ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определенный интеграл как предел интегральных сумм, его свойства и связь с неопределенным интегралом

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и если: 1) разделить этот отрезок произвольным способом на n частичных отрезков длиною $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_n$, 2) выбрать в каждом частичном отрезке по одной произвольной точке $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$, 3) вычислить значения функции $f(x)$ в выбранных точках и 4) составить сумму

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

то она называется **интегральной суммой** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

По-разному деля отрезок $[a, b]$ на n частичных отрезков и по-разному выбирая в них по одной точке ξ_i, можно для всякой заданной функции $f(x)$ и всякого заданного отрезка $[a, b]$ составить бесчисленное множество различных интегральных сумм. При этом оказывается, что все эти различные интегральные суммы при неограниченном возрастании n и при стремлении к нулю наибольшей из длин частичных отрезков, имеют один общий предел. Этот *общий предел всех интегральных сумм функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется определенным интегралом от $f(x)$ в пределах от a до b* и обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$.

Простейшие свойства определенного интеграла:

1. *При перестановке пределов изменяется знак интеграла:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

2. *Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:* $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

3. *Отрезок интегрирования можно разбивать на части:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4. *Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых:*

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_3(x)\,dx.$$

5. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Для вычисления определенного интеграла, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл, служит **формула Ньютона—Лейбница**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (*)$$

— определенный интеграл равен разности значений неопределенного интеграла при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

582. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int_2^3 3x^2\,dx; \quad 2)\ \int_0^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}}\right)dx;$$

$$3)\int_{-1}^{7} \frac{dt}{\sqrt{3t+4}}; \qquad 4)\ \int_0^{\frac{\pi}{2a}} (x+3)\sin ax\,dx.$$

Решение. Применяя формулу Ньютона—Лейбница (*) и свойства определенного интеграла, получим:

$$1)\ \int_2^3 3x^2\,dx = 3\int_2^3 x^2\,dx = x^3\Big|_2^3 = 3^3 - 2^3 = 19.$$

$$2)\int_0^4 \left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx = \int_0^4 dx + 4\int_0^4 e^{\frac{x}{4}}d\frac{x}{4} = x + 4e^{\frac{x}{4}}\Big|_0^4 = 4 + 4e - 4 = 4e.$$

$$3)\ \int_{-1}^{7} \frac{dt}{\sqrt{3t+4}} = \frac{1}{3}\int_{-1}^{7} (3t+4)^{-\frac{1}{2}}\,d(3t+4) = \frac{2}{3}(3t+4)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{7} =$$

$$= \frac{2}{3}(5-1) = \frac{8}{3}.$$

4) Здесь для нахождения неопределенного интеграла применяем формулу интегрирования по частям $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Полагая $u=x+3$, $dv=\sin ax\,dx$, получим $du=dx$,

$$v=\int \sin ax dx=\frac{1}{a}\int \sin ax\,d(ax)=-\frac{1}{a}\cos ax,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}}(x+3)\sin ax\,dx=-\frac{x+3}{a}\cos ax+\frac{1}{a}\int \cos ax\,dx\Big|_0^{\frac{\pi}{2a}}=$$

$$=-\frac{x+3}{a}\cos ax+\frac{1}{a^2}\sin ax\Big|_0^{\frac{\pi}{2a}}=\frac{1}{a^2}+\frac{3}{a}=\frac{1+3a}{a^2}.$$

Вычислить интегралы:

583. $\int_1^5 \frac{dx}{3x-2}$. **584.** $\int_0^1 \frac{dz}{(2z+1)^3}$.

585. $\int_1^2 \frac{dt}{t^2+5t+4}$. **586.** $\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4}dx$.

587. $\int_{-a}^{a} x\cos\frac{x}{a}dx$. **588.** $\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx$.

589*. $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos x\,dx$. **590.** $\int_1^e (1+\ln y)^2\,dy$.

§ 2. Замена переменной в определенном интеграле

Для вычисления многих определенных интегралов полезно заменять переменную интегрирования. При этом, если определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ преобразуется при помощи подстановки $x=\varphi(t)$ [или $t=\psi(x)$] в другой интеграл, с новой переменной интегрирования t, то *заданные пределы* $x_1=a$ *и* $x_2=b$ *заменяются новыми пределами* $t_1=\alpha$ и $t_2=\beta$, которые определяются из исходной подстановки, т. е. из уравнений $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ [или $\alpha=\psi(a)$, $\beta=\psi(b)$]. Если $\varphi'(t)$ и $f[\varphi(t)]$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta F(t)\,dt.$$

591. Вычислить интегралы:

1) $\int_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}$; 2) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}$; 3) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{(x^3+1)\,dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}$.

Решение. 1) Вводим новую переменную интегрирования, полагая $\sqrt{1+3x}=t$. Отсюда находим $x=\frac{t^2-1}{3}$, $dx=\frac{2}{3}t\,dt$ и новые пределы интеграла: $t_1=1$ при $x_1=0$, $t_2=4$ при $x_2=5$. Подставляя, получим

$$\int_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}=\frac{2}{9}\int_1^4 (t^2-1)\,dt=\frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^4=$$
$$=\frac{2}{9}\left(\frac{64-1}{3}-4+1\right)=4.$$

2) Полагая $e^x=t$, имеем $x=\ln t$, $dx=\frac{dt}{t}$; $t_1=2$ при $x_1=\ln 2$; $t_2=3$ при $x_2=\ln 3$ и

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\int_2^3\frac{dt}{t(t-t^{-1})}=\int_2^3\frac{dt}{t^2-1}=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_2^3=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{\ln 1{,}5}{2}.$$

3) Полагая $x=2\sin t$, получим: $dx=2\cos t\,dt$; $t_1=\frac{\pi}{6}$ при $x_1=1$; $t_2=\frac{\pi}{3}$ при $x_2=\sqrt{3}$;

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{(x^3+1)\,dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{8\sin^3 t+1}{4\sin^2 t}dt=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin t\,dt+\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{\sin^2 t}=$$
$$=-2\cos t-\frac{1}{4}\operatorname{ctg} t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=-2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\right)=$$
$$=\frac{7}{2\sqrt{3}}-1.$$

4) Заменяя переменную при помощи подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$, найдем $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$; $dx=\frac{2dz}{1+z^2}$ (см. гл. IV, § 9); $z_1=0$ при $x_1=0$; $z_2=1$ при $x_2=\frac{\pi}{2}$ и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}=2\int_0^1\frac{dz}{z^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}}\Big|_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

592. Доказать, что для четной функции $f(x)$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

а для нечетной функции $f(x)$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Решение. Разделив отрезок интегрирования $[-a, a]$ точкой $x=0$ на две части, согласно свойству 3 получим тождество

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{-a}^{0} f(x)\,dx.$$

Заменив переменную в последнем интеграле по формуле $x=-z$, имеем $dx=-dz$; $z_1=a$ при $x_1=-a$; $z_2=0$ при $x_2=0$;

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-z)\,dz = \int_{0}^{a} f(-z)\,dz = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx,$$

так как *значение определенного интеграла не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования.* Следовательно,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(-x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x)+f(-x)]\,dx.$$

Для четной функции $f(-x)=f(x)$, а для нечетной функции $f(-x)=-f(x)$, поэтому

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ четная,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Пользуясь доказанными положениями, можно упрощать вычисление некоторых определенных интегралов. Например:

1) без вычислений, заключаем:

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (3x-2x^5)\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 2x\,dx = 0, \quad \int_{3}^{-3} t^8 \arcsin t\,dt = 0$$

вследствие нечетности подынтегральной функции;

$$2)\ \int_{-2}^{2} \frac{x^5+7x^4+x^3-5x^2-2}{x^3+x}\,dx = \int_{-2}^{2} \frac{7x^4-5x^2-2}{x^3+x}\,dx +$$

$$+\int_{-2}^{2} \frac{x^5+x^3}{x^3+x}\,dx = 0 + 2\int_{0}^{2} x^2\,dx = 2\frac{x^3}{3}\Bigg|_{0}^{2} = \frac{16}{3},$$

вследствие того, что под знаком первого интеграла функция нечетная, а под знаком второго — четная.

Вычислить интегралы:

593. $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{(x+1)^4}$. Подстановка $x+1=z$.

594. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$. Подстановка $\sqrt{e^x-1}=t$.

595. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$. Подстановка $z=x^2+1$.

596. $\int\limits_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x}\,dx$. Подстановка $t=1+\ln x$.

597. $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$. Подстановка $x=3\cos\varphi$.

598. $\int\limits_5^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{5+4t}}$. **599.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}\,d\varphi$.

600. $\int\limits_{\ln 3}^{0} \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx$. **601.** $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

602*. $\int\limits_0^8 \sqrt{\frac{x}{6-x}}\,dx$. **603*.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi$.

§ 3. Схема применения определенного интеграла к вычислению различных величин. Площадь плоской фигуры

Понятие определенного интеграла вследствие его абстрактности широко применяется для вычисления различных геометрических и физических величин.

Для вычисления некоторой величины u при помощи определенного интеграла можно руководствоваться следующей общей схемой (I):

1. Разбить u на большое число n малых слагаемых элементов Δu_i:

$$u=\Delta u_1+\Delta u_2+\ldots+\Delta u_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta u_i.$$

2. Найти приближенное значение каждого элемента Δu_i в виде произведения $\Delta u_i \approx f(x_i) \cdot \Delta x$ и затем приближенное значение u в виде интегральной суммы

$$u \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x, \qquad (*)$$

где x — один из параметров величины u, который по условию задачи изменяется в известном интервале $a \leqslant x \leqslant b$; $f(x)$ — данная или определяемая из условия задачи функция от x; $x_0 = a$, x_1, x_2, ..., $x_n = b$ — точки интервала $[a, b]$, которые при разбиении u на n элементов разбивают этот интервал на n равных частей $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Здесь при нахождении приближенного значения малого элемента Δu_i используются различные допущения. Например, здесь допустимо малые криволинейные отрезки заменять стягивающими их хордами; переменную силу (или скорость) на малых участках пути здесь можно заменять постоянной силой (или скоростью), — допуская, что она неизменно сохраняет на всем малом участке пути ту величину и то направление, которые она имела в начальной или конечной точке этого малого участка; переменную температуру непрерывно нагреваемого или охлаждаемого тела в течение малых промежутков времени здесь можно считать постоянной, допуская, что в течение каждого малого промежутка времени она неизменно сохраняет то значение, которое имела в начале или в конце этого промежутка.

3. Если из условия задачи следует, что при $n \to +\infty$ погрешность приближенного равенства (*) стремится к нулю, то искомая величина u будет численно равна определенному интегралу $u = \int\limits_a^b f(x)\, dx$.

Многие величины можно выразить посредством определенного интеграла, пользуясь другой схемой (II):

1. Полагаем, что некоторая часть искомой величины U есть неизвестная функция $u(x)$, где x — один из параметров величины U, который изменяется в известном из условия задачи интервале $a \leqslant x \leqslant b$.

2. Найдем дифференциал du функции $u(x)$, т. е. приближенную величину (главную часть) ее приращения Δu при изменении x на малую величину dx в виде произведения $du = f(x)\, dx$, где $f(x)$ данная или определяемая из условия задачи функция от x.

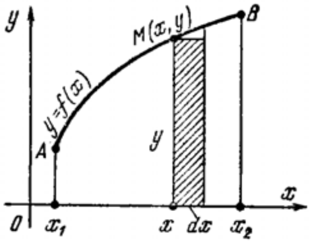
При этом здесь также используются различные допущения, которые в общем сводятся к тому, что при изменении аргумента x на малую величину dx изменение функции $u(x)$ считается пропорциональным dx.

3. Убедившись, что дифференциал du найден верно, что при $dx \to 0$ бесконечно малые Δu и du будут эквивалентны, найдем искомую величину U, интегрируя du в пределах от $x=a$ до $x=b$:

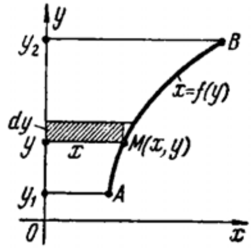
$$U=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Так, согласно схеме II:

а) Для криволинейной трапеции, прилежащей к оси Ox, черт. 87, дифференциал переменной площади $S(x)=S_{x_1AMx}$ есть площадь прямоугольника со сторонами y и dx, т. е. $dS=y\,dx$.



Черт. 87



Черт. 88

Площадь $S_{x_1ABx_2}$, если вся трапеция расположена над осью Ox, выражается интегралом

$$S=\int_{x_1}^{x_2} y\,dx. \tag{1}$$

б) Для криволинейной трапеции, прилежащей к оси Oy, черт. 88, дифференциал переменной площади $S(y)=S_{y_1AMy}$ есть площадь прямоугольника со сторонами x и dy, т. е. $dS=x\,dy$.

Площадь $S_{y_1ABy_2}$, если вся трапеция расположена справа от оси Oy, выражается интегралом

$$S=\int_{y_1}^{y_2} x\,dy. \tag{2}$$

В частности каждая из параллельных сторон трапеции а) или б) может свестись к точке.

Площадь всякой плоской фигуры, отнесенной к прямоугольной системе координат, может быть составлена из площадей криволинейных трапеций, прилежащих к оси Ox или к оси Oy.

в) Дифференциал переменной площади $S(\varphi)=S_{OAM}$, черт. 89, есть площадь кругового сектора с центральным углом $d\varphi$ и радиусом ρ,

$$\text{т. е. } dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi.$$

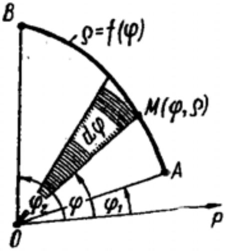
Площадь криволинейного сектора OAB выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi. \tag{3}$$

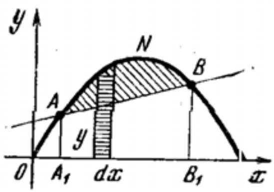
В частности точка A или B или обе они могут совпасть с полюсом O.

Площадь всякой плоской фигуры, отнесенной к полярной системе координат, может быть составлена из площадей криволинейных секторов.

604. Вычислить площадь, ограниченную следующими линиями:
1) параболой $4y = 8x - x^2$ и прямой $4y = x + 6$;
2) параболами $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$;
3) кубическими параболами $6x = y^3 - 16y$ и $24x = y^3 - 16y$;
4) эллипсом $x = a\cos t$, $y = a\sin t$;
5) кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$;
6) окружностями $\rho = 2\sqrt{3}\, a\cos\varphi$ и $\rho = 2a\sin\varphi$.



