\# Izračunati dvojni integral

$$I=\iint_G \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{y}\,dxdy,$$

gde je G oblast u prvom kvadrantu ograničena linijama $y=x$, $x=0$, $x^2+y^2=1$.

Rešenje. Prelaskom na polarne koordinate:

$x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ biće $J=\rho$; slika oblasti G je oblast D:

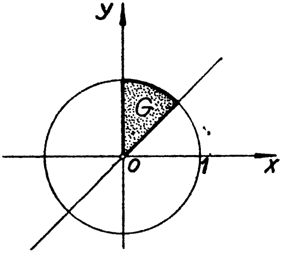
$x=y \;\Rightarrow\; \rho\cos\varphi=\rho\sin\varphi, \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\varphi=1 \;\Rightarrow\; \varphi=\frac{\pi}{4}$ (I kvadrant)

$x=0 \;\Rightarrow\; \rho\cos\varphi=0 \;\Rightarrow\; \varphi=\frac{\pi}{2} \quad (y>0)$

$x^2+y^2=1 \;\Rightarrow\; \rho=1$

pa je

$$I=\iint_D \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sin\varphi}\,d\rho\;\;d\varphi=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sin\varphi}\int\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho=$$



$$=-\frac{\pi}{4}\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=-\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}-1).$$

#

Izračunati dvojni integral

$$I=\iint\limits_G x^2 y^2 \sqrt{1-x^3-y^3}\,dx\,dy,$$

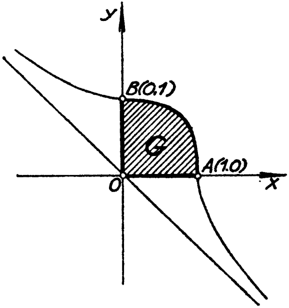
gde je oblast G određena relacijama $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^3+y^3 \leqslant 1$.

Rešenje

$$I=\int_0^1 x^2\,dx \int_0^{\sqrt[3]{1-x^3}} y^2 \sqrt{1-x^3-y^3}\,dy=$$

$$=-\int_0^1 x^2 \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(1-x^3-y^3)^{3/2}\right]_0^{\sqrt[3]{1-x^3}} dx=$$

$$=\frac{2}{9}\int_0^1 x^2 (1-x^3)^{3/2}\,dx=\frac{4}{135}.$$



Promeniti red integracije i izračunati vrednost integrala

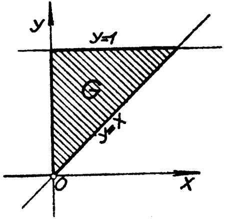
$$\int_0^1 dx \int_x^1 \sqrt{\frac{y(1-y)}{y^2-x^2}}\, dy.$$

Rešenje. Ako nacrtamo oblast integracije vidimo da je

$$I = \int_0^1 \sqrt{y(1-y)}\, dy \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{y^2-x^2}} =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{y(1-y)} \arcsin \frac{x}{y} \Big|_0^y \, dy =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sqrt{y(1-y)}\, dy =$$



$(y = \sin t, \quad dy = \cos t\, dt)$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\, |\cos t|\, dt = \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi^2}{16}.$$

\# Promeniti red integracije i izračunati integral

$$I=\int_0^a dy\int_0^y \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)\,(a-y)\,(y-x)}}\,.$$

Rešenje.

$$I=\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\int_x^a \frac{dy}{\sqrt{(a-y)\,(y-x)}}\,.$$

Smenom $a-y=(y-x)\,t^2$

$$dy=\frac{2t\,(x-a)}{(t^2+1)^2}\,dt$$

transformišemo integral

$$\int_x^a \frac{dy}{\sqrt{(a-y)\,(y-x)}}=\int_0^\infty \frac{2\,dt}{t^2+1}=\pi,$$

pa je

$$I=\pi\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=a\,\pi.$$

\# Izračunati integral

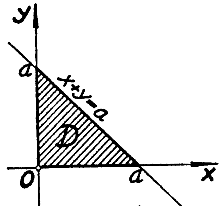
$$I=\iint\limits_{G} e^{-(x+y)}\,(x+y)^n,\quad dxdy$$

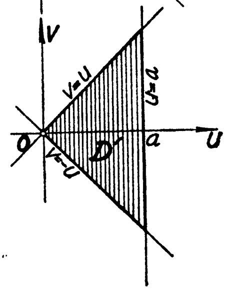
gde je oblast G određena relacijama $x\geqslant 0,\ \ y\geqslant 0;\qquad n\in N.$

Rešenje. Oblast G je neograničena; podintegralna funkcija je pozitivna u G, pa je dovoljno izračunati integral u bilo kojoj konačnoj oblasti $D\subset G$ i naći graničnu vrednost dobijenog rezultata kada $D\to G$.

