poprečni presjek pravougaonik s odnosom visine i širine $h : b = 1 : 2$. Dozvoljeni napon na savijanje je $\sigma_{\text{doz}} = 150 \text{ MPa}$, a dozvoljeni tangencijalni napon je $\tau_{\text{doz}} = 100 \text{ MPa}$.

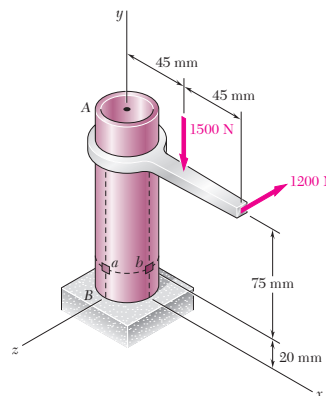


(30%)

3. Za cijev na slici desno u tačkama a i b odrediti:

- tangencijalne napone,
- normalne napone.

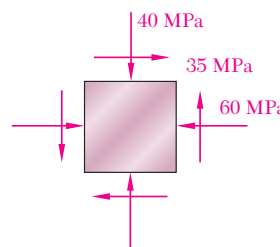
usljed djelovanja sile 1200 N. Unutrašnji prečnik cijevi je $d_1 = 30 \text{ mm}$, a vanjski $d_2 = 25 \text{ mm}$.



(20%)

4. Za element napona na slici desno odrediti:

- glavne normalne napone,
- maksimalne tangencijalne napone,
- uglove glavnih normalnih i tangencijalnih napona.



(15%)

ISPIT 10.09.2012 - GRUPA A - RJEŠENJA

1. ZADATAK

Podaci:

$$L_{BD} := 500\text{mm} \quad A_{BD} := 500\text{mm}^2 \quad F := 20\text{kN} \quad E_{BD} := 210\text{GPa}$$

$$L_{CE} := 400\text{mm} \quad A_{CE} := 400\text{mm}^2 \quad E_{CE} := 72\text{GPa}$$

$$L_{AB} := 400\text{mm}$$

$$L_{BC} := 200\text{mm}$$

Rješenje

a)

Dati sistem je statički određen i može se riješiti postavljanjem jednačina ravnoteže (utjecaj štapova BD i CE na krutu gredu se zamjenjuje djelovanjem sila F_{BD} i F_{CE} , respektivno, pri čemu se pretpostavlja da obje sile djeluju na gore)

$$\sum_i F_i = 0 \quad F_{BD} + F_{CE} - F = 0 \quad (1)$$

$$\sum_i M_i = 0 \quad F_{BD} \cdot L_{BC} - F \cdot (L_{AB} + L_{BC}) = 0 \quad (2)$$

Sada se iz izraza (2) lako dobija F_{BD} , a uvrštavanjem u (1) F_{CE} :

$$F_{BD} := \frac{F \cdot (L_{AB} + L_{BC})}{L_{BC}} = 60 \cdot \text{kN}$$

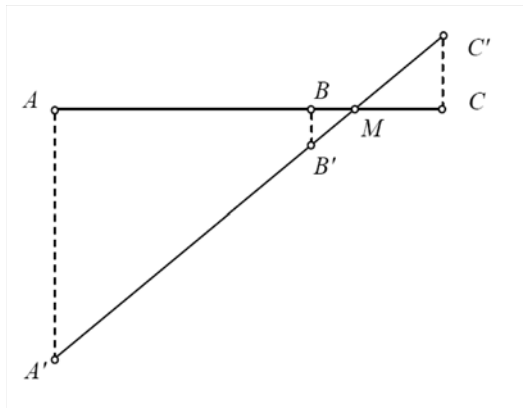
$$F_{CE} := F - F_{BD} = -40 \cdot \text{kN} \quad (\text{pogrešno pretpostavljen smjer})$$

b) S obzirom da se znaju dimenzije štapova i sile u njima (suprotnog su djelovanja od onog pod a)), lako se dolazi do njihovih izduženja korištenjem relacije koja povezuje izduženje i silu:

$$\delta_{BD} := \frac{-F_{BD} \cdot L_{BD}}{E_{BD} \cdot A_{BD}} = -0.286 \cdot \text{mm} \quad (\text{štap se skraćuje})$$

$$\delta_{CE} := \frac{-F_{CE} \cdot L_{CE}}{E_{CE} \cdot A_{CE}} = 0.556 \cdot \text{mm} \quad (\text{štap se izdužuje})$$