Черт. 89



Черт. 90

Решение. 1) Совместно решая данные уравнения, определим две точки пересечения линий, ограничивающих искомую площадь, $A\left(1;\ \frac{7}{4}\right)$, $B(6;\ 3)$. Построив эти точки и проходящие через них данные линии, черт. 90, видим, что искомая площадь ANB равна разности площадей $S_1 = A_1ANBB_1$ и $S_2 = A_1ABB_1$.

Площадь S_1 согласно формуле (1) выражается интегралом

$$S_1 = \int_1^6 y\,dx = \frac{1}{4}\int_1^6 (8x - x^2)\,dx = \frac{1}{4}\left(4x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^6 = \frac{205}{12}.$$

Площадь S_2 трапеции A_1ABB_1 равна произведению полусуммы ее оснований на высоту:

$$S_2 = \frac{A_1A + B_1B}{2}\cdot A_1B_1 = \frac{95}{8}.$$

Следовательно, искомая площадь $S = S_1 - S_2 = \frac{205}{12} - \frac{95}{8} = 5\frac{5}{24}$.

Если за единицу длины принят дециметр, то $S = 5\frac{5}{24}$ *кв. дм.*

2) Определив точки пересечения парабол $A(-1;\ 3)$ и $B(2;\ 0)$ и построив эти точки и параболы, черт. 91, видим, что искомую площадь S можно найти как алгебраическую сумму площадей криволинейных трапеций: $S = S_{A_1ACB} + S_{OBD} - S_{A_1AO}$.

$$S_{A_1ACB} = \int_{-1}^{2} (4 - x^2)\,dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = 8 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} = 9.$$

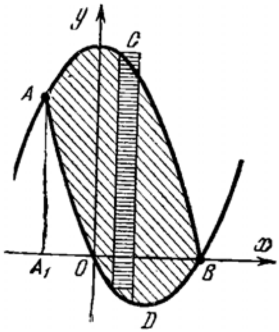
$$S_{OBD} = \int_{2}^{0} (x^2 - 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2\Big|_{2}^{0} = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}.$$

Площадь OBD расположена под осью Ox, поэтому, чтобы получить ее величину с положительным знаком, пределы интегрирования взяты справа налево.

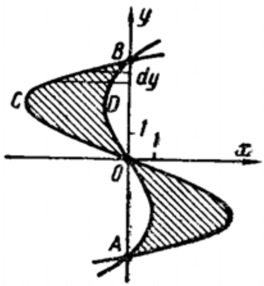
$$S_{A_1AO} = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

Следовательно, $S = 9 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 9.$

Площадь S можно найти иначе, определив ее дифференциал ds как площадь прямоугольника, у которого высота есть разность



Черт. 91



Черт. 92

ординат данных парабол, а основание dx, черт. 91:

$$ds = (y_1 - y_2)\,dx = [(4 - x^2) - (x^2 - 2x)]\,dx = (4 + 2x - 2x^2)\,dx.$$

Отсюда $S = \int_{-1}^{2} (4 + 2x - 2x^2)\,dx = 4x + x^2 - \frac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^{2} = 9.$

3) Находим три точки пересечения данных парабол: $O(0,\ 0)$, $A(0;\ -4)$, $B(0;\ 4)$, затем строим эти точки и параболы, черт. 92.

Искомая площадь S состоит из двух одинаковых частей; половину ее можно найти как разность площадей криволинейных трапеций OCB и ODB, прилежащих к оси Oy. Согласно формуле (2) имеем

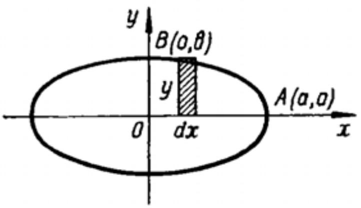
$$S_{OCB}=\int_4^0 x_1\,dy=\frac{1}{6}\int_4^0 (y^3-16y)\,dy;$$

$$S_{ODB}=\int_4^0 x_2\,dy=\frac{1}{24}\int_4^0 (y^3-16y)\,dy;$$

$$S=2(S_{OCB}-S_{ODB})=2\int_4^0 (x_1-x_2)\,dy=\frac{1}{4}\int_4^0 (y^3-16y)\,dy=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{y^4}{4}-8y^2\right)\Bigg|_4^0=\frac{1}{4}(-64+128)=16.$$

4) Оси координат совпадают с осями симметрии данного эллипса (черт. 93), и поэтому они делят его на четыре одинаковые части. Четвертую часть искомой площади S, расположенную в первом квадранте, найдем как площадь криволинейной трапеции, прилежащей к оси Ox:



Черт. 93

$$\frac{1}{4}S=\int_0^a y\,dx.$$

Пользуясь данными параметрическими уравнениями эллипса, преобразуем интеграл к переменной t; $y=b\sin t$, $dx=-a\sin t\,dt$; когда $x=0$, то $t=\frac{\pi}{2}$; когда $x=a$, то $t=0$;

$$S=4\int_0^a y\,dx=-4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t\,dt=$$

$$=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\,dt=2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab.$$

Отсюда при $a=b$ получается формула для площади круга: $S=\pi a^2$.

5) Кардиоида симметрична относительно полярной оси (черт. 94). Поэтому искомая площадь равна удвоенной площади

криволинейного сектора OAB. Дуга ABO описывается концом полярного радиуса ρ при изменении полярного угла φ от 0 до π.

Поэтому согласно формуле (3)

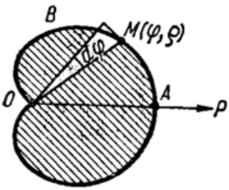
$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi \rho^2\,d\varphi=a^2\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi=$$

$$=a^2\int_0^\pi(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi=$$

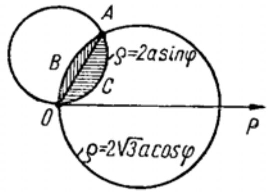
$$=a^2\left[\int d\varphi+2\int\cos\varphi\,d\varphi+\frac{1}{2}\int(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi\right]\Big|_0^\pi=$$

$$=a^2\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^\pi=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

6) Решив совместно данные уравнения, найдем точку пересечения окружностей $A\left(\frac{\pi}{3},\ a\sqrt{3}\right)$. Построив окружности,



Черт. 94



Черт. 95

черт. 95, видим, что искомая площадь S равна сумме площадей криволинейных секторов OBA и OCA.

Дуга ABO описывается концом полярного радиуса ρ большей окружности при изменении полярного угла φ от $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$S_{OBA}=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^2\,d\varphi=6a^2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi=3a^2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=3a^2\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=3a^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Дуга OCA описывается концом полярного радиуса ρ меньшей окружности при изменении полярного угла от 0 до $\frac{\pi}{3}$, поэтому

$$S_{OCA}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\rho^2\,d\varphi=2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\varphi\,d\varphi=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=a^2\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=a^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Следовательно, $S=S_{OBA}+S_{OCA}=a^2\left(\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)\approx 0{,}89.$

Найти площадь, ограниченную линиями:

605. Параболой $y=6x-x^2$ и осью Ox.

606. Полукубической параболой $y^2=x^3$ и прямыми $x=0$, $y=4$.

607. Астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

608. Одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью Ox.

609. Параболой $y=x^2+4x$ и прямой $x-y+4=0$.

610. Цепной линией $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ и прямыми $x=0$, $x=a$.

611. Гиперболой $xy=6$ и прямой $y=7-x$.

612. Кубической параболой $y=x^3$ и прямыми $y=x$, $y=2x$.

613. Окружностью $x^2+y^2=4x$ и параболой $y^2=2x$.

614. Лемнискатой $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

615. Первым завитком спирали Архимеда $\rho=a\varphi$ и полярной осью.

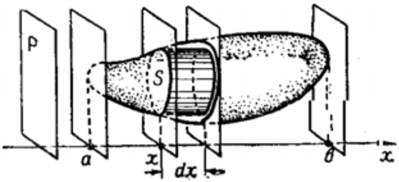
616. Трехлепестковой розой $\rho=a\cos 3\varphi$.

617. Кардиоидой $\rho=a(1-\cos\varphi)$ и окружностью $\rho=a$.

618*. Эллипсами $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

§ 4. Объем тела по площадям его параллельных сечений

Если известна площадь $S(x)$ любого сечения тела плоскостью, параллельной некоторой плоскости P, где x — расстояние сечения от плоскости P, черт. 96, то при изменении x на величину dx дифференциал объема тела равен объему прямого цилиндра с высотой dx и площадью основания $S(x)$, т. е. $dv=S(x)\,dx$, а объем всего тела выражается интегралом,



Черт. 96

$$V=\int\limits_a^b S(x)\,dx, \qquad (*)$$

где a и b — левая и правая границы изменения x.

619. Найти объем части цилиндра, отсеченной плоскостью, которая проходит через диаметр $2R$ его основания под углом α к плоскости основания.

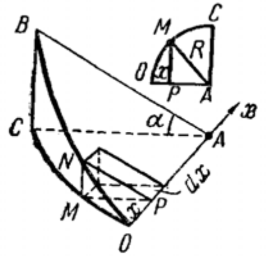
Решение. Изобразив половину данного тела, черт. 97, замечаем, что всякое сечение его плоскостью, параллельной плоскости ABC, представляет прямоугольный треугольник.

Найдем площадь сечения, отстоящего от точки O на расстоянии $OP=x$. Из прямоугольного треугольника AMP имеем $MP^2=R^2-(R-x)^2$. Из прямоугольного треугольника PNM имеем $MN=MP\operatorname{tg}\alpha$.

Площадь сечения $S(x)$, как прямоугольного треугольника с катетами MP и MN:

$$S(x)=\frac{1}{2}MP\cdot MN=\frac{1}{2}MP^2\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}[R^2-(R-x)^2]\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}(2Rx-x^2)\operatorname{tg}\alpha.$$



Черт. 97

При изменении x на величину dx объем v изменится на величину Δv, эквивалентную объему прямого цилиндра (призмы) с высотой dx и площадью основания $S(x)$:

$$\Delta v\approx dv=S(x)\,dx=\frac{1}{2}(2Rx-x^2)\operatorname{tg}\alpha\,dx.$$

Всему искомому объему соответствует изменение x от 0 до $2R$, поэтому

$$V=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\int\limits_0^{2R}(2Rx-x^2)\,dx=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\left(Rx^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{2R}=\frac{2}{3}R^3\operatorname{tg}\alpha.$$

620. Найти объем трехосного эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Решение. Плоское сечение эллипсоида, параллельное плоскости xOz и отстоящее от нее на расстоянии $y=h$, черт. 98, представляет эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2},\quad \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{z^2}{c_1^2}=1,$$

с полуосями

$$a_1=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2}\ \text{ и }\ c_1=\frac{c}{b}\sqrt{b^2-h^2}.$$

Площадь этого сечения, как площадь эллипса, найдем по формуле, полученной в решении задачи 604 (4),

$$S(h)=\pi a_1c_1=\frac{\pi ac}{b^2}(b^2-h^2).$$

Подставляя в формулу (*), получим объем всего эллипсоида

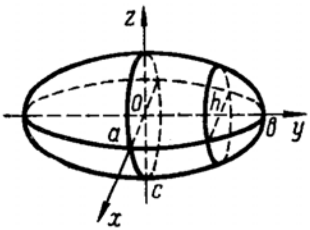
$$V=\frac{2\pi ac}{b^2}\int_0^b (b^2-h^2)\,dh=\frac{2\pi ac}{b^2}\left(b^2h-\frac{h^3}{3}\right)\Big|_0^b=\frac{4}{3}\pi abc.$$

При $a=b=c$ полученная формула для объема эллипсоида преобразуется в формулу для объема шара $V=\frac{4}{3}\pi a^3$.

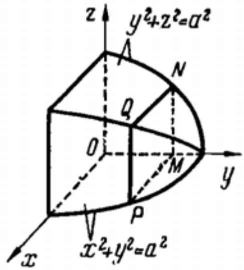
621. Найти объем, общий двум цилиндрам: $x^2+y^2=a^2$ и $y^2+z^2=a^2$ (ограниченный данными цилиндрическими поверхностями).

Решение. Построим восьмую часть тела, расположенную в первом октанте, черт. 99.

Любое сечение тела плоскостью, параллельной плоскости xOz, представляет квадрат. Площадь сечения $PQNM$, отстоящего от



Черт. 98



Черт. 99

плоскости xOz на расстоянии $OM=h$, найдем как площадь квадрата со стороной

$$MP=MN=\sqrt{a^2-h^2};$$

$$S(h)=a^2-h^2, \quad 0\leqslant h\leqslant a.$$

Весь искомый объем, согласно формуле (*), выразится интегралом

$$V=8\int_0^a (a^2-h^2)\,dh=8\left(a^2h-\frac{h^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{16}{3}a^3.$$

622. Найти объем тела, отсекаемого от эллиптического параболоида $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ плоскостью $z=k \quad (k>0)$.

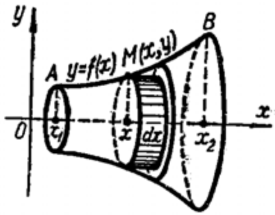
623. Найти объем, общий двум эллиптическим цилиндрам $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$.

624*. Найти объем тела, ограниченного параболическим цилиндром $z=4-y^2$, плоскостями координат и плоскостью $x=a$.

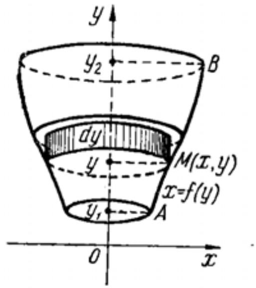
§ 5. Объем тела вращения

Если тело образуется при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции x_1ABx_2 (черт. 100), то любое его плоское сечение, перпендикулярное к оси Ox, будет круг, радиус которого равен соответствующей ординате кривой $y=f(x)$.

Площадь сечения $S(x)$, соответствующего абсциссе x, как площадь круга, равна πy^2.



Черт. 100



Черт. 101

Дифференциал объема тела, соответствующий приращению dx, будет $dv=\pi y^2dx$, а весь объем тела вращения определяется формулой

$$V=\pi\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx \quad (x_1<x_2). \tag{A}$$

Если тело образуется при вращении вокруг оси Oy криволинейной трапеции y_1ABy_2, прилежащей к оси Oy, черт. 101, то $dv=\pi x^2\,dy$,

$$V=\pi\int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy \quad (y_1<y_2). \tag{B}$$

625. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

1) $y^2=2px,\ x=a$ вокруг оси Ox;

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси Oy;

3) $2y=x^2,\ 2x+2y-3=0$ вокруг оси Ox;

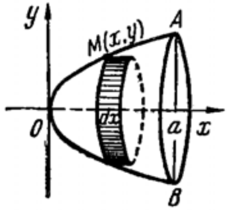
4) $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$ вокруг оси Ox;

5) $y=4-x^2,\ y=0$ вокруг прямой $x=3$.