Neka je D oblast ograničena koordinatnim osama i pravom $x+y=a$. Tada je

$$\mathrm{I}\,(a)=\iint\limits_{D} e^{-(x+y)}\,(x+y)^n\,dx\,dy.$$





Prelaskom na nove promenljive smenom

$$x+y=u,\quad x-y=v$$

biće

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{u-v}{2},\qquad |J|=\frac{1}{2}$$

$$x=0\ \Rightarrow\ u=-v,$$
$$y=0\ \Rightarrow\ u=v,$$
$$x+y=a\ \Rightarrow\ u=a$$

i

$$I\,(a)=\frac{1}{2}\iint\limits_{D'} e^{-u}\,u^n\,du\,dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^a e^{-u}\,u^n\,du\int_{-u}^{u} dv=$$

$$=\int_0^a e^{-u}\,u^{n+1}\,du=e^{-u}P_{n+1}(u)\Big|_0^a=e^{-a}P_{n+1}(a)-P_{n+1}(0),$$

gde je

$$P_{n+1}(x)=-[x^{n+1}+(n+1)\,x^n+n\,(n+1)\,x^{n-1}+\ldots+(n+1)!]$$

i

$$P_{n+1}(0)=-(n+1)!$$

$$I=\lim_{a\to\infty} I\,(a)=(n+1)!$$

\# Izračunati integrale:

$$I_1 = \iint_G e^{-(x^2+y^2)} \sin (x^2+y^2)\, dx dy,$$

i

$$I_2 = \iint_G e^{-(x^2+y^2)} \cos (x^2+y^2)\, dx dy,$$

dge je G cela ravan xOy.

Rešenja. Oblast integracije je neograničena. Lako je pokazati da su oba integrala apsolutno konvergentna. (Podintegralna funkcija je, u oba slučaja, po apsolutnoj vrednosti manja od $e^{-(x^2+y^2)}$, a integral $\iint_G e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$ konvergira).

Pređimo na polarni koordinatni sistem i neka je D krug $x^2+y^2 \leqslant a^2$. Tada je

$$I(a) = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} \cos (x^2+y^2)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_D e^{-\rho^2} \cos \rho^2\, \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a e^{-\rho^2} \cos \rho^2\, \rho\, d\rho =$$

$$= \pi \int_0^a e^{-t} \cos t\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-a^2} (\sin a^2 - \cos a^2) + \frac{\pi}{2}.$$

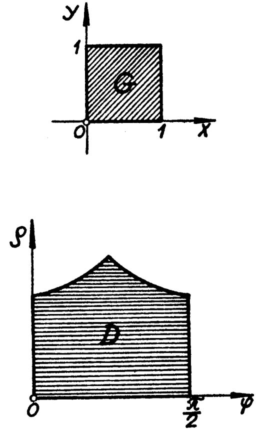
$$I_2 = \lim_{a \to \infty} I(a) = \frac{\pi}{2}.$$

Slično je $I_1 = \frac{\pi}{2}$.

Izračunati vrednost dvojnog integrala

$$I=\iint\limits_{G}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

gde je G kvadrat ograničen pravim $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$.