- c) Ako se uzme da se tačka C pomjera u tačku C' prema gore za dužinu δ_{CE} , tačka B pomjera u tačku B' prema dole za dužinu δ_{BD} , tačka A se pomjera u tačku A', kao što je dato na skici dole. Na osnovu sličnosti trouglova $CC'M$, $BB'M$ i $AA'M$, može se izračunati dužina MB , a onda i AA'



$$\frac{\delta_{CE}}{\delta_{BD}} = \frac{L_{MC}}{L_{MB}} \quad L_{MC} + L_{MB} = L_{BC}$$

$$\text{pa je: } L_{MB} := \frac{L_{BC}}{1 + \frac{|\delta_{CE}|}{|\delta_{BD}|}} = 67.925 \cdot \text{mm}$$

pomjeranje tačke A je sada:

$$\frac{\delta_A}{\delta_{BD}} = \frac{L_{MB} + L_{AB}}{L_{MB}}$$

$$\delta_A := \frac{L_{MB} + L_{AB}}{L_{MB}} \cdot \delta_{BD} = -1.968 \cdot \text{mm}$$

- d) Nagib poluge, odnosno ugao rotiranja poluge γ , se određuje na osnovu izraza:

$$\gamma := \text{atan} \left(\frac{|\delta_A| + |\delta_{CE}|}{L_{AB} + L_{BC}} \right) = 0.241 \cdot ^\circ$$

2. ZADATAK

Podaci:

$$\begin{array}{llll} L_{AB} := 1.2\text{m} & M_A := 18\text{kN}\cdot\text{m} & q := 40 \frac{\text{kN}}{\text{m}} & \sigma_{\text{doz}} := 150\text{MPa} \\ L_{BC} := 2.4\text{m} & M_C := 27\text{kN}\cdot\text{m} & & \tau_{\text{doz}} := 100\text{MPa} \end{array}$$

$$b = 2h \quad I = \frac{bh^3}{12} = \frac{h^4}{6} \quad A = bh = 2h^2$$

Rješenje

a)

Posmatrajmo raspodjelu transferzalnih sila i momenata savijanja za gredu ABC .

Reakcije u osloncima A i B (pretpostavlja se da sile F_A i F_B djeluju prema gore).

$$\sum_i F_i = 0 \quad F_A - q \cdot L_{BC} + F_C = 0 \quad (1)$$

$$\sum_i M_i = 0 \quad M_A - q \cdot L_{BC} \cdot \left(L_{AB} + \frac{L_{BC}}{2} \right) - M_C + F_C \cdot (L_{AB} + L_{BC}) = 0 \quad (2)$$

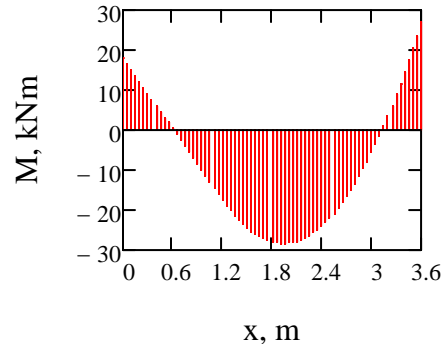
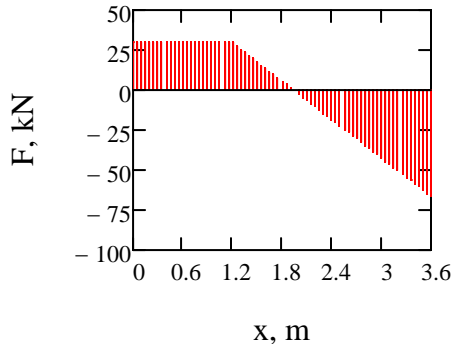
Iz (2) slijedi:

$$F_C := \frac{M_C - M_A + L_{BC} \cdot q \cdot \left(L_{AB} + \frac{L_{BC}}{2} \right)}{L_{AB} + L_{BC}} = 66.5 \cdot \text{kN}$$