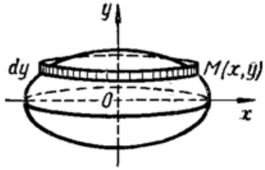
Решение. 1) Построив параболу $y^2=2px$ и прямую $x=a$, получим параболический сегмент OAB, черт. 102. При вращении его вокруг оси Ox образуется сегмент параболоида вращения. Объем этого тела, согласно общим указаниям, найдем по формуле (A):

$$V=\pi\int\limits_{x_1}^{x_2} y^2\,dx=\pi\int\limits_0^a 2px\,dx=\pi px^2\Big|_0^a=\pi pa^2.$$

2) Если у данного эллипса $b<a$, то при вращении его вокруг малой оси получается сжатый эллипсоид вращения,



Черт. 102



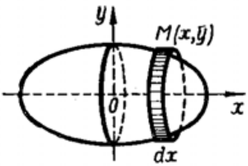
Черт. 103

черт. 103. Вычислим объем V_1 этого тела по формуле (B):

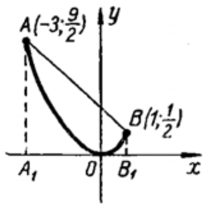
$$V_1=\pi\int\limits_{y_1}^{y_2} x^2\,dy=\pi a^2\int\limits_{-b}^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=2\pi a^2\left(y-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Big|_0^b=\frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

При вращении эллипса вокруг его большой оси получается удлиненный эллипсоид вращения, черт. 104, объем которого $V_2=\frac{4}{3}\pi ab^2$. Очевидно, $V_1>V_2$.

3) Ограниченная данными линиями фигура OAB, черт. 105, при вращении вокруг оси Ox образует тело, объем которого



Черт. 104



Черт. 105

можно найти как разность объемов тел, образованных вращением вокруг оси Ox трапеций A_1ABB_1 и A_1AOBB_1.

Объем V_1, образованный вращением трапеции A_1ABB_1, можно найти по формуле (A):

$$V_1=\pi\int\limits_{x_1}^{x_2} y^2\,dx=\pi\int\limits_{-3}^{1}(1{,}5-x)^2\,dx=$$

$$=\pi\int\limits_{-3}^{1}(x-1{,}5)^2 d(x-1{,}5)=\frac{\pi(x-1{,}5)^3}{3}\Bigg|_{-3}^{1}=\frac{91}{3}\pi$$

или как объем усеченного конуса по формуле элементарной геометрии.

Объем V_2, образованный вращением криволинейной трапеции A_1AOBB_1, найдем по формуле (А):

$$V_2=\frac{\pi}{4}\int_{-3}^{1} x^4 dx=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_{-3}^{1}=\frac{\pi}{20}(1+243)=\frac{61}{5}\pi.$$

Искомый объем $V=V_1-V_2=18\frac{2}{15}\pi$.

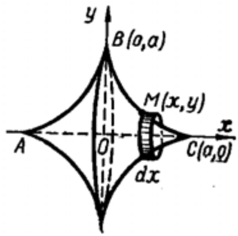
4) Фигура, ограниченная астроидой, черт. 106, при вращении вокруг оси Ox образует тело вращения, объем которого определяется формулой (А):

$$V=\pi\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx=\pi\int_{-a}^{a} y^2\,dx=2\pi\int_{0}^{a} y^2\,dx.$$

Исходя из данных параметрических уравнений астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, преобразуем последний интеграл к переменной t: $y^2=a^2\sin^6 t$; $dx=-3a\cos^2 t\sin t\,dt$;

$t=\frac{\pi}{2}$ при $x=0$; $t=0$ при $x=a$;

$$V=2\pi\int_{0}^{a} y^2\,dx=-6a^3\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^6 t\cos^2 t\sin t\,dt.$$



Черт. 106

Далее тождественно преобразуем подынтегральное выражение и, применяя формулу интегрирования степени, получим

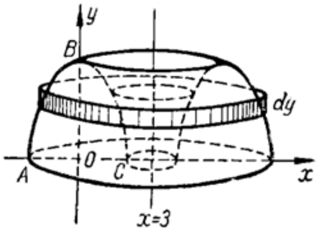
$$V=6a^3\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos^2 t)^3\cos^2 t\,(-\sin t)\,dt=$$

$$=6a^3\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\cos^2 t-3\cos^4 t+3\cos^6 t-\cos^8 t)\,d\cos t=$$

$$=6a^3\pi\left(\frac{1}{3}\cos^3 t-\frac{3}{5}\cos^5 t+\frac{3}{7}\cos^7 t-\frac{1}{9}\cos^9 t\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

5) Параболический сегмент ABC, ограниченный параболой $y=4-x^2$ и осью Ox, черт. 107, при вращении вокруг прямой $x=3$ образует тело, любое сечение которого плоскостью, перпендикулярной к оси вращения, представляет круговое кольцо,

ограниченное концентрическими окружностями. Площадь такого сечения, отстоящего от начала координат на расстоянии y, $S=\pi R^2-\pi r^2=\pi[(3+x)^2-(3-x)^2]=12\pi x=12\pi\sqrt{4-y}$, так как x есть абсцисса точки, лежащей на данной параболе, т. е. $x=\sqrt{4-y}$.



Черт. 107

При изменении y на величину dy дифференциал объема тела будет $dv=S(y)\,dy=12\pi\sqrt{4-y}\,dy$.

Весь искомый объем получается при изменении y от 0 до 4. Поэтому, интегрируя dv в этих пределах, получим

$$V=12\pi\int_0^4\sqrt{4-y}\,dy=$$

$$=-12\pi\int_0^4(4-y)^{\frac{1}{2}}d(4-y)=8\pi(4-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_4^0=64\pi.$$

Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

626. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=0$, $y=b$ вокруг оси Oy.

627. $y=\sin x$ (одной волной), $y=0$ вокруг оси Ox.

628. $y^2+x-4=0$, $x=0$ вокруг оси Oy.

629. $xy=4$, $y=0$, $x=1$, $x=4$ вокруг оси Ox.

630. $y^2=(x+4)^3$, $x=0$ вокруг оси Oy.

631*. $y=x^2$, $y=4$ вокруг прямой $x=-2$.

632. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$ вокруг оси Oy.

633*. Найти объем тора, образованного вращением круга $x^2+(y-b)^2\leqslant a^2$ $(a<b)$ вокруг оси Ox.

634. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью Ox.

§ 6. Длина дуги плоской кривой

Если плоская кривая отнесена к прямоугольной системе координат и задана уравнением $y=f(x)$, или $x=F(y)$ или параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то дифференциал dl длины ее дуги, черт. 108, выражается формулой

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+(x')^2}\,dy=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt,$$

а длина дуги AB определяется формулой

$$L_{AB}=\int\limits_{(A)}^{(B)} dl=\int\limits_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int\limits_{y_A}^{y_B}\sqrt{1+(x')^2}\,dy=$$

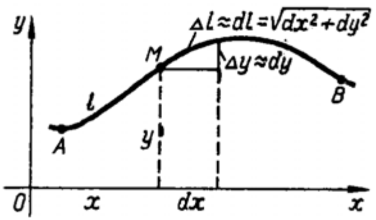
$$=\int\limits_{t_A}^{t_B}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt. \qquad (1)$$

$$(x_A<x_B;\ y_A<y_B;\ t_A<t_B).$$

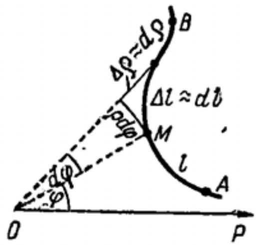
Если плоская кривая отнесена к полярной системе координат и задана уравнением $\rho=f(\varphi)$ (черт. 109), то $dl=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi$,

$$L_{AB}=\int\limits_{(A)}^{(B)} dl=\int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi. \ (\varphi_A<\varphi_B). \qquad (2)$$

635. Вычислить длину дуги: 1) полукубической параболы $y^2=(x-1)^3$ между точками $A(2;\ -1)$ и $B(5;\ -8)$; 2) одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$; 3) кривой $\rho=a\cos^3\frac{\varphi}{3}$.



Черт. 108



Черт. 109

Решение. 1) Разрешаем данное уравнение относительно y и находим y':

$$y=\pm(x-1)^{\frac{3}{2}};\quad y'=\pm\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}.$$

(Знаки $\pm$ в выражении y указывают, что кривая симметрична оси Ox; точки A и B, имеющие отрицательные ординаты, лежат на той ветви кривой, которая расположена ниже оси Ox.)

Подставляя в формулу (1), получим

$$L_{AB}=\int\limits_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int\limits_{2}^{5}\sqrt{1+\frac{9}{4}(x-1)}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{5}\sqrt{9x-5}\,dx=$$

$$=\frac{1}{18}\int\limits_{2}^{5}(9x-5)^{\frac{1}{2}}\,d(9x-5)=\frac{1}{27}(9x-5)^{\frac{3}{2}}\Big|_{2}^{5}\approx 7{,}63.$$

2) Дифференцируем по t параметрические уравнения циклоиды

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=a\,(1-\cos t);\ \ \dot{y}=\frac{dy}{dt}=a\sin t$$

и находим дифференциал ее дуги

$$dl=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$

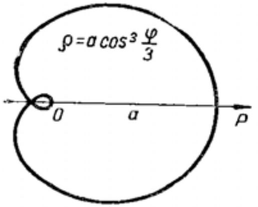
$$=a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\sin\frac{t}{2}\,dt.$$

Одна арка циклоиды (черт. 83) получается при изменении параметра t от 0 до 2π, поэтому

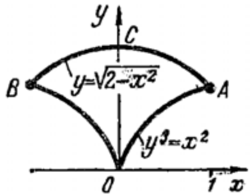
$$L=2a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=4a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,d\,\frac{t}{2}=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a.$$

3) Из данного уравнения кривой $\rho=\cos^3\frac{\varphi}{3}$ находим производную $\rho'=\frac{d\rho}{d\varphi}=-a\cos^2\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3}$ и дифференциал ее дуги

$$dl=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi=\sqrt{a^2\cos^6\frac{\varphi}{3}+a^2\cos^4\frac{\varphi}{3}\sin^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi=a\cos^2\frac{\varphi}{3}d\varphi.$$



Черт. 110



Черт. 111

Половина этой кривой, черт. 110, описывается концом полярного радиуса при изменении φ от 0 до $\frac{3}{2}\pi$. Поэтому согласно формуле (2) длина всей кривой

$$L=2a\int\limits_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=a\int\limits_0^{\frac{3}{2}\pi}\left(1+\cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi=$$

$$=a\left(\varphi+\frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi}=\frac{3}{2}a\pi.$$

636. Найти периметр фигуры, ограниченной кривыми $y^3=x^2$ и $y=\sqrt{2-x^2}$.

Решение. Совместно решая уравнения кривых, определим две точки их пересечения $A\,(1;\,1)$ и $B\,(-1;\,1)$. Построив эти точки и проходящие через них данные кривые, получим фигуру, симметричную оси Oy (черт. 111). Периметр этой фигуры $L= 2(L_{\smile OA} + L_{\smile AC})$.

Пользуясь формулой (1), найдем:

$$L_{\smile OA} = \int_{y_O}^{y_A} \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}y}\, dy =$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^1 \left(1+\frac{9}{4}y\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1+\frac{9}{4}y\right) = \frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}y\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1\right);$$

$$L_{\smile AC} = \int_{x_C}^{x_A} \sqrt{1+(y')^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{x^2}{2-x^2}}\, dx = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} =$$

$$= \sqrt{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

(Это восьмая часть длины окружности, радиус которой $\sqrt{2}$.)

Следовательно, искомый периметр фигуры

$$L = 2\left(\frac{13\sqrt{13}-8}{27} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right) \approx 5{,}102.$$

Вычислить длину дуги кривой:

637. $9y^2 = 4(3-x)^3$ между точками пересечения с осью Oy.

638. Астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

639. Цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ между прямыми $x = -a$ и $x = 0$.

640. $2y = x^2 - 2$ между точками пересечения с осью Ox.

641*. $y = \ln x$ между прямыми $x = \sqrt{3}$ и $x = \sqrt{8}$.

642. Кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

643. Первого завитка спирали Архимеда $\rho = a\varphi$.

644*. Эволюты эллипса $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t$.

645. Найти периметр фигуры, ограниченной линиями:
1) $x^2 = (y+1)^3$ и $y = 4$; 2) $y^2 = 2px$ и $2x = p$.

§ 7. Площадь поверхности вращения

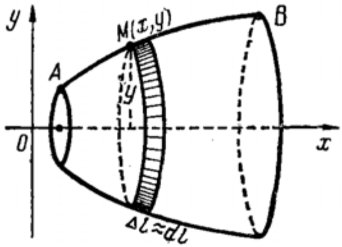
Если поверхность образуется при вращении дуги AM плоской кривой вокруг оси Ox (черт. 112), то дифференциал площади этой поверхности равен площади боковой поверхности усеченного круглого конуса с образующей dl и радиусами оснований y и $y+dy$:

$$ds=\frac{2\pi y+2\pi(y+dy)}{2}dl=\pi(2y+dy)\,dl\approx 2\pi y\,dl,$$

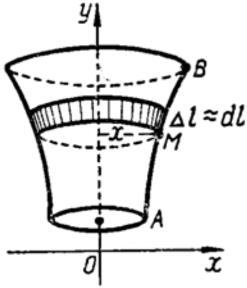
а площадь поверхности, образованной вращением дуги AB, определяется формулой

$$S=\int\limits_{(A)}^{(B)}ds=2\pi\int\limits_{(A)}^{(B)}y\,dl, \tag{1}$$

где (A) и (B) обозначают значения в точках A и B выбранной переменной интегрирования, dl — дифференциал дуги кривой.



Черт. 112

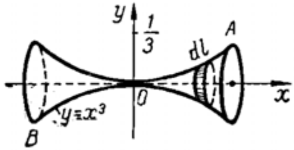


Черт. 113

При вращении дуги AB кривой вокруг оси Oy (черт. 113)

$$ds\approx 2\pi x\,dl;\quad S=\int\limits_{(A)}^{(B)}ds=2\pi\int\limits_{(A)}^{(B)}x\,dl. \tag{2}$$

646. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox: 1) дуги кубической параболы $y=x^3$, заключенной между прямыми $x=-\frac{2}{3}$ и $x=\frac{2}{3}$; 2) астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$; 3) эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$.