Sl. 17

Rešenje. Prelaskom na polarne koordinate, biće:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad J=\rho;$$

$$x=0 \;\Rightarrow\; \rho\cos\varphi=0\ (y>0) \;\Rightarrow\; \varphi=\frac{\pi}{2},$$

$$y=0 \;\Rightarrow\; \rho\sin\varphi=0\ (x>0) \;\Rightarrow\; \varphi=0,$$

$$x=1 \;\Rightarrow\; \rho\cos\varphi=1 \;\Rightarrow\; \rho=\frac{1}{\cos\varphi},$$

$$y=1 \;\Rightarrow\; \rho\sin\varphi=1 \;\Rightarrow\; \rho=\frac{1}{\sin\varphi}$$

i

$$I=\iint\limits_{D}\frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{(1+\rho^2)^{3/2}}=\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}\frac{\rho\,d\rho}{(1+\rho^2)^{3/2}}+\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}}\frac{\rho\,d\rho}{(1+\rho^2)^{3/2}}=$$

$$=\int_0^{\pi/4}d\varphi\Big[-(1+\rho^2)^{-1/2}\Big]_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}+\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\varphi\Big[-(1+\rho^2)^{-1/2}\Big]_0^{\frac{1}{\sin\varphi}}=$$

$$=\int_0^{\pi/4}\left(1-\frac{\cos\varphi}{\sqrt{2-\sin^2\varphi}}\right)d\varphi+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(1-\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2-\cos^2\varphi}}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

\# Izračunati integral

$$I=\iint_G \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^\alpha}$$

(α realan broj) i dobijeni rezultat geometrijski protumačiti, ako je G krug $x^2+y^2\leqslant 1$.

Rešenje. Za $\alpha>0$ podintegralna funkcija je neograničena na rubu oblasti G. U tom slučaju je I uopšteni integral druge vrste. Podintegralna funkcija je pozitivna u G, i integral konvergira ako postoji

$$\lim_{D\to G}\iint_D \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^\alpha},$$

gde je D, na primer, krug $x^2+y^2\leqslant r^2$, $0<r<1$.

$$I(r)=\iint_D \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^\alpha}=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^r \frac{\rho\,d\rho}{(1-\rho^2)^\alpha}. \qquad \begin{aligned} x&=\rho\cos\varphi\\ y&=\rho\sin\varphi\\ J&=\rho\end{aligned}$$

Za $\alpha\neq 1$ je

$$I(r)=\frac{\pi}{\alpha-1}(1-\rho^2)^{1-\alpha}\Big|_0^r=\frac{\pi}{\alpha-1}\left[(1-r^2)^{1-\alpha}-1\right],$$

a za $\alpha=1$

$$I(r)=-\pi\ln(1-\rho^2)\Big|_0^r=-\pi\ln(1-r^2).$$

Kako je

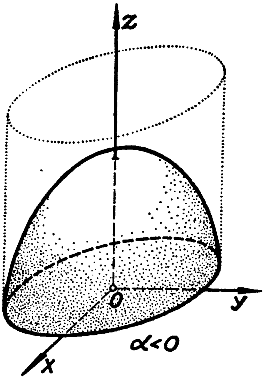
$$I=\lim_{r\to 1} I(r)$$

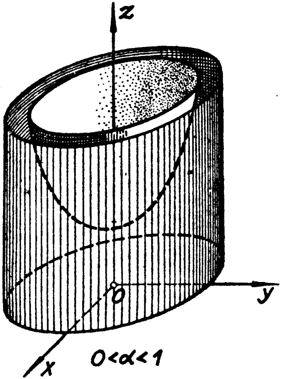
lako je videti da za $\alpha \geqslant 1$ integral divergira, dok je za $\alpha<1$

$$I=\lim_{r\to 1} \frac{\pi}{\alpha-1}\left[(1-r^2)^{1-\alpha}-1\right]=\frac{\pi}{1-\alpha}.$$

Dobijeni rezultat je jednak mernom broju zapremine tela ograničenog površima

$$z=0, \quad z=\frac{1}{(1-x^2-y^2)^\alpha} \quad (\alpha<1), \quad x^2+y^2=1.$$





\# Primenom formule za srednju vrednost odrediti granice integrala

$$I = \iint\limits_G \frac{dxdy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$$

gde je G oblast definisana relacijom $|x|+|y| \leqslant 1$.

Rešenje. Kako je u oblasti G

$$\inf\left(\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\right) = \frac{1}{102},$$

a

$$\sup\left(\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\right) < \frac{1}{100}$$

to je

$$\frac{1}{102}\iint\limits_G dx\,dy < \iint\limits_G \frac{dx\,dy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y} < \frac{1}{100}\iint\limits_G dx\,dy,$$

odnosno

$$\frac{1}{51} < I < \frac{1}{50}$$

ili

$$0{,}0196 < I < 0{,}02.$$