Iz (1) slijedi:

$$F_A := q \cdot L_{BC} - F_C = 29.5 \cdot \text{kN}$$

Dijagrami momenata savijanja i sila



Maksimalni momenti savijanja su ispod kontinuiranog opterećenja i u osloncu C. Maksimalna vrijednost savijanja ispod kontinuiranog opterećenja nalazi se na mjestu gdje je transferzalna sila jednaka nuli, a to se odbija na osnovu izraza (vidi dijagram transferzalnih sila)

$$F_A - q \cdot (x_{\max} - L_{AB}) = 0 \quad \text{tj.} \quad x_{\max} := \frac{F_A}{q} + L_{AB} = 1.938 \text{ m}$$

pa se dobija:

$$M_{\max} := |M(x_{\max})| = 28.278 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

Dimenzionisanje na osnovu najvećeg momenta savijanja

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I} \cdot \frac{h}{2} = \frac{M_{\max} \cdot \frac{h}{2}}{\frac{h^4}{6}} = \frac{3M_{\max}}{h^3} \leq \sigma_{\text{doz}}$$

$$h := \sqrt[3]{\frac{3M_{\max}}{\sigma_{\text{doz}}}} = 82.698 \cdot \text{mm} \quad \text{i} \quad b := 2 \cdot h = 165.395 \cdot \text{mm}$$

Provjera tangencijalnog napona:

Maksimalna transferzalna sila (po intenzitetu): $F_{\max} := F_C = 66.5 \cdot \text{kN}$

$$A := b \cdot h = 1.368 \times 10^4 \cdot \text{mm}^2$$

$$\tau_{\max} := \left| \frac{3F_{\max}}{2A} \right| = 7.293 \cdot \text{MPa} \quad \tau_{\max} < \tau_{\text{doz}}$$

ili

$$h_2 := \sqrt{\frac{3F_{\max}}{2\tau_{\text{doz}}}} = 31.583 \cdot \text{mm}$$

pa dimenzija 82.7 mm zadovoljava.

3. ZADATAK

Podaci:

$$F := 1200\text{N} \quad l_1 := 45\text{mm} \quad l_2 := 45\text{mm} \quad l_3 := 75\text{mm}$$

$$d_1 := 30\text{mm} \quad d_2 := 25\text{mm}$$

$$I := \frac{(d_1^4 - d_2^4) \cdot \pi}{64} = 2.059 \times 10^4 \cdot \text{mm}^4$$

$$A := \frac{(d_1^2 - d_2^2) \cdot \pi}{4} = 215.984 \cdot \text{mm}^2$$

$$W_o := \frac{(d_1^4 - d_2^4) \cdot \pi}{\frac{32}{d_1}} = 2.745 \times 10^3 \cdot \text{mm}^3$$

$$T := F \cdot (l_1 + l_2) = 108 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M := F \cdot l_3 = 90 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

Rješenje

Sila $F=1200$ N u presjeku kojem pripadaju tačke a i b uzrokuje napone usljed momenta uvijanja $T=F \cdot (45\text{mm}+45\text{mm})$, momenta savijanja $M=F \cdot 75\text{mm}$ i sile smicanja F , pa su pojedinačni naponi jednaki:

Tačka a:

a) uvijanje - tangencijalni napon (u pravcu x ose):

$$\tau_u := \frac{T}{W_o} = 39.347 \cdot \text{MPa}$$

b) savijanje - normalni napon (u pravcu y ose) - pozitivan:

$$\sigma_s := \frac{M}{I} \cdot \frac{d_1}{2} = 65.578 \cdot \text{MPa}$$

c) smicanje - tangencijalni napon - jednak nuli

Tačka b:

a) uvijanje - tangencijalni napon (u pravcu negativne z ose):

$$\tau_{uu} := \frac{T}{W_o} = 39.347 \cdot \text{MPa}$$

b) savijanje - normalni napon (u pravcu y ose) - jednak nuli, jer se tačka nalazi na neutralnoj osi.

c) smicanje - tangencijalni napon - u pravcu negativne z ose:

$$\tau_s := \frac{4}{3} \cdot \frac{F}{A} \cdot \left[\frac{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} \right] = 11.051 \cdot \text{MPa}$$

4. ZADATAK

Podaci:

$$\sigma_x := -60 \text{MPa}$$

$$\sigma_y := -40 \text{MPa}$$

$$\tau_{xy} := 35 \text{MPa}$$

Rješenje

a) Glavni normalni naponi

$$\sigma_1 := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -13.599 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_2 := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -86.401 \cdot \text{MPa}$$

b) Maksimalni tangencijalni napon

$$\tau_{\text{max}} := \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 36.401 \cdot \text{MPa}$$

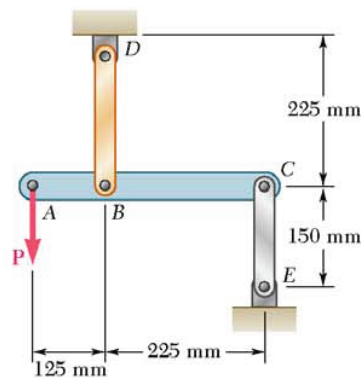
c) Uglovi glavnih normalnih

$$\text{tg}(2\theta_p) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \text{pa je} \quad \theta_p = \left(\frac{52.973}{142.973} \right) \cdot ^\circ$$

a uglovi maksimalnih tangencijalnih napona su rotirani za 45 stepeni

$$\theta_s := \theta_p + \frac{\pi}{4} = \begin{pmatrix} 97.973 \\ 187.973 \end{pmatrix}.$$

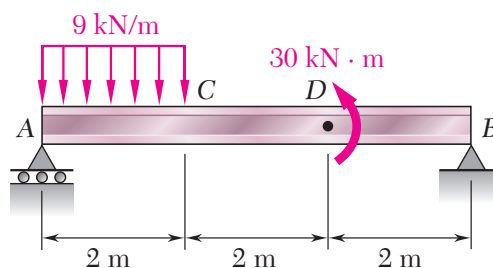
1. Kruta poluga ABC se oslanja pomoću dvije šipke BD i CE kao na slici desno. Šipka BD je izrađena od bronce ($E_{BD} = 105 \text{ GPa}$) i ima poprečni presjek od 240 mm^2 . Šipka CE je izrađena od aluminija ($E_{CE} = 72 \text{ GPa}$) i ima poprečni presjek od 300 mm^2 . Ako na polugu ABC djeluje sila $P = 10 \text{ kN}$, odrediti:



- sile koje vladaju u štapovima BD i CE ,
- izduženje štapova BD i CE ,
- pomjeranje tačke A ,
- nagib krute poluge ABC usljed djelovanja sile P .

(15+6+9+5=35%)

2. Za gredu opterećenu kao na slici desno odrediti dimenzije kvadratnog poprečnog presjeka grede. Dozvoljeni napon na savijanje je $\sigma_{doz} = 150 \text{ MPa}$, a dozvoljeni tangencijalni napon je $\tau_{doz} = 100 \text{ MPa}$.