Черт. 114

Решение. 1) Построив дугу параболы между точками $A\left(\frac{2}{3};\frac{8}{27}\right)$ и $B\left(-\frac{2}{3};-\frac{8}{27}\right)$ (черт. 114), замечаем, что поверхность, образуемая вращением этой дуги вокруг оси Ox, состоит из двух одинаковых частей. Поэтому и согласно формуле (1), имеем

$$S=2\cdot 2\pi\int\limits_0^{\frac{2}{3}}y\sqrt{1+(y')^2}\,dx=4\pi\int\limits_0^{\frac{2}{3}}x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx.$$

Для вычисления интеграла полагаем $1+9x^4=z$, тогда $36x^3\,dx=dz$; $z_1=1$ при $x=0$; $z_2=\frac{25}{9}$ при $x=\frac{2}{3}$;

$$S=4\pi\int\limits_1^{\frac{25}{9}}\sqrt{t}\,\frac{dt}{36}=\frac{\pi}{9}\int\limits_1^{\frac{25}{9}}t^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{\pi}{9}\cdot\frac{2}{3}\,t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{\frac{25}{9}}=\frac{2\pi}{27}\left(\frac{125}{27}-1\right)\approx 0{,}845.$$

2) Применяя формулу (1), преобразуя ее к переменной t, исходя из уравнений астроиды, получим

$$S=2\cdot 2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=$$

$$=4\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin^3 t\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt=$$

$$=12a^2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,dt=12a^2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,d\sin t=$$

$$=\frac{12}{5}a^2\pi\sin^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

(Четвертая часть астроиды, расположенная в первом квадранте (черт. 106) получается при изменении t от 0 до $\frac{\pi}{2}$.)

3) Дифференцируя по x обе части уравнения эллипса $\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0$, $yy'=-\frac{b^2x}{a^2}$ и подставляя в формулу (1), находим

$$S=2\pi\int\limits_{-a}^{a}y\sqrt{1+(y')^2}\,dx=4\pi\int\limits_0^a\sqrt{y^2+(yy')^2}\,dx=$$

$$=4\pi\int\limits_0^a\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}+\frac{b^4x^2}{a^4}}\,dx=\frac{4\pi b}{a}\int\limits_0^a\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}\,dx=$$

$$=\frac{4\pi b}{a}\int\limits_0^a\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx,$$

где $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{c}{a}$ — эксцентриситет эллипса.

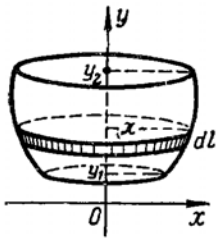
Полагая $\varepsilon x = a \sin t$, получим $\varepsilon\, dx = a \cos t\, dt$; $t_1 = 0$ при $x = 0$; $t_2 = \arcsin \varepsilon$ при $x = a$;

$$S = \frac{4\pi b}{a} \int_0^{t_2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\, \frac{a}{\varepsilon} \cos t\, dt = \frac{4\pi ab}{\varepsilon} \int_0^{t_2} \cos^2 t\, dt =$$

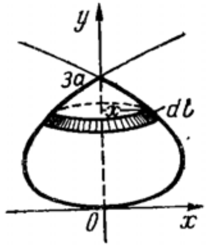
$$= \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \int_0^{t_2} (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{t_2} = 2\pi b \left(b + \frac{a}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon \right).$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ получается площадь поверхности шара $S = 4\pi a^2$.

647. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy: 1) дуги окружности $x^2 + (y-b)^2 = R^2$ между ее точками, где $y = y_1$ и $y = y_2$; 2) петли кривой $9ax^2 = y(3a-y)^2$.



Черт. 115



Черт. 116

Решение. 1) Если дуга данной окружности не пересекает оси Oy (своего диаметра), то при вращении ее вокруг этой оси образуется поверхность, называемая сферическим поясом (черт. 115). Дифференцируя по y обе части уравнения окружности $2xx' + 2(y-b) = 0$, $xx' = -(y-b)$ и подставляя в формулу (2), получим

$$S = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x \sqrt{1 + (x')^2}\, dy = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{x^2 + (xx')^2}\, dy =$$

$$= 2\pi \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{R^2 - (y-b)^2 + (y-b)^2}\, dy =$$

$$= 2\pi R \int_{y_1}^{y_2} dy = 2\pi R (y_2 - y_1) = 2\pi RH,$$

где H — высота пояса. При $H = 2R$ получим формулу площади сферы $S = 4\pi R^2$.

2) Петля данной кривой (черт. 116) описывается текущей точкой при изменении y от 0 до $3a$. Поэтому, дифференцируя по y

обе части ее уравнения: $18axx' = (3a-y)^2 - 2y(3a-y) = 3(3a-y)(a-y)$, $xx' = \frac{(3a-y)(a-y)}{6a}$ и подставляя в формулу (2), получим

$$S = 2\pi \int_0^{3a} \sqrt{x^2 + (xx')^2}\, dy = 2\pi \int_0^{3a} \sqrt{\frac{y(3a-y)^2}{9a} + \frac{(3a-y)^2(a-y)^2}{36a^2}}\, dy =$$

$$= 2\pi \int_0^{3a} \frac{3a-y}{6a} \sqrt{a^2 + 2ay + y^2}\, dy = \frac{\pi}{3a} \int_0^{3a} (3a^2 + 2ay - y^2)\, dy = 3\pi a^2.$$

Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox:

648. Окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

649. Дуги параболы $y^2 = 2x$ между точками пересечения с прямой $2x = 3$.

650. Одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

651. Одной волны синусоиды $y = \sin x$.

Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy:

652. Дуги полукубической параболы $x = 4 - \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{t^3}{3}$ между точками пересечения с осями координат.

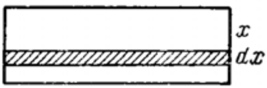
653. Эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$.

654. Найти площадь поверхности тора, образованного вращением окружности $x^2 + y^2 = a^2$ вокруг прямой $y = b$, $b > a$.

§ 8. Физические задачи

655. Определить давление воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 18 *м*, и высотой 6 *м*.

Решение. Величина p давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины ее погружения x, т. е. от расстояния площадки до поверхности жидкости: $p = \delta a x$; δ — удельный вес жидкости, a — площадь площадки.



Черт. 117

Руководствуясь общей схемой (II) применения определенного интеграла к вычислению величин, разделим шлюз на глубине x горизонтальной прямой (черт. 117). Тогда давление воды на верхнюю часть шлюза будет некоторой функцией $p(x)$. Найдем дифференциал dp этой функции, т. е. приближенную величину (главную часть) ее приращения Δp при изменении глубины x на малую величину dx.

Допустим, ввиду малости dx, что все точки заштрихованной полоски находятся на глубине x, т. е. что она расположена на глубине x в горизонтальной плоскости. Тогда приближенная величина давления воды на эту полоску будет равна весу столба воды, имеющего основанием эту полоску, и высотой — глубину x: $\Delta p \approx dp = 18\delta x\,dx = 18x\,dx$. (Удельный вес воды $\delta = 1$*.)

Согласно условию задачи глубина x изменяется на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 6$. Поэтому искомое давление P на весь шлюз найдем, интегрируя dp в пределах от 0 до 6:

$$P = 18\int_0^6 x\,dx = 9x^2\Big|_0^6 = 324T \approx 324000 \cdot 9{,}81\,н \approx 3178440\,н^{**} \approx 3{,}18\,Мн.$$

656. При условиях предыдущей задачи найти, на какой глубине $x = c$ надо разделить шлюз горизонтальной прямой, чтобы давление воды на верхнюю и нижнюю части шлюза было одинаково.

Решение. Определим давление воды на каждую часть шлюза, интегрируя dp в пределах от 0 до c и в пределах от c до 6, затем приравниваем интегралы друг другу:

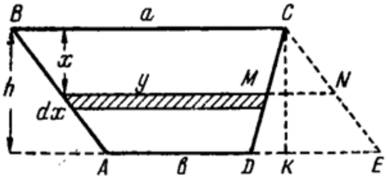
$$18\int_0^c x\,dx = 18\int_c^6 x\,dx; \qquad x^2\Big|_0^c = x^2\Big|_c^6; \quad c^2 = 36 - c^2.$$

Решая полученное уравнение, найдем $c = 3\sqrt{2} \approx 4{,}23$ *м*.

657. Определить давление воды на вертикальную плотину, имеющую форму трапеции, размеры которой указаны на черт. 118.

Решение. Допуская, что заштрихованная полоска расположена на глубине x в горизонтальной плоскости и что она является прямоугольником со сторонами y и dx, найдем приближенную величину давления воды на эту полоску $\Delta p \approx xy\,dx = dp$ и затем давление воды на всю плотину:

$$P = \int_0^h xy\,dx.$$



Черт. 118

Для вычисления интеграла выразим переменную y через переменную x. Проведя вспомогательную прямую CE параллельно BA, из подобия треугольников DCE и MCN имеем пропорцию

$$(a - b):(a - y) = h:x,$$

из которой находим $y = a - \frac{x}{h}(a - b)$.

---

* Здесь и далее удельный вес задается в $Г/см^3$.

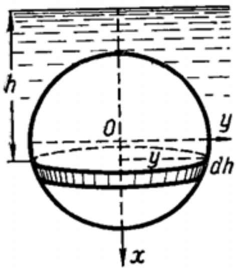
** *н* (*ньютон*) — единица силы (веса) в Международной системе единиц СИ; $1\,н \approx 0{,}102\,кГ$; $1\,кГ \approx 9{,}81\,н$.

Подставляя в подынтегральное выражение и интегрируя, получим

$$P=\int_0^h x\left[a-\frac{x}{h}(a-b)\right]dx=a\int x\,dx-\frac{a-b}{h}\int x^2\,dx\Big|_0^h=\frac{h^2(a+2b)}{6}.$$

658. Найти давление воды на поверхность шара диаметром **4** *м*, если его центр находится на глубине 3 *м* от поверхности воды.

Решение. Проведем через центр шара вертикальную плоскость и выберем на ней прямоугольную систему координат xOy, как показано на черт. 119.



Черт. 119

Рассечем шар на глубине h горизонтальной плоскостью. Тогда давление воды на отсеченную часть поверхности шара будет некоторой функцией $p(h)$.

При изменении h на величину dh площадь S отсеченной части поверхности шара, как площадь поверхности вращения вокруг оси Ox, изменится на величину $\Delta s\approx 2\pi y\,dl=ds$, где dl — дифференциал дуги окружности, а давление $p(h)$ изменится на величину $\Delta p\approx 2\pi hy\,dl=dp$.

Выразив dp через одну переменную x и интегрируя в пределах от $x=-2$ до $x=2$, найдем давление воды на всю поверхность шара. Из уравнения окружности $x^2+y^2=4$ найдем

$$y'=-\frac{x}{y}\quad\text{и затем}\quad dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx=\frac{2}{y}\,dx;$$ из

чертежа находим $h=3+x$. Следовательно,

$$P=2\pi\int_{-2}^{2}(3+x)\,y\,\frac{2}{y}\,dx=4\pi\int_{-2}^{2}(3+x)\,dx=2\pi(3+x)^2\Big|_{-2}^{2}=$$

$$=48\pi(T)\approx 470880\pi(н)\approx 0{,}471\pi(Мн).$$

Давление на верхнюю половину поверхности шара получим, интегрируя dp в пределах от -2 до 0:

$$P_1=2\pi(3+x)^2\Big|_{-2}^{0}=16\pi\,(T)\approx 156960\pi(н)\approx 0{,}157\pi(Мн).$$

Давление на нижнюю половину поверхности шара будет

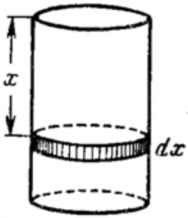
$$P_2=2\pi(3+x)^2\Big|_{0}^{2}=32\pi\,(T)\approx 313920\pi(н)\approx 0{,}314\pi(Мн).$$

659. Вычислить работу, необходимую для выкачивания масла из вертикального цилиндрического резервуара высотой $H=6$ *м* и радиусом основания $R=2$ *м*. Удельный вес масла $\delta=0{,}9$.

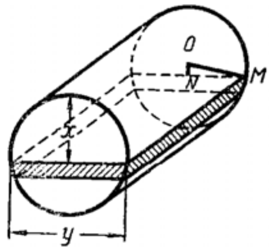
Решение. Величина работы q, затрачиваемой на поднятие некоторого тела, зависит от высоты x его подъема: $q=Px$, P — вес тела.

Допустим, что работа, затраченная на выкачивание из резервуара слоя масла толщиною x, черт. 120, есть некоторая функция $q(x)$ и найдем дифференциал этой функции.

При увеличении x на величину dx объем v слоя масла увеличится на величину $\Delta v=\pi R^2\,dx$, его вес p увеличится на величину $\Delta p=\pi\delta R^2\,dx$, а затраченная работа q увеличится на величину $\Delta q\approx\pi\delta R^2\,x\,dx=dq$.



Черт. 120



Черт. 121

Всю искомую работу Q получим при изменении x от 0 до H. Поэтому

$$Q=\pi\delta R^2\int\limits_0^H x\,dx=\pi\delta R^2\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^H=\frac{\pi\delta R^2H^2}{2}\approx 64800\pi\,(\kappa\Gamma\text{м})\approx$$

$$\approx 64800\cdot 9{,}81\pi\,(\text{дж})\approx 635688\pi\,(\text{дж}).^*$$

660. При условиях предыдущей задачи вычислить работу, необходимую для выкачивания масла из цилиндрического резервуара, если его ось имеет горизонтальное направление.

Решение. Как и в решении предыдущей задачи, полагаем, что работа, затрачиваемая на выкачивание из резервуара слоя масла толщиною x (черт. 121), есть некоторая функция $q(x)$ и найдем дифференциал этой функции.

При увеличении x на величину dx объем v слоя масла увеличится на величину $\Delta v\approx H\,y\,dx=dv$, его вес p увеличится на величину $\Delta p\approx\delta\,Hy\,dx=dp$, а затраченная работа q увеличится на величину $\Delta q\approx\delta\,Hyx\,dx=dq$.

Вся искомая работа Q выразится интегралом от dq в пре-

---

* *дж* (*джоуль*) — единица работы в Международной системе единиц СИ; 1 *дж* $\approx 0{,}102$ *кГм*; 1 *кГм* $\approx 9{,}81$ *дж*.

делах от $x=0$ до $x=2R$:

$$Q=\delta H\int_0^{2R} xy\,dx=2\delta H\int_0^{2R} x\sqrt{R^2-(x-R)^2}\,dx,$$

где переменная y выражена через переменную x из прямоугольного треугольника ONM.

Для вычисления этого интеграла полагаем $x-R=R\sin t$. Тогда $dx=R\cos t\,dt$; $t=-\frac{\pi}{2}$ при $x=0$; $t=\frac{\pi}{2}$ при $x=R$;

$$Q=2\delta H\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(R+R\sin t)R^2\cos^2 t\,dt=2\delta HR^3\left(\int\cos^2 t\,dt+\right.$$

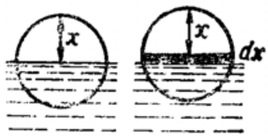
$$\left.+\int\cos^2 t\sin t\,dt\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\delta HR^3\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\pi\delta HR^3=43200\pi\,(\kappa\Gamma м)\approx 423792\pi\,(дж).$$

661. Шар лежит на дне бассейна глубиной $H=14\,дм$. Определить работу, необходимую для извлечения шара из воды, если его радиус $R=3\,дм$, а удельный вес $\delta=2$.

Решение. При подъеме шара до поверхности воды сила P_1, совершающая работу, постоянна и равна разности между весом шара и весом вытесняемой им воды:

$$P_1=\frac{4}{3}\pi R^3\delta-\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi R^3(\delta-1).$$



Черт. 122

Поэтому работа Q_1, необходимая для поднятия шара до поверхности воды, определяется элементарным путем как произведение силы P_1 на высоту подъема $H-2R$:

$$Q_1=P_1(H-2R)=\frac{4}{3}\pi R^3(\delta-1)(H-2R).$$

При дальнейшем подъеме шара сила p, совершающая работу, будет изменяться в зависимости от высоты x надводной части шара (черт. 122):

$$p(x)=P_ш-p_в,$$

где $P_ш$ — вес шара, $p_в$ — вес воды, вытесняемой подводной частью шара, численно равный объему шарового сегмента с высотой $h=2R-x$:

$$p_в=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)=\frac{\pi}{3}(2R-x)^2(R+x)=\frac{\pi}{3}(x^3-3Rx^2+4R^3).$$

Очевидно, и работа, совершаемая силой $p(x)$, будет некоторой функцией $q(x)$. Допуская, что при подъеме шара еще на малую высоту dx сила $p(x)$ остается неизменной, найдем приближенную величину приращения работы

$$\Delta q \approx p(x)\,dx = (P_ш - p_в)\,dx = \frac{\pi}{3}\left[4R^3(\delta-1) - x^3 + 3Rx^2\right]dx = dq.$$

Интегрируя dq в пределах от $x=0$ до $x=2R$, найдем работу Q_2, которую надо совершить, чтобы шар, поднятый со дна бассейна до поверхности воды, полностью извлечь из воды:

$$Q_2 = \frac{\pi}{3}\int_0^{2R}\left[4R^3(\delta-1) - x^3 + 3Rx^2\right]dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[4R^3(\delta-1)\,x - \frac{x^4}{4} + Rx^3\right]\Bigg|_0^{2R} = \frac{4}{3}\pi R^4(2\delta-1).$$

Вся искомая работа $Q = Q_1 + Q_2 = \frac{4}{3}\pi R^3\left[R + (\delta-1)H\right] =$ $= 61{,}2\pi$ (*кГм*) $\approx 600{,}4\pi$ (*дж*).

662. Определить работу, необходимую для запуска ракеты весом $P = 1{,}5$ *Т* с поверхности земли на высоту $H = 2000$ *км*.

Решение. Сила F притяжения тела землей или вес тела зависит от его расстояния x до центра земли: $F(x) = \frac{\lambda}{x^2}$, где λ — постоянная.

Если P есть вес тела, когда оно находится на поверхности земли, т. е. на расстоянии земного радиуса R от центра земли, то $P = \frac{\lambda}{R^2}$, $\lambda = PR^2$ и сила F, преодолеваемая двигателем поднимающейся ракеты в момент, когда она находится на расстоянии x от центра земли, является известной функцией от x:

$$F(x) = \frac{PR^2}{x^2}.$$

Полагая, что работа, совершаемая двигателем ракеты при подъеме ее на высоту x, есть некоторая функция $q(x)$ и допуская, что при дальнейшем подъеме ракеты на малую высоту dx сила F остается неизменной, найдем приближенную величину приращения работы

$$\Delta q \approx F(x)\,dx = \frac{PR^2}{x^2}\,dx = dq.$$

При подъеме ракеты с поверхности земли на высоту H переменная x изменяется от R до $R+H$. Поэтому искомая работа Q выражается интегралом

$$Q = \int_R^{R+H} F(x)\,dx = PR^2\int_R^{R+H}\frac{dx}{x^2} = PR^2\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_R^{R+H} = \frac{PRH}{R+H}.$$

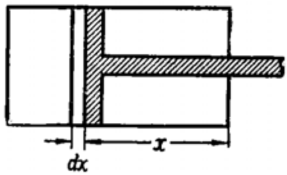
При $P=1{,}5T$, $H=2000$ *км*, $R=6400$ *км* $Q\approx 2285714\,000$ *кГм* $\approx$ $\approx 22\,422\,854\,340$ *дж*.

Работу, которую должен совершить двигатель, чтобы полностью освободить ракету от земного притяжения, можно определить как предел работы $Q(H)$ при неограниченном возрастании H:

$$\lim_{H\to\infty} Q(H)=\lim \frac{PRH}{R+H}=\lim\left[PR:\left(\frac{R}{H}+1\right)\right]=PR.$$

При указанных значениях P и R эта работа составит $9\,600\,000\,000$ *кГм* $\approx 94176\,000\,000$ *дж*.

663. Цилиндр высотой $H=1{,}5$ *м* и радиусом $R=0{,}4$ *м*, наполненный газом под атмосферным давлением ($10\,330$ *кГ/м*^{2}), закрыт поршнем. Определить работу, затрачиваемую на изотермическое сжатие газа при перемещении поршня на расстояние $h=1{,}2$ *м* внутрь цилиндра.



Черт. 123

Решение. При изотермическом изменении состояния газа, когда его температура остается неизменной, зависимость между объемом v и давлением p газа выражается формулой $pv=c=\mathrm{const}$. (Закон Бойля — Мариотта.)

Поэтому, если поршень будет вдвинут на x *м* внутрь цилиндра (черт. 123), то давление $p(x)$ газа на единицу площади поршня будет $p(x)=\frac{c}{v(x)}=\frac{c}{S\,(H-x)}$, а давление на всю площадь S поршня будет $P(x)=Sp(x)=\frac{c}{H-x}$.

Полагая, что работа, затрачиваемая при вдвижении поршня на x *м*, есть некоторая функция $q(x)$, и допуская, что при дальнейшем вдвижении поршня на малое расстояние dx испытываемое им давление $P(x)$ остается неизменным, найдем приближенную величину приращения (дифференциал) функции $q(x)$:

$$\Delta q\approx P(x)\,dx=\frac{c}{H-x}\,dx=dq.$$

Всей искомой работе Q соответствует изменение x от 0 до h, поэтому

$$Q=c\int_0^h \frac{dx}{H-x}=-c\ln(H-x)\Big|_0^h=c\ln\frac{H}{H-h}.$$

При $H=1{,}5$ *м*, $R=0{,}4$ *м*, $h=1{,}2$ *м*, $p_0=10\,330$ *кГ/м*^{2} найдем $v_0=\pi R^2H=0{,}24\pi$ *м*^{3}; $c=p_0v_0=2479{,}2\pi$; $Q\approx 12533{,}3$ *кГм* $\approx$ $\approx 122951{,}7$ *дж*.

664. При условиях предыдущей задачи определить работу адиабатического сжатия газа *, при котором его объем v и давление p связаны соотношением $pv^k = c = \text{const}$ (закон Пуассона), где k — постоянная для данного газа величина, большая единицы. (Для воздуха $k \approx 1{,}4$.)

Решение. Повторяя те же рассуждения и употребляя те же обозначения, как и в решении предыдущей задачи, найдем следующее выражение для дифференциала работы:

$$dq(x) = \frac{c\,dx}{S^{k-1}(H-x)^k}.$$

Интегрируя в пределах от $x=0$ до $x=h$, получим всю искомую работу

$$Q = \frac{c}{S^{k-1}} \int_0^h \frac{dx}{(H-x)^k} = \frac{c}{S^{k-1}} \int_h^0 (H-x)^{-k}\, d(H-x) =$$

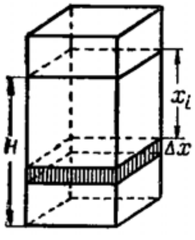
$$= \frac{c}{S^{k-1}} \frac{(H-x)^{1-k}}{1-k}\Bigg|_h^0 = \frac{p_0 v_0{}^k}{S^{k-1}(k-1)} \left[\frac{1}{(H-h)^{k-1}} - \frac{1}{H^{k-1}}\right] =$$

$$= \frac{p_0 v_0}{k-1} \left[\left(\frac{H}{H-h}\right)^{k-1} - 1\right].$$

Полагая $H = 1{,}5$ *м*, $k = 1{,}4$, найдем

$$Q \approx \frac{2479{,}2\,\pi}{0{,}4}\left[\left(\frac{1{,}5}{0{,}3}\right)^{0{,}4} - 1\right] \approx 17593{,}4\ \text{кГм} \approx 172591{,}3\ \text{дж}.$$

Сравнение этого результата с предыдущими показывает, что работа, затрачиваемая при адиабатическом сжатии газа, больше, чем при изотермическом.



Черт. 124

665. Прямоугольный резервуар с площадью горизонтального сечения $S = 6$ *м*² наполнен водой до высоты $H = 5$ *м*. Определить время, в течение которого вся вода вытечет из резервуара через небольшое отверстие в его дне площадью $s = 0{,}01$ *м*², если принять, что скорость истечения воды равна $0{,}6\sqrt{2gh}$, где h — высота уровня воды над отверстием, g — ускорение силы тяжести.

Решение. Согласно общей схеме (I) разобьем искомое время T на большое число n малых промежутков $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n$, и пусть за каждый такой промежуток уровень воды в резервуаре понижается на величину $\Delta x = \frac{H}{n}$ (черт. 124).

---

* В адиабатическом процессе температура газа меняется: при увеличении объема она понижается, а при уменьшении объема повышается.

Если допустить, что в течение каждого малого промежутка времени Δt_i скорость истечения воды через отверстие в дне остается постоянной, равной ее значению в начале промежутка $0{,}6\sqrt{2g(H-x_i)}$, то, приравняв объем воды, вытекшей с такой скоростью через отверстие в дне за промежуток Δt_i, объему опорожнившейся за этот же промежуток части резервуара, получим приближенное равенство

$$0{,}6s\sqrt{2g(H-x_i)}\,\Delta t_i \approx S\Delta x,$$

откуда

$$\Delta t_i \approx \frac{S\,\Delta x}{0{,}6s\sqrt{2g(H-x_i)}}.$$

Приближенное значение всего искомого времени T будет равно сумме

$$T=\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{S\,\Delta x}{0{,}6s\sqrt{2g(H-x_i)}}, \qquad (*)$$

где по условию задачи точки x_i заключены на отрезке $[0, H]$.

Убедившись, что с возрастанием n погрешность полученного приближенного значения T стремится к нулю, найдем точное значение T как предел интегральной суммы $(*)$ при $n \to +\infty$, т. е. как соответствующий определенный интеграл

$$T=\frac{S}{0{,}6s\sqrt{2g}}\int_0^H (H-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2S}{0{,}6s\sqrt{2g}}(H-x)^{\frac{1}{2}}\Big|_H^0=\frac{S}{0{,}6s}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Подставляя числовые значения параметров, получим $T \approx \approx 1010$ *сек* $\approx 16{,}83$ *мин*.

Если бы убыль воды в резервуаре постоянно возмещалась, т. е. если бы уровень воды в нем оставался неизменным, то и скорость истечения воды была бы постоянной, равной $0{,}6\sqrt{2gH}$. В этом случае в каждую секунду через отверстие в дне резервуара будет вытекать объем воды $0{,}6s\sqrt{2gH}$, равный объему прямого цилиндра с площадью основания s и высотой $0{,}6\sqrt{2gH}$. Поэтому при указанном предположении объем воды, вмещающейся в резервуаре, вытечет из него за время

$$T_1=\frac{SH}{0{,}6s\sqrt{2gH}}=\frac{1}{2}\,\frac{S}{0{,}6\,s}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Сопоставление этого результата с предыдущим показывает, что время истечения T, без возмещения убыли воды в резервуаре, в два раза больше времени истечения T_1, при постоянном возмещении убыли воды; $T=2T_1$.

666. При условиях предыдущей задачи определить, за какое время уровень воды в резервуаре изменится на h *м*, если сверху в него непрерывно будет протекать V *м*^{3} воды в секунду?

Решение. В этом случае за малый промежуток времени Δt объем воды в резервуаре изменится на величину

$$S\,\Delta x \approx [0{,}6s\sqrt{2g(H-x)}-V]\,\Delta t,$$

откуда

$$\Delta t \approx \frac{S\,\Delta x}{0{,}6s\sqrt{2g(H-x)}-V}=dt.$$

Интегрируя dt в пределах от $x=0$ до $x=h$, найдем искомое время T_2, за которое уровень воды в резервуаре изменится на h (*м*):

$$T_2=a\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{H-x}-b},$$

где

$$a=\frac{S}{0{,}6s\sqrt{2g}}, \qquad b=\frac{V}{0{,}6s\sqrt{2g}}.$$

Применяя подстановку $\sqrt{H-x}=z$, получим $dx=-2z\,dz$; $z_1=\sqrt{H}$ при $x=0$; $z_2=\sqrt{H-h}$ при $x=h$;

$$T_2=a\int_{z_1}^{z_2}\frac{-2z\,dz}{z-b}=2a\int_{z_2}^{z_1}\left(1+\frac{b}{z-b}\right)dz=2a\,(z+b\ln|z-b|)\Big|_{\sqrt{H-h}}^{\sqrt{H}}=$$

$$=2a\left(\sqrt{H}-\sqrt{H-h}+b\ln\left|\frac{\sqrt{H}-b}{\sqrt{H-h}-b}\right|\right).$$

Здесь изменение уровня воды в резервуаре может быть двояким.

Если в начальный момент при $h=0$ скорость притока воды V будет меньше скорости ее убывания из резервуара $0{,}6s\sqrt{2gH}$, то уровень воды будет понижаться до тех пор, пока эти скорости не станут одинаковыми. После этого вода будет оставаться на постоянном уровне, меньшем первоначального уровня H на величину h_1, определяемую из уравнения $0{,}6s\sqrt{2g(H-h_1)}=V$.

Если же в начале процесса $V>0{,}6s\sqrt{2gH}$, то уровень воды в резервуаре будет подниматься до тех пор, пока не превысит первоначальный уровень H на величину h_2, определяемую из уравнения

$$0{,}6s\sqrt{2g(H+h_2)}=V,$$

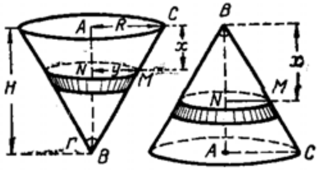
после чего уровень воды в резервуаре будет оставаться неизменным.