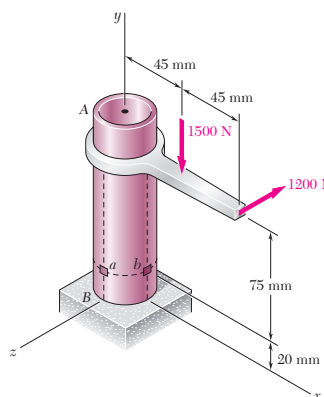


(30%)

3. Za dio na slici desno u tačkama a i b odrediti:

- tangencijalne napone,
- normalne napone.

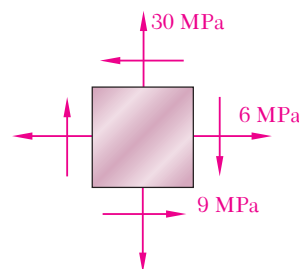
usljed djelovanja sile 1500 N .



(20%)

4. Za element napona na slici desno odrediti:

- glavne normalne napone,
- maksimalni tangencijalni napon,
- ugao glavnih normalnih i tangencijalnih napona.



(15%)

ISPIT 10.09.2012 - GRUPA B - RJEŠENJA

1. ZADATAK

Podaci:

$$L_{BD} := 225\text{mm} \quad A_{BD} := 240\text{mm}^2 \quad P := 10\text{kN} \quad E_{BD} := 105\text{GPa}$$

$$L_{CE} := 150\text{mm} \quad A_{CE} := 300\text{mm}^2 \quad E_{CE} := 72\text{GPa}$$

$$L_{AB} := 125\text{mm}$$

$$L_{BC} := 225\text{mm}$$

Rješenje

a)

Dati sistem je statički određen i može se riješiti postavljanjem jednačina ravnoteže (utjecaj štapova BD i CE na krutu gredu se zamjenjuje djelovanjem sila F_{BD} i F_{CE} , respektivno, pri čemu se pretpostavlja da obje sile djeluju na gore)

$$\sum_i F_i = 0 \quad F_{BD} + F_{CE} - P = 0 \quad (1)$$

$$\sum_i M_i = 0 \quad F_{BD} \cdot L_{BC} - P \cdot (L_{AB} + L_{BC}) = 0 \quad (2)$$

Sada se iz izraza (2) lako dobija F_{BD} , a uvrštavanjem u (1) F_{CE} :

$$F_{BD} := \frac{P \cdot (L_{AB} + L_{BC})}{L_{BC}} = 15.556 \cdot \text{kN}$$

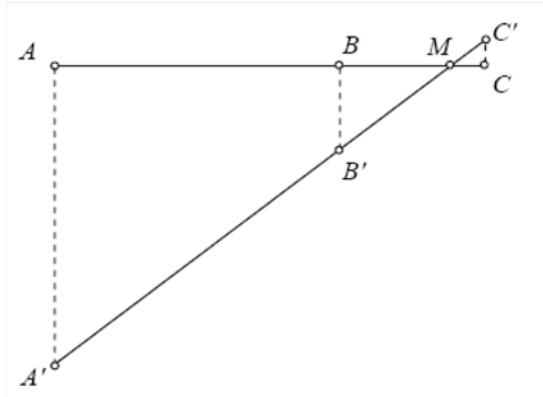
$$F_{CE} := P - F_{BD} = -5.556 \cdot \text{kN} \quad (\text{pogrešno pretpostavljen smjer})$$

b) S obzirom da se znaju dimenzije štapova i sile u njima (smjer im je suprotan onom pod a)), lako se dolazi do njihovih izduženja korištenjem relacije koja povezuje izduženje i silu:

$$\delta_{BD} := \frac{F_{BD} \cdot L_{BD}}{E_{BD} \cdot A_{BD}} = 0.139 \cdot \text{mm} \quad (\text{štap se izdužuje})$$

$$\delta_{CE} := \frac{-F_{CE} \cdot L_{CE}}{E_{CE} \cdot A_{CE}} = 0.039 \cdot \text{mm} \quad (\text{štap se izdužuje})$$

- c) Ako se uzme da se tačka C pomjera u tačku C' prema gore za dužinu δ_{CE} , tačka B pomjera u tačku B' prema dole za dužinu δ_{BD} , tačka A se pomjera u tačku A', kao što je dato na skici dole. Na osnovu sličnosti trouglova CC'M, BB'M i AA'M, može se izračunati dužina MB, a onda i AA'



$$\frac{\delta_{CE}}{\delta_{BD}} = \frac{L_{MC}}{L_{MB}} \quad L_{MC} + L_{MB} = L_{BC}$$

$$\text{pa je: } L_{MB} := \frac{L_{BC}}{1 + \frac{|\delta_{CE}|}{|\delta_{BD}|}} = 176.087 \cdot \text{mm}$$

pomjeranje tačke A je sada:

$$\frac{\delta_A}{\delta_{BD}} = \frac{L_{MB} + L_{AB}}{L_{MB}}$$

$$\delta_A := \frac{L_{MB} + L_{AB}}{L_{MB}} \cdot \delta_{BD} = 0.237 \cdot \text{mm}$$

- d) Nagib poluge, odnosno ugao rotiranja poluge γ , se određuje na osnovu izraza:

$$\gamma := \text{atan} \left(\frac{|\delta_A| + |\delta_{CE}|}{L_{AB} + L_{BC}} \right) = 0.045^\circ$$

***** 2. ZADATAK

Podaci:

$$L_{AC} := 2\text{m}$$

$$M_D := 30\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$q := 9 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$\sigma_{\text{doz}} := 150\text{MPa}$$

$$L_{CD} := 2\text{m}$$

$$\tau_{\text{doz}} := 100\text{MPa}$$

$$L_{DB} := 2\text{m}$$

$$I = \frac{b^4}{12} \quad W = \frac{b^3}{6} \quad A = b^2$$

Rješenje

a)

Posmatrajmo raspodjelu transferzalnih sila i momenata savijanja za gredu *ABC*.

Reakcije u osloncima *A* i *B* (pretpostavlja se da sile F_A i F_B djeluju prema gore).

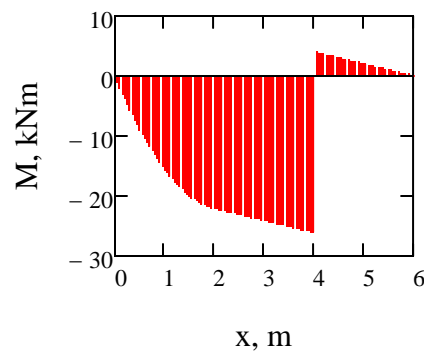
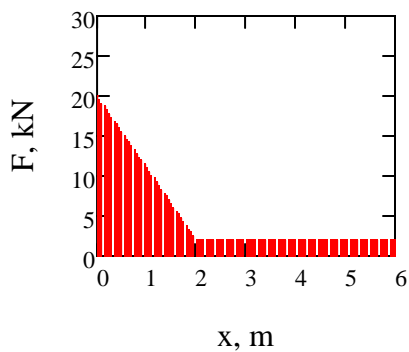
$$\sum_i F_i = 0 \quad F_A - q \cdot L_{AC} + F_B = 0 \quad (1)$$

$$\sum_i M_i = 0 \quad q \cdot L_{AC} \cdot \frac{L_{AC}}{2} - M_D - F_B \cdot (L_{AC} + L_{CD} + L_{DB}) = 0 \quad (2)$$

Iz (2) slijedi:
$$F_B := \frac{\frac{q \cdot L_{AC}^2}{2} - M_D}{L_{AC} + L_{DB} + L_{CD}} = -2 \cdot \text{kN} \quad (\text{pogrešno pretpostavljen smjer})$$