667. Два одинаковых сосуда имеют форму прямого круглого конуса с вертикальной осью; их расположение и размеры показаны на черт. 125. Оба сосуда наполнены водой и затем опорожняются через небольшие одинаковые круглые отверстия внизу.

Определить время опорожнения каждого сосуда и в какой момент времени вода в обоих сосудах будет на одном уровне, если их опорожнение началось одновременно.

Решение. Полагаем, что время t, за которое уровень воды в первом или во втором сосуде понизится на величину x, есть некоторая функция $t(x)$ и найдем ее дифференциал dt при изменении x на величину dx.

Пусть понижению уровня воды в сосуде на малую величину dx соответствует малое приращение времени Δt. Тогда, допуская, что в течение этого малого промежутка времени вода вытекает из сосуда с постоянной скоростью, равной $0{,}6\sqrt{2g(H-x)}$, найдем, что объем воды, вытекшей за время Δt через отверстие в дне площадью πr^2, будет $\Delta v \approx 0{,}6\pi r^2\sqrt{2g(H-x)}\,\Delta t$.



Черт. 125

За это же время Δt объем воды в сосуде уменьшится на величину $\Delta v_1 \approx \pi y^2\,dx$, которая должна быть равна объему вытекшей воды Δv. Отсюда, из равенства $\Delta v = \Delta v_1$, получим

$$\Delta t \approx \frac{y^2\,dx}{0{,}6r^2\sqrt{2g(H-x)}} = dt.$$

Время T полного опорожнения первого или второго сосуда получим, интегрируя dt в пределах от $x=0$ до $x=H$:

$$T = \frac{1}{0{,}6r^2\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{y^2\,dx}{\sqrt{H-x}}.$$

Для вычисления этого интеграла выразим переменную y через переменную x.

Из подобия треугольников ABC и NBM* имеем:

а) для первого сосуда $\frac{H}{R} = \frac{H-x}{y}$, $\quad y = \frac{R}{H}(H-x)$;

б) для второго сосуда $\frac{H}{R} = \frac{x}{y}$; $\quad y = \frac{R}{H}x$.

Поэтому время T_1 полного опорожнения первого сосуда будет

$$T_1 = \frac{R^2}{0{,}6r^2H^2\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{(H-x)^2}{\sqrt{H-x}}\,dx = \frac{R^2}{0{,}6r^2H^2\sqrt{2g}}\cdot\frac{2(H-x)^{\frac{5}{2}}}{5}\Bigg|_H^0 =$$

$$= \frac{2R^2}{3r^2}\sqrt{\frac{H}{2g}}.$$

---

* Здесь вследствие малости r по сравнению с другими размерами сосуда и для упрощения вычислений допускается, что осевое сечение сосуда представляет треугольник, а не трапецию.

Время T_2 полного опорожнения второго сосуда выражается интегралом

$$T_2 = \frac{R^2}{0,6r^2H^2\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{x^2}{\sqrt{H-x}}\,dx.$$

Вводя новую переменную $z = H - x$, имеем: $dx = -dz$; $z_1 = H$ при $x = 0$; $z_2 = 0$ при $x = H$;

$$\int_0^H \frac{x^2dx}{\sqrt{H-x}} = -\int_H^0 \frac{(H-z)^2}{\sqrt{z}}\,dz = \int_0^H \left(H^2z^{-\frac{1}{2}} - 2Hz^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{3}{2}}\right)dz = \frac{16}{15}H^{\frac{5}{2}}.$$

Подставляя найденное значение интеграла, получим $T_2 = \frac{16R^2}{9r^2}\sqrt{\frac{H}{2g}}$.

Сопоставив T_2 и T_1, взяв их отношение $\frac{T_2}{T_1} = \frac{8}{3}$, заключаем, что первый сосуд опорожняется значительно (почти в три раза) быстрее второго. При этом, если опорожнение сосудов начинается одновременно, то в начале процесса уровень воды в первом сосуде будет выше, чем во втором, затем наступит момент, когда уровни воды в обоих сосудах сравняются, после чего уровень воды в первом сосуде будет неизменно и все более ниже, чем во втором.

Для определения времени, спустя которое после начала одновременного опорожнения сосудов вода в них будет на одном уровне, найдем зависимость времени t истечения воды от величины x понижения ее уровня для каждого сосуда.

Интегрируя dt в пределах от $x = 0$ до $x = x$, получим:

а) для первого сосуда

$$t = b\int_0^x (H-x)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{5}b\,(H-x)^{\frac{5}{2}}\Big|_x^0 = \frac{2}{5}b\left[H^{\frac{5}{2}} - (H-x)^{\frac{5}{2}}\right],$$

где

$$b = \frac{R^2}{0,6r^2H^2\sqrt{2g}};$$

б) для второго сосуда

$$t = b\int_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{H-x}} = b\int_{H-x}^H \left(H^2z^{-\frac{1}{2}} - 2Hz^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{3}{2}}\right)dz =$$

$$= b\left(2H^2z^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}Hz^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_{H-x}^H =$$

$$= b\left\{2H^2\left[H^{\frac{1}{2}} - (H-x)^{\frac{1}{2}}\right] - \frac{4}{3}H\left[H^{\frac{3}{2}} - (H-x)^{\frac{3}{2}}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{5}\left[H^{\frac{5}{2}} - (H-x)^{\frac{5}{2}}\right]\right\}.$$

Рассматривая полученные зависимости t от x для первого и второго сосудов как уравнения с искомыми неизвестными t и x и решая их как систему (исключая t), найдем:

$$\frac{2}{5}\left[H^{\frac{5}{2}}-(H-x)^{\frac{5}{2}}\right]=2H^2\left[H^{\frac{1}{2}}-(H-x)^{\frac{1}{2}}\right]-$$

$$-\frac{4}{3}H\left[H^{\frac{3}{2}}-(H-x)^{\frac{3}{2}}\right]+\frac{2}{5}\left[H^{\frac{5}{2}}-(H-x)^{\frac{5}{2}}\right];$$

$$H\left[H^{\frac{1}{2}}-(H-x)^{\frac{1}{2}}\right]-\frac{2}{3}\left[H^{\frac{3}{2}}-(H-x)^{\frac{3}{2}}\right]=0;$$

$$\sqrt{H-x}\,(H+2x)=\sqrt{H^3};\quad 3H^2-4x^2=0;\quad x=\frac{H\sqrt{3}}{2}.$$

По найденному значению x из первого (или второго) уравнения определяем t:

$$t=\frac{2}{5}bH^{\frac{5}{2}}\left[1-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\right].$$

По истечении этого промежутка времени t после начала одновременного опорожнения обоих сосудов вода в них будет на одном уровне

$$h=H-x=H\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\approx 0,15H.$$

668. Определить массу шара радиуса r, если плотность в каждой его точке пропорциональна расстоянию ее от центра шара.

Решение. Пусть масса шара произвольного радиуса x есть некоторая функция $m(x)$.

При увеличении x на малую величину dx объем v этого шара увеличится на величину Δv, равную разности объемов шаров с радиусами x и $x+dx$:

$$\Delta v=\frac{4}{3}\pi\left[(x+dx)^3-x^3\right]=$$

$$=\frac{4}{3}\pi\left(3x^2dx+3x\,dx^2+dx^3\right)\approx 4\pi x^2\,dx=dv.$$

Допуская, что во всех точках малого объема dv плотность остается неизменной и равной kx, найдем приближенную величину его массы $dm=kx\,dv=4k\pi x^3\,dx$.

Искомую массу M шара радиуса r получим, интегрируя dm в пределах от $x=0$ до $x=r$:

$$M=4k\pi\int_0^r x^3\,dx=k\pi x^4\Big|_0^r=k\pi r^4.$$

669. Квадрат со стороною 8 *м* вертикально погружен в воду так, что одна из его сторон лежит на поверхности воды. Определить давление воды на весь квадрат и на каждую из частей, на которые он разделяется диагональю.

670. Цилиндрический резервуар с горизонтальной осью и радиусом 3 *дм* наполовину наполнен ртутью (удельный вес 13,6). Определить давление ртути на каждую из плоских вертикальных стенок резервуара.

671. Вычислить работу, необходимую для выкачивания воды из котла, имеющего форму полусферы с радиусом 2 *м*.

672. Цилиндрический сосуд объемом в 0,1 $м^3$ наполнен атмосферным воздухом, который, изотермически расширяясь, выталкивает поршень (в пустоту). Найти работу, совершаемую воздухом при увеличении его объема до 0,3; 0,4; 0,5 $м^3$. (Атм. давление 10330 $кГ/м^2$.)

673. При условиях предыдущей задачи найти работу адиабатического расширения воздуха.

674. Прямой круглый конус с вертикальной осью погружен в воду так, что его вершина находится на поверхности воды. Определить работу, необходимую для извлечения конуса из воды, если его высота 10 *дм*, диаметр основания 20 *дм*, а удельный вес 3.

675. Деревянная прямоугольная балка плавает в воде. Вычислить работу, необходимую для извлечения балки из воды, если известны ее размеры $a = 6$ *м*, $b = 0{,}3$ *м*, $c = 0{,}2$ *м* и удельный вес $\delta = 0{,}8$.

676. Зная, что растяжение (удлинение) пружины пропорционально растягивающей силе, найти работу, затрачиваемую при растяжении пружины на 4 *см*, если для удлинения ее на 1 *см* требуется сила 3 *кГ*.

677. Цилиндрическая цистерна с горизонтальной осью, имеющая высоту H и радиус основания R, заполнена водой.

Определить, за какое время через отверстие в дне площадью S опорожнится:

1) верхняя половина цистерны и 2) нижняя половина цистерны. *

678. Определить количество воды, протекающей за 1 секунду через прямоугольный водослив вертикальной плотины, если его глубина h, а ширина a*.

679. Определить массу прямого круглого конуса, высота которого равна H, а угол между высотой и образующей α, если плотность в каждой точке конуса пропорциональна расстоянию ее от плоскости, проходящей через его вершину параллельно основанию.

---

* См. указание к задаче 665.

§ 9. Координаты центра тяжести

Центром тяжести совокупности материальных точек называется центр параллельных сил тяжести, приложенных в этих точках.

Для материальной дуги AB плоской кривой прямоугольные координаты центра тяжести C определяются формулами

$$x_C = \frac{m_y}{m} = \frac{\int\limits_{(A)}^{(B)} \delta x\,dl}{\int\limits_{(A)}^{(B)} \delta\,dl}, \qquad y_C = \frac{m_x}{m} = \frac{\int\limits_{(A)}^{(B)} \delta y\,dl}{\int\limits_{(A)}^{(B)} \delta\,dl}, \tag{1}$$

где m — масса дуги AB; m_x и m_y — статические моменты этой дуги относительно осей Ox и Oy; $\delta(M)$ — линейная плотность распределения массы в точке $M(x, y)$ дуги; dl — дифференциал дуги; (A) и (B) обозначают значения выбранной переменной интегрирования в точках A и B.

Если материальная дуга является однородной, то формулы (1) упрощаются: постоянная δ выносится за знаки интегралов и сокращается.

Для материальной однородной криволинейной трапеции, прилежащей к оси Ox (см. черт. 87),

$$x_C = \frac{\int\limits_a^b xy\,dx}{\int\limits_a^b y\,dx}; \qquad y_C = \frac{\int\limits_a^b y^2\,dx}{2\int\limits_a^b y\,dx}. \tag{2}$$

Центр тяжести однородной материальной линии или фигуры, имеющей ось симметрии, лежит на этой оси.

680. Найти центр тяжести четверти окружности $x^2 + y^2 = a^2$, расположенной в первом квадранте, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна произведению координат точки.

Решение. Из уравнения окружности найдем y', затем dl:

$$2x + 2yy' = 0; \quad y' = -\frac{x}{y};$$

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\,dx = \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}}\,dx = \frac{a}{y}\,dx.$$

Далее вычислим интегралы, содержащиеся в формулах (1), полагая, согласно условию, $\delta = kxy$:

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} \delta x\,dl = \int\limits_0^a kxy \cdot x \cdot \frac{a}{y}\,dx = ka\int\limits_0^a x^2 dx = \frac{ka}{3}\,x^3\Big|_0^a = \frac{ka^4}{3},$$

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} \delta y\,dl = ka\int\limits_0^a xy\,dx = ka\int\limits_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx =$$

$$= \frac{ka}{2}\int\limits_a^0 (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} d\,(a^2 - x^2) = \frac{ka}{3}\,(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^0 = \frac{ka^4}{3},$$

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} \delta\,dl = ka\int\limits_0^a x\,dx = \frac{ka}{2}\,x^2\Big|_0^a = \frac{ka^3}{2}.$$

Подставляя значения интегралов в формулы (1), получим

$$x_C = y_C = \frac{2}{3}\,a.$$

Очевидно, найденная точка не лежит на данной дуге, а расположена ниже ее.

681. Найти центр тяжести однородной арки циклоиды

$$x = a\,(t - \sin t), \quad y = a\,(1 - \cos t), \quad \text{черт. } 126.$$

Решение. Данная однородная дуга симметрична относительно прямой $x = \pi a$. Поэтому центр тяжести дуги лежит на этой прямой, т. е. $x_C = \pi a$. Для определения y_C найдем дифференциал дуги циклоиды

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \sqrt{a^2\,(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\,dt = 2a \sin\frac{t}{2}\,dt$$

и вычислим интегралы, содержащиеся во второй из формул (1):

$$I_1 = \int\limits_{(A)}^{(B)} \delta y\,dl = 2\delta a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 2\delta a^2\left(\int \sin\frac{t}{2}\,dt - \int \cos t \sin\frac{t}{2}\,dt\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\delta a^2\left\{2\int \sin\frac{t}{2}\,d\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\int\left[\sin\frac{3}{2}t + \sin\left(-\frac{t}{2}\right)\right]dt\right\}\Big|_0^{2\pi} =$$

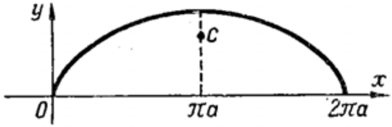
$$= 2\delta a^2\left(-3\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}t\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{32}{3}\,\delta a^2.$$

$$I_2 = \int\limits_{(A)}^{(B)} \delta\,dl = 2\delta a\int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = -4\delta a \cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8\delta a.$$

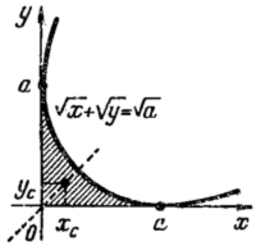
По формуле (1), $y_C = \frac{4}{3}\,a$.

682. Найти центр тяжести однородной фигуры (пластинки), ограниченной параболой $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ и осями координат.

Решение. Данная однородная фигура симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла (черт. 127), поэтому $x_C=y_C$.



Черт. 126



Черт. 127

Вычислим интегралы, содержащиеся в первой из формул (2):

$$I_1=\int_a^b xy\,dx=\int_0^a x\left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx=\int_0^a\left(ax-2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+x^2\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2}ax^2-\frac{4}{5}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^a=\frac{a^3}{30}.$$

$$I_2=\int_a^b y\,dx=\int_0^a\left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx=\int_0^a\left(a-2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+x\right)dx=\frac{a^2}{6}.$$

Следовательно, $x_C=y_C=\frac{I_1}{I_2}=\frac{a}{5}$.

683. Найти центр тяжести однородной дуги полуокружности $x^2+y^2=a^2$, расположенной под осью Ox.

684. Найти центр тяжести однородного полукруга $x^2+y^2\leqslant a^2$, расположенного над осью Ox.

685. Найти центр тяжести однородной фигуры, ограниченной дугой эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ и координатными осями, расположенной в первом квадранте.

686. Найти центр тяжести однородной фигуры, ограниченной параболами $x^2=20y$ и $y^2=20x$.

687. Найти центр тяжести однородной дуги астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, расположенной правее оси Oy.

688. Найти центр тяжести дуги астроиды, расположенной в первом квадранте, если линейная плотность в каждой ее точке пропорциональна абсциссе точки.

§ 10. Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами или от разрывных функций называются несобственными.

I. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования определяются посредством предельного перехода:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{\beta} f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\beta\to+\infty}\int_{c}^{\beta} f(x)\,dx, \tag{3}$$

где c — произвольное вещественное число.

II. Несобственные интегралы от функций с бесконечными разрывами также определяются посредством предельного перехода:

если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=c$, принадлежащий отрезку $[a, b]$, и непрерывна во всех других точках этого отрезка, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx, \tag{4}$$

где ε_1 и ε_2 изменяются независимо друг от друга.

Несобственные интегралы называются сходящимися или расходящимися, смотря по тому, существуют или нет определяющие их пределы соответствующих определенных (собственных) интегралов.

689. Найти следующие несобственные интегралы:

$$1)\int_0^{+\infty} e^{-x}dx;\quad 2)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1};\quad 3)\int_0^1\frac{dx}{x};\quad 4)\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Пояснить решение геометрически.

Решение. 1) Пользуясь равенством (1), имеем

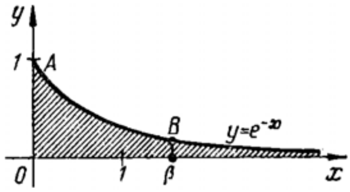
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta} e^{-x}dx = \lim(-e^{-x})\Big|_0^{\beta} = \lim(e^0 - e^{-\beta}) = 1.$$

Следовательно, данный несобственный интеграл сходится.

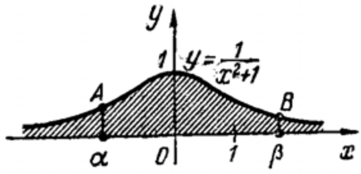
Геометрически, в прямоугольной системе координат, всякий определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *дает алгебраическую сумму площадей, ограниченных кривой* $y=f(x)$, *двумя вертикальными прямыми* $x=a$, $x=b$ *и осью* Ox. Поэтому, построив кривую $y=e^{-x}$ и ее ординаты в точках $x=0$ и $x=\beta$ (черт. 128), получим криволинейную трапецию $OAB\beta$, площадь которой

$$S(\beta)=\int_0^\beta e^{-x}\,dx=1-e^{-\beta}.$$

При $\beta\to+\infty$ получим трапецию с бесконечным основанием, которая имеет конечную площадь $S(+\infty)=\lim\limits_{\beta\to+\infty}S(\beta)=1$.



Черт. 128



Черт. 129

2) Пользуясь определением (3), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^0\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^\beta\frac{dx}{x^2+1}=\lim\operatorname{arc\,tg}x\Big|_\alpha^0+$$

$$+\lim\operatorname{arc\,tg}x\Big|_0^\beta=-\operatorname{arc\,tg}(-\infty)+\operatorname{arc\,tg}(+\infty)=$$

$$=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Геометрически (черт. 129) интеграл от функции $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ в пределах от α до β выражает площадь криволинейной трапеции $\alpha AB\beta$, а данный несобственный сходящийся интеграл выражает площадь бесконечной криволинейной трапеции, которая неограниченно простирается влево и вправо и вместе с тем имеет конечную величину π.

3) Здесь при $x=0$ подынтегральная функция $\frac{1}{x}$ имеет бесконечный разрыв. Согласно определению (4)

$$\int_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x}=\lim\ln x\Big|_\varepsilon^1=\lim(\ln 1-\ln\varepsilon)=-\ln 0=+\infty,$$

т. е. этот несобственный интеграл расходится.

Геометрически (черт. 130) полученный результат указывает, что площадь криволинейной трапеции εABb

$$S(\varepsilon)=\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}=-\ln\varepsilon$$

при $\varepsilon\to+0$ неограниченно возрастает.

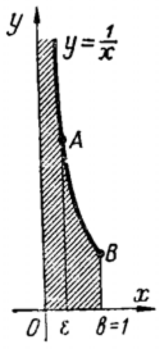
4) Здесь подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x=1$, лежащей внутри отрезка интегрирования $[-1;\ 2]$. Поэтому, согласно определению (4),

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-1}^{1-\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{1+\varepsilon_2}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=$$

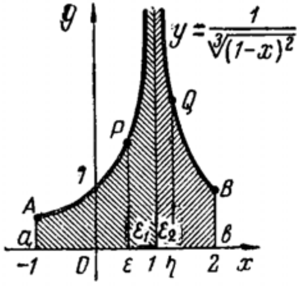
$$=\lim 3\sqrt[3]{x-1}\Big|_{-1}^{1-\varepsilon_1}+\lim 3\sqrt[3]{x-1}\Big|_{1+\varepsilon_2}^{2}=3\lim\left(\sqrt[3]{-\varepsilon_1}-\sqrt[3]{-2}\right)+$$

$$+3\lim\left(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{\varepsilon_2}\right)=3\left(\sqrt[3]{2}+1\right).$$

Для графика подынтегральной функции $y=\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ (черт. 131) прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой. Ин-



Черт. 130



Черт. 131

тегралы от этой функции в пределах от -1 до $1-\varepsilon_1$ и от $1+\varepsilon_2$ до 2 выражают площади криволинейных трапеций $aAP\varepsilon$ и ηQBb. При $\varepsilon_1\to+0$ и $\varepsilon_2\to+0$ эти трапеции неограниченно простираются вверх и вместе с тем имеют конечные площади, сумма которых равна найденному значению данного несобственного сходящегося интеграла.

690. Найти несобственные интегралы:

$$1)\ \int_{0}^{2}\frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}};\quad 2)\ \int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^3}\,dx.$$

Решение.

1) Преобразуем интеграл к новой переменной. Полагая $x=2\sin t$, получим: $dx=2\cos t\,dt$; $t=0$ при $x=0$; $t=\frac{\pi}{2}$ при $x=2$;

$$\int\limits_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t\cos t}{\cos t}dt=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\,dt=8\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos^2 t)\,d\cos t=$$

$$=8\left(\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{16}{3}.$$

Здесь *в результате замены переменной данный несобственный интеграл* (от функции, имеющей бесконечный разрыв в правом конце интервала интегрирования) *преобразовался в собственный интеграл* от непрерывной функции и с конечным интервалом интегрирования, который вычислен обычным путем без применения предельного перехода.

Возможно и обратное. *При замене переменной собственный интеграл может перейти в несобственный.*

2) Согласно определению (1)

$$I=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln x\,dx}{x^3}=\lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_1^{\beta}\frac{\ln x\,dx}{x^3}.$$

К последнему интегралу применяем формулу интегрирования по частям $\int u\,dv=uv-\int v\,du$. Полагая $u=\ln x$, $dv=x^{-3}dx$, получим $du=\frac{dx}{x}$, $v=-\frac{1}{2x^2}$ и

$$\int\limits_1^{\beta}\frac{\ln x}{x^3}dx=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3}\Bigg|_1^{\beta}=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}\Bigg|_1^{\beta}=-\frac{\ln\beta}{2\beta^2}-\frac{1}{4\beta^2}+\frac{1}{4}.$$

Подставляя в предыдущее равенство, имеем:

$$I=\lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4\beta^2}-\frac{\ln\beta}{2\beta^2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\lim\frac{\ln\beta}{\beta^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\lim\left(\frac{1}{\beta}:2\beta\right)=\frac{1}{4}.$$

Здесь для нахождения предела последнего слагаемого применено правило Лопиталя.

Найти несобственные интегралы:

691. $\int\limits_{-\infty}^{1} e^t\,dt.$

692. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$

693. $\int\limits_{0}^{1} \ln x\,dx.$

694. $\int\limits_{2}^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}.$

695. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x\,dx.$

696. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}.$

697. $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$

698. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x\,dx}{x^2-1}.$

699. Найти площадь, заключенную между кривой $y=e^{-\frac{x}{3}}$ и осями координат (при $x\geqslant 0$).

700. Найти объем тела, образованного вращением кривой $y=\frac{x}{\sqrt{e^x}}$ (при $x\geqslant 0$) вокруг ее асимптоты.

§ 11. Приближенное вычисление определенных интегралов

Для приближенного вычисления определенных интегралов имеется несколько способов. Если функция $f(x)$ задана формулой или таблицей, то приближенное значение определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ можно найти следующим путем:

1) разделить интервал интегрирования $[a, b]$ точками $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ на n равных частей $h=\frac{b-a}{n}$;

2) вычислить значения подынтегральной функции $y=f(x)$ в точках деления $y_0=f(a)$, $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, $\ldots$, $y_{n-1}=f(x_{n-1})$, $y_n=f(b)$;

3) воспользоваться одной из приближенных формул.

Наиболее употребительны следующие приближенные формулы, основанные на геометрическом представлении определенного интеграла в виде площади криволинейной трапеции.

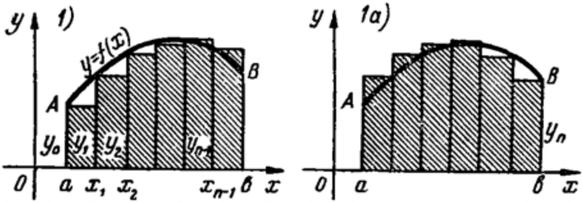
I. Формула прямоугольников

$$\int\limits_a^b y\,dx \approx h(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})=h\sum_{i=0}^{n-1} y_i \qquad (1)$$

или

$$\int\limits_a^b y\,dx \approx h(y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)=h\sum_{i=1}^{n} y_i. \qquad (1a)$$

Геометрически (черт. 132) по этой формуле площадь криволинейной трапеции $aABb$, которая соответствует интегралу $\int\limits_a^b y\,dx$, заменяется суммой площадей заштрихованных прямоугольников.



Черт. 132

Погрешность формулы прямоугольников

$$\delta(n) \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n}\, y'_{НБ},$$

где $y'_{НБ}$ — наибольшее значение $|y'|$ в интервале $[a,\ b]$.

II. Формула трапеций

$$\int\limits_a^b y\,dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)=h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right). \tag{2}$$

Геометрически (черт. 133) по этой формуле площадь криволинейной трапеции заменяется суммой площадей заштрихованных трапеций.

Погрешность формулы трапеций

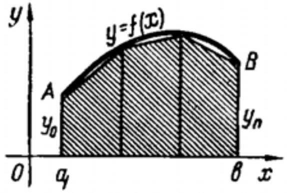
$$\delta(n) \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}\, y''_{НБ},$$

где $y''_{НБ}$ — наибольшее значение $|y''|$ в интервале $[a,\ b]$.

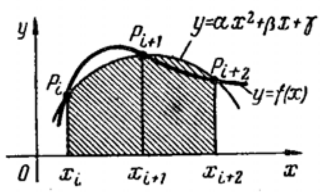
III. Формула параболических трапеций (Симпсона); n — число четное.

$$\int\limits_a^b y dx \approx \frac{h}{3}[y_0+y_n+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+$$
$$+2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})]. \tag{3}$$

Геометрически (черт. 134) по этой формуле площадь каждой пары вертикальных полосок $x_i P_i P_{i+2} x_{i+2}$ заменяется площадью одноименной параболической трапеции, получаемой при замене соответствующего участка кривой $y = f(x)$ дугой параболы $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (с вертикальной осью), проходящей через три точки кривой с абсциссами x_i, $x_{i+1} = x_i + h$ и $x_{i+2} = x_i + 2h$.



Черт. 133



Черт. 134

Погрешность формулы Симпсона

$$\delta(n) \leqslant \frac{(b-a)^5}{180n^4} y_{НБ}^{(4)},$$

где $y_{НБ}^{(4)}$ — наибольшее значение $|y^{(4)}|$ в интервале $[a, b]$.

Очевидно, все указанные приближенные формулы будут тем точнее, чем больше взято n, т. е. при достаточно большом значении n посредством каждой из этих формул можно вычислить приближенное значение определенного интеграла с любой желаемой точностью.

При одном и том же значении n обычно вторая формула точнее первой, а третья точнее второй.

701. Вычислить интеграл $\int\limits_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx$ по формуле Ньютона — Лейбница и по приближенным формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона, разбивая интервал интегрирования на 8 равных частей. Затем оценить в процентах погрешность результатов, полученных по приближенным формулам.

Решение. По формуле Ньютона — Лейбница

$$I = \int\limits_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx = \frac{1}{6}\int\limits_1^9 (6x-5)^{\frac{1}{2}}\,d(6x-5) = \frac{1}{9}(6x-5)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = 38.$$

Далее делим интервал интегрирования $[1; 9]$ на 8 равных частей, находим длину одной части $h = 1$, точки деления x_i, значения y_i подынтегральной функции $y = \sqrt{6x-5}$ в этих точках:

$$
\begin{array}{ll}
x_0 = 1 & y_0 = \sqrt{1} = 1{,}0000 \\
x_1 = 2 & y_1 = \sqrt{7} = 2{,}6458 \\
x_2 = 3 & y_2 = \sqrt{13} = 3{,}6056 \\
x_3 = 4 & y_3 = \sqrt{19} = 4{,}3589 \\
x_4 = 5 & y_4 = \sqrt{25} = 5{,}0000 \\
x_5 = 6 & y_5 = \sqrt{31} = 5{,}5678 \\
x_6 = 7 & y_6 = \sqrt{37} = 6{,}0828 \\
x_7 = 8 & y_7 = \sqrt{43} = 6{,}5574 \\
x_8 = 9 & y_8 = \sqrt{49} = 7{,}0000
\end{array}
$$

и вычисляем интеграл по приближенным формулам.