Iz (1) slijedi:
$$F_A := q \cdot L_{AC} - F_B = 20 \cdot \text{kN}$$

Dijagrami momenata savijanja i sila



Maksimalni moment savijanja tački djelovanja momenta M_D iznosi:

$$M_{\max} := \left| M(L_{AC} + L_{CD}) \right| = 26 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

Dimenzionisanje na osnovu najvećeg momenta savijanja

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I} \cdot \frac{b}{2} = \frac{M_{\max}}{\frac{b^4}{12}} \cdot \frac{b}{2} = \frac{6M_{\max}}{b^3} \leq \sigma_{\text{doz}}$$

$$b := \sqrt[3]{\frac{6M_{\max}}{\sigma_{\text{doz}}}} = 101.316 \cdot \text{mm}$$

Provjera tangencijalnog napona:

Maksimalna transferzalna sila (po intenzitetu): $F_{\max} := F_A = 20 \cdot \text{kN}$

$$A := b^2 = 1.026 \times 10^4 \cdot \text{mm}^2$$

$$\tau_{\max} := \left| \frac{3F_{\max}}{2A} \right| = 2.923 \cdot \text{MPa} \quad \tau_{\max} < \tau_{\text{doz}}$$

ili

$$b_2 := \sqrt{\frac{3F_{\max}}{2\tau_{\text{doz}}}} = 17.321 \cdot \text{mm}$$

pa dimenzija 65.64 mm zadovoljava.

3. ZADATAK

Podaci:

$$F := 1500\text{N} \quad l_1 := 45\text{mm}$$

$$d_1 := 30\text{mm} \quad d_2 := 25\text{mm}$$

$$I := \frac{(d_1^4 - d_2^4) \cdot \pi}{64} = 2.059 \times 10^4 \cdot \text{mm}^4$$

$$A := \frac{(d_1^2 - d_2^2) \cdot \pi}{4} = 215.984 \cdot \text{mm}^2$$

$$W_o := \frac{\frac{(d_1^4 - d_2^4) \cdot \pi}{32}}{\frac{d_1}{2}} = 2.745 \times 10^3 \cdot \text{mm}^3$$

$$M := F \cdot l_1 = 67.5 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

Rješenje

Sila $F=1200$ N u presjeku kojem pripadaju tačke a i b uzrokuje napone usljed momenta savijanja $M=F \cdot 45\text{mm}$ i sile pritiska F , pa su pojedinačni normalni naponi jednaki:

Tačka a:

a) savijanje - normalni napon (u pravcu y ose) - jednak nuli, jer se tačka nalazi na neutralnoj osi

b) pritisak - normalni napon:

$$\sigma_p := \frac{F}{A} = 6.945 \cdot \text{MPa}$$

Tačka b:

a) savijanje - normalni napon (u pravcu y ose) - negativan:

$$\sigma_s := \frac{M}{I} \cdot \frac{d_1}{2} = 49.184 \cdot \text{MPa}$$

b) pritisak - normalni napon:

$$\sigma_p := \frac{F}{A} = 6.945 \cdot \text{MPa}$$

4. ZADATAK

Podaci:

$$\sigma_x := 6 \text{MPa}$$

$$\sigma_y := 30 \text{MPa}$$

$$\tau_{xy} := -9 \text{ MPa}$$

Rješenje

a) Glavni normalni naponi

$$\sigma_1 := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 33 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_2 := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 3 \cdot \text{MPa}$$

b) Maksimalni tangencijalni napon

$$\tau_{\text{max}} := \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 15 \cdot \text{MPa}$$

c) Uglovi glavnih normalnih

$$\text{tg}(2\theta_p) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \text{pa je} \quad \theta_p = \left(\begin{array}{l} 18.435 \\ 108.435 \end{array} \right) \cdot ^\circ$$

a uglovi maksimalnih tangencijalnih napona su rotirani za 45 stepeni

$$\theta_s := \theta_p + \frac{\pi}{4} = \left(\begin{array}{l} 63.435 \\ 153.435 \end{array} \right) \cdot ^\circ$$