По формуле прямоугольников (1) $I \approx \sum_{i=0}^{7} y_i = 34{,}8183$.

Абсолютная ошибка этого приближенного значения (по недостатку) равна $38 - 34{,}8183 = 3{,}1817$, а относительная (процентная) ошибка равна $\frac{3{,}1817 \cdot 100}{38} \approx 8{,}37\%$.

По формуле прямоугольников (1a) $I \approx \sum_{i=1}^{8} y_i = 40{,}8183$.

Здесь абсолютная ошибка (по избытку) равна 2,8183, а относительная $\frac{2{,}8183 \cdot 100}{38} \approx 7{,}42\%$.

По формуле трапеций $I \approx 4 + \sum_{i=1}^{7} y_i = 37{,}8183$.
Абсолютная ошибка этого результата составляет 0,1817, а относительная $\frac{0{,}1817 \cdot 100}{38} \approx 0{,}48\%$.

По формуле Симпсона

$$I \approx \frac{1}{3}(8 + 4 \cdot 19{,}1299 + 2 \cdot 14{,}6884) \approx 37{,}9655.$$

Абсолютная ошибка составляет всего 0,0345, а относительная $\frac{0{,}0345 \cdot 100}{38} \approx 0{,}09\%$.

702. По формуле Симпсона вычислить приближенное значение интеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$ с точностью до 0,00001.

Р е ш е н и е. Вначале определим, на какое число n частей следует разделить интервал интегрирования $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, чтобы получить заданную точность вычисления.

Полагая погрешность $\delta(n)$ формулы Симпсона меньше 10^{-5}, имеем

$$\frac{(b-a)^5}{180\,n^4}\,y_{НБ}^{(4)} < 10^{-5}.$$

Подставляя $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$, $y_{НБ}^{(4)}=1$ $\left(\text{наибольшее значение } |y^{(4)}| = |\cos x| \text{ в интервале } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, получим

$$\frac{\pi^5}{2^5\,180\,n^4} < 10^{-5}; \quad n > 5\pi\sqrt[4]{\frac{\pi}{36}} = 8{,}5.$$

Далее, полагая $n=10$ (ближайшее четное число, большее 8,5) определяем точки деления x_i и соответствующие им значения y_i подынтегральной функции $y=\cos x$ (с одним лишним десятичным знаком, $\pi \approx 3{,}141592$):

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0{,}000000 & y_0 &= 1{,}000000\\
x_1 &= 0{,}157080 & y_1 &= 0{,}987688\\
x_2 &= 0{,}314159 & y_2 &= 0{,}951057\\
x_3 &= 0{,}471239 & y_3 &= 0{,}891007\\
x_4 &= 0{,}628318 & y_4 &= 0{,}809017\\
x_5 &= 0{,}785398 & y_5 &= 0{,}707107\\
x_6 &= 0{,}942478 & y_6 &= 0{,}587785\\
x_7 &= 1{,}099557 & y_7 &= 0{,}453991\\
x_8 &= 1{,}256637 & y_8 &= 0{,}309017\\
x_9 &= 1{,}413716 & y_9 &= 0{,}156435\\
x_{10} &= 1{,}570796 & y_{10} &= 0{,}000000
\end{aligned}$$

Подставляя в формулу Симпсона, получим искомое значение интеграла с точностью до 10^{-5}:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx \approx 0{,}0523599\,(1 + 4\cdot 3{,}196228 + 2\cdot 2{,}656876) \approx 1{,}00000.$$

В решении этой задачи показано, что для вычисления интеграла с заданной точностью, когда известно аналитическое выражение интегрируемой функции, можно, исходя из указанных неравенств для оценки погрешности приближенных формул, заранее определить необходимое число делений интервала интегрирования, которое бы обеспечило заданную точность.

Однако во многих случаях аналитическое выражение интегрируемой функции таково, что трудно найти наибольшее значение во всем интервале интегрирования для производных первого, второго или четвертого порядков, которые содержатся в неравенствах, определяющих погрешности формул прямоугольников, трапеций или Симпсона. Поэтому в вычислительной практике вместо указанных неравенств для оценки погрешности приближенного вычисления интегралов часто применяют другие критерии, с которыми можно ознакомиться в специальных пособиях по приближенным вычислениям.

703. Следующие интегралы вычислить по формуле Ньютона — Лейбница и по приближенным формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона, разбивая интервал интегрирования на 10 равных частей. Затем оценить в процентах погрешность результатов, полученных по приближенным формулам. (Все вычисления делать с четырьмя десятичными знаками.)

$$1) \int_1^2 \frac{dx}{x}; \qquad 2) \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}.$$

704*. На сколько частей следует разделить интервал интегрирования интеграла $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, чтобы вычислить его с точностью до 10^{-2} по приближенным формулам: 1) прямоугольников, 2) трапеций и 3) Симпсона.

705. По формуле Симпсона вычислить интегралы $\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}$ и $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x^2)\,dx$, разделив интервал интегрирования на 10 равных частей.*

706*. Найти длину дуги эллипса $x = 10\cos t$, $y = 6\sin t$, применив к интегралу, определяющему четверть всей дуги, формулу Симпсона.*

---

* Все вычисления выполнять с тремя десятичными знаками.

гается на множители: $x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+1+x\sqrt{2})(x^2+1-x\sqrt{2})$. 531. $6\sqrt[6]{x}-6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}$. 532. $0{,}4(x^2-x-6)\sqrt{3-x}$. 533. $-2\sqrt{\frac{x-2}{x}}-\ln\left[|x|\left(1-\sqrt{\frac{x-2}{x}}\right)^2\right]$. 534. $\frac{x}{5\sqrt{5-x^2}}$. 535. $\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. 536. $2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{4}(x^2-2)\times\sqrt{4-x^2}$. 537. $\pm\frac{1}{3}\arccos\frac{3}{x}$; $+$ при $x>0$, $-$ при $x<0$.

538. $-\frac{1}{5}x^{-5}(2x^3+1)^{\frac{5}{3}}$. 539. $\frac{1}{3}\ln\frac{|1-\sqrt{1-x^3}|}{1+\sqrt{1-x^3}}$. 540. $\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2+2x+3}$. 541. $\frac{x+5}{2}\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{7}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$. 542. $\frac{3a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{a}-\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2}$. 544. $x-\mathrm{tg}\frac{x}{2}$. 545. $\frac{1}{k}\left|\mathrm{tg}\frac{kx}{2}\right|$. 546. $\frac{1}{2}\left(\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)$. 547. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1+2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{2-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right|$. 548. $\frac{1}{12}\mathrm{tg}^4 3x-\frac{1}{6}\mathrm{tg}^2 3x-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x|$.

549. $\frac{1}{2}(x+\ln|\sin x+\cos x|)$. 550. $\frac{1}{2}\ln(e^{2t}+1)-2\,\mathrm{arctg}\,e^t$.

551. $2\ln(e^x+1)-x$. 552. $\frac{1}{2}(\mathrm{tg}\,x+\ln|\mathrm{tg}\,x|)$. 553. $\ln(e^x+1)+\frac{18e^{2x}+27e^x+11}{6(e^x+1)^3}$. 554. $\frac{2}{3a}[\sqrt{(x+a)^3}-\sqrt{x^3}]$. 555. $\frac{x^2}{4}+\frac{\cos 2x}{8}+\frac{x\sin 2x}{4}$. 556. $\frac{x^2-2}{3}\sqrt{x^2+1}$. 557. $\frac{1}{3}\ln[(e^x+2)^4|e^x-1|^5]$. 558. $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}(3\,\mathrm{tg}\,z)$. 559. $\frac{x^2}{2}+x+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\mathrm{arctg}\,x$. 560. $\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$. 561. $6\sqrt[3]{(x+1)^2}\times\left(\frac{5x^2-6x+9}{80}+\frac{\sqrt{x+1}}{7}\right)$. 562. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$. 563. $4\sqrt{1+\sqrt{r}}$. 564. $\mathrm{cosec}\,t-\frac{1}{3}\mathrm{cosec}^3 t$. 565. $\frac{x(3-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{2}\arcsin x$. 566. $\sqrt{x^2+10x}-10\ln|x+5+\sqrt{x^2+10x}|$. 567. $(x^2-x+2)e^x$. 568. $x(\ln^2 x-4\ln x+5)$. 569. $2\sec x$. 570. $\frac{\sqrt{(x^2-7)^3}}{21x^3}$. 571. $\frac{6x^2+6x+1}{12\sqrt{(4x+1)^3}}$. 572. $(v+1)\,\mathrm{arctg}\sqrt{v}-\sqrt{v}$. 573. $\frac{1-2x}{4(2x+3)^3}$. 574. $2(x+2)\sqrt{3x^2+3x+4}$. 575. $\ln\frac{|x|}{x+1}-\frac{\ln(1+x)}{x}$. 576. $x^2+\frac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}$. 577. $\frac{1}{25}(4x+3\ln|4\cos x+3\sin x|)$. 578. $\frac{x}{2}(x+\sqrt{x^2-1})-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$. 579. $\frac{1}{4}[x\sqrt{1-x^2}+(2x^2-1)\times\arcsin x]$. 580. $\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{\mathrm{arctg}\,x}{x}$. 581. $-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. 583. $\frac{\ln 13}{3}$.

584. $\frac{2}{9}$. 585. $\frac{1}{3}\ln\frac{5}{4}$. 586. $\frac{3\pi}{8}+\frac{\ln 2}{2}$. 587. 0. 588. 0. 589. $-\frac{\pi}{2}$. 590. $2e-1$.

593. $\frac{1}{24}$. **594.** $\frac{4-\pi}{2}$. **595.** 3. **596.** $0{,}8\,(2\sqrt[4]{2}-1)$. **597.** $\frac{81\pi}{8}$. **598.** $-\frac{17}{6}$. **599.** $\ln 2$. **600.** $\ln\frac{4}{3}$. **601.** $1{,}5\,(\ln 4-1)$. **602.** $\frac{3(\pi-2)}{2}$ (подстановка $x=6\sin^2 t$). **603.** $\frac{8}{21}$. **605.** 36. **606.** $\frac{24}{5}\sqrt[3]{2}$. **607.** $\frac{3\pi a^2}{8}$. **608.** $3\pi a^2$. **609.** $\frac{125}{6}$. **610.** $\frac{a^2(e^2-1)}{2e}$. **611.** 6,76. **612.** 1,5. **613.** 0,95. **614.** a^2. **615.** $\frac{4}{3}a^2\pi^3$. **616.** $\frac{1}{4}\pi a^2$. **617.** $2a^2\left(\frac{5\pi}{8}-1\right)$. **618.** $4ab\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ (перейти к полярным координатам). **622.** $\frac{1}{2}abk^2\pi$. **623.** $\frac{2}{3}ab^2$. **624.** $\frac{16a}{3}$. **626.** $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. **627.** π^2. **628.** $34\frac{2}{15}\pi$. **629.** 12π. **630.** $\frac{2048\pi}{35}$. **631.** $\frac{128\pi}{3}$. **632.** $\frac{\pi a^3}{15}$. **633.** $2\pi^2a^2b$. **634.** $5a^3\pi^2$. **637.** $\frac{28}{3}$. **638.** $6a$. **639.** $\frac{a}{2}(e-e^{-1})$. **640.** $\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. **641.** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **642.** $8a$. **643.** $\pi a\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1})$. **644.** $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$. **645.** $10\left(\frac{67}{27}+\sqrt{5}\right)$; $p\,[2+\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. **649.** $\frac{14\pi}{3}$. **650.** $\frac{64}{3}\pi a^2$. **651.** $4\pi\,[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. **652.** $29{,}6\pi$. **653.** $2\pi(4+3\ln 3)$. **654.** $4ab\pi^2$. **669.** $256T$; $\frac{256}{3}T$; $170\frac{2}{3}T$. **670.** 244,8 *кГ*. **671.** 4000π *кГм*. **672.** 1134 *кГм*; 1430 *кГм*; 1661 *кГм*. **673.** 919 *кГм*; 1099 *кГм*; 1226 *кГм*. **674.** 750π *кГм*. **675.** $\frac{1}{2}\delta^2c^2ab=23{,}04$ *кГм*. **676.** 0,24 *кГм*. **677.** $a\sqrt{R^3}$; $a\sqrt{R^3}\,(2\sqrt{2}-1)$, где $a=\frac{H\sqrt{2}}{0{,}9S\sqrt{g}}$. **678.** $0{,}4ah\sqrt{2gh}$. **679.** $\frac{k\pi H^4\operatorname{tg}^2\alpha}{4}$. **683.** $\left(0,\ -\frac{2a}{\pi}\right)$. **684.** $\left(0,\ \frac{4a}{3\pi}\right)$. **685.** $\left(\frac{4a}{3\pi},\ \frac{4b}{3\pi}\right)$. **686.** (9; 9). **687.** $\left(\frac{2a}{5},\ 0\right)$. **688.** $\left(\frac{5a}{8},\ \frac{15\pi a}{256}\right)$. **691.** e. **692.** π. **693.** -1. **694.** $\frac{2}{3}\sqrt[4]{125}$. **695.** -1. **696.** Расходится. **697.** $6\sqrt[3]{2}$. **698.** Расходится. **699.** 3. **700.** 2π. **703.** 1) $\ln 2\approx 0{,}6931$; 0,7188; 0,6688; 0,6938; 0,6932; 2) $\frac{\pi}{4}\approx 0{,}7854$; 0,8100; 0,7600; 0,7850; 0,7854. **704.** $n_1>100$; $n_2>4$; $n_3>1$. **705.** 1,118; 0,157. **706.** 34,008. **710.** 0; 5; 0; $\frac{5}{4}$. **713.** 1) Вся числовая плоскость; 2) точки, лежащие внутри эллипса $x^2+2y^2=2$ и на этом эллипсе; 3) вся плоскость xOy, кроме прямых $y=\pm x$; 4) $x\geqslant 0$, $y>0$ — первый квадрант плоскости xOy; 5) $y>x$, $y>0$, $x\neq 0$ — второй квадрант и точки, лежащие выше биссектрисы первого координатного угла плоскости xOy; 6) круг $x^2+y^2\leqslant 1$. **716.** $\frac{1}{2a}$; 1; не существует. **717.** Одна точка разрыва (1; -1); линия разрыва — прямая $y=2x$, линия разрыва — гипербола $x^2-2y^2=4$. **721.** $z'_x=$